UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Curso de Mestrado em Matemática Aplicada

Existência de minimizantes
para
integrais não-convexos e não-coercivos

Dissertação submetida ao Departamento de Matemática da Universidade de Évora para atribuição do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador:

Professor Doutor António Ornelas

Maria Clara da Palma Carlota

ÉVORA
1999

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Curso de Mestrado em Matemática Aplicada

Existência de minimizantes para integrais não-convexos e não-coercivos

Dissertação submetida ao Departamento de Matemática da Universidade de Évora para atribuição do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador:

Professor Doutor António Ornelas

Maria Clara da Palma Carlota

ÉVORA
1999

A autora foi suportada financeiramente por uma bolsa da JNICT para Mestrado durante parte do tempo em que trabalhou para esta dissertação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor António Ornelas, por ter aceite orientar esta dissertação, pelas suas sugestões e críticas, e por todo o apoio prestado durante a elaboração da mesma.

Agradeço aos meus pais, ao meu filho Henrique e ao meu marido Manuel, por todo o apoio, compreensão e paciência, por me incentivarem e encorajarem.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Consideremos o problema "básico" do Cálculo das Variações:

$$\min\left\{\int_0^T L\left(t,u\left(t\right),u'\left(t\right)\right)dt : u\in W^{1,p}\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}^m\right), u\left(0\right)=a, u\left(T\right)=b\right\}. \tag{1.1}$$

É bem conhecido o facto de que este problema tem solução desde que a função $L:[0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ seja contínua, com $\xi\mapsto L(t,x,\xi)$ convexa e coerciva. Coerciva significa que para cada $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^m$,

$$L(t,x,\xi)\geq\psi(|\xi|),\ \forall\xi\in\mathbb{R}^m,$$

com $\psi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ superlinear, ou seja,

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\psi(s)}{s}=+\infty.$$

A demonstração desta afirmação é, basicamente, a seguinte: provamos

1) a semicontinuidade inferior do funcional $\Lambda(u)\doteq\int_0^T L(t,u(t),u'(t))\,dt$ na topologia fraca de $W^{1,p}([0,T],\mathbb{R}^m)$;

e a

2) relativa compacidade das sucessões minimizantes na topologia fraca de $W^{1,p}([0,T],\mathbb{R}^m)$;

depois extraimos de qualquer sucessão minimizante um subsucessão convergente, e mostramos que o limite é solução do problema. Este é o denominado Método Directo do Cálculo das Variações.

As hipóteses do Método Directo, apesar de serem suficientes, não são necessárias.

Exemplo 1.0.1 *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente e seja f^{**} a sua bipolar, isto é, a maior função convexa minorante de f. Suponhamos que o gráfico de f^{**} não contém nenhuma semi-recta. Então o funcional*

$$\Lambda(u)=\int_a^b f(u'(t))\,dt$$

admite um minimizante na classe de todas as funções lipschitzianas $u(\cdot)$ definidas em $[a,b]$ e tais que $u(a)=A$, $u(b)=B$.

De facto, pela desigualdade de Jensen, podemos escrever

$$f^{**}\left(\frac{B-A}{b-a}\right)=f^{**}\left(\frac{1}{b-a}\left(u(b)-u(a)\right)\right)=f^{**}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(t)\,dt\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{**}(u'(t))\,dt,$$

donde resulta, fazendo $\xi_0\doteq\frac{B-A}{b-a}$, que

$$\int_a^b f^{**}(u'(t))\,dt\geq(b-a)\,f^{**}(\xi_0), \tag{1.2}$$

para qualquer função $u \in W^{1,\infty}([a,b],\mathbb{R})$ *tal que* $u(a) = A$, $u(b) = B$.

Seja $\overline{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\overline{u}(x) \doteq \xi_0 (x-a) + A.$$

Então, evidentemente, $\overline{u} \in W^{1,\infty}([a,b],\mathbb{R})$ *e* $\overline{u}(a) = A$, $\overline{u}(b) = B$, *pelo que* $\overline{u}$ *é uma função admissível para o problema relaxado*

$$\min\left\{\overline{\Lambda}(u) = \int_a^b f^{**}(u'(t))\,dt : u \in W^{1,\infty}([a,b],\mathbb{R}), u(a) = A, u(b) = B\right\}.$$

Por outro lado, dado que

$$\overline{\Lambda}(\overline{u}) = \int_a^b f^{**}(\overline{u}'(t))\,dt = \int_a^b f^{**}(\xi_0)\,dt = (b-a) f^{**}(\xi_0), \tag{1.3}$$

por (1.2), podemos escrever

$$\overline{\Lambda}(\overline{u}) = \min\left\{\int_a^b f^{**}(u'(t))\,dt : u \in W^{1,\infty}([a,b],\mathbb{R}), u(a) = A, u(b) = B\right\}.$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$, *temos*

$$f(\xi) \geq f^{**}(\xi).$$

Suponhamos então que

$$f(\xi_0) = f^{**}(\xi_0).$$

Temos, por um lado,

$$\int_a^b f(u'(t))\,dt \geq \int_a^b f^{**}(u'(t))\,dt \geq \int_a^b f^{**}(\overline{u}'(t))\,dt = (b-a) f^{**}(\xi_0),$$

para qualquer função $u \in W^{1,\infty}([a,b],\mathbb{R})$ *tal que* $u(a) = A$, $u(b) = B$, *e, por outro,*

$$\int_a^b f(\overline{u}'(t))\,dt = \int_a^b f(\xi_0)\,dt = \int_a^b f^{**}(\xi_0)\,dt = (b-a) f^{**}(\xi_0).$$

Assim, neste caso, $\overline{u}$ *é também um minimizante para* $\Lambda(\cdot)$.

Suponhamos agora que

$$f(\xi_0) > f^{**}(\xi_0).$$

Por definição de f^{**}, *e dado que o seu gráfico não contém semi-rectas, podemos afirmar que existe um intervalo* $[\xi_1, \xi_2]$ *contendo* ξ_0, *tal que*

$$f(\xi_1) = f^{**}(\xi_1), \quad f(\xi_2) = f^{**}(\xi_2) \tag{1.4}$$

e f^{**} *é afim (isto é, o seu gráfico é um segmento de recta) em tal intervalo.*

Seja $\widetilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{u}(t) \doteq A + \int_a^t \alpha(s)\,ds$$

onde $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é a função definida por*

$$\alpha(s) \doteq \begin{cases} \xi_1, & se\ a \leq s \leq a + (b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2} \\ \xi_2, & se\ a + (b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2} \leq s \leq b. \end{cases}$$

Temos

$$\widetilde{u}(a) = A + \int_a^a \alpha(s)\,ds = A$$

e

$$\widetilde{u}(b) = A + \int_a^b \alpha(s)\,ds = A + \int_a^{a+(b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}} \xi_1 ds + \int_{a+(b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}}^b \xi_2 ds = B.$$

Além disso, $\widetilde{u}$ é lipschitziana. De facto,

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}(t_1)-\widetilde{u}(t_2)| &= \left|A+\int_a^{t_1}\alpha(s)\,ds-A-\int_a^{t_2}\alpha(s)\,ds\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2}\alpha(s)\,ds\right| \le \int_{t_1}^{t_2}|\alpha(s)|\,ds \le \\ &\le |t_2-t_1|\max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}, \quad \forall t_1,t_2\in[a,b]. \end{aligned}$$

Por (1.4), temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\widetilde{u}'(t))\,dt &= \int_a^b f(\alpha(t))\,dt = \\ &= \int_a^{a+(b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}} f(\xi_1)\,dt + \int_{a+(b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}}^b f(\xi_2)\,dt = \qquad (1.5)\\ &= \int_a^{a+(b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}} f^{**}(\xi_1)\,dt + \int_{a+(b-a)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}}^b f^{**}(\xi_2)\,dt = \\ &= (b-a)\left(f^{**}(\xi_1)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}+f^{**}(\xi_2)\left(1-\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}\right)\right). \qquad (1.6) \end{aligned}$$

Por outro lado, como f^{**} é afim em $[\xi_1,\xi_2]$, para cada $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$, f^{**} tem a forma

$$f^{**}(\xi) = g(\xi)+\beta,$$

onde g é uma função linear e β é uma constante real.
Assim, temos

$$\begin{aligned} f^{**}(\xi_1)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}+f^{**}(\xi_2)\left(1-\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}\right) &= \\ &= (g(\xi_1)+\beta)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}+(g(\xi_2)+\beta)\left(1-\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}\right) = \\ &= g(\xi_1)\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}+g(\xi_2)\left(1-\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}\right)+\beta = \\ &= g\left(\xi_1\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}+\xi_2\left(1-\frac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1-\xi_2}\right)\right)+\beta = \\ &= g(\xi_0)+\beta = \\ &= f^{**}(\xi_0) \end{aligned}$$

e então, por (1.6) e (1.3),

$$\int_a^b f(\widetilde{u}'(t))\,dt = (b-a)f^{**}(\xi_0) = \int_a^b f^{**}(\overline{u}'(t))\,dt$$

Concluimos então que, para qualquer função $u\in W^{1,\infty}([a,b],\mathbb{R})$ tal que $u(a)=A$, $u(b)=B$, é

$$\int_a^b f(u'(t))\,dt \ge \int_a^b f^{**}(u'(t))\,dt \ge \int_a^b f^{**}(\overline{u}'(t))\,dt = (b-a)f^{**}(\xi_0)$$

e

$$\int_a^b f(\widetilde{u}'(t))\,dt = (b-a)f^{**}(\xi_0).$$

donde $\widetilde{u}$ um minimizante para $\Lambda(\cdot)$.

Por causa de exemplos como este, nos últimos anos muitos autores investigaram a possibilidade de eliminar as hipóteses de convexidade e/ou superlinearidade.

Alguns resultados para problemas coercivos não-convexos foram obtidos no caso de $L(t,x,\xi) = f(t,\xi)+g(t,x)$.

Por exemplo, em [34] mostra-se a existência de um minimizante para o funcional

$$\Lambda(u) = \int_0^T [f(u'(t))+\varphi(t)\,g(u(t))]\,dt,$$

na classe das funções $u \in W^{1,p}([0,T],\mathbb{R})$, $p > 1$, verificando $u(0) = a$, $u(T) = b$, sempre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferiormente, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua seccionalmente monótona (isto é, g é monótona em (s_i, s_{i+1}), $s_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $i \in \mathbb{Z}$), $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável seccionalmente com sinal constante (isto é, φ tem sinal constante em (x_i, x_{i+1}), $x_i \in [a,b]$, $i \in \mathbb{Z}$), e f e $(t,x) \mapsto \varphi(t)\, g(x)$ satisfazem condições adequadas de crescimento.

Um tal minimizante é obtido, por construção pontual, a partir de uma solução do problema relaxado

$$\min\left\{\int_0^T [f^{**}(u'(t)) + \varphi(t)\, g(u(t))]\, dt : u \in W^{1,p}([0,T],\mathbb{R}), p > 1, u(0) = a, u(T) = b\right\}.$$

Em [11] mostra-se que a condição de convexidade da função $f(t,\cdot)$ pode ser substituida pela condição de concavidade da função $g(t,\cdot)$. Mais precisamente, mostra-se a existência de solução para o problema

$$\min\left\{\begin{array}{rl} \int_0^T [f(t,u'(t)) + g(t,u(t))]\, dt : & u \in W^{1,p}([0,T],\mathbb{R}^m), p \geq 1, \\ & u(0) = a, u(T) = b, \\ & u'(t) \in \Phi(t) \text{ quase sempre em } [0,T] \end{array}\right\}$$

onde $\Phi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ é uma multifunção mensurável com valores fechados não-vazios, admitindo uma selecção integrável $v(\cdot)$ verificando $\int_0^T v(t)\, dt = b - a$; as funções $[0,T] \times \mathbb{R}^m \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ e $[0,T] \times \mathbb{R}^m \ni (t,x) \mapsto g(t,x) \in \mathbb{R}$ são funções de Carathéodory (isto é, mensuráveis em t, para cada x, e contínuas em x, para quase todo o t), satisfazendo condições adequadas de crescimento e a função $g(t,\cdot)$ é, para quase todo o t, uma função côncava.

A demonstração deste resultado divide-se em duas partes. Em primeiro lugar, prova-se que o problema (equivalente ao original)

$$\min\left\{\begin{array}{rl} \int_0^T [f_\Phi^{**}(t,u'(t)) + g(t,u(t))]\, dt : & u \in W^{1,p}([0,T],\mathbb{R}^m), p \geq 1, \\ & u(0) = a, u(T) = b \end{array}\right\}$$

admite uma solução $\widetilde{u}$, onde f_Φ^{**} denota a função bipolar da função com penalização

$$f_\Phi(t,x) \doteq \begin{cases} +\infty & \text{se } x \notin \Phi(t) \\ f(t,x) & \text{se } x \in \Phi(t) \end{cases}.$$

Em seguida constrói-se, a partir de $\widetilde{u}$, uma função que será solução do problema original.

Os principais resultados envolvidos nesta demonstração são a representação de Carathéodory para a bipolar, um resultado de existência de uma selecção integrável da multifunção $[0,T] \ni t \mapsto -\partial_x(-g(t,\widetilde{u}(t)))$, e o teorema de Liapunov, sobre a imagem de medidas vectoriais não-atómicas, apresentado em [14] (§16).

Em [12] mostra-se que o problema

$$\min\left\{\begin{array}{rl} \int_0^T [f(u'(t)) + g(u(t))]\, dt : & u \in W^{1,p}([0,T],\mathbb{R}), p \geq 1, \\ & u(0) = a, u(T) = b \end{array}\right\}$$

admite solução sempre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferiormente satisfazendo as hipóteses usuais de crescimento e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada inferiormente seccionalmente afim e tal que, em dois intervalos consecutivos, g é constante em pelo menos um deles.

Em [35] mostra-se que o resultado obtido em [12] pode ser melhorado, no sentido em que a classe das funções g para as quais o problema

$$\min\left\{\begin{array}{rl} \int_0^T [f(u'(t)) + g(u(t))]\, dt : & u \in W^{1,p}([0,T],\mathbb{R}), p \geq 1, \\ & u(0) = a, u(T) = b \end{array}\right\}$$

admite solução, sempre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferiormente satisfazendo as hipóteses usuais de crescimento, inclui a classe das funções monótonas-côncavas, isto é funções que são seccionalmente e alternadamente, monótonas semicontínuas inferiormente e côncavas contínuas.

Relativamente à existência de solução para problemas convexos não-coercivos, caso em o Método Directo não pode ser aplicado devido à falta de compacidade das sucessões minimizantes (apesar de os funcionais considerados serem semicontínuos inferiormente), podemos referir os resultados obtidos em [16] e [13].

Em [16] mostra-se a existência de solução para o problema

$$\min\left\{\int_0^T L(t,u(t),u'(t))\,dt : u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m),\, u(0)=a, u(T)=b\right\}$$

com L contínua, limitada inferiormente, e convexa com respeito a ξ. A coercividade é substituída por uma condição mais fraca que permite construir uma sucessão relativamente compacta, obtida considerando minimizantes de problemas coercivos aproximantes adequados. O passo principal da demonstração, é mostrar que qualquer minimizante dos problemas aproximantes satisfaz uma condição de DuBois-Reymond generalizada, o que implica que a sucessão minimizante é limitada em $W^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Um raciocínio semelhante é usado em [13] para o estudo do problema autónomo

$$\min\left\{\int_0^T [g(u(t))+f(u'(t))]\,dt : u\in AC,\ u(0)=a,\ u(T)=b\right\}. \tag{1.7}$$

Mostra-se que existe uma classe $\mathcal{G}$ de funções convexas satisfazendo uma condição de crescimento estritamente mais fraca do que a superlinearidade, tal que, sempre que $f\in\mathcal{G}$, o problema (1.7) admite solução, qualquer que seja a função g contínua e não-negativa.

A classe $\mathcal{G}$ considerada consiste em todas as funções estritamente convexas $f\in C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ satisfazendo a condição

$$\lim_{|\xi|\to\infty}[f(\xi)-\langle\xi,\nabla f(\xi)\rangle]=-\infty. \tag{1.8}$$

Prova-se que, para qualquer curva rectificável c em $\mathbb{R}^m$ unindo os pontos $(0,a)$ e (T,b), existe uma única solução do problema (1.7) restringido à classe de todas as parametrizações absolutamente contínuas $u:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ de c. Daqui resulta que cada elemento u_n de uma sucessão minimizante pode ser substituído pelo ponto de mínimo correspondente à curva parametrizada por u_n. Usando (1.8) e uma condição de Dubois-Reymond satisfeita por esses pontos de mínimo, mostra-se que a nova sucessão é limitada inferiormente em $W^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^m)$ e consequentemente existe uma solução para o problema (1.7) neste espaço de funções.

Nesta dissertação considera-se o problema

$$\min\left\{\int_0^T [f(t,u'(t))+g(t,u(t))]\,dt : u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m),\, u(0)=a, u(T)=b\right\}$$

sem hipótese de convexidade e com uma condição de crescimento não-coercivo.

Depois do capítulo 2, onde se expõem definições e resultados preliminares, estuda-se, detalhadamente, no capítulo 3, o artigo [21], onde se considera o problema "linear autónomo"

$$\min\left\{\int_0^T [f(u'(t))+g(t,u(t))]\,dt : u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m),\, u(0)=a, u(T)=b\right\},$$

sendo f é uma função semicontínua inferiormente, cuja bipolar f^{**} satisfaz a condição

$$\lim_{n\to\infty}[f^{**}(\xi_n)-\langle\xi_n,\nabla f^{**}(\xi_n)\rangle]=-\infty,$$

para qualquer sucessão $(\xi_n)\subset\mathbb{R}^m$ de pontos de diferenciabilidade de f^{**} tal que $(|\xi_n|)\to\infty$, e $g(t,x)=\langle A(t),x\rangle$, com $A:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ contínua.

A técnica utilizada para mostrar a existência de solução é completamente diferente da usada em [13], e baseia-se num resultado de existência devido a Olech, o qual resulta ser um corolário de uma generalização do teorema de Liapunov.

Os capítulos 4 e 5 são dedicados ao estudo do artigo [22], que trata do problema não-autónomo

$$\min\left\{\int_0^T [f(t,u'(t))+g(t,u(t))]\,dt : u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m),\, u(0)=a, u(T)=b\right\}. \tag{1.9}$$

Nele, considera-se a classe $\mathcal{E}$, de todas as funções $\psi : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitadas inferiormente, tais que $\psi(\cdot, \xi)$ é uma função lipschitziana para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, $\psi(t, \cdot)$ é uma função semicontínua inferiormente para cada $t \in I$ fixado e

$$\lim_{n\to\infty} \left[\psi^{**}(t^n, \xi^n) - \langle \nabla\psi^{**}(t^n, \xi^n), \xi^n\rangle\right] = -\infty,$$

para qualquer sucessão $(t^n) \subset [0, T]$ e para qualquer escolha de pontos ξ^n de diferenciabilidade de $\psi^{**}(t^n, \cdot)$ tais que $(|\xi^n|) \to \infty$.

Mostra-se que se $f \in \mathcal{E}$ verifica $f(t, \xi) \geq -A + B|\xi|$ para cada $(t, \xi) \in I \times \mathbb{R}^m$, sendo A e B constantes com $B > 0$, e se g é uma função lipschitziana com respeito à primeira variável e côncava relativamente à segunda, satisfazendo $g(t, x) \geq -\alpha - \beta|x|$ para cada $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^m$, onde α e β são constantes adequadas com $0 < \beta < \frac{B}{T}$, então o problema (1.9) admite solução lipschitziana.

Este resultado é análogo ao obtido em [11], mas não é uma generalização deste, devido ao facto de se fazer a hipótese adicional de a função integranda satisfazer, com respeito a t, uma condição de Lipschitz.

Num primeiro passo, exposto no capítulo 4, pede-se também que f seja uma função convexa com respeito a ξ, elimina-se a hipótese da concavidade de g, e mostra-se que nestas condições o problema (1.9) admite solução lipschitziana. A demonstração é muito semelhante à demonstração do resultado de existência em [16], com alterações devidas ao facto de a função integranda não ser limitada inferiormente.

O segundo passo, exposto no capítulo 5, consiste, basicamente, em mostrar um resultado relativo ao fecho do invólucro convexo do epigráfico de funções cuja bipolar é estritamente convexa no infinito (isto é, o seu gráfico não contém semi-rectas), uma generalização de um resultado conhecido para funções superlineares, e que servirá para fazer a ligação entre o caso convexo e o caso não-convexo; depois basta seguir a demonstração do resultado de existência em [11]. A regularidade da solução de (1.9) é uma consequência da regularidade da solução do problema relaxado.

Capítulo 2

Definições e resultados básicos

2.1 Introdução

Neste capítulo preliminar enunciaremos algumas definições e resultados (sem demonstração) que são supostos conhecidos no restante texto.

2.2 Espaços topológicos

Definição 2.2.1 *Um **espaço topológico** é um conjunto X relativamente ao qual se fixa uma colecção τ de subconjuntos (ditos conjuntos **abertos**) com as seguintes propriedades:*

(i) *X é aberto;*

(ii) *$\emptyset$ é aberto;*

(iii) *a intersecção de um número finito de abertos é um aberto;*

(iv) *a união de qualquer colecção de abertos é um aberto.*

*Uma tal colecção τ diz-se uma **topologia** em X.*

Definição 2.2.2 *Se τ e τ_1 são duas topologias em X, dizemos que τ é **mais forte** do que τ_1 (ou que τ_1 é **mais fraca** que τ) se $\tau_1 \subset \tau$.*

Definição 2.2.3 *Sejam X um conjunto e τ uma topologia em X.*

(i) *Um conjunto $E \subset X$ diz-se **fechado** se o seu complementar (relativamente a X),*

$$X \backslash E \doteq \{x \in X : x \notin E\}$$

é aberto em X.

(ii) *O **fecho** $\overline{E}$ de E é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm E.*

(iii) *O **interior** de E, $int(E)$, é a união de todos os conjuntos abertos que são subconjuntos de E; um ponto $p \in int(E)$ diz-se um **ponto interior** de E.*

(iv) *O conjunto ∂E, dos pontos em $\overline{E}$ que não pertencem ao interior de E, diz-se a **fronteira** de E.*

(v) *Uma **vizinhança de um ponto** $p \in X$ é um subconjunto de X contendo um aberto contendo p.*

(vi) *Uma **vizinhança de um conjunto** $A \subset X$ é um conjunto contendo um aberto contendo A.*

Definição 2.2.4 *Uma família β de subconjuntos de X diz-se uma **base** para a topologia τ se cada conjunto em τ é a união de alguma subfamília de β.*

*Se β é uma colecção de vizinhanças de um conjunto $A \subset X$ e qualquer vizinhança de A contém um conjunto em β, dizemos que β é um **sistema** (ou uma **família**) **fundamental de vizinhanças** para A.*

Definição 2.2.5 *Seja X um espaço de topológico. Dizemos que uma sucessão (x_k)* ***converge*** *para um ponto $x \in X$, e escrevemos*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad ou \quad (x_k) \to x,$$

se qualquer vizinhança de x contém todos os pontos x_k, excepto um número finito.

Uma sucessão $(x_k) \subset X$ diz-se ***convergente*** *em X se $(x_k) \to x$, para algum $x \in X$.*

Definição 2.2.6 *Sejam X um espaço topológico e D um subconjunto de X. Dizemos que D é* ***denso*** *em X se $\overline{D} = X$.*

Proposição 2.2.7 *Um conjunto num espaço topológico é aberto se e só se contém uma vizinhança de cada um dos seus pontos.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.4.2.

Proposição 2.2.8 *A intersecção de qualquer família de fechados é um conjunto fechado.*

A união de uma família finita de fechados é um conjunto fechado.

Os conjuntos $\emptyset$ e X são fechados.

Demonstração:
Ver [29], lema I.4.4.

Definição 2.2.9 *Sejam (X,τ) e (Y,τ_1) dois espaços topológicos e f uma aplicação de X em Y. Então f diz-se* ***contínua*** *se o conjunto*

$$f^{-1}(A) \doteq \{x \in X : f(x) \in A\}$$

é um elemento de τ, qualquer que seja o conjunto $A \in \tau_1$ (isto é, f é contínua se a imagem inversa de qualquer aberto A em Y é um conjunto aberto em X).

A função f diz-se ***contínua no ponto*** *$x \in X$ se para qualquer vizinhança U de $f(x)$ existe uma vizinhança V de x tal que o conjunto*

$$f(V) \doteq \{f(x) : x \in V\}$$

está contido em U.

Definição 2.2.10 *Sejam (X,τ) e (Y,τ_1) dois espaços topológicos e f uma aplicação de X em Y. Se f é contínua e injectiva e, além disso, a função inversa f^{-1} é também contínua, dizemos que f é um* ***homeomorfismo****, ou um* ***isomorfismo topológico****, de X em Y.*

Proposição 2.2.11 *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$. Então cada uma das seguintes afirmações é equivalente à continuidade de f:*

(i) *f é contínua em cada ponto $x \in X$;*

(ii) *a imagem inversa de cada conjunto fechado em Y é um conjunto fechado em X.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.4.16.

Proposição 2.2.12 *Se X, Y e Z são espaços topológicos, e se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções contínuas, então a função composta de f e g, $f \circ g$, é contínua.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.4.17.

Definição 2.2.13 *Sejam X um conjunto, Y um subconjunto de X e τ uma topologia para X. A topologia*

$$\tau_Y \doteq \{A : A = B \cap Y, B \in \tau\}$$

diz-se a ***topologia relativa*** *de Y gerada por τ.*

Um subconjunto de Y diz-se ***relativamente aberto*** *se pertence a τ_Y;* ***relativamente fechado*** *se é o complementar, relativamente a Y, de um conjunto relativamente aberto. Outros conceitos análogos definem-se da mesma forma.*

Observação 2.2.14 *No que segue, um subconjunto de um espaço topológico será sempre encarado como um espaço topológico com a sua topologia relativa, a menos que outra topologia seja especificada.*

Definição 2.2.15 *Dizemos que uma topologia τ em X é uma* ***topologia de Hausdorff****, e que X é um* ***espaço de Hausdorff****, se quaisquer dois pontos distintos de X admitem vizinhanças disjuntas.*

Definição 2.2.16 *Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X. Uma* ***cobertura*** *aberta de A é uma família de abertos cuja união contém A.*

Definição 2.2.17 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $K \subset X$ é* ***compacto*** *se qualquer cobertura de K admite uma subcobertura finita.*

Proposição 2.2.18 **(i)** *Um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

(ii) *A imagem de um espaço compacto por uma função contínua é um compacto.*

(iii) *Um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.5.7.

Proposição 2.2.19 *Uma função real contínua definida num espaço compacto atinge o seu ínfimo e o seu supremo.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.5.10.

Definição 2.2.20 *Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X. Dizemos que A é* ***sequencialmente compacto*** *se qualquer sucessão (numerável [1]) de pontos de A admite uma subsucessão convergente para um elemento de A.*

2.3 Espaços métricos

Definição 2.3.1 *Seja X um conjunto. Uma função real d definida em $X \times X$, com as seguintes propriedades:*

(i) $d(x,y) \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0$ *se e só se* $x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

diz-se uma ***métrica*** *em X.*

Definição 2.3.2 *Sejam X um conjunto, d uma métrica em X, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. O subconjunto*

$$B_\varepsilon(x) \doteq \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

diz-se a ***bola aberta*** *de centro x e raio ε.*

Definição 2.3.3 *Seja X um conjunto e d uma métrica em X. A mais pequena topologia em X que contém as bolas abertas em X diz-se a* ***topologia da métrica****.*

Proposição 2.3.4 *Seja X um conjunto e d uma métrica em X. Então as bolas abertas constituem uma base para a topologia da métrica.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.6.2.

Definição 2.3.5 *Seja X um conjunto e d uma métrica em X. Então X, munido da sua topologia da métrica, diz-se um* ***espaço métrico****.*

---

[1] Diremos que um conjunto A é numerável se for equipotente a $\mathbb{N}$, isto é, se existir uma bijecção entre A e $\mathbb{N}$.

Definição 2.3.6 *Seja X um espaço topológico. Suponhamos que existe uma métrica em X tal que a topologia da métrica coincide com a topologia inicial. Neste caso, dizemos que X é* ***metrizável.***

Proposição 2.3.7 *Qualquer espaço métrico é um espaço topológico de Hausdorff.*

Demonstração:
Ver [29], teorema I.6.3.

Proposição 2.3.8 *Qualquer subconjunto de um espaço métrico, com a sua topologia relativa, é um espaço métrico.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.6.4.

Proposição 2.3.9 *Seja X um espaço métrico e A um subconjunto de X. Um ponto a pertence ao fecho de A se e só se existe uma sucessão (a_k) de pontos de A convergente para a.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.6.6.

Proposição 2.3.10 *Um subconjunto de um espaço métrico é compacto se e só se é sequencialmente compacto.*

Demonstração:
Ver [29], teorema I.6.13.

Definição 2.3.11 *Seja X um espaço métrico e (x_k) uma sucessão em X. Dizemos que (x_k) é uma* ***sucessão de Cauchy*** *se $\lim\limits_{k,j\to\infty} d(x_k, x_j) = 0$.*

Se qualquer sucessão de Cauchy em X é convergente, dizemos que X é um espaço métrico ***completo.***

Proposição 2.3.12 *Sejam X e Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se e só se $(f(x_k)) \to f(x)$ sempre que $(x_k) \to x$.*

Demonstração:
Ver [29], lema I.6.8.

Definição 2.3.13 *Sejam X e Y espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é* ***uniformente contínua*** *em X se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

2.4 Espaços vectoriais

No que segue, a expressão "escalar" significará um elemento de $\mathbb{R}$.

Definição 2.4.1 *Um* ***espaço vectorial*** *real é um conjunto X, cujos elementos serão chamados* ***vectores****, onde estão definidas duas operações: uma adição e uma multiplicação por um escalar, com as seguintes propriedades algébricas:*

(S) *A cada par de vectores (x, y) corresponde um vector $x + y$, de tal forma que*

(S1) $x + y = y + x$ e $x + (y + z) = (x + y) + z, \ \forall x, y, z \in X$;

(S2) *X contém um único vector 0 (o vector nulo ou a origem de X) tal que $x + 0 = x$ para cada $x \in X$;*

(S3) *a cada $x \in X$ corresponde um único vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.*

(M) *A cada par (α, x), com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, corresponde um vector αx, de tal forma que*

(M1) $1x = x, \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$

(M2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \ (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$.

Definição 2.4.2 *Se X é um espaço vectorial, $A \subset X$, $B \subset X$, $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos*

$$\mathbf{x}+\mathbf{A} \doteq \{x+a : a \in A\}, \qquad \mathbf{x}-\mathbf{A} \doteq \{x-a : a \in A\}$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \doteq \{a+b : a \in A, b \in B\}, \qquad \lambda\mathbf{A} \doteq \{\lambda a : a \in A\}$$

Definição 2.4.3 *Dizemos que um espaço vectorial X tem dimensão n e escrevemos* $\dim X = n$, *se X possui uma base $\{u_1, ..., u_n\}$ com n elementos. Isto significa que qualquer $x \in X$ admite uma única representação da forma $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, ..., n$.*

Definição 2.4.4 *Se* $\dim X = n$, *para algum n, dizemos que X tem **dimensão finita**, caso contrário, diremos que X tem **dimensão infinita**.*

Definição 2.4.5 *Sejam X e Y espaços vectoriais reais. Uma função $L : X \to Y$ diz-se **linear** se*

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.4.6 *Chamamos **funcional** a qualquer aplicação $L : X \to \mathbb{R}$, onde X é um espaço vectorial real.*

*Se L é linear, dizemos que L é um **funcional linear**.*

2.5 Espaços vectoriais topológicos

Definição 2.5.1 *Seja X um espaço vectorial real. Dizemos que X é um **espaço vectorial topológico** se está munido de uma topologia relativamente à qual*

(i) *qualquer subconjunto de V constituido apenas por um elemento é um conjunto fechado e*

(ii) *as operações*

$$(u, v) \mapsto u + v, \quad \text{de } X \times X \text{ em } X$$
$$(\lambda, u) \mapsto \lambda u, \quad \text{de } \mathbb{R} \times X \text{ em } X$$

são contínuas.

Proposição 2.5.2 *Qualquer espaço vectorial topológico é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração:
Ver [45], teorema 1.12.

Definição 2.5.3 *Um espaço vectorial topológico diz-se **localmente convexo** se a origem possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas* [2].

2.6 Espaços normados

Definição 2.6.1 *Seja X um espaço vectorial real. Dizemos que X é um **espaço normado** se a cada $x \in X$ está associado um número real $|x|_X$, dito a norma de x, de tal forma que*

(i) $|x+y|_X \le |x|_X + |y|_X$, *para quaisquer $x, y \in X$;*

(ii) $|\alpha x|_X = |\alpha| \, |x|_X$, *para cada $x \in X$ e para cada escalar α;*

(iii) $|x|_X > 0$ *se $x \neq 0$.*

*A expressão "**norma**" é usada para significar a aplicação que associa a cada $x \in X$ o número $|x|_X$.*

[2]Dizemos que um conjunto $C \subset V$ é convexo se, para quaisquer $x, y \in C$ e $0 \le \lambda \le 1$, se tiver

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Definição 2.6.2 *Sejam X um espaço normado, $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$. A* ***bola aberta*** *de centro em x e raio r é, por definição, o conjunto*

$$B_r(x) \doteq \{y \in X : |y - x|_X < r\}.$$

A ***bola fechada*** *de centro em x e raio r é, por definição, o conjunto*

$$\overline{B}_r(x) \doteq \{y \in X : |y - x|_X \leq r\}.$$

Observação 2.6.3 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. É fácil ver que a aplicação d definida em $X \times X$ por*

$$d(x, y) = |x - y|_X$$

é uma métrica em X.

Assim,

Proposição 2.6.4 *Qualquer espaço normado é um espaço métrico.*

Daqui resulta, pela proposição 2.3.7, que

Proposição 2.6.5 *Qualquer espaço normado é um espaço de Hausdorff.*

Proposição 2.6.6 *Qualquer espaço normado, com a topologia da métrica, é um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Demonstração:
Ver [28], página 415.

Definição 2.6.7 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Diremos que um subconjunto A de X é* ***limitado*** *se existe $M > 0$ tal que $|x|_X \leq M$, para cada $x \in A$.*

Proposição 2.6.8 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Então qualquer subconjunto compacto de X é limitado e fechado.*

Demonstração:
Ver [32], páginas 176 e 178.

Proposição 2.6.9 *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é limitado e fechado.*

Demonstração:
Ver [32], capítulo VII, proposição 10.

Proposição 2.6.10 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Dizemos que X é um* ***espaço de Banach*** *se é um espaço métrico completo, com a métrica definida pela sua norma.*

Proposição 2.6.11 *Sejam X e Y espaços normados e seja $L : X \to Y$ uma função linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *L é contínua;*

(ii) *L é contínua nalgum ponto de X;*

(iii) $\sup\limits_{x \in X, |x|_X \leq 1} |L(x)|_Y \in \mathbb{R}$;

(iv) *L é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|L(x)|_Y \leq M |x|_X$, qualquer que seja $x \in X$.*

Demonstração:
Ver [29], lema II.3.4.

Definição 2.6.12 *Seja X um espaço normado. Notamos por X' o* ***espaço dual*** *de X, isto é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos em X.*

Proposição 2.6.13 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado e seja X' o seu dual. A função real $|\cdot|_{X'}$, definida em X', por*

$$|f|_{X'} \doteq \sup_{x \in X, |x|_X \leq 1} |f(x)|$$

é uma norma em X', dita a ***norma dual***.

Proposição 2.6.14 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado e seja X' o seu dual, equipado com a norma dual. Então X' é um espaço de Banach.*

Demonstração:
Ver [29], lema II.3.8.

É fácil ver que

Observação 2.6.15 *Se X é um espaço normado, então uma sucessão $(x_k) \subset X$ converge para um ponto $x \in X$, se e só se $\lim\limits_{k \to \infty} |x_k - x|_X = 0$. Assim,*

$$(x_k) \to x \Leftrightarrow (|x_k - x|) \to 0.$$

2.7 Medidas

2.7.1 Sigma-álgebras

Seja X um conjunto.

Definição 2.7.1 *Uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se uma $\sigma-$**álgebra** em X se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) *se $A \in \mathcal{A}$, então $X \backslash A = \{x \in X : x \notin A\} \in \mathcal{A}$;*

(iii) *se $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $j = 1, 2, ...$, então $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.*

Assim, uma $\sigma-$álgebra em X é uma família de subconjuntos de X que contém X e que é fechada para a complementação, e para uniões numeráveis.

Definição 2.7.2 *Se $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra en X dizemos que o par $(X, \mathcal{A})$ é um **espaço mensurável.***

Definição 2.7.3 *Se $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra em X, então um subconjunto de X diz-se $\mathcal{A}-$**mensurável** se pertence a $\mathcal{A}$.*

A seguinte proposição é uma consequência imediata da definição anterior:

Proposição 2.7.4 *Se uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma $\sigma-$álgebra, então:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) *se $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $j = 1, 2, ..., n$, então $\cup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$;*

(iii) *se $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $j = 1, 2, ...$, então $\cap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$;*

(iv) *se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \backslash B \doteq A \cap B^c \in \mathcal{A}$.*

Demonstração:
Ver [46], página 10.

Proposição 2.7.5 *Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Então existe a mais pequena $\sigma-$álgebra em X que contém $\mathcal{F}$.*

Demonstração:
Ver [20], corolário 1.1.2.

Observação 2.7.6 *Dizer que $\mathcal{A}$ é a mais pequena $\sigma-$álgebra em X que contém $\mathcal{F}$ significa dizer que qualquer $\sigma-$álgebra em X que contém $\mathcal{F}$ também contém $\mathcal{A}$. Esta mais pequena $\sigma-$álgebra em X que contém $\mathcal{F}$ é única e diz-se a $\sigma-$**álgebra gerada** por $\mathcal{F}$.*

2.7.2 A $\sigma-$álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$

Definição 2.7.7 *A* ***$\sigma-$álgebra de Borel*** *em $\mathbb{R}^n$, notada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, é a $\sigma-$álgebra em $\mathbb{R}^n$ gerada pelos subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.*

Definição 2.7.8 *Os* ***conjuntos borelianos*** *de $\mathbb{R}^n$ são os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 2.7.9 *A $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dos subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$, é gerada por cada uma das seguintes colecções de conjuntos:*

(i) *a colecção de todos os subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *a colecção de todos os semi-espaços de $\mathbb{R}^n$ da forma $\{(x_1, ..., x_n) : x_i \leq b\}$, para algum índice i e para algum $b \in \mathbb{R}$;*

(iii) *a colecção de todos os rectângulos de $\mathbb{R}^n$ da forma $\{(x_1, ..., x_n) : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, ..., n\}$.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 1.1.4.

Definição 2.7.10 *Seja $\mathcal{G}$ a família de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{G}_\delta$ a colecção de todas as intersecções de famílias numeráveis de elementos de $\mathcal{G}$ e seja $\mathcal{F}_\sigma$ a colecção de todas as uniões de famílias numeráveis de elementos de $\mathcal{F}$. Cada conjunto em $\mathcal{G}_\delta$ diz-se um $\mathbf{G}_\delta$ e cada conjunto em $\mathcal{F}_\sigma$ diz-se um $\mathbf{F}_\sigma$.*

Proposição 2.7.11 *Qualquer subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ é um G_δ e qualquer subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é um F_σ.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 1.1.5.

2.7.3 Medidas

Seja X um conjunto e seja $\mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra em X.

Definição 2.7.12 *Uma função μ definida em $\mathcal{A}$ com valores em $[0, +\infty]$ diz-se* ***contavelmente aditiva*** *se*

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \Sigma_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

sempre que $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, ...$ e $A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k$ (note-se que, uma vez que, para cada j, $\mu(A_j)$ é não-negativo a soma $\Sigma_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ existe sempre como um número real ou como $+\infty$).

Definição 2.7.13 *Uma* ***medida*** *positiva μ em $\mathcal{A}$ é uma função definida em $\mathcal{A}$ com valores em $[0, +\infty]$ contavelmente aditiva.*

Definição 2.7.14 *Se $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra en X e μ é uma medida em $\mathcal{A}$ dizemos que o terno $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um* ***espaço de medida****.*

Definição 2.7.15 *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida dizemos que μ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$, ou, se a $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ está subentendida, uma medida em X.*

Proposição 2.7.16 *Seja μ uma medida positiva num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. Então*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) *se $A_1, ..., A_n$ são elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois, então $\mu(A_1 \cup ... \cup A_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n)$;*

(iii) *se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$, além disso, se $\mu(A) < +\infty$ então $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$;*

(iv) *se $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, com $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $j = 1, 2, ...$ e $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$, então $\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu(A)$;*

(v) *se $A = \cap_{j=1}^{\infty} A_j$, com $A_j \in \Re$ para cada $j = 1, 2, ...$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu(A)$.*

Demonstração:
Ver [46], teorema 1.19.

Definição 2.7.17 *Uma medida em* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *diz-se uma* **medida de Borel** *em* $\mathbb{R}^n$. *Mais geralmente, se* X *é um subconjunto boreliano de* $\mathbb{R}^n$ *e se* $\mathcal{A}$ *é a* $\sigma-$*álgebra cujos elementos são todos os borelianos de* $\mathbb{R}^n$ *que estão contidos em* X, *então uma medida em* $(X, \mathcal{A})$ *diz-se uma medida de Borel em* $\mathcal{A}$.

Definição 2.7.18 *Seja* μ *uma medida num espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$. *Dizemos que* μ *é uma* **medida finita** *se* $\mu(X) < +\infty$ *e, neste caso, dizemos que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é um* **espaço de medida finito.**

Dizemos que μ *é uma* **medida** $\sigma-$**finita,** *e que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é um* **espaço de medida** $\sigma-$**finito,** *se* X *é a união de uma família* $A_1, A_2, ...$ *de elementos de* $\mathcal{A}$ *satisfazendo* $\mu(A_j) < +\infty$ *para cada* j.

Definição 2.7.19 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Dizemos que* μ *é uma* **medida completa,** *e que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é um* **espaço de medida completo,** *se as condições* $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ *e* $B \subset A$ *implicam* $B \in \mathcal{A}$.

Definição 2.7.20 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Diremos que um subconjunto* B *de* X *é* $\mu-$**nulo** *se existe um subconjunto* A *de* X *tal que* $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ *e* $\mu(A) = 0$.

Assim,

Proposição 2.7.21 *Se* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é um espaço de medida, então* μ *é completa se e só se cada conjunto* $\mu-$*nulo pertence a* $\mathcal{A}$.

Definição 2.7.22 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* μ *uma medida em* $\mathcal{A}$. *Chamaremos* **completamento** *de* $\mathcal{A}$ *por* μ *à colecção* $\mathcal{A}_\mu$ *de todos os subconjuntos* A *de* X *para os quais existem conjuntos* E *e* F *em* $\mathcal{A}$ *tais que*

(i) $E \subset A \subset F$

e

(ii) $\mu(F \backslash E) = 0$.

Sejam A, E e F como na definição anterior. Evidentemente, temos $\mu(E) = \mu(F)$. Além disso, se B é um qualquer subconjunto de A pertencente a $\mathcal{A}$, temos $\mu(B) \leq \mu(F) = \mu(E)$. Então $\mu(E) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ e } B \subset A\}$, e portanto o valor comum de $\mu(E)$ e $\mu(F)$ depende apenas do conjunto A (e da medida μ), e não da escolha dos conjuntos E e F satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição anterior. Isto significa que podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 2.7.23 *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* μ *uma medida em* $\mathcal{A}$. *Seja* $\mathcal{A}_\mu$ *o completamento de* $\mathcal{A}$ *por* μ. *A função* $\overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty]$, *definida por* $\overline{\mu}(A) = \mu(E) = \mu(F)$, *onde* E *e* F *pertencem a* $\mathcal{A}$ *e satisfazem as condições (i) e (ii) da definição anterior, diz-se o* **completamento** *de* μ.

Proposição 2.7.24 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* μ *uma medida em* $\mathcal{A}$. *Então* $\mathcal{A}_\mu$ *é uma* $\sigma-$*álgebra em* X *que inclui* $\mathcal{A}$, *e* $\overline{\mu}$ *é uma medida completa em* $\mathcal{A}_\mu$ *cuja restrição a* $\mathcal{A}$ *é* μ.

2.7.4 Medidas exteriores

Seja X um conjunto e seja 2^X a colecção de todos os subconjuntos de X.

Definição 2.7.25 *Um medida* **exterior** *em* X *é uma função* $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ *verificando*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) *se* $A \subset B \subset X$, *então* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) *se* $\{A_j\}$ *é uma família numerável de subconjuntos de* X, *então* $\mu^*\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Assim, uma medida exterior em X é uma função de 2^X em $[0, +\infty]$ monótona e contavelmente subaditiva, cujo valor em $\emptyset$ é 0.

Proposição 2.7.26 *Uma medida em* X *é uma medida exterior em* X *se e só se o seu domínio é* 2^X.

Demonstração:
Ver [20], página 14.

Definição 2.7.27 *Seja X um conjunto e seja μ^* uma medida exterior em X. Um subconjunto B de X diz-se μ^*-**mensurável** (ou mensurável com respeito a μ^*) se*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

para cada subconjunto A de X.

Proposição 2.7.28 *Seja X um conjunto, seja μ^* uma medida exterior em X e seja $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a colecção de todos os subconjuntos de X μ^*-mensuráveis. Então*

(i) *$\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra*
e

(ii) *a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma medida em $\mathcal{M}_{\mu^*}$.*

Demonstração:
Ver [20], teorema 1.3.4.

Proposição 2.7.29 *Seja X um conjunto, seja μ^* uma medida exterior em X e seja $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a colecção de todos os subconjuntos de X que são μ^*-mensuráveis. Então a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma medida completa.*

Demonstração:
Ver [20], página 35.

2.7.5 A medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

Definição 2.7.30 *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diz-se um **intervalo** $n-$**dimensional** se é da forma $I_1 \times ... \times I_n$, onde $I_1, ..., I_n$ são intervalos de $\mathbb{R}$.*

Definição 2.7.31 *O **volume** de um intervalo $n-$dimensional $I_1 \times ... \times I_n$, notado por $vol(I_1 \times ... \times I_n)$, é o produto dos comprimentos dos intervalos $I_1, ..., I_n$.*

Definição 2.7.32 *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{C}_A$ o conjunto de todas as famílias numeráveis $\{R_i\}$ de intervalos $n-$dimensionais abertos e limitados tais que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} R_i$. Então a **medida exterior de Lebesgue** de A, notada por $m^*(A)$, é, por definição, o ínfimo do conjunto*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol(R_i) : \{R_i\} \in \mathcal{C}_A \right\}.$$

Proposição 2.7.33 *A medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é uma medida exterior e associa a cada intervalo $n-$dimensional o seu volume.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 1.3.2.

Proposição 2.7.34 *A medida exterior de Lebesgue é invariante para translações. Mais precisamente, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ então $m^*(x + A) = m^*(A)$.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 1.4.4.

2.7.6 Subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}^n$

Definição 2.7.35 *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diz-se **Lebesgue-mensurável** sempre que é mensurável com respeito à medida exterior de Lebesgue m^*.*

Proposição 2.7.36 *Qualquer subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 1.3.6.

Proposição 2.7.37 *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é Lebesgue-mensurável se e só se $B + x$ é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 1.4.4.

2.7.7 A medida de Lebesgue

Notemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a colecção de todos os subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.7.38 *A restrição da medida exterior de Lebesgue, m^*, a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diz-se a **medida de Lebesgue** em $\mathbb{R}^n$ e será notada por m.*

Observação 2.7.39 *Note-se que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, pelo que a restrição de m^* a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ será ainda denominada medida de Lebesgue.*

Da proposição 2.7.34 resulta que

Proposição 2.7.40 *A medida de Lebesgue é invariante para translações. Mais precisamente, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ então $m(x+A) = m(A)$.*

A seguinte proposição é uma consequência da proposição 2.7.29.

Proposição 2.7.41 *A medida de Lebesgue na $\sigma-$álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dos subconjuntos Lebesgue-mensuráveis é completa.*

Porém,

Proposição 2.7.42 *A restrição da medida de Lebesgue à $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dos subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$ não é completa.*

Proposição 2.7.43 *A medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ é o completamento da medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 1.5.2.

Proposição 2.7.44 *Seja A um subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}^n$. Então existem subconjuntos borelianos E e F de $\mathbb{R}^n$ tais que $E \subset A \subset F$ e $m(F \backslash E) = 0$.*

Demonstração:
Ver [20], lema 1.5.3.

Observação 2.7.45 *Nos capítulos seguintes, usaremos, em geral, as expressões "conjunto mensurável" e "medida" quando quisermos referir-nos a "conjunto Lebesgue-mensurável" e a "medida de Lebesgue", respectivamente.*

2.7.8 Propriedades que se verificam quase sempre

Definição 2.7.46 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Diremos que uma determinada propriedade é verificada $\mu-$**quase sempre** em X, ou satisfeita por quase todo o elemento de X, se o conjunto dos pontos de X onde não se verifica é $\mu-$nulo. Por outras palavras, uma propriedade verifica-se $\mu-$quase sempre em X se existe um conjunto $N \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(N) = 0$ e N contém todos os pontos de X onde a propriedade não se verifica.*

Mais geralmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.7.47 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja E um subconjunto de X. Então uma determinada propriedade é verificada $\mu-$**quase sempre** em E se o conjunto dos pontos de E onde não se verifica é $\mu-$nulo.*

Observação 2.7.48 *Abreviaremos, por vezes, a expressão "$\mu-$quase sempre" escrevendo "$\mu-$q.s.". Nos casos em que não haja perigo de confusão quanto à medida que se está a considerar, usaremos as expressões "quase sempre" e "q.s.".*

2.8 Funções mensuráveis

2.8.1 Definição e propriedades

Proposição 2.8.1 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja A um subconjunto de X pertencente a $\mathcal{A}$. Para qualquer função $f : A \to [-\infty, +\infty]$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}$;

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) < t\} \in \mathcal{A}$;

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$;

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [20], proposição 2.1.1.

Definição 2.8.2 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja A um subconjunto de X pertencente a $\mathcal{A}$. Uma função $f : A \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***$\mathcal{A}$−mensurável*** *(ou mensurável com respeito a $\mathcal{A}$) se satifaz uma, e portanto todas, as condições da proposição 2.8.1.*

Definição 2.8.3 *Se $X = \mathbb{R}^n$, uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ diz-se* ***Borel-mensurável*** *ou uma* ***função boreliana****, uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diz-se* ***Lebesgue-mensurável****.*

Observação 2.8.4 *Nos capítulos seguintes, usaremos em geral a expressão "função mensurável" para significar "função Lebesgue-mensurável".*

Proposição 2.8.5 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja A um subconjunto de X pertencente a $\mathcal{A}$. Então, para qualquer função $f : A \to \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *a função f é mensurável com respeito a $\mathcal{A}$;*

(ii) *qualquer que seja o subconjunto aberto U de $\mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}(U)$ pertence a $\mathcal{A}$;*

(iii) *qualquer que seja o subconjunto fechado C de $\mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}(C)$ pertence a $\mathcal{A}$;*

(iv) *qualquer que seja o subconjunto boreliano B de $\mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}(B)$ pertence a $\mathcal{A}$.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 2.1.8.

Proposição 2.8.6 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que f e g são funções definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então os conjuntos*

(i) $\{x \in A : f(x) < g(x)\}$

(ii) $\{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$

(iii) $\{x \in A : f(x) = g(x)\}$

pertencem a $\mathcal{A}$.

Proposição 2.8.7 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que f e g são funções $\mathcal{A}$−mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então as funções $f \vee g : A \to [-\infty, +\infty]$ e $f \wedge g : A \to [-\infty, +\infty]$, definidas respectivamente por*

$$(f \vee g)(x) \doteq \max(f(x), g(x)) \quad e \quad (f \wedge g)(x) \doteq \min(f(x), g(x)),$$

são $\mathcal{A}$−mensuráveis.

Demonstração:
Ver [20], proposição 2.1.3.

Proposição 2.8.8 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que (f_n) é uma sucessão de funções $\mathcal{A}$−mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então as funções $\sup_n f_n$, $inf_n f_n$, $limsup_{n\to\infty} f_n$ e $liminf_{n\to\infty} f_n$, com domínio A e valores em $[-\infty, +\infty]$, definidas respectivamente por $(\sup_n f_n)(x) = \sup_n (f_n(x))$, $(\inf_n f_n)(x) = \inf_n (f_n(x))$, $(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty} (f_n(x))$ e $(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) = \liminf_{n\to\infty} (f_n(x))$, são $\mathcal{A}$−mensuráveis.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 2.1.4.

Proposição 2.8.9 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* $A \in \mathcal{A}$. *Suponhamos que* (f_n) *é uma sucessão de funções* $\mathcal{A}-$*mensuráveis definidas em* A *com valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Então a função* $\lim_{n\to\infty} f_n$, *com domínio*

$$\left\{x \in A : \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)) = \liminf_{n\to\infty} (f_n(x))\right\}$$

e valores em $[-\infty, +\infty]$, *definida por* $(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x))$, *é* $\mathcal{A}-$*mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 2.1.4.

Proposição 2.8.10 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* $A \in \mathcal{A}$. *Suponhamos que* f *é uma função* $\mathcal{A}-$*mensurável com domínio* A *e valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Então a função* $|f|$ *é* $\mathcal{A}-$*mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], página 53.

Proposição 2.8.11 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* $A \in \mathcal{A}$. *Suponhamos que* f *é uma função* $\mathcal{A}-$*mensurável com domínio* A *e valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Então, se* B *é um subconjunto de* A *pertencente a* $\mathcal{A}$, *a restrição* $f|_B$, *de* f *a* B, *é uma função* $\mathcal{A}-$*mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], página 53.

Proposição 2.8.12 *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* A *um subconjunto de* X *pertencente a* $\mathcal{A}$, f *e* g *funções reais* $\mathcal{A}-$*mensuráveis definidas em* A *e seja* α *um número real. Então as funções* αf, $f+g$, $f-g$, fg, *e* f/g *(cujo domínio é o conjunto* $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$*) são* $\mathcal{A}-$*mensuráveis.*

Proposição 2.8.13 *Qualquer função boreliana em* $\mathbb{R}^n$ *é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], página 49.

Proposição 2.8.14 *Qualquer função contínua* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função boreliana.*

Demonstração:
Ver [20], página 49.

Proposição 2.8.15 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* B *um subconjunto de* X. *Então a função característica de* B, $\chi_B : X \to \mathbb{R}$, *definida por* $\chi_B(x) = 1$ *se* $x \in B$ *e* $\chi_B(x) = 0$ *caso contrário, é* $\mathcal{A}-$*mensurável se e só se* $B \in \mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [20], página 49.

Proposição 2.8.16 *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e* g *é uma função Lebesgue-mensurável com valores reais então a função composta de* f *e* g, $f \circ g$, *é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], lema 8.1.7.

Proposição 2.8.17 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e sejam* f *e* g *funções definidas em* X *com valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Suponhamos que* $f = g$ *quase sempre. Se* μ *é uma medida completa e se* f *é* $\mathcal{A}-$*mensurável então também* g *é* $\mathcal{A}-$*mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 2.2.1.

Proposição 2.8.18 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* (f_n) *uma sucessão de funções definidas em* X *com valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Suponhamos que* f *é uma função definida em* X *com valores em* $[-\infty, +\infty]$ *tal que* $(f_n(x))$ *converge para* $f(x)$ *para quase todo* $x \in X$. *Neste caso, se* μ *é completa e se cada* f_n *é* $\mathcal{A}-$*mensurável, também* f *é* $\mathcal{A}-$*mensurável.*

Demonstração:
Ver [20], corolário 2.2.2.

Proposição 2.8.19 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $\mathcal{A}_\mu$ o completamento de $\mathcal{A}$ por μ. Então uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é $\mathcal{A}_\mu$−mensurável se e só se existem funções $\mathcal{A}$−mensuráveis $f_0, f_1 : X \to [-\infty, +\infty]$ tais que*

(i) *qualquer que seja o $x \in X$, $f_0(x) \leq f(x) \leq f_1(x)$*
e

(ii) *$f_0 = f_1$ μ−quase sempre em X.*

Demonstração:
Ver [20], proposição 2.2.3.

Note-se que desta proposição resulta, em particular, que

Proposição 2.8.20 *Se f é uma função Lebesgue-mensurável definida em $\mathbb{R}^n$ então existe uma função boreliana g, definida em $\mathbb{R}^n$, tal que $f = g$ quase sempre.*

2.8.2 Os teoremas de Lusin e de Scorza-Dragoni

Proposição 2.8.21 ***(Teorema de Lusin)*** *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Uma função $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ é Lebesgue-mensurável se e só se, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K_\varepsilon \subset K$ tal que $m(K \backslash K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e a restrição de f a K_ε é contínua.*

Demonstração:
Ver [20], teorema 7.4.3.

Proposição 2.8.22 ***(Teorema de Scorza-Dragoni)*** *Seja G um qualquer subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}^s$ e seja $f(t,x)$ uma função definida em $G \times \mathbb{R}^n$ contínua em x para quase todo $t \in G$ e mensurável em t para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Então, qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto fechado K de G tal que $m(G \backslash K) \leq \varepsilon$ e f é contínua em $K \times \mathbb{R}^n$.*

Demonstração:
Ver [41], corolário 2G.

2.9 O integral de Lebesgue

2.9.1 Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.9.1 *A **função característica** do conjunto A é, por definição, a função $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \notin A. \end{cases}$$

Definição 2.9.2 *Uma função real s definida em $\mathbb{R}^n$ diz-se uma **função simples** se toma apenas um número finito de valores.*

A seguinte proposição resulta da definição de função simples e da proposição 2.8.15.

Proposição 2.9.3 *Seja $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função simples. Suponhamos que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, temos $s(x) \in \{a_1, ..., a_m\}$. Então $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$, onde $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = a_j\}$ e s é Lebesgue-mensurável se e só se os conjuntos $A_1, ..., A_m$ são Lebesgue-mensuráveis.*

Seja A um subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.9.4 *Seja $s : A \to \mathbb{R}$ uma função simples, $s = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$, onde cada A_j, $j = 1, ..., m$, é um conjunto Lebesgue-mensurável. Definimos o* ***integral de Lebesgue*** *de s em A, notado por $\int_A s(x)\,dx$, pondo*

$$\int_A s(x)\,dx \doteq \sum_{j=1}^{m} a_j m(A_j).$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função Lebesgue-mensurável com valores não-negativos, definimos

$$\int_A f(x)\,dx \doteq \sup \int_A s(x)\,dx,$$

sendo o supremo tomado no conjunto de todas as funções simples $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, anulando-se fora de A e satisfazendo $0 \leq s(x) \leq f(x)$, para cada $x \in A$.

Observação 2.9.5 *Note-se que o integral de uma função não-negativa $f : A \to \mathbb{R}$ pode ser $+\infty$.*

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. Então temos

$$f = f^+ - f^-,$$

onde

$$f^+ \doteq \max(f, 0) \quad \text{e} \quad f^- \doteq -\min(f, 0)$$

são funções não-negativas Lebesgue-mensuráveis.

Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.9.6 *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. O integral de Lebesgue de f em A é, por definição,*

$$\int_A f(x)\,dx \doteq \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx$$

sempre que pelo menos um dos integrais que surge no membro direito da igualdade é finito.

Se ambos os integrais são finitos, dizemos que f é ***Lebesgue-integrável*** *em A.*

Observação 2.9.7 *No que segue, em vez de "Lebesgue-integrável", escreveremos apenas "integrável".*

2.9.2 Propriedades

A seguinte proposição é uma consequência imediata da definição de integral de Lebesgue.

Proposição 2.9.8 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. Então*

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f\chi_A)(x)\,dx,$$

onde $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota a função característica do conjunto A.

Proposição 2.9.9 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções Lebesgue-mensuráveis. Se $f = g$ quase sempre em A, então*

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx.$$

Demonstração:
Ver [1], página 16.

As seguintes propriedades do integral de Lebesgue são consequência da definição e da proposição 2.9.9.

Proposição 2.9.10 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções Lebesgue-mensuráveis.*

(i) *Se f é limitada quase sempre em A e $m(A) < \infty$, então f é integrável em A.*

(ii) *Se $a \leq f(x) \leq b$, para quase todo $x \in A$, então*

$$a\,m(A) \leq \int_A f(x)\,dx \leq b\,m(A).$$

(iii) *Se f e g são integráveis em A e $f(x) \leq g(x)$ quase sempre em A, então*

$$\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx.$$

(iv) *Se f e g são integráveis em A, então $f+g$ é integrável em A e*

$$\int_A (f+g)(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx.$$

(v) *Se f é integrável em A e α é um número real, então αf é integrável em a e*

$$\int_A (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_A f(x)\,dx.$$

(vi) *Se f é integrável em A então $|f|$ é integrável em A e*

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leq \int_A |f(x)|\,dx.$$

(vii) *Se f é integrável em A e $B \subset A$ é Lebesgue-mensurável, então f é integrável em B; se, além disso, $f(x) \geq 0$ para quase todo $x \in A$, então*

$$\int_B f(x)\,dx \leq \int_A f(x)\,dx.$$

Proposição 2.9.11 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. Se $f(x) \geq 0$, quase sempre em A e $\int_A f(x)\,dx = 0$ então $f = 0$ quase sempre.*

Demonstração:
Ver [46], teorema 1.39.

Proposição 2.9.12 *Qualquer função Riemann-integrável é Lebesgue-integrável e os integrais são iguais.*

Demonstração:
Ver [26], teorema 2.10.1.

2.9.3 Os teoremas da convergência monótona e da convergência dominada; o lema de Fatou

Proposição 2.9.13 ***(Teorema da convergência monótona)*** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e seja (f_n) uma sucessão monótona de funções integráveis em A. Suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_A f_n(x)\,dx\right| \leq M$, para alguma constante M. Então existe uma função f integrável em A tal que*

(i) $\left(\int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx\right) \to 0$,

(ii) $(f_n(x)) \to f(x)$ *quase sempre em A,*

(iii) $\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leq M$.

Demonstração:
Ver [26], teorema 2.8.3.

Proposição 2.9.14 ***(Teorema da convergência dominada)*** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e seja (f_n) uma sucessão de funções integráveis.Suponhamos que existe uma função f tal que $(f_n(x)) \to f(x)$, quase sempre em A. Suponhamos ainda que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq h$, onde h é uma função integrável em A. Então f é integrável em A e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0.$$

Demonstração:
Ver [26], teorema 2.8.4.

Proposição 2.9.15 ***(Lema de Fatou)*** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e seja (f_n) uma sucessão de funções Lebesgue-mensuráveis não-negativas. Então*

$$\int_A \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx.$$

Demonstração:
Ver [20], teorema 2.4.3.

2.9.4 O teorema de Fubini

Seja f uma função real definida num subconjunto Lebesgue-mensurável A de $\mathbb{R}^{n+m}$. Podemos pensar em f como sendo função de um par variáveis (x, y), com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. O integral de f em A é, normalmente, notado por

$$\int_A f(x,y)\, dx\, dy$$

ou, o que é o mesmo,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\, \chi_A(x,y)\, dx\, dy.$$

Em particular, se $A \subset \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$\int_A f(x)\, dx = \int_A f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n = \int_{R^n} f(x_1, ..., x_n)\, \chi_A(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n,$$

onde $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota a função característica do conjunto A.

Proposição 2.9.16 *(**Teorema de Fubini**) Sejam A_1 e A_2 dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e seja f uma função integrável em $A_1 \times A_2$. Então*

(i) *para quase todo $x \in A_1$, a função $f(x, \cdot)$ é integrável em A_2 e a função $\int_{A_2} f(x,y)\, dy$ é integrável em A_1;*

(ii) *para quase todo $y \in A_2$, a função $f(\cdot, y)$ é integrável em A_1 e a função $\int_{A_1} f(x,y)\, dx$ é integrável em A_2;*

(iii) $\int_{A_1} \left(\int_{A_2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{A_2} \left(\int_{A_1} f(x,y)\, dx \right) dy.$

Demonstração:
Ver [20], teorema 5.2.2.

2.10 Topologias fracas

2.10.1 Definições e propriedades básicas

Seja X um espaço vectorial e seja X^+ o espaço de todos os funcionais lineares definidos em X.

Definição 2.10.1 *Um subespaço vectorial L de X^+ diz-se **total** se*

$$(f(x) = 0, \ \forall f \in L) \Rightarrow x = 0.$$

Definição 2.10.2 *Seja L um subespaço total de X^+ e seja $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos finitos de L. Chamamos **subconjuntos básicos** de X aos conjuntos do tipo*

$$V(x_0, F, \varepsilon) \doteq \{x \in X : |f(x - x_0)| < \varepsilon, \ \forall f \in F\},$$

onde $\varepsilon > 0$ e $F \in \mathcal{F}$.

Definição 2.10.3 *A $L-$**topologia** em X é a topologia obtida tomando como base os subconjuntos básicos. (Assim, dizer que um conjunto A é aberto para a $L-$topologia de X é o mesmo que dizer que A é união de subconjuntos básicos.)*

Proposição 2.10.4 *O espaço X é, com a $L-$topologia de qualquer subespaço vectorial total L de X^+, um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Demonstração:
Ver [29], lema V.3.3.

Proposição 2.10.5 *Seja L um qualquer subespaço vectorial total de X^+. A $L-$topologia em X é a topologia mais fraca na qual qualquer funcional em L é contínuo.*

Demonstração:
Ver [29], lema V.3.8.

Proposição 2.10.6 *Seja L um qualquer subespaço vectorial total de X^+. Os funcionais lineares em X, contínuos para a $L-$topologia, são precisamente os elementos de L.*

Demonstração:
Ver [29], teorema V.3.9.

Observação 2.10.7 *Se X é um espaço de Banach, então X tem já uma topologia natural, a chamada* ***topologia forte*** *ou topologia induzida pela métrica $d(x,y) = |x-y|$ associada à norma $|\cdot|$ de X.*

Se $(x_k) \subset X$ converge na topologia forte de X, isto é, se

$$(|x_k - x|_X) \to 0,$$

diremos que (x_k) ***converge fortemente*** *para x.*

Definição 2.10.8 *Seja X um espaço vectorial topológico localmente convexo e seja $L = X'$ (o subespaço de X^+ formado pelos funcionais lineares contínuos definidos em X). Então, a $L-$topologia chama-se a $X'-$topologia ou topologia $\sigma(X, X')$, ou* ***topologia fraca*** *de X.*

Definição 2.10.9 *Dada uma sucessão $(x_k) \subset X$, se existe $x \in X$ tal que (x_k) converge para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$ dizemos que (x_k)* ***converge fracamente*** *para x em X e escrevemos*

$$(x_k) \rightharpoonup x.$$

Definição 2.10.10 *Seja X um espaço vectorial e seja X^+ o espaço de todos os funcionais lineares definidos em X. Suponhamos que Y é um subespaço vectorial de X^+. A cada $x \in X$ podemos associar um funcional φ_x, definido em Y por*

$$\varphi_x(f) = f(x), \quad \forall f \in Y.$$

*O subespaço vectorial $L \doteq \{\varphi_x : x \in X\}$ de Y^+ é total. A $L-$topologia diz-se a $X-$**topologia** de Y.*

Se X é um espaço vectorial topológico localmente convexo e $Y = X'$, a $X-$topologia de X' diz-se a topologia $\sigma(X', X)$ ou ***topologia fraca**** *de X'.*

Dada uma sucessão $(f_k) \subset X'$, se existe $f \in X'$ tal que (f_k) converge para f na topologia fraca $\sigma(X', X)$ dizemos que (f_k)* ***converge fracamente**** *para f em X' e escrevemos*

$$(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

2.10.2 Propriedades da topologia fraca $\sigma(X, X')$

Sejam X um espaço de Banach e X' o seu dual.

Proposição 2.10.11 *A topologia fraca de X é mais fraca (isto é, possui menos abertos) que a topologia forte.*

Demonstração:
Ver [29], corolário V.3.5.

Proposição 2.10.12 *Se X tem dimensão finita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ e a topologia forte coincidem. Em particular, uma sucessão $(x_n) \subset X$ é fracamente convergente se e só se é fortemente convergente.*

Demonstração:
Ver [9], proposição III.6.

Assim, os abertos (resp. fechados) da topologia fraca $\sigma(X, X')$ são também abertos (resp. fechados) para a topologia forte. Se X tem dimensão finita então temos também a recíproca, pois, nesse caso, a topologia fraca e a topologia forte coincidem.

Porém, se X tem dimensão infinita, a topologia fraca é estritamente mais fraca que a topologia forte, ou seja, existem abertos (resp. fechados) para a topologia forte que não são abertos (resp. fechados) para a topologia fraca.

Proposição 2.10.13 *Um subconjunto convexo de um espaço de Banach (ou, mais geralmente, de um espaço vectorial topológico localmente convexo) é fracamente-fechado se e só se é fechado.*

Demonstração:
Ver [29], teorema V.3.13.

Resulta, da proposição 2.10.4, que

Proposição 2.10.14 *O espaço X é, com a topologia fraca, um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Proposição 2.10.15 *Seja $(x_k) \subset X$. Temos*

(i) $(x_k) \rightharpoonup x \Leftrightarrow (f(x_k)) \to f(x), \quad \forall f \in X'$

(ii) *Se* $(x_k) \to x$ *então* $(x_k) \rightharpoonup x$

(iii) *Se* $(x_k) \rightharpoonup x$ *então* $(|x_k|_X)$ *é limitada e* $|x|_X \leq \liminf\limits_{k\to\infty} |x_k|_X$

(iv) *Se* $(x_k) \rightharpoonup x$ *e* $(f_k) \to f$ *em* X' *(isto é* $(|f_k - f|_{X'}) \to 0$*) então* $(f_k(x_k)) \to f(x)$.

Demonstração:
Ver [9], proposição III.5.

2.10.3 Propriedades da topologia fraca* $\sigma(X', X)$

Seja X um espaço de Banach, seja X' o seu dual, munido da norma dual

$$|f|_{X'} = \sup_{x\in X,\ |x|_X \leq 1} |f(x)|,$$

e seja X'' o seu bidual, isto é, o dual de X', munido da norma

$$|\xi|_{X''} = \sup_{f\in X',\ |f|_{X'} \leq 1} |\xi(f)|.$$

No espaço X' podemos considerar três topologias:

- a topologia forte, associada à norma de X';
- a topologia fraca $\sigma(X', X'')$;
- a topologia fraca* $\sigma(X', X)$.

Proposição 2.10.16 *A topologia fraca* $\sigma(X', X)$ *de* X' *é mais fraca que a topologia fraca* $\sigma(X', X'')$.

Demonstração:
Ver [29], corolário V.3.7.

Proposição 2.10.17 *Se X tem dimensão finita, as topologias forte, fraca e fraca* coincidem.*

Demonstração:
Ver [9], página 41.

Resulta, da proposição 2.10.4, que

Proposição 2.10.18 *O espaço X' é, com a topologia fraca*, um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Proposição 2.10.19 ***(Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *O conjunto* $B_{X'} = \{f \in X' : |f|_{X'} \leq 1\}$ *é compacto para a topologia fraca** $\sigma(X', X)$.

Demonstração:
Ver [9], proposição III.15.

Proposição 2.10.20 *Seja $(f_k) \subset X'$. Temos*

(i) $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow (f_k(x)) \to f(x), \quad \forall x \in X$

(ii) *Se* $(f_k) \rightharpoonup f$ *então* $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} x$

(iii) *Se* $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *então* $(|f_k|_{X'})$ *é limitada e* $|f|_{X'} \leq \liminf\limits_{k\to\infty} |f_k|_{X'}$

(iv) *Se* $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $(x_k) \to x$ *em* X *(isto é* $(|x_k - x|_X) \to 0$*) então* $(f_k(x_k)) \to f(x)$.

Demonstração:
Ver [9], proposição III.12.

2.11 Espaços reflexivos; espaços separáveis

2.11.1 Espaços reflexivos

Seja X um espaço de Banach, seja X' o seu dual e X'' o seu bidual.
Fixemos $x \in X$ e consideremos a aplicação $J_x : X' \to \mathbb{R}$ definida por

$$J_x(f) \doteq f(x).$$

A aplicação J_x é linear contínua, isto é, é um elemento de X''.
Consideremos agora a aplicação $J : X \to X''$,

$$J(x) \doteq J_x.$$

Esta aplicação é linear e, além disso, é uma isometria, isto é, tem-se $|J_x|_{X''} = |x|_X$ para cada $x \in X$, no entanto, não é necessariamente sobrejectiva.

Definição 2.11.1 *Seja X um espaço de Banach e seja J a aplicação definida acima. Dizemos que o espaço X é **reflexivo** se $J(X) = X''$.*

Observação 2.11.2 *Sempre que X é um espaço reflexivo identificaremos X com X''.*

Proposição 2.11.3 *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se e só se X' é reflexivo.*

Proposição 2.11.4 *Seja X um espaço de Banach reflexivo, seja $M > 0$ e seja (x_k) uma sucessão em X tal que $|x_k|_X \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Então existem $x \in X$ e uma subsucessão (x_{k_j}) de (x_k) tais que $(x_{k_j}) \rightharpoonup x$ em X.*

Demonstração:
Ver [9], teorema III.27.

2.11.2 Espaços separáveis

Definição 2.11.5 *Dizemos que um espaço métrico X é **separável** se existe um subconjunto D de X numerável denso.*

Proposição 2.11.6 *Seja X um espaço métrico separável e seja F um subconjunto de X. Então F é separável.*

Demonstração:
Ver [9], proposição III.22.

Proposição 2.11.7 *Seja X um espaço de Banach e suponhamos que X' é separável. Então X é separável.*

Demonstração:
Ver [9], teorema III.23.

Proposição 2.11.8 *Seja X um espaço de Banach separável. Então o conjunto $B_{X'} = \{f \in X' : |f|_{X'} \leq 1\}$ é metrizável para a topologia fraca* $\sigma(X', X)$, isto é, existe uma métrica definida em $B_{X'}$ tal que a topologia associada coincide, em $B_{X'}$, com a topologia $\sigma(X', X)$.*

Reciprocamente, se $B_{X'}$ é metrizável para $\sigma(X', X)$ então X é separável.

Demonstração:
Ver [9], teorema III.25.

Proposição 2.11.9 *Seja X um espaço de Banach separável, seja $M > 0$ e seja (f_k) uma sucessão em X' tal que $|f_k|_{X'} \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Então existem $f \in X'$ e uma subsucessão (f_{k_j}) de (f_k) tais que $(f_{k_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em X'.*

Demonstração:
Ver [9], teorema III.26.

2.12 Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega, R^m)$

2.12.1 Definição e propriedades

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.12.1 *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ diz-se uma **função nula** se é Lebesgue-integrável e*

$$\int_\Omega |f(x)|\, dx = 0.$$

Definição 2.12.2 *Diremos que duas funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ são **equivalentes** se $f - g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ é uma função nula.*

Definição 2.12.3 *A **classe de equivalência** de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $[f]$, é o conjunto de todas as funções $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ Lebesgue integráveis que lhe são equivalentes, isto é,*

$$[f] \doteq \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R}^m \mid g \text{ é Lebesgue-integrável e } \int_\Omega |(f-g)(x)|\, dx = 0 \right\}.$$

Definição 2.12.4 *Definimos o espaço $\mathbf{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ como sendo o espaço das classes de equivalência das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ Lebesgue-integráveis:*

$$L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \doteq \{[f] \mid f : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ é Lebesgue-integrável}\}.$$

Proposição 2.12.5 *O funcional $|\cdot|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^m)} : L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$|[f]|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^m)} \doteq \int_{(\Omega,\mathbb{R}^m)} |f(x)|\, dx$$

define uma norma em $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.7.

Observação 2.12.6 *Será esta a norma que consideraremos em $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Definição 2.12.7 *Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$. Então*

$$\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \doteq \{[f] \mid f : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ f \text{ é mensurável e } [|f|^p] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)\}.$$

Proposição 2.12.8 *O funcional $|\cdot|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$|[f]|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)} \doteq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$.

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.7.

Observação 2.12.9 *Será esta a norma que consideraremos em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$.*

Definição 2.12.10 *Se $p = \infty$ temos, por definição,*

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \doteq \left\{ \begin{array}{l} [f] \mid f : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ f \text{ é mensurável e} \\ \qquad \exists\, c \ge 0 \text{ tal que } |f(x)| \le c \text{ q.s. em } \Omega \end{array} \right\}.$$

Proposição 2.12.11 *O funcional $|\cdot|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} : L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$|[f]|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} \doteq \inf\{c : |f(x)| \le c \text{ q.s. em } \Omega\}$$

define uma norma em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.7.

Observação 2.12.12 *Será esta a norma que consideraremos em* $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Observação 2.12.13 *No que segue escreveremos, por comodidade e como é habitual,* f *em vez de* $[f]$.

Proposição 2.12.14 *Para cada* $1 \le p \le \infty$, $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.8.

Proposição 2.12.15 *Para cada* $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *é um espaço reflexivo.*

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.10.

Proposição 2.12.16 *Para cada* $1 \le p < \infty$, $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *é um espaço separável.*

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.13.

Proposição 2.12.17 *Se* $f \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *então*

$$|f(x)| \le |f|_{L^\infty} \text{ quase sempre em } \Omega .$$

Demonstração:
Ver [9], página 56.

Seja $1 \le p \le \infty$. Designamos por p' o expoente conjungado de p, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ [3].

Proposição 2.12.18 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam* $f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *com* $1 \le p \le \infty$. *Então* $fg \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ *e*

$$\int_\Omega |f(x)\,g(x)|\,dx \le |f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)}\,|g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)} .$$

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.6.

2.12.2 Teoremas de representação

Proposição 2.12.19 ***(Teorema de representação de Riesz para*** $\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $1<p<\infty$*)* *Seja* $\varphi \in (L^p(\Omega,\mathbb{R}^m))'$, *com* $1<p<\infty$. *Então existe uma única função* $u \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *tal que*

$$\varphi(f) = \int_\Omega u(x)\,f(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Além disso,

$$|u|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega,\mathbb{R}^m))'} .$$

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.11.

Observação 2.12.20 *No que segue identificaremos sempre* $(L^p(\Omega,\mathbb{R}^m))'$ *com* $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Proposição 2.12.21 ***(Teorema de representação de Riesz para*** $\mathbf{L}^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$*)* *Seja* $\varphi \in \left(L^1(\Omega,\mathbb{R}^m)\right)'$. *Então existe uma única função* $u \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *tal que*

$$\varphi(f) = \int_\Omega u(x)\,f(x)\,dx, \quad \forall f \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Além disso,

$$|u|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} = |\varphi|_{(L^1(\Omega,\mathbb{R}^m))'} .$$

Observação 2.12.22 *No que segue identificaremos sempre* $\left(L^1(\Omega,\mathbb{R}^m)\right)'$ *com* $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

---

[3] Note-se que é

$$p' = \begin{cases} \infty, & \text{se } p=1 \\ \frac{p}{p-1}, & \text{se } 1<p<\infty \\ 1, & \text{se } p=\infty \end{cases} .$$

2.12.3 Convergências forte, fraca e fraca*

Observação 2.12.23 *Seja $1 \le p \le \infty$. Então a sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ converge fortemente para a função $f \in L^p(I,\mathbb{R}^m)$ ($(f_n) \to f$) se e só se*

$$\left(|f_n - f|_{L^p(I,\mathbb{R}^m)}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Observação 2.12.24 *Seja $1 \le p < \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ converge fracamente para a função $f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ($(f_n) \rightharpoonup f$) se e só se*

$$\left(\int_\Omega f_n(t)\,\psi(t)\,dt\right) \underset{n\to\infty}{\to} \left(\int_\Omega f(t)\,\psi(t)\,dt\right),$$

qualquer que seja a função $\psi \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Observação 2.12.25 *Uma sucessão $(f_n) \subset L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ converge fracamente* para a função $f \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ($(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f$) se e só se*

$$\left(\int_\Omega f_n(t)\,\psi(t)\,dt\right) \underset{n\to\infty}{\to} \left(\int_\Omega f(t)\,\psi(t)\,dt\right),$$

qualquer que seja a função $\psi \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Proposição 2.12.26 *Seja $1 \le p \le \infty$ e sejam (f_n) uma sucessão em $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ e $f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ tais que $\left(|f_n - f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)}\right) \to 0$. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) de (f_n) tal que $(f_{n_k}(x)) \to f(x)$ para quase todo o $x \in I$.*

Demonstração:
Ver [9], teorema IV.9.

2.13 Os espaços de Sobolev $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)$

2.13.1 Definição e propriedades

Nesta secção, a letra I denotará um intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$.
Seja p um número real, $1 \le p \le +\infty$.

Definição 2.13.1 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)$ define-se da seguinte forma:*

$$\mathbf{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^m) \doteq \left\{ \begin{array}{r} u \in L^p(I,\mathbb{R}^m) : \ \exists g \in L^p(I,\mathbb{R}^m) \ \textit{tal que} \\ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I,\mathbb{R}^m) \end{array} \right\}, \tag{2.1}$$

onde $C_c^1(I,\mathbb{R}^m)$ denota o conjunto das funções de classe C^1 definidas em I e com valores em $\mathbb{R}^m$, com suporte [4] compacto.

Proposição 2.13.2 *O funcional $|\cdot|_{W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)} : W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$|u|_{W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)} \doteq |u|_{L^p(I,\mathbb{R}^m)} + |u'|_{L^p(I,\mathbb{R}^m)}$$

define uma norma em $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$.

Observação 2.13.3 *Será esta a norma que consideraremos em $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$.*

Definição 2.13.4 *Seja $u \in W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)$. Então mostra-se que a função g que surge na definição 2.13.1 é determinada, de forma única, por u. Assim, definimos a derivada fraca u' de u pondo $u' \doteq g$.*

[4] O suporte de uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ é, por definição, o conjunto

$$\operatorname{supt} \varphi \doteq \overline{\{t \in I : \varphi \neq 0\}}.$$

Observação 2.13.5 *Se u é um elemento de $C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^m)$, o conjunto de todas as funções de classe C^1 definidas no fecho de I e com valores em $\mathbb{R}^m$, então $u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$. Além disso, a derivada usual de u coincide com a derivada fraca.*

Proposição 2.13.6 *Seja $u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$. Então existe uma função $\overline{u} \in C(\overline{I}, \mathbb{R}^m)$ tal que*

$$u = \overline{u} \text{ quase sempre em } I$$

e, além disso, vale o teorema fundamental do cálculo:

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt, \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração:
Ver [9], teorema VIII.2.

Observação 2.13.7 *Note-se que o teorema anterior afirma que se uma função u pertence ao espaço $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ então u admite um representante contínuo, isto é, existe uma função contínua que pertence à classe de equivalência de u para a relação $u \sim v$ se $u = v$ quase sempre. Assim, substituiremos sempre u pelo seu representante contínuo. Isto permitirá usar expressões como "o valor de u em...", em particular, podemos definir $u(a)$ e $u(b)$ como sendo $\lim_{t \to a^+} u(t)$ e $\lim_{t \to b^-} u(t)$, respectivamente.*

Proposição 2.13.8 *O espaço $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ é um espaço de Banach para qualquer $1 \leq p \leq \infty$; é reflexivo se $1 < p < \infty$ e é separável se $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração:
Ver [9], teorema VIII.1.

2.13.2 Um teorema de representação

Proposição 2.13.9 *Seja $L \in (W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m))'$. Então existe uma função $v = (v_1, v_2) \in L^{p'}(I, \mathbb{R}^m) \times L^{p'}(I, \mathbb{R}^m)$ tal que*

$$L(u) = \int_I v_1(t)\, u(t)\, dt + \int_I v_2(t)\, u'(t)\, dt, \quad \forall u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m). \tag{2.2}$$

Além disso,

$$|L|_{(W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m))'} = \inf \left(|v_1|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)} + |v_2|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{p}} = \min \left(|v_1|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)} + |v_2|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde o ínfimo é tomado no conjunto de todas as funções $v = (v_1, v_2) \in L^{p'}(I, \mathbb{R}^m) \times L^{p'}(I, \mathbb{R}^m)$ para as quais é válida a igualdade 2.2, qualquer que seja a função $u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$.

Demonstração:
Ver [1], teorema 3.8.

2.13.3 Convergências forte e fraca

Observação 2.13.10 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizer que uma sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ converge fortemente para a função $u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ ($(u_n) \to u$) é equivalente a afirmar que*

$$\left(|u_n - u|_{W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)} \right) \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Observação 2.13.11 *Seja $1 \leq p < \infty$. Uma sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ converge fracamente para a função $u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^m)$ ($(u_n) \rightharpoonup u$) se e só se*

$$\begin{cases} (i) & \left(\int_0^T u_n(t)\, \psi(t)\, dt \right) \underset{n \to \infty}{\to} \left(\int_0^T u(t)\, \psi(t)\, dt \right), \quad \forall \psi \in L^{p'}(I, \mathbb{R}^m), \\ (ii) & \left(\int_0^T u_n'(t)\, \psi(t)\, dt \right) \underset{n \to \infty}{\to} \left(\int_0^T u'(t)\, \psi(t)\, dt \right), \quad \forall \psi \in L^{p'}(I, \mathbb{R}^m). \end{cases}$$

Proposição 2.13.12 *Existe uma constante C (dependendo apenas de $m(I)$) tal que*

$$|u|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \leq C\,|u|_{W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m), \ \ \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Além disso, se $(u_n) \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^m)$ então

(i) *se $p > 1$, existe uma subsucessão (u_{n_k}) de (u_n) tal que $(u_{n_k}) \to u$ em $L^\infty(I,\mathbb{R}^m)$;*

(ii) *se $p = 1$, existe uma subsucessão (u_{n_k}) de (u_n) tal que $(u_{n_k}) \to u$ em $L^q(I,\mathbb{R}^m)$, $1 \leq q < \infty$.*

Demonstração:
Ver [9], teorema VIII.7.

2.14 Funções absolutamente contínuas

Para funções suaves, os conceitos de derivada (no sentido clássico) e de derivada fraca coincidem. No entanto, para funções não-suaves, por exemplo, para funções que são apenas diferenciáveis quase sempre no sentido clássico, as duas derivadas podem ser diferentes. A maior classe de funções para as quais estes dois conceitos coincidem é a classe das funções absolutamente contínuas.

Seja $I = (a\ b) \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.14.1 *Seja $u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$. Então modificando possivelmente u num conjunto de medida nula, temos que u pertence a $C(\overline{I},\mathbb{R}^m)$* [5] *e é diferenciável quase sempre no sentido clássico. Além disso, a derivada clássica $[u']$ coincide quase sempre com a derivada fraca u'. Mais, para quaisquer $x, y \in \overline{I}$, vale o teorema fundamental do cálculo:*

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,dt.$$

Definição 2.14.2 *Uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ diz-se* ***absolutamente contínua*** *se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a,b)$, $k = 1, 2, ..., N$ verificando $\sum_{k=1}^N |\beta_k - \alpha_k| < \delta$, se tiver $\sum_{k=1}^N |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon$.*

A classe de todas as funções absolutamente contínuas definidas em $I = (a,b)$ com valores em $\mathbb{R}$ será notada por $AC(I,\mathbb{R}^m)$.

Observação 2.14.3 *Evidentemente, qualquer função $u \in AC(I,\mathbb{R}^m)$ é uniformente contínua em I, pelo que podemos sempre prolongá-la por continuidade, a $\overline{I}$.*

Também é evidente que

Proposição 2.14.4 *Qualquer função $u : I \to \mathbb{R}^m$ que verifique a condição de Lipschitz:*

$$|u(x) - u(y)| \leq K\,|x - y|, \ \ \forall x, y \in I$$

para algum $K > 0$, é absolutamente contínua.

Proposição 2.14.5 **(i)** *Se as funções $u_i(\cdot) : I \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$ são absolutamente contínuas e $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ então a função $c_1 u_1(\cdot) + c_2 u_2(\cdot)$ é absolutamente contínua.*

(ii) *Se a função $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ verifica a condição de Lipschitz no conjunto $H \subset G \subset R^n$, a função $u(\cdot) : I \to G$ é absolutamente contínua e $\operatorname{im} u(\cdot) \doteq \{y : y = u(t), t \in I\} \subset H$, então a função $\varphi(u(\cdot)) : I \to \mathbb{R}^m$ é absolutamente contínua.*

Demonstração:
Ver [2], página 128.

Proposição 2.14.6 *Tem-se*

$$AC(I,R^m) = W^{1,1}(I,R^m).$$

Mais precisamente, qualquer função $u \in AC(I,R^m)$ possui derivada clássica $[u']$ em quase todos os pontos de I, $[u'] \in L^1(I,R^m)$ e $[u']$ é a derivada fraca de u.

Reciprocamente, qualquer função $u \in W^{1,1}(I,R^m)$, a menos uma modificação num conjunto de

[5] $C(\overline{I},\mathbb{R}^m)$ denota o conjunto de todas as funções contínuas definidas no fecho de I com valores em $\mathbb{R}^m$.

medida nula, é uma função absolutamente contínua.

Finalmente, $u \in AC(I, R^m)$ *se e só se* u *é diferenciável, no sentido clássico, em quase todos os pontos de* I, $[u'] \in L^1(I, R^m)$ *e vale o teorema fundamental do cálculo, isto é, para quaisquer* $x, y \in I$, *temos*

$$u(x) - u(y) = \int_y^x [u'(t)]\, dt.$$

Demonstração:
Ver [8], teorema 2.17.

Proposição 2.14.7 *Se* $g \in L^1(I, R^m)$ *e, para cada* $x \in (a, b)$,

$$f(x) \doteq \int_a^x g(t)\, dt,$$

então f *é absolutamente contínua e* $[f'(x)] = g(x)$ *quase sempre em* (a, b).

Demonstração:
Ver [8], teorema 2.32.

Proposição 2.14.8 *Qualquer função lipschitziana* $u : I \to \mathbb{R}^m$ *possui derivada, no sentido clássico,* $[u']$, *em quase todos os pontos de* I *e* $[u'] \in L^\infty(I, R^m)$. *Em particular,* u *pertence a todos os espaços de Sobolev* $W^{1,p}(I, R^m)$.

Demonstração:
Ver [8], corolário 2.23.

Note-se que da proposição anterior resulta que se $u : I \to \mathbb{R}^m$ é lischitziana, então $u \in W^{1,\infty}(I, R^m)$. Na verdade também temos a recíproca:

Proposição 2.14.9 *Uma função* $u \in L^\infty(I, R^m)$ *pertence* $W^{1,\infty}(I, R^m)$ *se e só se existe uma constante* C *tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \quad \text{para quase todos } x, y \in I.$$

Demonstração:
Ver [9], corolário VIII.4.

2.15 Conjuntos convexos

Seja V um espaço vectorial real.

Definição 2.15.1 *Se* u_1 *e* u_2 *são dois elementos de* V, u_1 *e* u_2 *dizem-se os* ***extremos*** *do* ***segmento de recta*** *denotado por* $[u_1, u_2]$, *onde*

$$[u_1, u_2] \doteq \{\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Definição 2.15.2 *Um* ***conjunto*** $A \subset V$ *diz-se* ***convexo*** *se, para qualquer par* (u_1, u_2) *de elementos de* A, *o segmento* $[u_1, u_2]$ *está contido em* A *(isto é,* A *é convexo se e só se para quaisquer* $u_1, u_2 \in A$ *e* $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 \in A$*).*

Proposição 2.15.3 *Sejam* $K_1, K_2 \subset V$ *conjuntos convexos e seja* α *um número real. Então os conjuntos* αK_1 *e* $K_1 + K_2$ *são convexos.*

Demonstração:
Ver [29], lema V.1.4.

Definição 2.15.4 *Dados* m *pontos* $u_1, u_2, ..., u_m$ *em* V, *qualquer ponto* u *da forma* $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m$ *com* $\lambda_s \geq 0$, $s = 1, 2, ..., m$ *e* $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 1$, *diz-se uma* ***combinação convexa*** *de* $u_1, u_2, ..., u_m$.

Proposição 2.15.5 *Se* V *é um espaço vectorial topológico, o fecho e o interior (possivelmente vazio) de um conjunto convexo* $A \subset V$ *são conjuntos convexos.*

Demonstração:
Ver [29], teorema V.2.1.

Definição 2.15.6 *Dado um qualquer subconjunto A de V, denotamos por $co(A)$ (ou $co\,A$) o mais pequeno conjunto convexo em V contendo A. O conjunto $co(A)$ diz-se o* ***invólucro convexo*** *de A.*

Proposição 2.15.7 *Sejam A e B subconjuntos de V e seja α um número real. Então*

(i) $co(\alpha A) = \alpha\, co(A)$

(ii) $co(A+B) = co(A) + co(B)$.

Demonstração:
Ver [29], lema V.2.4.

Proposição 2.15.8 ***(Teorema de Carathéodory)*** *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Então qualquer elemento do invólucro convexo de A, $co(A)$, é combinação convexa de, no máximo, $n+1$ pontos adequados de A.*

Demonstração:
Ver [43], teorema 17.1.

Definição 2.15.9 *Diremos que um conjunto de $m+1$ pontos de $\mathbb{R}^n$, $b_0, b_1, ..., b_m$ é* ***independente*** *se os vectores $b_1 - b_0, ..., b_m - b_0$ são linearmente independentes.*

Proposição 2.15.10 *O invólucro convexo de um subconjunto finito $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ consiste em todos os vectores da forma $\lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m$ com $\lambda_s \geq 0$, $s = 0, 1, ..., m$ e $\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$.*

Demonstração:
Ver [43], corolário 2.3.1.

Definição 2.15.11 *Se $\{b_0, b_1, ..., b_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto independente, o seu invólucro convexo diz-se um* ***simplexo m-dimensional*** *em $\mathbb{R}^n$ e $b_0, b_1, ..., b_m$ dizem-se os* ***vértices*** *do simplexo.*

Proposição 2.15.12 *Qualquer simplexo m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.*

Demonstração:
Ver [43], página 155.

Definição 2.15.13 *Seja V um espaço vectorial topológico e A um qualquer subconjunto de V. Então a intersecção de todos os conjuntos convexos fechados contendo A é o mais pequeno conjunto convexo fechado contendo A e é o fecho do invólucro convexo de A (e não o invólucro convexo do fecho de A). Este conjunto diz-se o* ***invólucro convexo fechado*** *de A e denota-se por $\overline{co}(A)$.*

Proposição 2.15.14 *Sejam A e B subconjuntos de um espaço vectorial topológico V e seja α um número real. Então*

(i) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$

(ii) $\overline{co}(\alpha A) = \alpha\, \overline{co(A)}$

(iii) *Se $\overline{co}(A)$ é compacto então $\overline{co}(A+B) = \overline{co}(A) + \overline{co}(B)$.*

Demonstração:
Ver [29], lema V.2.4.

2.16 Funções convexas

2.16.1 Definição

Seja V um espaço vectorial real.

Definição 2.16.1 *Uma função F definida num subconjunto convexo A de V com valores em $[-\infty, +\infty]$ diz-se* ***convexa*** *em A se, para quaisquer $u, v \in A$,*

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq F(u) + (1-\lambda)F(v), \ \forall \lambda \in [0,1], \tag{2.3}$$

sempre que o membro direito da desigualdade esteja definido.

Observação 2.16.2 *A desigualdade anterior deverá, portanto, ser válida a não ser que se tenha $F(u) = -F(v) = \pm\infty$.*

Definição 2.16.3 *Uma função $F : A \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***côncava*** *se $-F$ é convexa.*

Proposição 2.16.4 *Se F é convexa então, para qualquer conjunto finito $u_1, ..., u_n$ de elementos de A e para qualquer família $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de números reais positivos com soma unitária, tem-se*

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(u_i)$$

sempre que o membro direito desta desigualdade esteja definido.

Demonstração:
Ver [30], página 7.

Proposição 2.16.5 ***(Desigualdade de Jensen)*** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado, $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

$$f\left(\frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega u(x)\, dx\right) \leq \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))\, dx.$$

Demonstração:
Ver [39], página 21.

É fácil ver que

Proposição 2.16.6 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é uma função convexa, então os conjuntos*

$$\{u \in V : F(u) \leq a\} \ \text{ e } \ \{u \in V : F(u) < a\}$$

são, para cada $a \in [-\infty, +\infty]$, subconjuntos convexos de V.

Definição 2.16.7 *Seja F uma aplicação de V em $[-\infty, +\infty]$. O conjunto*

$$dom\, F \doteq \{u \in V : F(u) < +\infty\}$$

diz-se o ***domínio efectivo*** *de F.*

A proposição seguinte segue imediatamente das definições de função convexa e de domínio efectivo.

Proposição 2.16.8 *O domínio efectivo de uma função convexa é um conjunto convexo.*

Observação 2.16.9 *Note-se que se F é uma função de $A \subset V$ em $\mathbb{R}$, podemos associar-lhe uma função $\widetilde{F}$ definida em V por*

$$\widetilde{F}(u) \doteq \begin{cases} F(u) & se\ u \in A \\ +\infty & se\ u \notin A. \end{cases}$$

Assim, $\widetilde{F}$ é convexa se e só se $A \subset V$ é convexo e $F : A \to \mathbb{R}$ é convexa.

Definição 2.16.10 *O* ***epigráfico*** *de uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é o conjunto*

$$epi\, F \doteq \{(u, a) \in V \times \mathbb{R} : F(u) \leq a\}.$$

Proposição 2.16.11 *Uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é convexa se e só se o seu epigráfico é um conjunto convexo.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 2.1.

Observação 2.16.12 *A proposição anterior é muitas vezes usada como definição de função convexa, dado que na desigualdade (2.3) pode ter-se, no membro direito, a expressão $\infty - \infty$.*

Proposição 2.16.13 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é uma função convexa e λ é um número real positivo, então λF é também uma função convexa.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 2.2.

Proposição 2.16.14 *Se F e G são funções convexas de V em $[-\infty, +\infty]$, então $F + G$ é convexa. Convencionamos que $(F + G)(u) = +\infty$ se $F(u) = -G(u) = \pm\infty$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 2.2.

Proposição 2.16.15 *Se $(F_i)_{i \in I}$ é uma qualquer família de funções convexas de V em $[-\infty, +\infty]$, então o seu supremo pontual $F = \sup\limits_{i \in I} F_i$ é uma função convexa.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 2.2.

Definição 2.16.16 *Sejam A um subconjunto convexo de V e F uma aplicação de A em $\mathbb{R}$. Dizemos que F é* ***estritamente convexa*** *se é convexa e a desigualdade estrita de (2.3) é verificada para quaisquer $u, v \in A$ tais que $u \neq v$ e para qualquer $\lambda \in (0, 1)$.*

Definição 2.16.17 *Uma função convexa $F : V \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***própria*** *se o seu epigráfico é não-vazio e não contém rectas verticais, isto é, se nunca toma o valor $-\infty$ e não é identicamente igual a $+\infty$.*

Assim, F é uma função convexa própria se o conjunto convexo $C = dom\, F$ é não-vazio e a restrição de F a C é uma função com valores finitos. Por outras palavras, uma função convexa própria em V é uma função obtida tomando uma função real convexa num subconjunto convexo e não-vazio de V e prolongando-a a todo o V pondo $F(u) = +\infty$ para $u \notin C$.

Definição 2.16.18 *Uma função convexa que não é própria diz-se* ***imprópria***.

Proposição 2.16.19 *Se F é uma função convexa imprópria então $F(x) = -\infty$, qualquer que seja o $x \in int\,(dom\, F)$. Assim, qualquer função convexa imprópria é necessariamente infinita excepto, talvez, nos pontos da fronteira do seu domínio efectivo.*

Demonstração:
Ver [43], teorema 7.2.

2.16.2 Continuidade

Nesta secção enunciaremos apenas resultados de continuidade de funções convexas definidas em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.16.20 *Qualquer função convexa f definida em $\mathbb{R}^n$ é contínua no interior do seu domínio efectivo.*

Demonstração:
Ver [43], teorema 10.1.

Consequentemente

Proposição 2.16.21 *Qualquer função convexa finita f definida em $\mathbb{R}^n$ é contínua.*

Definição 2.16.22 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ diz-se **lipschitziana** (em X) sempre que, para algum real não-negativo k, se tiver*

$$|f(x) - f(x')| \leq k\,|x - x'| \tag{2.4}$$

quaisquer que sejam os elementos x e x' de X.

Definição 2.16.23 *Diremos que f é **lipschitziana numa vizinhança de** x se, existirem $\varepsilon > 0$, e $k > 0$ tais que f satifaz a condição de Lipschitz (2.4), no conjunto $x + \varepsilon B_1(0)$, onde $B_1(0)$ denota a bola unitária em $\mathbb{R}^n$ (assim, $x + \varepsilon B_1(0)$ é a bola aberta de raio ε e centro x).*

Proposição 2.16.24 *Qualquer função convexa f definida em $\mathbb{R}^n$ é localmente lipschitziana no interior do seu domínio efectivo, isto é, é lipschitziana numa vizinhança de cada ponto $x_0 \in int(dom\, f)$. Consequentemente, é lipschitziana em qualquer subconjunto compacto de $int(dom\, f)$.*

Demonstração:
Ver [40], teorema A.

Proposição 2.16.25 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ uma função convexa tal que $|f(x)| \leq N$, qualquer que seja o x num conjunto aberto convexo U contendo uma vizinhança de raio δ de um subconjunto V. Então f é lipschitziana em V, com constante de Lipschitz $\frac{2N}{\delta}$.*

Demonstração:
Ver [17], página 35.

2.17 Funções semicontínuas inferiormente

2.17.1 Definição

Seja V um espaço vectorial real topológico localmente convexo.

Definição 2.17.1 *Diremos que uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é **semicontínua inferiormente num ponto** $x \in V$ se*

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)$$

*para qualquer sucessão $(x_h) \subset V$ convergente para $x \in V$. Diremos que F é **semicontínua inferiormente** se F é semicontínua inferiormente em cada ponto $x \in V$.*

Definição 2.17.2 *Uma função F diz-se **semicontínua superiormente** se $-F$ é semicontínua inferiormente.*

Observação 2.17.3 *Note-se que uma função é contínua se e só se é, simultaneamente, semicontínua inferiormente e superiormente.*

A seguinte proposição segue imediatamente da definição anterior.

Proposição 2.17.4 *Uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é semicontínua inferiormente num ponto $a \in V$ se e só se, para cada $\lambda < F(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que $\lambda < F(u)$, $\forall u \in U$.*

Demonstração:
Ver [15], capítulo II, proposição 7.2.

Proposição 2.17.5 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$F : V \to [-\infty, +\infty]$ é semicontínua inferiormente;*

(ii) *qualquer que seja o $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in V : F(x) > t\}$ é aberto;*

(iii) *qualquer que seja o $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in V : F(x) \leq t\}$ é fechado;*

(iv) *$epi\, F$ é um subconjunto fechado de $V \times \mathbb{R}$.*

Demonstração:
Ver [15], capítulo II, proposições 8.1 e 8.3.

As seguintes propriedades de estabilidade de uma família de funções semicontínuas inferiormente são fundamentais:

Proposição 2.17.6 *Seja* $(F_i)_{i\in I}$ *uma família de funções semicontínuas inferiormente definidas em* V *com valores em* $[-\infty,+\infty]$. *Então a função* $F : V \to [-\infty,+\infty]$ *definida por* $F(x) = \sup_{i\in I} F_i(x)$ *é semicontínua inferiormente. Se* I *é finito, então a função* $G : V \to [-\infty,+\infty]$ *definida por* $G(x) = \inf_{i\in I} F_i(x)$ *é semicontínua inferiormente.*

Demonstração:
Ver [15], capítulo II, teorema 8.6.

A seguinte afirmação segue imediatamente da definição.

Proposição 2.17.7 *Se* F *e* G *são funções semicontínuas inferiormente definidas em* V *com valores em* $[-\infty,+\infty]$ *e se* $F+G$ *está bem definida em* V *(isto é,* $(-\infty,+\infty) \neq (F(x), G(x)) \neq (+\infty,-\infty)$, *qualquer que seja o* $x \in X$*), então* $F+G$ *é semicontínua inferiormente.*

Proposição 2.17.8 *Seja* $F : V \to [-\infty,+\infty]$ *uma função convexa. Então* F *é semicontínua inferiormente na topologia forte de* V *se e só se é semicontínua inferiormente na topologia fraca de* X.

Demonstração:
Ver [25], proposição 1.18.

Proposição 2.17.9 *Seja* E *um espaço compacto e seja* F *uma função definida em* E *com valores em* $[-\infty,+\infty]$. *Suponhamos que* F *é semicontínua inferiormente. Então existe pelo menos um ponto* $a \in E$ *tal que* $F(a) = \inf_{x\in E} F(x)$. *Analogamente, se* F *é semicontínua superiormente, existe pelo menos um* $b \in E$ *tal que* $F(b) = \sup_{x\in E} F(x)$.

Demonstração:
Ver [15], capítulo II, teorema 10.1.

2.17.2 Regularização semicontínua inferiormente

Definição 2.17.10 *Seja* F *uma aplicação de* V *em* $[-\infty,+\infty]$. *A maior função semicontínua inferiormente minorante de* F *diz-se a* ***regularização*** *semicontínua inferiormente (ou o* ***invólucro*** *semicontínuo inferiormente) de* F *e será notada por* $\overline{F}$.

A função $\overline{F}$ é o supremo pontual das funções semicontínuas inferiormente minorantes de F e é caracterizada na seguinte proposição:

Proposição 2.17.11 *Seja* $F : V \to [-\infty,+\infty]$ *e seja* $\overline{F}$ *a sua regularização semicontínua inferiormente. Tem-se:*

$$epi\,\overline{F} = \overline{epi\,F}$$

$$\overline{F}(u) = \liminf_{v\to u} F(v), \quad \forall u \in V,$$

onde $\overline{epi\,F}$ *denota o fecho do conjunto* $epi\,F$.

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, corolário 2.1.

2.18 Γ−Regularização

Seja V um espaço vectorial real topológico localmente convexo.

Definição 2.18.1 *Uma* ***função afim contínua*** *definida em* V *é uma função do tipo*

$$v(u) = l(u) + \alpha,$$

onde l *é um funcional linear contínuo e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.18.2 *O conjunto das funções $F : V \to [-\infty, +\infty]$ que são, pontualmente, o supremo de uma família de funções afins contínuas é denotado por $\boldsymbol{\Gamma}(V)$. Notamos por $\boldsymbol{\Gamma}_0(V)$ o subconjunto de $\Gamma(V)$ das funções em $\Gamma(V)$ não identicamente iguais a $\pm\infty$.*

Proposição 2.18.3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $F \in \Gamma(V)$;

(ii) *F é uma função convexa semicontínua inferiormente de V em $[-\infty, +\infty]$ e se F toma o valor $-\infty$ nalgum ponto de V, então F é identicamente igual a $-\infty$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 3.1.

Proposição 2.18.4 *Sejam F e G duas funções definidas em V com valores em $[-\infty, +\infty]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *G é, pontualmente, o supremo das funções afins contínuas minorantes de F;*

(ii) *G é a maior função minorante de F em $\Gamma(V)$.*

Demonstração:
Ver [30], página 15.

Definição 2.18.5 *Nas condições da proposição anterior, G diz-se a **Γ-regularização** de F.*

Observação 2.18.6 *Em particular, se $F \in \Gamma(V)$, então F coincide com a sua Γ-regularização.*

Proposição 2.18.7 *Seja $F : V \to [-\infty, +\infty]$ e G a sua Γ-regularização. Se existe uma função afim contínua minorante de F, então*

$$epi\, G = \overline{co}\, epi\, F$$

onde $\overline{co}\, epi\, F$ denota o invólocro convexo fechado do epigráfico F, isto é, o mais pequeno conjunto convexo fechado que contém o epigráfico de F.

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 3.2.

Proposição 2.18.8 *Seja $F : V \to [-\infty, +\infty]$ e seja G a Γ-regularização de F. Então*

(i) $G \leq \overline{F} \leq F$,

e

(ii) *se F é convexa e admite uma função contínua como minorante, então $\overline{F} = G$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 3.3.

2.19 Funções polares

2.19.1 Definição

No que segue, V é um espaço vectorial real topológico localmente convexo e V' denota o dual de V, isto é, o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos em V.
Se $u^* \in V'$ e $u \in V$, em vez de $u^*(u)$, escreveremos, como é habitual, $\langle u, u^* \rangle$.

Seja F uma função de V em $[-\infty, +\infty]$. Se $u^* \in V'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a função afim contínua $u \mapsto \langle u, u^* \rangle - \alpha$ é minorante de F em V se e só se

$$\alpha \geq \langle u, u^* \rangle - F(u), \quad \forall u \in V$$

ou, se definirmos

$$F^*(u^*) \doteq \sup_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}, \tag{2.5}$$

se e só se

$$\alpha \geq F^*(u^*).$$

Definição 2.19.1 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$, a fórmula (2.5) define uma função de V' em $[-\infty, +\infty]$, denotada por F^* e denominada a **função polar** (ou **função conjugada**) de F.*

Observação 2.19.2 *Em (2.5) podemos restringir-nos aos $u \in domF$:*

$$F^*(u^*) \doteq \sup_{u \in domF} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}. \tag{2.6}$$

Assim, a função F^* é, pontualmente, o supremo da família de funções afins contínuas $\langle u, . \rangle - F(u)$, $u \in domF$, de V' em $[-\infty, +\infty]$, pelo que

Proposição 2.19.3 *A função $F^* \in \Gamma(V')$. Em particular, F^* é convexa e semicontínua inferiormente.*

Proposição 2.19.4 *A função conjugada de F, F^* é própria se e só se F é própria.*

Demonstração:
Ver [43], teorema 12.2.

Observação 2.19.5 *Note-se que de (2.6) resulta que*

$$\langle u, u^* \rangle \leq F(u) + F^*(u^*), \ \forall u \in domF, \ \forall u^* \in V'.$$

Os pares que satisfazem a igualdade constituem o gráfico de uma multifunção, $\tilde{\partial} F$, denominada o subdiferencial de F.

Proposição 2.19.6 *Seja $F : V \to [-\infty, +\infty]$ e F^* a sua polar. Tem-se*

(i) $F^*(0) = -\inf_{u \in V} F(u)$;

(ii) *se $F \leq G$, então $F^* \geq G^*$;*

(iii) $\left(\inf_{i \in I} F_i\right)^* = \sup_{i \in I} F_i^*$, *para qualquer família $(F_i)_{i \in I}$ de funções definidas em V;*

(iv) $\left(\sup_{i \in I} F_i\right)^* \leq \inf_{i \in I} F_i^*$, *para qualquer família $(F_i)_{i \in I}$ de funções definidas em V;*

(v) $(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*\left(\frac{u^*}{\lambda}\right), \ \forall \lambda > 0$;

(vi) $(F + \alpha)^* = F^* - \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(vii) $(F_a)^*(u^*) = F^*(u^*) + \langle a, u^* \rangle$, *onde* $F_a(v) \doteq F(v - a)$, *para cada* $a \in V$.

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, página 17.

2.19.2 Bipolares

Definição 2.19.7 *Seja F uma função definida em V com valores em $[-\infty, +\infty]$. A **função bipolar** de F, denotada por F^{**}, é a função $F^{**} : V \to [-\infty, +\infty]$ definida por*

$$F^{**}(u) \doteq \sup_{u^* \in V'} \{\langle u, u^* \rangle - F^*(u^*)\}.$$

Observação 2.19.8 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$ então $F^{**} \in \Gamma(V)$. Em particular, F^{**} é convexa e semicontínua inferiormente.*

Proposição 2.19.9 *Seja F uma função de V em $[-\infty, +\infty]$. Então a sua bipolar F^{**} é a sua $\Gamma-$regularização. Em particular, se $F \in \Gamma(V)$ temos $F^{**} = F$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 4.1.

Proposição 2.19.10 *Para qualquer função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ temos $F^* = F^{***}$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, corolário 4.1.

Proposição 2.19.11 *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^n$ com valores em $(-\infty,+\infty]$. Então*

$$f^{**}(x)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j f(x_j):\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\xi_j=\xi,\ \lambda=(\lambda_1,...,\lambda_{n+1})\in E_{n+1}\right\},$$

onde $E_{n+1}\doteq\left\{(\lambda_1,...,\lambda_{n+1})\in\mathbb{R}^n:\lambda_j\geq 0,\ \forall j\in\{1,...,n+1\},\ \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j=1\right\}.$

Demonstração:
Ver [43], corolário 17.1.5.

2.20 Subdiferenciabilidade

2.20.1 Definição

Sejam V um espaço vectorial real topológico localmente convexo, V' o seu dual e F uma aplicação de V em $[-\infty,+\infty]$.

Definição 2.20.1 *Dizemos que uma função afim contínua, l, minorante de F é* ***exacta*** *no ponto $u\in V$ se $l(u)=F(u)$.*

Necessariamente, $F(u)$ será finito e l terá a forma:

$$\begin{aligned} l(v) &= \langle v-u,u^*\rangle+F(u)\\ &= \langle v,u^*\rangle+F(u)-\langle u,u^*\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, l é necessariamente maximal: o termo constante é o maior possível, logo

$$F(u)-\langle u,u^*\rangle=-F^*(u^*).$$

Definição 2.20.2 *Uma função F de V em $[-\infty,+\infty]$ diz-se* ***subdiferenciável*** *no ponto $u\in V$ se existe uma função afim contínua minorante de F exacta em u. O declive $u^*\in V'$ de uma tal função minorante diz-se um* ***subgradiente*** *de F em u. O conjunto dos subgradientes de F em u diz-se o* ***subdiferencial*** *de F em u e é denotado por $\widetilde{\partial}F(u)$.*

Observação 2.20.3 *Se F não é subdiferenciável em u então $\widetilde{\partial}F(u)=\emptyset$.*

Assim, temos a seguinte caracterização para o subdiferencial:

Proposição 2.20.4 *Seja $F:V\to[-\infty,+\infty]$. Então $u^*\in\widetilde{\partial}F(u)$ se e só se $F(u)$ é finito (isto é, se $u\in domF$) e*

$$\langle v-u,u^*\rangle+F(u)\leq F(v),\quad\forall v\in V.$$

Note-se que esta desigualdade tem significado geométrico simples: se $u^*\in\widetilde{\partial}F(u)$ então a função afim $l(v)=\langle v-u,u^*\rangle+F(u)$ é um hiperplano suporte não-vertical do conjunto convexo *epi* F, no ponto$(u,F(u))$.

Proposição 2.20.5 *Tem-se:*

(i) *se $\widetilde{\partial}F(u)\neq\emptyset$ então $F(u)=F^{**}(u)$*

(ii) *se $F(u)=F^{**}(u)$ então $\widetilde{\partial}F(u)=\widetilde{\partial}F^{**}(u)$.*

Demonstração:
Ver [30], página 21.

Proposição 2.20.6 *Seja F uma função de V em $[-\infty,+\infty]$ e F^* a sua polar. Então $u^*\in\widetilde{\partial}F(u)$ se e só se*

$$F(u)+F^*(u^*)=\langle u,u^*\rangle.$$

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 5.1.

Proposição 2.20.7 *Seja F uma função de V em $[-\infty,+\infty]$. O conjunto $\tilde{\partial}F(u)$ (possivelmente vazio) é convexo e $\sigma(V',V)$ −fechado em V'.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, corolário 5.1.

Daqui resulta que

Proposição 2.20.8 *Se $f:\mathbb{R}^n \to [-\infty,+\infty]$ é uma função convexa então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $\tilde{\partial}f(x)$ (possivelmente vazio) é convexo e fechado em $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 2.20.9 *Para qualquer função F de V em $[-\infty,+\infty]$ temos*

$$u^* \in \tilde{\partial}F(u) \Rightarrow u \in \tilde{\partial}F^*(u^*).$$

Além disso, se $F \in \Gamma(V)$, isto é, se F é convexa e semicontínua inferiormente, então

$$u^* \in \tilde{\partial}F(u) \Leftrightarrow u \in \tilde{\partial}F^*(u^*).$$

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, corolário 5.2.

Proposição 2.20.10 *Seja F uma função convexa de V em $[-\infty,+\infty]$, finita e contínua num ponto $u \in V$. Então $\tilde{\partial}F(v) \neq \emptyset$ qualquer que seja o $v \in int(domF)$; em particular, $\tilde{\partial}F(u) \neq \emptyset$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 5.2.

Proposição 2.20.11 *Seja V um espaço de Banach. Então qualquer função convexa própria $F: V \to [-\infty,+\infty]$ é subdiferenciável quase sempre (mais precisamente, num conjunto denso) em $domF$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, observação 5.1.

2.20.2 Cálculo subdiferencial

A seguinte proposição segue imediatamente da definição de sbdiferencial.

Proposição 2.20.12 **(i)** *Sejam $F: V \to [-\infty,+\infty]$ e $\lambda > 0$. Para cada elemento u de V temos*

$$\tilde{\partial}F(\lambda u) = \lambda\tilde{\partial}F(u).$$

(ii) *Sejam F_1 e F_2 funções de V em $[-\infty,+\infty]$. Então, qualquer que seja $u \in V$, temos*

$$\tilde{\partial}(F_1+F_2)(u) \supset \tilde{\partial}F_1(u) + \tilde{\partial}F_2(u).$$

Proposição 2.20.13 *Se F_1 e F_2 são elementos de $\Gamma(V)$ e se existe um ponto $\overline{u} \in domF_1 \cap domF_2$ onde F_1 é contínua, temos*

$$\tilde{\partial}(F_1+F_2)(u) = \tilde{\partial}F_1(u) + \tilde{\partial}F_2(u), \ \forall u \in V.$$

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 5.6.

2.20.3 Relação com a diferenciabilidade à Gâteaux

Definição 2.20.14 *Seja F uma função de V em $[-\infty,+\infty]$. Se existir o limite*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda},$$

este diz-se a ***derivada direccional*** *de f em u na direcção v, denotada por $F'(u;v)$.*

Se existe $u^* \in V'$ tal que

$$F'(u;v) = \langle v, u^* \rangle, \ \forall v \in V$$

dizemos que F é ***diferenciável à Gâteaux*** *em u e que u^* é a* ***derivada de Gâteaux*** *de F no ponto u, denotada por $F'(u)$.*

Observação 2.20.15 *A derivada de Gâteaux de F no ponto u, se existe, é única e caracteriza-se por*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = \langle v, F'(u) \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Observação 2.20.16 *Se $V = \mathbb{R}$ então os conceitos de diferenciabilidade e diferenciabilidade à Gâteaux coincidem:*

Se $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ e $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto onde f é finita, dizemos que f é ***diferenciável*** *em x se existir um vector $x^* \in \mathbb{R}^n$ (necessariamente único) tal que*

$$f(z) = f(x) + \langle z - x, x^* \rangle + o(|z - x|),$$

isto é, tal que

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x) - \langle z - x, x^* \rangle}{|z - x|} = 0.$$

Um tal x^*, se existe, diz-se o ***gradiente*** *de f em x e é notado por $\nabla f(x)$.*

Suponhamos que f é diferenciável em x. Então, por definição, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, temos

$$0 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x) - \langle \lambda y, \nabla f(x) \rangle}{\lambda |y|} = \frac{f'(x;y) - \langle \lambda y, \nabla f(x) \rangle}{|y|}.$$

Donde $f'(x;y)$ existe e é uma função linear de y:

$$f'(x;y) = \langle y, \nabla f(x) \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, para $i = 1, ..., n$,

$$\langle e_i, \nabla f(x) \rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda e_i) - f(x)}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x),$$

onde e_i é o vector que constitui a i-ésima coluna da matriz identidade $n \times n$, e ξ_i denota a i-ésima componente de x. Daqui resulta que

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial \xi_n}(x) \right).$$

Proposição 2.20.17 *Se f é uma função convexa própria definida em $\mathbb{R}^n$ então o conjunto $\mathcal{D}(f)$, dos pontos onde f é diferenciável, é um subconjunto denso de $int(domf)$ e o seu complementar em $int(domf)$ é um conjunto de medida nula. Além disso, a função $\nabla f : x \mapsto \nabla f(x)$ é uma função contínua em $\mathcal{D}(f)$.*

Demonstração:
Ver [43], teorema 25.5.

Proposição 2.20.18 *Seja F uma função convexa de V em $[-\infty, +\infty]$. Se F é diferenciável à Gâteaux em $u \in V$ então F é subdiferenciável em u e $\widetilde{\partial} F(u) = \{F'(u)\}$.*

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 5.3.

Desta proposição e da proposição 2.20.17 resulta que

Proposição 2.20.19 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa então f é diferenciável em quase todo o ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Além dissso tem-se $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$, qualquer que seja o x onde f é diferenciável.*

A convexidade de uma função diferenciável à Gâteaux pode ser caracterizada da seguinte forma:

Proposição 2.20.20 *Seja F uma função diferenciável à Gâteaux definida num conjunto convexo $A \subset V$, com valores em $\mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *F é convexa em A;*

(ii) $F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle$, $\forall u, v \in A$.

Analogamente são equivalentes as seguintes afirmações:

(iii) *F é estritamente convexa em A;*

(iv) $F(v) > F(u) + \langle F'(u), v-u \rangle, \quad \forall u, v \in A, \ u \neq v.$

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 5.4.

Proposição 2.20.21 *Seja F uma função diferenciável à Gâteaux de $A \subset V$, A convexo, em $\mathbb{R}$. Então F é convexa se e só se a sua derivada F' é uma aplicação monótona de V em V', isto é, se*

$$\langle u_1 - u_2, F'(u_1) - F'(u_2) \rangle \geq 0, \quad \forall u_1, u_2 \in V.$$

Demonstração:
Ver [30], capítulo I, proposição 5.5.

2.21 Gradientes generalizados

2.21.1 Definição

Nesta secção consideraremos apenas funções definidas em $\mathbb{R}^n$.
Recordemos que

Proposição 2.21.1 *Qualquer função lipschitziana num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$é quase sempre diferenciável nesse conjunto.*

Notemos por $\mathcal{D}(f)$ o conjunto dos pontos de diferenciabilidade de f.

Definição 2.21.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ uma função lipschitziana numa vizinhaça de um ponto x. Definiremos o **gradiente generalizado** de f em x, como sendo o conjunto*

$$\partial f(x) \doteq co\left\{ \lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) : (x_i) \to x, \ x_i \in \mathcal{D}(f), \ \forall i \in N, \ e \ (\nabla f(x_i)) \ converge \right\}.$$

Proposição 2.21.3 *Seja f uma função lipschitziana, com constante de Lipschitz K, numa vizinhança de um ponto x. Então $\partial f(x)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ não-vazio, convexo e compacto. Além disso, para cada $\xi \in \partial f(x)$, temos $|\xi| \leq K$.*

Demonstração:
Ver [17], proposição 2.1.2.

Daqui resulta , atendendo a que qualquer função convexa é localmente lipschitziana no interior do seu domínio efectivo (proposição 2.16.24), que

Proposição 2.21.4 *Se $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é uma função convexa então, para cada $x \in int(dom f)$, o conjunto $\partial f(x)$ é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$.*

No caso de f tomar apenas valores finitos temos a seguinte

Proposição 2.21.5 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa então qualquer que seja o $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial f(x)$ é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 2.21.6 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função lipzchitziana numa vizinhança de x. Então a multifunção ∂f é semicontínua superiormente em x, isto é, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\partial f(x) \subset \partial f(x_0) + B_\varepsilon(0), \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Demonstração:
Ver [17], proposição 2.1.5.

Proposição 2.21.7 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função lipzchitziana numa vizinhança de cada ponto de um subconjunto convexo U de $\mathbb{R}^n$. Então f é convexa em U se e só se a multifunção ∂f é monótona em U, isto é, se e só se, quaisquer que sejam $x, x' \in U$,*

$$\langle x - x', \xi - \xi' \rangle \geq 0, \quad \forall \xi \in \partial f(x), \quad \forall \xi' \in \partial f(x').$$

Demonstração:
Ver [17], proposição 2.1.2.

2.21.2 Regras básicas de operação

Proposição 2.21.8 *Suponhamos que f é uma função lipschitziana numa vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$. Então, para qualquer real s, temos*
$$\partial f(sx) = s\partial f(x).$$

Demonstração:
Ver [17], proposição 2.3.1.

Proposição 2.21.9 *Seja $\{f_i\}$, $i = 1, ..., m$, uma família finita de funções lipzchitzianas numa vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Então*
$$\partial\left(\sum f_i\right)(x) \subset \sum \partial f_i(x).$$

2.21.3 Relação com o subgradiente

Proposição 2.21.10 *Se uma função convexa $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é lipschitziana numa vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, então $\partial f(x)$ coincide com o subdiferencial de f em x, isto é,*
$$\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, p \rangle, \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Demonstração:
Ver [17], proposição 2.2.7.

Portanto

Proposição 2.21.11 *Se $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é uma função convexa então o gradiente generalizado de f coincide em $int(dom f)$ com o subdiferencial de f no sentido da análise convexa.*

Em particular, se f toma apenas valores finitos, temos

Proposição 2.21.12 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então o gradiente generalizado de f coincide com o subdiferencial de f em cada $x \in \mathbb{R}^n$.*

2.22 Multifunções

2.22.1 Definição

Seja X um conjunto não-vazio.

Definição 2.22.1 *Seja Ω um conjunto não-vazio. Uma **multifunção** F de Ω em X é uma aplicação que associa a cada ponto $x \in \Omega$ um subconjunto $F(x)$ de X. Os subconjuntos $F(x)$ dizem-se os **valores** de F.*

Definição 2.22.2 *O conjunto*
$$Dom(F) \doteq \{x \in \Omega : F(x) \neq \emptyset\}$$
*diz-se o **domínio** de F.*

Definição 2.22.3 *Quando $Dom(F) = \Omega$ dizemos que a multifunção F é **estrita**.*

Definição 2.22.4 *O **gráfico** de F, $Graf(F)$, é o subconjunto do espaço $\Omega \times X$ definido por*
$$Graf(F) \doteq \{(x, y) \in \Omega \times X : y \in F(x)\}.$$

Definição 2.22.5 *A **imagem** de F, $R(F)$ (ou $\mathrm{Im}(F)$) é a união dos valores $F(x)$:*
$$R(F) \doteq \cup_{x\in\Omega} F(x).$$

Definição 2.22.6 *A **inversa** F^{-1} de F é a multifunção de $R(F)$ em X definida por*
$$x \in F^{-1}(y) \text{ se e só se } y \in F(x).$$

Definição 2.22.7 *Para uma multifunção $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definimos*
$$|F(x)| \doteq \sup\{|y| : y \in F(x)\} \leq +\infty.$$

2.22.2 Semicontinuidade superior

Sejam X e Y espaços de Banach e seja $\emptyset \neq \Omega \subset Y$. A definição de semicontinuidade superior é a seguinte:

Definição 2.22.8 *Uma multifunção $F : \Omega \to X$ diz-se* ***semicontínua superiormente no ponto*** *$x \in Dom(F)$ se para qualquer vizinhança U de $F(x)$,*

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall y \in B_\eta(x) \cap \Omega,\ F(y) \subset U.$$

Dizemos que F é ***semicontínua superiormente*** *se é semicontínua superiormente em todo o ponto do seu domínio.*

Note-se que quando $F(x)$ é compacto, F é semicontínua superiormente em x se e só se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall y \in B_\eta(x) \cap \Omega,\ F(y) \subset B_\varepsilon(F(x)).$$

Proposição 2.22.9 *Seja $F : \Omega \to X$ uma multifunção com valores fechados não-vazios. Se F é semicontínua superiormente, se os seus valores são conjuntos compactos, e se Ω é fechado então o gráfico de F é um subconjunto fechado de $\Omega \times X$. Reciprocamente, se $Graf(F)$ é fechado e $\overline{F(\Omega)}$ é compacto então F é semicontínua superiormente.*

Demonstração:
Ver [27], proposição 1.2.

Proposição 2.22.10 *Seja $F : \Omega \to X$ uma multifunção com valores não-vazios. Suponhamos que F é semicontinua superiormente e que, para cada $x \in \Omega$, o conjunto $F(x)$ é compacto. Então $F(\Omega)$ é compacto.*

Demonstração:
Ver [5], capítulo I, proposição 3.

2.22.3 Um teorema de ponto fixo

Definição 2.22.11 *Seja (X, d) um espaço métrico e seja M um subconjunto limitado de X* [6]. *A* ***medida de não-compacidade de Kuratowski*** *do conjunto M, notada por $\alpha(M)$, define-se da seguinte forma:*

$$\alpha(M) \doteq \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon > 0 : \ M \text{ admite uma cobertura finita constituida por} \\ \text{conjuntos de diâmetro menor ou igual a } \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Proposição 2.22.12 *Seja X um espaço de Banach e sejam $N, M, M_1, ..., M_n$ subconjuntos limitados de X. Então*

(i) $\alpha(\emptyset) = 0$;

(ii) $\alpha(M) = 0$ *se e só se* $\overline{M}$ *é compacto;*

(iii) $0 \leq \alpha(M) \leq diam(M)$;

(iv) *se* $M \subset N$ *então* $\alpha(M) \leq \alpha(N)$;

(v) $\alpha(M + N) \leq \alpha(M) + \alpha(N)$;

(vi) $\alpha(\beta M) = |\beta|\, \alpha(M)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$;

(vii) $\alpha(M) = \alpha(\overline{M})$;

(viii) $\alpha(\cup_{i=1}^n M_i) = \max\{\alpha(M_1), ..., \alpha(M_n)\}$;

(ix) $\alpha(M) = \alpha(co\, M) = \alpha(\overline{co}\, M)$.

Demonstração:
Ver [49], proposição 11.3.

[6] O diâmetro de M é, por definição,

$$diam(M) \doteq \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Definição 2.22.13 *Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset X$ um conjunto não-vazio e $F : \Omega \to X$ uma multifunção com valores não-vazios. Dizemos que F é uma $\alpha-$**contracção** se existe $k \in (0,1)$ tal que*

$$\alpha (F(B)) \leq k\alpha (B),$$

qualquer que seja o subconjunto limitado B de Ω.

Definição 2.22.14 *Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset X$ um conjunto não-vazio e $F : \Omega \to X$ uma multifunção com valores não-vazios. Dizemos que $x \in \Omega$ é um **ponto fixo** da multifunção F se $x \in F(x)$. Notamos por $Fix(F)$ o conjunto dos pontos fixos de F.*

Proposição 2.22.15 *Sejam X um espaço de Banach, $\emptyset \neq \Omega \subset X$ um conjunto aberto limitado e $F : \overline{\Omega} \to X$ uma multifunção semicontínua superiormente com valores convexos fechados não-vazios. Suponhamos que F é uma $\alpha-$contracção e que, para algum $x_0 \in \Omega$,*

$$x_0 + \lambda (x - x_0) \notin F(x), \ \forall x \in \partial\Omega, \ \forall \lambda > 1.$$

Então $Fix(F) \neq \emptyset$.

Demonstração:
Ver [27], teorema 11.6.

2.22.4 Os teoremas de Lusin e de Kuratowski-Ryll Nardzewski

Definição 2.22.16 *Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, X um espaço métrico completo separável e $F : \Omega \to X$ uma multifunção com valores fechados. Diremos que a multifunção F é **mensurável** se a imagem inversa de cada conjunto aberto é um conjunto mensurável, isto é, para todo o subconjunto aberto $O \subset X$,*

$$F^{-}(O) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap O \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

Definição 2.22.17 *Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, X um espaço métrico completo separável e $F : \Omega \to X$. Uma função mensurável $f : \Omega \to X$ satisfazendo*

$$f(\omega) \in F(\omega)$$

*para cada $\omega \in \Omega$, diz-se uma **selecção mensurável** de F.*

Proposição 2.22.18 ***(Teorema de Kuratowski-Ryll Nardzewski)*** *Seja X um espaço métrico separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $F : \Omega \to X$ uma multifunção mensurável com valores fechados e não-vazios. Então existe uma selecção mensurável de F.*

Demonstração:
Ver [6], teorema 8.1.3.

Proposição 2.22.19 ***(Teorema de Lusin** para multifunções)* *Seja Ω um espaço métrico e $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida medida σ-finito completo [7]. Suponhamos que $\mathcal{A}$ contém todos os subconjuntos abertos de Ω. Seja X um espaço métrico separável completo e seja $F : \Omega \to X$ uma multifunção com valores fechados não-vazios. Se F é semicontínua superiormente então F é mensurável.*

Demonstração:
Ver [6], proposição 8.2.1.

[7] Recordemos que o terno $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finito completo se μ é uma medida positiva σ-finita tal que $\mathcal{A}$ é μ-completa.

Por exemplo, para todo o subconjunto aberto (ou fechado) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto de todos os subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de Ω é completo (com respeito à medida de Lebesgue). A medida de Lebesgue é também σ-finita.

Capítulo 3

O problema "linear autónomo"

3.1 Introdução

Consideremos o problema de minimização

$$\min \int_0^T \left[\langle A(t), u(t)\rangle + f(u'(t))\right] dt, \tag{3.1}$$

(onde $A : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua) na classe AC de todas as funções absolutamente contínuas definidas em $[0,T]$ com valores em $\mathbb{R}^m$ e satisfazendo as condições de fronteira

$$u(0) = a \ , \ u(T) = b. \tag{3.2}$$

É bem conhecido o facto de que se f é contínua e convexa, e satisfaz a denominada condição de crescimento de Tonelli:

$$f(\xi) \geq \psi(|\xi|), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^m, \tag{3.3}$$

com $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ superlinear, isto é

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty, \tag{3.4}$$

então o "Método Directo do Cálculo" das Variações estabelece a existência de solução para este problema.

Neste capítulo mostramos, mais geralmente, que o problema (3.1)-(3.2) admite solução sempre que f é um elemento da classe $\mathcal{F}$ de todas as funções semicontínuas inferiormente $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, cuja bipolar f^{**} satisfaz a condição de crescimento

$$\lim_{n \to \infty} \left[f^{**}(\xi_n) - \langle \xi_n, \nabla f^{**}(\xi_n)\rangle\right] = -\infty,$$

para qualquer sucessão $(\xi_n) \subset \mathbb{R}^m$ de pontos de diferenciabilidade de f^{**} tal que $(|\xi_n|) \to \infty$.

A demonstração da existência de solução baseia-se num resultado de existência devido a Olech e que resulta ser um corolário do teorema de Liapunov sobre a imagem de medidas vectoriais finitas e não-atómicas.

Mais precisamente, usando um teorema de ponto fixo para multifunções semicontínuas inferiormente, mostramos que o domínio efectivo da função polar de f,

$$dom\, f^* \doteq \{p \in \mathbb{R}^m : f^*(p) < +\infty\},$$

é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Deste facto, conjuntamente com o resultado de existência devido a Olech, resultará o pretendido.

3.2 Definições e resultados preliminares

Começamos por fazer uma observação acerca da caracterização do subdiferencial de uma função convexa.

Observação 3.2.1 *Seja* $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então, se* $p \in \partial\psi(x)$, *existem* $m+1$ *sucessões* $\left(x_n^j\right)_n \subset \mathcal{D}(\psi)$, $j = 1, ..., m+1$, *e existe* $\widetilde{\lambda} \doteq (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in E_{m+1}$ *onde*

$$E_{m+1} \doteq \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^m : \lambda_j \geq 0, \ \forall j \in \{1, ..., m+1\}, \ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1 \right\},$$

tais que

$$p = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j p_j, \ p_j = \lim_{n\to\infty} \nabla\psi\left(x_n^j\right), \ \lim_{n\to\infty} x_n^j = x, \ j = 1, ..., m+1.$$

Além disso, para cada $\varepsilon > 0$ *e para cada* $\delta > 0$ *existem* $y_1, ..., y_{m+1} \in \mathcal{D}(\psi) \cap B_\delta(x)$ *tais que*

$$|\nabla\psi(y_j) - p_j| < \varepsilon, \ \forall j = 1, ..., m+1,$$

onde $B_\delta(x) \doteq \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < \delta\}$.

Demonstração

Seja $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma qualquer função convexa. Pela proposição 2.16.24 ψ é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^m$. Então, qualquer que seja o $x \in \mathbb{R}^m$, temos, por definição,

$$\partial\psi(x) = co\left\{ \lim_{n\to\infty} \nabla\psi(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = x, \ x_n \in \mathcal{D}(\psi), \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } (\nabla\psi(x_n)) \text{ converge} \right\}.$$

Pelo teorema de Carathéodory, o invólucro convexo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$, é caracterizado por

$$co\,A = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x_j, \ (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in E_{m+1}, \ x_j \in A, \ \forall j \in J \doteq \{1, ..., m+1\} \right\}$$

Logo temos

$$\partial\psi(x) = \left\{ \begin{array}{l} p \in \mathbb{R}^m : \ p = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j p_j, \ \left(\lambda_1^n, ..., \lambda_{m+1}^n\right) \in E_{m+1}, \\ \qquad\qquad p_j = \lim_{n\to\infty} \nabla\psi\left(x_n^j\right), \ x_n^j \in \mathcal{D}(\psi), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall j \in J, \\ \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} x_n^j = x, \ \forall j \in J \end{array} \right\}$$

e portanto se $p \in \partial\psi(x)$ existem $m+1$ sucessões $\left(x_n^j\right)_n \subset \mathcal{D}(\psi)$ e existe um sistema de escalares $\widetilde{\lambda} \doteq (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in E_{m+1}$ tais que

$$\left(x_n^j\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \ x_n^j \in \mathcal{D}(\psi), \ \forall j \in J, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$p = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j p_j$$

onde

$$p_j = \lim_{n\to\infty} \nabla\psi\left(x_n^j\right), \ \forall j \in J.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$.

Para cada $j \in J$ podemos encontrar $k_{j1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq k_{j1} \Rightarrow \left|x_n^j - x\right| < \delta.$$

Sendo $k_1 \doteq \max_{j\in J} k_{j1}$, temos

$$n \geq k_1 \ \Rightarrow \ \left|x_n^j - x\right| < \delta, \ \forall j \in J.$$

Analogamente, para cada $j \in J$, podemos encontrar $k_{j2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq k_{j2} \ \Rightarrow \ \left|\nabla\psi\left(x_n^j\right) - p_j\right| < \varepsilon$$

e assim, se $k_2 \doteq \max_{j\in J} k_{j2}$, temos

$$n \geq k_2 \ \Rightarrow \ \left|\nabla\psi\left(x_n^j\right) - p_j\right| < \varepsilon, \ \forall j \in J.$$

Portanto, pondo $k \doteq \max\{k_1, k_2\}$, obtemos

$$n \geq k \Rightarrow \left|x_n^j - x\right| < \delta \wedge \left|\nabla\psi\left(x_n^j\right) - p_j\right| < \varepsilon, \ \forall j \in J,$$

pelo que podemos afirmar que existem $m+1$ vectores $y_1, ..., y_{m+1} \in \mathcal{D}(\psi) \cap B_\delta(x)$ tais que

$$|\nabla\psi(y_j) - p_j| < \varepsilon, \ \forall j = 1, ..., m+1. \blacksquare$$

Mostraremos agora alguns resultados que serão usados mais tarde.

Lema 3.2.2 *Seja* $D \doteq \overline{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^m$, $R > 0$, *e seja* $F : D \to \mathbb{R}^m$ *uma multifunção com valores não-vazios convexos compactos semicontínua superiormente. Suponhamos que, para cada* x *na fronteira* ∂D *de* D,

$$\langle p, x\rangle \geq 0, \ \forall p \in F(x).$$

Então existe $y \in D$ *tal que* $0 \in F(y)$.

Demonstração

Consideremos a multifunção G definida por

$$G \doteq I_D - F$$

onde I_D denota a identidade em D.

Vamos mostrar que G possui pelo menos um ponto fixo, isto é, existe $y \in D$ tal que $y \in G(y)$.

A multifunção $G : D \to \mathbb{R}^m$ é uma multifunção semicontínua superiormente com valores convexos compactos não-vazios. Isto resulta do facto de que F possui, por hipótese, as mesmas propriedades:

(a) De $F(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in D$, resulta que também $G(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in D$.

(b) A compacidade e a convexidade de um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ são invariantes para translações.

(c) Como $F : D \to \mathbb{R}^m$ é semicontínua superiormente, temos

$$\forall x_0 \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) : \ F(x) \subset F(x_0) + B_\varepsilon(0), \ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D$$

isto é, $\forall x_0 \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \ &\Rightarrow \ F(x) \subset F(x_0) + B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \\ &\Leftrightarrow \ F(x) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_0)) \\ &\Leftrightarrow \ F(x) \subset \left\{y \in \mathbb{R}^m : d(y, F(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\Leftrightarrow \ \forall y \in F(x), \ d(y, F(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\Leftrightarrow \ \forall y \in F(x), \ \inf\{|y - z| : z \in F(x_0)\} < \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

e queremos mostrar que $\forall x_0 \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{\delta} = \overline{\delta}(x_0, \varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} x \in D \wedge |x - x_0| < \overline{\delta} \ &\Rightarrow \ \forall \overline{y} \in G(x), \ d(\overline{y}, G(x_0)) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \ \forall \overline{y} \in (x - F(x)), \ d(\overline{y}, x_0 - F(x_0)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Fixemos x_0 em D e $\varepsilon > 0$ quaisquer.

Note-se que se $\overline{y} \in (x - F(x))$ então $\overline{y} = x - y$ com $y \in F(x)$. Analogamente, se $\overline{z} \in (x_0 - F(x_0))$ então $\overline{z} = x_0 - z$ com $z \in F(x_0)$.

Seja $\overline{\delta} \doteq \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Para cada $\overline{y} = x - y \in (x - F(x))$, onde $x \in D$ é tal que $|x - x_0| < \overline{\delta}$, temos

$$\begin{aligned} d(\overline{y}, x_0 - F(x_0)) &= \inf\{|\overline{y} - \overline{z}| : \overline{z} \in (x_0 - F(x_0))\} = \\ &= \inf\{|x - y - x_0 + z| : z \in F(x_0)\} \leq \\ &\leq \inf\{|x - x_0| + |y - z| : z \in F(x_0)\} = \\ &= |x - x_0| + \inf\{|y - z| : z \in F(x_0)\} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo G é semicontínua superiormente.

Por outro lado, G é uma $\alpha-$contracção. De facto, seja B um qualquer subconjunto limitado de D. Então, atendendo à proposição 2.22.12, podemos escrever, para qualquer $k \in (0,1)$,

$$\alpha(G(B)) \underbrace{\leq}_{\substack{\text{porque} \\ G(B) \subset G(D)}} \alpha(G(D)) \underbrace{=}_{\substack{\text{porque } D \text{ é compacto e então,} \\ \text{pela proposição 2.22.10,} \\ G(D) \text{ é compacto}}} 0 \underbrace{=}_{\substack{\text{porque} \\ \overline{B} \text{ é compacto}}}$$

$$= k\alpha\left(\overline{B}\right) = k\alpha(B).$$

Além disso, qualquer que seja o $x \in \partial D$, temos

$$\lambda x \notin G(x), \quad \forall \lambda > 1.$$

De facto, suponhamos que existiam $x \in \partial D$ e $\lambda > 1$ tais que $\lambda x \in G(x)$. Dizer que $\lambda x \in G(x) = x - F(x)$, significa dizer que existe $p \in F(x)$ tal que $\lambda x = x - p$, isto é, $p = (1-\lambda)x$. Assim, por hipótese, seria

$$0 \leq \langle p, x\rangle = \langle (1-\lambda)x, x\rangle = (1-\lambda)|x|^2 = (1-\lambda)R^2 < 0,$$

o que é absurdo.

Aplicando a proposição 2.22.15 à multifunção G podemos então concluir que existe $y \in D$ tal que $y \in G(y)$. Mas isto significa que $0 \in F(y)$, pelo que o lema está provado. ■

Lema 3.2.3 *Sejam $D \doteq \overline{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^m$, e $F : D \to \mathbb{R}^m$ uma multifunção com valores convexos compactos não-vazios semicontínua superiormente. Então, se $0 \notin F(D)$, existem $y \in \partial D$ e $q \in F(y)$ tais que $\langle q, y\rangle \leq 0$.*

Demonstração

Se para cada $y \in \partial D$ é $\langle q, y\rangle > 0$ qualquer que seja o $q \in F(y)$, então pelo lema 3.2.2 existe $x \in D$ tal que $0 \in F(x)$ e portanto $0 \in F(D)$. ■

3.3 Existência de solução

Começamos esta secção mostrando um resultado de existência de solução para o problema

$$\min\left\{\int_0^T [\langle A(t), u(t)\rangle + f(u'(t))]\,dt : u \in AC,\ u(0) = a,\ u(T) = b\right\} \tag{3.5}$$

(onde $A : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua e AC denota a classe de todas as funções absolutamente contínuas definidas em $[0,T]$ com valores em $\mathbb{R}^m$), devido a Olech.

Supomos que existe pelo menos uma função $\overline{u} \in AC$ verificando as condições de fronteira $\overline{u}(0) = a$, $\overline{u}(T) = b$, tal que $t \mapsto f(\overline{u}'(t))$ é integrável, pois caso contrário o problema não faria sentido.

Teorema 3.3.1 *Seja $f : \mathbb{R}^m \to R$ uma função semicontínua inferiormente. Se o conjunto*

$$H \doteq \left\{p \in \mathbb{R}^m : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} [\langle p, \xi\rangle - f(\xi)] < +\infty\right\} \tag{3.6}$$

é aberto, então o problema (3.5) admite solução.

Demonstração

Vamos mostrar um resultado mais geral, do qual a afirmação anterior é um caso particular:

"Seja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função mensurável em t e semicontínua inferiormente em ξ, e seja $A : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua. Suponhamos que existe pelo menos uma função $\overline{u} \in AC$ satisfazendo as condições de fronteira $\overline{u}(0) = a$, $\overline{u}(T) = b$, tal que a função $t \mapsto f(t, \overline{u}'(t))$ é integrável. Se o conjunto

$$H_t \doteq \left\{p \in \mathbb{R}^m : \int_0^T \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} [\langle p, \xi\rangle - f(t,\xi)]\,dt < +\infty\right\}$$

é aberto, então o problema

$$\min\left\{\int_0^T [\langle A(t), u(t)\rangle + f(t, u'(t))]\, dt : u \in AC,\ u(0) = a,\ u(T) = b\right\} \tag{3.7}$$

admite solução."

Comecemos por notar que, para qualquer função $u \in AC$, satisfazendo $u(0) = a$, temos

$$\int_0^T [\langle A(t), u(t)\rangle + f(t, u'(t))]\, dt = \int_0^T \langle A(t), u(t)\rangle\, dt + \int_0^T f(t, u'(t))\, dt$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle A(t), u(t)\rangle\, dt &= \int_0^T \sum_{j=1}^m A_j(t)\, u_j(t)\, dt = \\
&= \int_0^T \sum_{j=1}^m A_j(t)\left(u_j(0) + \int_0^t u_j'(s)\, ds\right) dt = \\
&= \int_0^T \sum_{j=1}^m A_j(t)\, u_j(0)\, dt + \int_0^T \sum_{j=1}^m A_j(t)\left(\int_0^t u_j'(s)\, ds\right) dt = \\
&= \int_0^T \langle A(t), u(0)\rangle\, dt + \sum_{j=1}^m \int_0^T A_j(t)\left(\int_0^t u_j'(s)\, ds\right) dt = \\
&= \int_0^T \langle A(t), a\rangle\, dt + \sum_{j=1}^m \int_0^T u_j'(s)\left(\int_s^T A_j(t)\, dt\right) ds = \\
&= \int_0^T \langle A(t), a\rangle\, dt + \int_0^T \sum_{j=1}^m u_j'(t)\left(\int_t^T A_j(s)\, ds\right) dt = \\
&= C + \int_0^T \langle P(t), u'(t)\rangle\, dt,
\end{aligned}$$

onde

$$C \doteq \int_0^T \langle A(t), a\rangle\, dt$$

é uma constante real e

$$P(t) \doteq \left(\int_t^T A_1(s)\, ds, \ldots, \int_t^T A_m(s)\, ds\right)$$

é uma função contínua definida em $[0, T]$ com valores em $\mathbb{R}^m$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^T [\langle A(t), u(t)\rangle + f(t, u'(t))]\, dt &= \int_0^T \langle A(t), u(t)\rangle\, dt + \int_0^T f(t, u'(t))\, dt = \\
&= C + \int_0^T \langle P(t), u'(t)\rangle\, dt + \int_0^T f(t, u'(t))\, dt = \\
&= C + \int_0^T f(t, u'(t)) + \langle P(t), u'(t)\rangle\, dt
\end{aligned}$$

e portanto, o problema (3.7) é equivalente ao problema

$$C + \min\left\{\int_0^T g(t, u'(t))\, dt : u \in AC,\ u(0) = a,\ u(T) = b\right\}$$

com

$$g(t, \xi) \doteq f(t, \xi) + \langle P(t), \xi\rangle.$$

Note-se ainda que uma vez que f é mensurável em t e semicontínua inferiormente em ξ, o mesmo acontece com g, pelo que, para mostrar a existência de solução para o problema (3.7) basta mostrar que o problema

$$\min\left\{\int_0^T g(t, u'(t))\, dt : u \in AC,\ u(0) = a,\ u(T) = b\right\}$$

admite um minimizante sempre que $g : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável em t e semicontínua inferiormente em ξ, o conjunto

$$J_t \doteq \left\{ p \in \mathbb{R}^m : \int_0^T \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[\langle p, \xi \rangle - g(t,\xi) \right] dt < +\infty \right\}$$

é aberto, e existe pelo menos uma função $\overline{u} \in AC$ satisfazendo as condições de fronteira $\overline{u}(0) = a$, $\overline{u}(T) = b$, tal que a função $t \mapsto g(t, \overline{u}'(t))$ é integrável.

Seja

$$K \doteq \left\{ (u,v) : u \in L^1([0,T], \mathbb{R}^m), v \in L^1([0,T], \mathbb{R}), v(t) \geq g(t, u(t)) \text{ q.s. em } [0,T] \right\}.$$

Uma vez que a função $\overline{v} : [0,T] \to \mathbb{R}$ definida por $\overline{v}(t) \doteq g(t, \overline{u}'(t))$ é integrável, temos que $(\overline{u}', \overline{v}) \in K$, e portanto o conjunto K é não-vazio.

Seja $I(K)$ o subconjunto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} I(K) &\doteq \left\{ \left(\int_0^T u(t)\,dt, \int_0^T v(t)\,dt \right) : (u,v) \in K \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{r} \left(\int_0^T u(t)\,dt, \int_0^T v(t)\,dt \right) : \; u \in L^1([0,T], \mathbb{R}^m), \; v \in L^1([0,T], \mathbb{R}), \\ v(t) \geq g(t, u(t)) \text{ q.s. em } [0,T] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} J_t &\doteq \left\{ p \in \mathbb{R}^m : \int_0^T \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[\langle p, \xi \rangle - g(t,\xi) \right] dt < +\infty \right\} = \\ &= \left\{ p \in \mathbb{R}^m : \int_0^T g^*(t,p)\,dt < +\infty \right\} = \\ &= \left\{ p \in \mathbb{R}^m : g^*(\cdot, p) \text{ é integrável} \right\}, \end{aligned}$$

porque

$$\mathbb{R} \ni \int_0^T \left[\langle p, \overline{u}(t) \rangle - g(t, \overline{u}'(t)) \right] dt \leq \int_0^T \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[\langle p, \xi \rangle - g(t,\xi) \right] dt,$$

e sabe-se (ver [36], [37] e [38]) que se este conjunto é aberto então o conjunto

$$I(K) \cap \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : x = b - a \right\}$$

é "fechado inferiormente", isto é,

$$(b-a, \inf\left\{ y \in \mathbb{R} : (b-a, y) \in I(K) \right\}) \in I(K).$$

Isto significa que existe um par de funções $(u_*, v_*) \in K$ tal que

$$b - a = \int_0^T u_*(t)\,dt$$

e

$$\inf\left\{ y \in \mathbb{R} : (b-a, y) \in I(K) \right\} = \int_0^T v_*(t)\,dt.$$

Seja $\widetilde{u} : [0,T] \to \mathbb{R}^m$,

$$\widetilde{u}(t) \doteq a + \int_0^t u_*(s)\,ds.$$

Então $\widetilde{u}$ é uma função absolutamente contínua, $\widetilde{u}' = u_*$ quase sempre em $[0,T]$ e $\widetilde{u}(0) = a$, $\widetilde{u}(T) = b$.

Se

$$\alpha \doteq \int_0^T v_*(t)\,dt = \inf\left\{ y \in \mathbb{R} : (b-a, y) \in I(K) \right\}.$$

tem-se

$$\alpha \leq y, \text{ para qualquer } y \text{ tal que } (b-a, y) \in I(K).$$

Por definição de $I(K)$, isto significa que

$$\alpha \leq \int_0^T v(t)\, dt$$

para qualquer função integrável $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que $v(t) \geq g(t, u(t))$ q.s. em $[0,T]$, onde $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ verifica

$$b - a = \int_0^T u(t)\, dt.$$

Ora, para cada função absolutamente contínua satisfazendo $u(0) = a$, $u(T) = b$, tem-se

$$u(t) = a + \int_0^t u'(s)\, ds$$

e

$$b - a = \int_0^T u'(t)\, dt.$$

Então

$$\alpha \leq \int_0^T v(t)\, dt,$$

qualquer que seja a função integrável $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$v(t) \geq g(t, u'(t)) \quad \text{q.s. em } [0,T],$$

onde $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ é uma função absolutamente contínua satisfazendo $u(0) = a$ e $u(T) = b$. Em particular, para $v(t) = g(t, u'(t))$ quase sempre em $[0,T]$, tem-se

$$\alpha \leq \int_0^T g(t, u'(t))\, dt.$$

Assim, concluimos que

$$\alpha = \int_0^T v_*(t)\, dt \leq \int_0^T g(t, u'(t))\, dt \tag{3.8}$$

para qualquer função $u \in AC$ tal que $u(0) = a$ e $u(T) = b$. Em particular,

$$\int_0^T v_*(t)\, dt \leq \int_0^T g(t, \widetilde{u}'(t))\, dt = \int_0^T g(t, u_*(t))\, dt. \tag{3.9}$$

Por outro lado, uma vez que $(u_*, v_*) \in K$, temos

$$v_*(t) \geq g(t, u_*(t)) \quad \text{q.s. em } [0,T],$$

pelo que

$$\int_0^T v_*(t)\, dt \geq \int_0^T g(t, u_*(t))\, dt. \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10) resulta que

$$\int_0^T v_*(t)\, dt = \int_0^T g(t, u_*(t))\, dt$$

e então, por (3.8), vale

$$\int_0^T g(t, \widetilde{u}'(t))\, dt = \int_0^T g(t, u_*(t))\, dt \leq \int_0^T g(t, u'(t))\, dt$$

qualquer que seja a função absolutamente contínua $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições de fronteira $u(0) = a$ e $u(T) = b$, isto é

$$\int_0^T g(t, \widetilde{u}'(t))\, dt = \min \left\{ \int_0^T g(t, u'(t))\, dt : u \in AC,\ u(0) = a,\ u(T) = b \right\}. \blacksquare$$

Observação 3.3.2 *Se f satisfaz a condição de crescimento superlinear*

$$f(\xi) \geq \psi(|\xi|), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m,$$

onde $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ verifica

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty,$$

então $H \equiv \mathbb{R}^m$.

Demonstração
Para cada $p \in \mathbb{R}^m$ podemos encontrar $R = R(p) > 0$ tal que

$$\frac{f(\xi)}{|\xi|} \geq \frac{\psi(|\xi|)}{|\xi|} \geq |p|, \quad \text{qualquer que seja o } \xi \text{ tal que } |\xi| \geq R,$$

pelo que

$$|p|\,|\xi| - f(\xi) \leq 0, \quad \text{sempre que } |\xi| \geq R.$$

Seja

$$M \doteq \max\{|p|\,|\xi| - f(\xi) : |\xi| \leq R\}^{1}.$$

Então

$$\langle p, \xi \rangle - f(\xi) \leq |p|\,|\xi| - f(\xi) \leq \max\{0, M\} \doteq N, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m$$

donde

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} [\langle p, \xi \rangle - f(\xi)] \leq N < +\infty,$$

o que mostra que $p \in H$. ∎

Observação 3.3.3 *Mais geralmente, podemos mostrar que se $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ satisfaz, para cada $t \in [0,T]$,*

$$f(t, \xi) \geq \psi(|\xi|), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m,$$

onde $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ verifica

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty,$$

então $H_t \equiv \mathbb{R}^m$.

Demonstração
Comecemos por notar que podemos supor, sem perda de generalidade, que ψ é uma função semicontínua inferiormente. De facto, a condição

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty$$

significa que, para cada $m \in \mathbb{R}$, existe uma função afim, com declive m, minorante de ψ, isto é, para cada $m \in \mathbb{R}$, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(s) \geq ms + b, \ \forall s \in [0, +\infty).$$

Daqui resulta que também

$$\psi^{**}(s) \geq ms + b, \ \forall s \in [0, +\infty),$$

e portanto

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi^{**}(s)}{s} = +\infty.$$

Assim, se ψ não é semicontínua inferiormente, substituimos ψ por ψ^{**}.
Suponhamos então que

$$f(t, \xi) \geq \psi(|\xi|), \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m, \tag{3.11}$$

e

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty. \tag{3.12}$$

[1] Note-se que este máximo existe porque a função $h(x) \doteq |p|\,|x| - f(x)$ definida no subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ $A \doteq \{x \in R^m : |x| \leq R\}$ com valores em $\mathbb{R}$ é semicontínua superiormente (proposição 2.17.9).

De (3.12) resulta que, qualquer que seja o $p \in \mathbb{R}^m$, podemos encontrar $R = R(p) > 0$ tal que

$$\frac{\psi(|\xi|)}{|\xi|} \geq |p|, \text{ sempre que } |\xi| \geq R,$$

e portanto,

$$|p|\,|\xi| - \psi(|\xi|) \leq 0, \text{ sempre que } |\xi| \geq R. \tag{3.13}$$

Seja

$$M \doteq \max\{|p|\,|\xi| - \psi(|\xi|) : |\xi| \leq R\}.$$

Como, por (3.11), temos

$$|p|\,|\xi| - f(t,\xi) \leq |p|\,|\xi| - \psi(|\xi|), \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m,$$

atendendo a (3.13) e à definição de M, podemos escrever

$$\langle p, \xi\rangle - f(t,\xi) \leq |p|\,|\xi| - \psi(|\xi|) \leq \max\{0, M\} \doteq N, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Assim,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} [\langle p, \xi\rangle - f(t,\xi)] \leq N, \quad \forall t \in [0,T],$$

pelo que

$$\int_0^T \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} [\langle p, \xi\rangle - f(t,\xi)]\, dt \leq TN < +\infty$$

o que mostra que $p \in H_t$. ■

Observação 3.3.4 *Os resultados obtidos na observação 3.3.3 e na demonstração do teorema 3.3.1 permitem concluir que*

"Se $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável em t e semicontínua inferiormente em ξ, satisfazendo

$$f(t,\xi) \geq \psi(|\xi|), \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m,$$

onde $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ verifica

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty,$$

se $A : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, e se existe pelo menos uma função $\overline{u} \in AC$ satisfazendo as condições de fronteira $\overline{u}(0) = a$, $\overline{u}(T) = b$, tal que a função $t \mapsto f(t, \overline{u}'(t))$ é integrável, então o problema

$$\min\left\{\int_0^T [\langle A(t), u(t)\rangle + f(t, u'(t))]\, dt : u \in AC, \ u(0) = a, \ u(T) = b\right\}$$

admite solução."

Vamos mostrar que a família de funções para as quais o conjunto H é aberto inclui a classe $\mathcal{F}$ definida da seguinte forma:

Definição 3.3.5 *$\mathcal{F}$ é a classe de todas as funções $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ semicontínuas inferiormente satisfazendo*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} E_f(\xi) = -\infty, \tag{3.14}$$

para qualquer selecção $E_f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ da multifunção

$$\mathcal{E}_f(\xi) \doteq \{f^{**}(\xi) - \langle p, \xi\rangle : p \in \partial f^{**}(\xi)\}. \tag{3.15}$$

Observação 3.3.6

(ii) *Dado que f^{**} é semicontínua inferiormente, temos*

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f^{**} \in \mathcal{F}.$$

(ii) *Pela proposição 2.20.19, qualquer selecção* E_f *da multifunção* $\mathcal{E}_f$ *coincide, para quase todo* $\xi \in \mathbb{R}^m$, *com a função mensurável* $\xi \mapsto f^{**}(\xi) - \langle \nabla f^{**}(\xi), \xi \rangle$ *e portanto é mensurável.*

A proposição seguite dá-nos uma caracterização da classe $\mathcal{F}$ que envolve apenas os pontos de diferenciabilidade dos seus elementos. Em particular, implica que a propriedade (3.14) não depende da selecção da multifunção $\mathcal{E}_f$ considerada.

Proposição 3.3.7 *Seja* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então* $f \in \mathcal{F}$ *se e só se verifica a seguinte propriedade:*

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(\xi_n) - \langle \nabla f(\xi_n), \xi_n \rangle\right] = -\infty, \tag{3.16}$$

qualquer que seja a sucessão $(\xi_n) \subset \mathcal{D}(f)$ *tal que* $(|\xi_n|) \to \infty$.

Demonstração

Comecemos por notar que se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é convexa então é contínua em $\mathbb{R}^m$ e $f = f^{**}$. Além disso, para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$, f é lipschitziana numa vizinhança de ξ.

Suponhamos que $f \in \mathcal{F}$.

Seja (ξ_n) uma sucessão de pontos de diferenciabilidade de f verificando $(|\xi_n|) \to \infty$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\partial f(\xi_n) = \{\nabla f(\xi_n)\}$ e, consequentemente,

$$\mathcal{E}_f(\xi_n) = \{f(\xi_n) - \langle \nabla f(\xi_n), \xi_n \rangle\}.$$

Isto significa que

$$E_f(\xi_n) = f(\xi_n) - \langle \nabla f(\xi_n), \xi_n \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e portanto, por definição de $\mathcal{F}$, temos

$$\lim_{|\xi_n|\to\infty} E_f(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \left[f(\xi_n) - \langle \nabla f(\xi_n), \xi_n \rangle\right] = -\infty,$$

pelo que f verifica (3.16).

Mostremos agora que se a condição (3.16) é verificada por f então $f \in \mathcal{F}$.

Seja $E_f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma selecção arbitrária da multifunção $\mathcal{E}_f(\xi) = \{f(\xi) - \langle p, \xi \rangle : p \in \partial f(\xi)\}$.

Seja (ξ^n) uma sucessão em $\mathbb{R}^m$ verificando $(|\xi^n|) \to \infty$ e seja $p^n \in \partial f(\xi^n)$ tal que

$$E_f(\xi^n) = f(\xi^n) - \langle p^n, \xi^n \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$ qualquer.

Se $p^n \in \partial f(\xi^n)$ então, pela observação 3.2.1, existem $m+1$ vectores $p_j^n \in \partial f(\xi^n)$, $j = 1, ..., m+1$, e existe um sistema de $m+1$ escalares $\widetilde{\lambda}^n = (\lambda_1^n, ..., \lambda_{m+1}^n)$ verificando $\lambda_j^n \geq 0$, $\forall j \in J \doteq \{1, ..., m+1\}$ e $\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n = 1$, tais que

$$p^n = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n p_j^n. \tag{3.17}$$

Além disso, existem $m+1$ pontos $y_j^n \in D(f) \cap B_1(\xi^n)$, $\forall j \in J$, tais que

$$\left|\nabla f(y_j^n) - p_j^n\right| < \frac{1}{|\xi^n| + 1}, \quad \text{para cada } j \text{ em } J.$$

Desta desigualdade resulta, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz [2] e atendendo a que $|y_j^n - \xi^n| < 1$, $\forall j \in J$,

$$\begin{aligned}\left|\langle \nabla f(y_j^n) - p_j^n, y_j^n \rangle\right| &\leq \left|\nabla f(y_j^n) - p_j^n\right| |y_j^n| < \frac{|y_j^n|}{|\xi^n| + 1} = \frac{|y_j^n - \xi^n + \xi^n|}{|\xi^n| + 1} \leq \\ &\leq \frac{|y_j^n - \xi^n| + |\xi^n|}{|\xi^n| + 1} < \frac{1 + |\xi^n|}{|\xi^n| + 1}, \quad \forall j \in J\end{aligned}$$

[2] **(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Para quaisquer dois elementos x e y de um espaço com produto interno, temos

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x|\,|y|.$$

Demonstração:
Ver [26], teorema 3.4.1.

logo

$$\left|\left\langle \nabla f\left(y_j^n\right) - p_j^n, y_j^n\right\rangle\right| < 1, \quad \forall j \in J. \tag{3.18}$$

Pela convexidade de f, temos, para cada j em J,

$$p_j^n \in \{p \in \mathbb{R}^m : f(y) \geq f(\xi^n) + \langle p, y - \xi^n\rangle, \ \forall y \in \mathbb{R}^m\}$$

e assim,

$$f(\xi^n) - f(y) \leq \langle p_j^n, \xi^n - y\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Em particular, temos

$$f(\xi^n) - f\left(y_j^n\right) \leq \left\langle p_j^n, \xi^n - y_j^n\right\rangle, \quad \forall j \in J. \tag{3.19}$$

Por outro lado, como, para cada j em J, $y_j^n \in \mathcal{D}(f)$, tem-se

$$\partial f\left(y_j^n\right) = \left\{\nabla f\left(y_j^n\right)\right\}, \quad \forall j \in J,$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_f\left(y_j^n\right) &= \left\{f\left(y_j^n\right) - \left\langle p, y_j^n\right\rangle : p \in \partial f\left(y_j^n\right)\right\} = \\
&= \left\{f\left(y_j^n\right) - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle\right\}, \quad \forall j \in J,
\end{aligned}$$

e portanto

$$E_f\left(y_j^n\right) = f\left(y_j^n\right) - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle, \quad \forall j \in J.$$

Daqui resulta, atendendo a (3.18) e (3.19), que

$$f(\xi^n) - \left\langle p_j^n, \xi^n\right\rangle < E_f\left(y_j^n\right) + 1, \quad \forall j \in J. \tag{3.20}$$

De facto, para cada j em J fixado, temos

$$\begin{aligned}
f(\xi^n) - \left\langle p_j^n, \xi^n\right\rangle &= f(\xi^n) - f\left(y_j^n\right) + f\left(y_j^n\right) - \left\langle p_j^n, \xi^n - y_j^n\right\rangle - \left\langle p_j^n, y_j^n\right\rangle + \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle = \\
&= \left[f(\xi^n) - f\left(y_j^n\right)\right] + f\left(y_j^n\right) - \left\langle p_j^n, \xi^n - y_j^n\right\rangle + \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right) - p_j^n, y_j^n\right\rangle - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle \leq \\
&\leq \left\langle p_j^n, \xi^n - y_j^n\right\rangle + f\left(y_j^n\right) - \left\langle p_j^n, \xi^n - y_j^n\right\rangle + \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right) - p_j^n, y_j^n\right\rangle - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle = \\
&= f\left(y_j^n\right) - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle + \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right) - p_j^n, y_j^n\right\rangle \leq \\
&\leq f\left(y_j^n\right) - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle + \left|\left\langle \nabla f\left(y_j^n\right) - p_j^n, y_j^n\right\rangle\right| < \\
&< f\left(y_j^n\right) - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle + 1 = E_f\left(y_j^n\right) + 1.
\end{aligned}$$

Atendendo a (3.17) e à estimativa (3.20), podemos escrever

$$\begin{aligned}
E_f(\xi^n) &= f(\xi^n) - \langle p^n, \xi^n\rangle = f(\xi^n) - \left\langle \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n p_j^n, \xi^n\right\rangle = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n f(\xi^n) - \left\langle \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n p_j^n, \xi^n\right\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n \left[f(\xi^n) - \left\langle p_j^n, \xi^n\right\rangle\right] \leq \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n \left[E_f\left(y_j^n\right) + 1\right] = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n E_f\left(y_j^n\right) + \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n = \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n E_f\left(y_j^n\right) + 1 \leq \mu^n + 1
\end{aligned}$$

onde

$$\mu^n \doteq \max\left\{E_f\left(y_j^n\right) : j \in J\right\}.$$

Para cada $j \in J$ fixado, temos $y_j^n \in B_1(\xi^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, dado que por hipótese, $(|\xi^n|) \to \infty$ quando $n \to \infty$, também é

$$\left(\left|y_j^n\right|\right) \to \infty \ \text{ quando } n \to \infty.$$

Além disso,

$$y_j^n \in \mathcal{D}(f), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in J.$$

Então, uma vez que f verifica (3.16), temos

$$\lim_{n\to\infty} \left[f\left(y_j^n\right) - \left\langle \nabla f\left(y_j^n\right), y_j^n\right\rangle\right] = \lim_{n\to\infty} \left[E_f\left(y_j^n\right)\right] = -\infty, \quad \forall j \in J.$$

Daqui resulta que
$$(\mu^n) \to -\infty \text{ quando } n \to \infty$$
e então
$$\lim_{n\to\infty} E_f(\xi^n) \le \lim_{n\to\infty} (\mu^n + 1) = -\infty$$
ou seja
$$\lim_{n\to\infty} E_f(\xi^n) = -\infty.$$

Ora, como a igualdade anterior é verdadeira qualquer que seja a sucessão $(\xi^n) \subset \mathbb{R}^m$ tal que $(|\xi^n|) \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos
$$\lim_{|\xi|\to\infty} E_f(\xi) = -\infty.$$

Mas, E_f é uma selecção arbitrária de $\mathcal{E}_f$. Então está provado que $f \in \mathcal{F}$. ■

Os dois lemas seguintes dizem respeito à estrutura do conjunto H. Estes resultados, conjuntamente com o teorema 3.3.1, implicarão a existência de solução para o problema (3.5), sempre que $f \in \mathcal{F}$.

Lema 3.3.8 *Se $f \in \mathcal{F}$ é uma função convexa então o conjunto H coincide com o conjunto $S \doteq \partial f(\mathbb{R}^m)$. Além disso, estes dois conjuntos são abertos.*

Demonstração
Começamos por mostrar que $H = S$.
1) $(S \subset H)$
Seja p um qualquer elemento de $S \doteq \partial f(\mathbb{R}^m)$. Então existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que
$$p \in \partial f(y) = \{p \in \mathbb{R}^m : f(\xi) \ge f(y) + \langle p, \xi - y\rangle,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^m\}.$$

Isto significa que
$$\langle p, \xi\rangle - f(\xi) \le \langle p, y\rangle - f(y),\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Mas, $\langle p, y\rangle - f(y) \doteq c$ é uma constante real. Assim,
$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^m} [\langle p, \xi\rangle - f(\xi)] \le c < +\infty$$

o que mostra que $p \in H$.
2) $(H \subset S)$
Suponhamos que $p \in \mathbb{R}^m \backslash S$.
Sejam $R > 0$, $D = \overline{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^m$ e $F : D \to \mathbb{R}^m$ a multifunção definida por
$$F \doteq \partial f - p.$$

Pela proposição 2.21.5, para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\partial f(\xi)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ não-vazio, convexo e compacto. Assim, os valores de F são subconjuntos não-vazios, convexos e compactos de $\mathbb{R}^m$.

Por outro lado, pela proposição 2.21.6, a multifunção ∂f é semicontínua superiormente. Então o mesmo acontece com F. De facto, sendo $\partial f : D \to \mathbb{R}^m$ semicontínua superiormente, temos
$$\forall \xi_0 \in D\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\xi_0, \varepsilon) :\ \partial f(\xi) \subset \partial f(\xi_0) + B_\varepsilon(0),\ \ \forall \xi \in B_\delta(\xi_0) \cap D$$

isto é, $\forall \xi_0 \in D\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\xi_0, \varepsilon)$ tal que
$$\xi \in D \wedge |\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow \forall y \in \partial f(\xi),\ \inf\{|y - z| : z \in \partial f(\xi_0)\} < \varepsilon.$$

Fixemos ξ_0 em D e $\varepsilon > 0$ quaisquer.

Note-se que se $\overline{y} \in (\partial f(\xi) - p)$ então $\overline{y} = y - p$ com $y \in \partial f(\xi)$. Analogamente, se $\overline{z} \in (\partial f(\xi_0) - p)$ então $\overline{z} = z - p$ com $z \in \partial f(\xi_0)$.

Seja $\overline{\delta} = \delta$. Para cada $\overline{y} = y - p \in (\partial f(\xi) - p)$, onde $\xi \in D$ é tal que $|\xi - \xi_0| < \overline{\delta}$, temos
$$\begin{aligned}\inf\{|\overline{y} - \overline{z}| : \overline{z} \in (\partial f(\xi_0) - p)\} &= \inf\{|y - p - z + p| : z \in \partial f(\xi_0)\} = \\ &= \inf\{|y - z| : z \in \partial f(\xi_0)\} < \varepsilon,\end{aligned}$$

logo $\forall \xi_0 \in D\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \overline{\delta} = \overline{\delta}(\xi_0, \varepsilon) = \delta$ tal que
$$\xi \in D \wedge |\xi - \xi_0| < \overline{\delta} \Rightarrow \forall \overline{y} \in (\partial f(\xi) - p),\ \inf\{|y - z| : z \in (\partial f(\xi_0) - p)\} < \varepsilon,$$

donde F é semicontínua superiormente.

Além disso, $0 \notin F(D) = \partial f(D) - p$. De facto, por hipótese, $p \notin S = \partial f(\mathbb{R}^m)$. Em particular, $0 \notin \partial f(D)$, isto é, qualquer que seja o $\xi \in \partial f(D)$ é $\xi - p \neq 0$ e então $0 \notin F(D)$.

Aplicando então o lema 3.2.3 à multifunção F, resulta que existe $y \in \mathbb{R}^m$, $y \in D$, isto é, tal que $|y| = R$, e existe $q^* \in F(y)$ tais que $\langle q^*, y\rangle \leq 0$. Mas então, existe $q \in \partial f(y)$, $q = q^* + p$, tal que

$$\langle q - p, y\rangle \leq 0.$$

Daqui resulta que podemos construir uma sucessão (ξ_n, p_n), $n \in \mathbb{N}$, tal que $(|\xi_n|) \to \infty$ e

$$p_n \in \partial f(\xi_n), \quad \langle p_n - p, \xi_n\rangle \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja E_f uma selecção da multifunção $\mathcal{E}_f$, definida em (3.15), tal que

$$E_f(\xi_n) = f(\xi_n) - \langle p_n, \xi_n\rangle, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atendendo a que $\langle p - p_n, \xi_n\rangle \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a que $\lim_{n\to\infty} E_f(\xi) = -\infty$ (dado que, por hipótese $f \in \mathcal{F}$), temos

$$\begin{aligned}
\langle p, \xi_n\rangle - f(\xi_n) &= \langle p, \xi_n\rangle - \langle p_n, \xi_n\rangle + \langle p_n, \xi_n\rangle - f(\xi_n) = \\
&= \langle p - p_n, \xi_n\rangle - (f(\xi_n) - \langle p_n, \xi_n\rangle) = \\
&= \langle p - p_n, \xi_n\rangle - (E_f(\xi_n)) \geq -E_f(\xi_n) \to +\infty \text{ quando } n \to \infty
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} [\langle p, \xi\rangle - f(\xi)] = +\infty$$

pelo que $p \notin H$.

Ficou assim provado que $S = H$.

Falta mostrar que S é um conjunto aberto. Para tal, vamos provar que $\mathbb{R}^m \backslash S$ é um conjunto fechado.

Consideremos uma qualquer sucessão $(p_n) \subset \mathbb{R}^m \backslash S$ tal que $(p_n) \to p \in \mathbb{R}^m$ quando $n \to \infty$. Vamos ver que $p \notin S$.

Evidentemente, podemos supor que $p_n \neq p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois, caso contrário, fica provado que $p \notin S$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$R_n \doteq \frac{1}{|p - p_n|} > 0,$$

$$D_n = \overline{B}_{R_n}(0) \subset \mathbb{R}^m$$

e $F_n : D \to \mathbb{R}^m$ a multifunção, com valores não-vazios, definida por

$$F_n \doteq \partial f - p_n.$$

Aplicando o lema 3.2.3 a cada uma das multifunções F_n, resulta que existem vectores $\xi_n \in \mathbb{R}^m$ e $q_n \in \partial f(\xi_n)$ tais que

$$|\xi_n| = \frac{1}{|p - p_n|}, \quad \langle q_n - p_n, \xi_n\rangle \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja E_f uma selecção da multifunção $\mathcal{E}_f$, tal que

$$E_f(\xi_n) = f(\xi_n) - \langle q_n, \xi_n\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $f \in \mathcal{F}$ e

$$\lim_{n\to\infty} |\xi_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|p - p_n|} = +\infty,$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} E_f(\xi_n) = -\infty.$$

Por outro lado, como $\langle p_n - q_n\rangle \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\langle p_n - p, \xi_n\rangle \leq |\langle p_n - p, \xi_n\rangle| \leq |p_n - p|\,|\xi_n| = |p_n - p| \frac{1}{|p - p_n|} = 1,$$

donde $\langle p - p_n, \xi_n \rangle \geq -1$, temos

$$\begin{aligned}
\langle p, \xi_n \rangle - f(\xi_n) &= \langle p, \xi_n \rangle - \langle p_n, \xi_n \rangle + \langle p_n, \xi_n \rangle - \langle q_n, \xi_n \rangle - f(\xi_n) + \langle q_n, \xi_n \rangle = \\
&= \langle p - p_n, \xi_n \rangle + \langle p_n - q_n, \xi_n \rangle - (f(\xi_n) - \langle q_n, \xi_n \rangle) = \\
&= \langle p - p_n, \xi_n \rangle + \langle p_n - q_n, \xi_n \rangle - E_f(\xi_n) \geq \\
&\geq -1 - E_f(\xi_n) \to +\infty \text{ quando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Isto implica que $p \notin H = S$, pelo que S é aberto. ■

Lema 3.3.9 *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente e sejam H e H^{**}, respectivamente, os conjuntos definidos em (3.6) para f e f^{**} :*

$$\begin{aligned}
H &\doteq \left\{ p \in \mathbb{R}^m : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[\langle p, \xi \rangle - f(\xi) < +\infty \right] \right\} \\
H^{**} &\doteq \left\{ p \in \mathbb{R}^m : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[\langle p, \xi \rangle - f^{**}(\xi) < +\infty \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Então $H = H^{**}$. Em particular, se $f \in \mathcal{F}$, então H é aberto.

Demonstração

A inclusão $H^{**} \subset H$ é trivial: como $f^{**}(\xi) \leq f(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\langle p, \xi \rangle - f(\xi) \leq \langle p, \xi \rangle - f^{**}(\xi)$$

e portanto, se $p \in H^{**}$, é

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[\langle p, \xi \rangle - f(\xi) \right] \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[\langle p, \xi \rangle - f^{**}(\xi) \right] < +\infty,$$

o que prova que $p \in H$.

Suponhamos agora que $p \notin H^{**}$. Por definição deste conjunto, existe uma sucessão $(\xi^n) \subset \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\langle p, \xi^n \rangle - f^{**}(\xi^n) \right] = +\infty.$$

Ora, pela proposição 2.19.11, qualquer que seja o $\xi \in \mathbb{R}^m$, podemos escrever

$$f^{**}(\xi) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(\xi_j) : \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j = \xi, \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in E_{m+1} \right\}$$

onde $E_{m+1} \doteq \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^m : \lambda_j \geq 0, \ \forall j \in \{1, ..., m+1\}, \ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1 \right\}$.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer.

Atendendo à caracterização da bipolar de f estabelecida acima e à definição de ínfimo, podemos afirmar que existem $m+1$ vectores $\xi_1^n, ..., \xi_{m+1}^n \in \mathbb{R}^m$ e um sistema de escalares $\overline{\lambda}^n = \left(\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_{m+1} \right) \in E_{m+1}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m+1} \overline{\lambda}_j^n \xi_j^n = \xi^n \ \text{ e } \ f^{**}(\xi^n) > \sum_{j=1}^{m+1} \overline{\lambda}_j^n f(\xi_j^n) - \varepsilon.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned}
\langle p, \xi^n \rangle - f^{**}(\xi^n) &= \left\langle p, \sum_{j=1}^{m+1} \overline{\lambda}_j^n \xi_j^n \right\rangle - f^{**}(\xi^n) < \left\langle p, \sum_{j=1}^{m+1} \overline{\lambda}_j^n \xi_j^n \right\rangle - \sum_{j=1}^{m+1} \overline{\lambda}_j^n f(\xi_j^n) + \varepsilon = \\
&= \varepsilon + \sum_{j=1}^{m+1} \left[\overline{\lambda}_j^n \langle p, \xi_j^n \rangle - f(\xi_j^n) \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\langle p, \xi^n \rangle - f^{**}(\xi^n) < \varepsilon + \sum_{j=1}^{m+1} \left[\overline{\lambda}_j^n \langle p, \xi_j^n \rangle - f(\xi_j^n) \right], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atendendo a que $\lim_{n\to\infty} [\langle p, \xi^n\rangle - f^{**}(\xi^n)] = +\infty$, esta desigualdade implica que existem pelo menos um índice $\underline{j} \in \{1, ..., m+1\}$ e uma subsucessão de $\left(\xi^n_{\underline{j}}\right)$, ainda notada por $\left(\xi^n_{\underline{j}}\right)$, tais que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left\langle p, \xi^n_{\underline{j}}\right\rangle - f^{**}\left(\xi^n_{\underline{j}}\right)\right] = +\infty,$$

donde $p \notin H$ e então temos a inclusão $H \subset H^{**}$.

Evidentemente, se $f \in \mathcal{F}$ então H é aberto:

Se $f \in \mathcal{F}$ então também $f^{**} \in \mathcal{F}$ e dado que f^{**} é uma função convexa, pelo lema 3.3.8, $H^{**} = H$ é aberto. ∎

O seguinte teorema, que estabelece a existência de solução para o problema (3.5), é uma consequência directa do teorema 3.3.1 e do lema 3.3.9.

Teorema 3.3.10 *Se $f \in \mathcal{F}$, então o problema de minimização (3.5) admite solução.*

Capítulo 4

O problema não-autónomo convexo não-coercivo

4.1 Introdução

Consideremos o problema não-autónomo

$$\min\left\{\int_0^T [f(t,u'(t))+g(t,u(t))]\,dt : u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m), u(0)=a, u(T)=b\right\}. \tag{4.1}$$

e a classe $\mathcal{E}$, de todas as funções $\psi : I\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitadas inferiormente, tais que $\psi(\cdot,\xi)$ é uma função lipschitziana para cada $\xi\in\mathbb{R}^m$ fixado, $\psi(t,\cdot)$ é uma função semicontínua inferiormente para cada $t\in I$ fixado e

$$\lim_{n\to\infty}\left[\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n),\xi^n\rangle\right]=-\infty,$$

para qualquer sucessão $(t^n)\subset[0,T]$ e para qualquer sucessão (ξ^n) de pontos de diferenciabilidade de $\psi^{**}(t^n,\cdot)$ tais que $(|\xi^n|)\to\infty$.

Neste capítulo mostra-se que se $f\in\mathcal{E}$ é uma função convexa com respeito a ξ e existem duas constantes A e B, com $B>0$, tais que $f(t,\xi)\geq -A+B|\xi|$, $\forall(t,\xi)\in I\times\mathbb{R}^m$, e se g é uma função lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua com respeito à segunda satisfazendo $g(t,x)\geq -\alpha-\beta|x|$, $\forall(t,x)\in I\times\mathbb{R}^m$, onde α e β são constantes adequadas, com $0\leq\beta<\frac{B}{T}$, então o problema (4.1) admite solução e, além disso, que tal solução é uma função lipschitziana.

A demonstração é muito semelhante à demonstração do teorema 3 em [16], com alterações devidas ao facto de a função integranda não ser limitada inferiormente.

O passo principal da demonstração, consiste em mostrar que cada minimizante dos problemas aproximantes satisfaz uma condição de DuBois -Reymond generalizada, o que implica que a sucessão minimizante é limitada em $W^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^m)$. Mais precisamente, mostra-se que, sempre que l é suficientemente grande, o problema

$$\min_{u\in\left\{u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m):\int_0^T\theta(|u'(t)|)dt<l,u(0)=a,u(T)=b\right\}}\int_0^T[g(t,u(t))+f(t,u'(t))]\,dt \tag{4.2}$$

admite solução u_l.

Em seguida, estudando a função valor

$$\begin{aligned}V_\theta(l) &\doteq \min_{u\in\left\{u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m):\int_0^T\theta(|u'(t)|)dt<l,u(0)=a,u(T)=b\right\}}\int_0^T[g(t,u(t))+f(t,u'(t))]\,dt=\\ &= \int_0^T[g(t,u_l(t))+f(t,u_l'(t))]\,dt\end{aligned}$$

conclui-se que se V_θ é definitivamente constante, isto é, se

$$\exists l_0 :\ l\geq l_0 \Rightarrow V_\theta(l)=V_\theta(l_0),$$

então u_{l_0} é solução do problema

$$\min_{u\in\left\{u\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m):\int_0^T\theta(|u'(t)|)dt<+\infty,u(0)=a,u(T)=b\right\}}\int_0^T[g(t,u(t))+f(t,u'(t))]\,dt. \tag{4.3}$$

Num passo intermédio da demonstração de que V_θ é definitivamente constante, prova-se que qualquer elemento de uma sucessão (u_k) de soluções de problemas aproximantes, com l suficientemente grande, satisfaz uma condição de DuBois -Reymond generalizada, o que implica que (u_k) é limitada em $W^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^m)$. Daqui resulta que $u_k \in W^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^m)$ é solução do problema (4.3) e, consequentemente, é solução do problema (4.1).

4.2 Definições e resultados preliminares

4.2.1 Funções estritamente convexas no infinito

Começamos por recordar a noção de convexidade estrita no infinito, introduzida por Clarke e Loewen em [19].

Uma função convexa $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa se o seu gráfico não contém segmentos de recta. Uma versão local desta definição é a seguinte: uma função convexa $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa no ponto $x \in \mathbb{R}^m$ se o seu gráfico não contém segmentos de recta a que o ponto $(x, \psi(x))$ pertença. A noção de convexidade estrita no infinito é uma generalização desta ideia a um ponto no infinito.

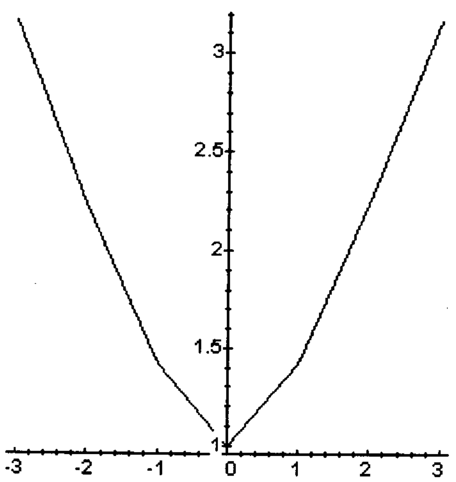
Definição 4.2.1 *Diremos que uma função convexa $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é **estritamente convexa no infinito** se o seu gráfico não contém semi-rectas, isto é, para qualquer $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\nu \neq 0$, e para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^m$, a função*

$$\psi_{\nu,\xi}(s) \doteq \psi(s\nu + \xi)$$

verifica a seguinte condição: para cada $s_0 \in \mathcal{D}(\psi_{\nu,\xi})$ existe $s_1 \in \mathcal{D}(\psi_{\nu,\xi})$, $s_1 > s_0$, tal que $\psi'_{\nu,\xi}(s_1) > \psi'_{\nu,\xi}(s_0)$, onde $\mathcal{D}(\psi_{\nu,\xi})$ denota o conjunto dos pontos de diferenciabilidade de $\psi_{\nu,\xi}$.

É evidente que qualquer função estritamente convexa é estritamente convexa no infinito.

Por outro lado, também é claro que a recíproca não é verdadeira. Existem funções estritamente convexas no infinito que não são estritamente convexas, e mais, o seu gráfico pode conter segmentos de recta arbitrariamente longe da origem. Por exemplo, se $m = 1$ podemos pensar na função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é obtido da seguinte forma: unem-se os pontos $(i, f(i))$ e $(i+1, f(i+1))$, $i \in \mathbb{Z}$, onde $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$.



Seja $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função convexa e seja $\psi^* : \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ a sua função polar:

$$\psi^*(p) = \sup\{\langle p, \xi\rangle - \psi(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^m\}.$$

A função ψ é contínua por ser convexa e apenas tomar valores finitos (proposição 2.16.21). Em particular é semicontínua inferiormente e então, pelas proposições 2.20.6 e 2.20.9, temos

$$\psi^*(p) = \langle p, \xi\rangle - \psi(\xi) \Leftrightarrow p \in \partial\psi(\xi) \Leftrightarrow \xi \in \partial\psi^*(p).$$

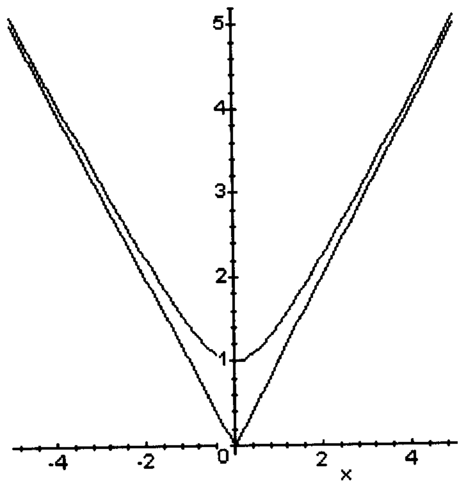
Daqui resulta que, para cada $p \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \partial\psi^*(p) &= \{\xi \in \mathbb{R}^m : \psi^*(p) = \langle p, \xi\rangle - \psi(\xi)\} = \\ &= \{\xi \in \mathbb{R}^m : \langle p, \xi\rangle - \psi^*(p) = \psi(\xi)\}, \end{aligned}$$

isto é, $\partial\psi^*(p)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^m$ que pertencem à projeccção em $\mathbb{R}^m$ da intersecção em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ do hiperplano definido por $\xi \mapsto \langle p, \xi\rangle - \psi^*(p)$ com o gráfico de ψ.

Exemplo 4.2.2 *Se ψ é a função cujo gráfico se encontra esboçado na figura anterior, temos que*

- *se $|p| < \sqrt{2} - 1$, então $\partial\psi^*(p) = \{0\}$;*
- *se $\sqrt{2} - 1 \leq p < 1$ ou se $-1 < p \leq 1 - \sqrt{2}$, então $\partial\psi^*(p)$ é um intervalo $[a, b]$ ou um ponto de $\mathbb{R}$;*
- *se $|p| \geq 1$, então $\partial\psi^*(p) = \emptyset$, porque as rectas $y = x$ e $y = -x$ são assimptotas do gráfico de f :*



Torna-se assim evidente a seguinte

Observação 4.2.3 *Se $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então ψ é estritamente convexa no infinito se e só se não existe nenhum $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $\partial\psi^*(p)$ é não-vazio e ilimitado, isto é, se e só se, qualquer que seja o $p \in \mathbb{R}^m$, o conjunto $\partial\psi^*(p)$ é ou vazio ou limitado.*

4.2.2 A família $\mathcal{G}$

Definição 4.2.4 *Notaremos por $\mathcal{G}$ a família de todas as funções semicontínuas inferiormente $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tais que $\psi^{**} \not\equiv -\infty$ e ψ^{**} é estritamente convexa no infinito.*

Observação 4.2.5 *Qualquer função semicontínua inferiormente $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ superlinear pertence a $\mathcal{G}$.*

Para ver que esta afirmação é verdadeira, notemos por φ a função bipolar de ψ e fixemos $\nu, \xi \in \mathbb{R}^m$, $\nu \neq 0$.

Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer e $0 \leq \lambda \leq 1$. Temos, uma vez que φ é convexa,

$$\begin{aligned} \varphi((\lambda s_1 + (1-\lambda) s_2)\nu + \xi) &= \varphi(\lambda s_1\nu + (1-\lambda) s_2\nu + \lambda\xi + (1-\lambda)\xi) = \\ &= \varphi(\lambda(s_1\nu + \xi) + (1-\lambda)(s_2\nu + \xi)) \leq \\ &\leq \lambda\varphi(s_1\nu + \xi) + (1-\lambda)\varphi(s_2\nu + \xi) \end{aligned}$$

pelo que a função

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \varphi_{\nu,\xi}(s) \doteq \varphi(s\nu + \xi)$$

é convexa.

Assim, para cada $s \in int(dom\varphi_{\nu,\xi})$, temos

$$\partial\varphi_{\nu,\xi}(s) = \partial\varphi(s\nu + \xi) = \{p \in \mathbb{R}^m : \varphi(\eta) \geq \varphi(s\nu + \xi) + \langle p, \eta - (s\nu + \xi)\rangle, \forall \eta \in \mathbb{R}^m\}$$

e se $s \in \mathcal{D}(\varphi_{\nu,\xi})$, isto é, se s é um ponto de diferenciabilidade de $\varphi_{\nu,\xi}$, então, pela proposição 2.20.19, é

$$\partial\varphi_{\nu,\xi}(s) = \partial\varphi(s\nu+\xi) = \{\nabla\varphi(s\nu+\xi)\}$$

e portanto

$$\varphi(\eta) \geq \varphi(s\nu+\xi) + \langle\nabla\varphi(s\nu+\xi), \eta-(s\nu+\xi)\rangle, \quad \forall\eta\in\mathbb{R}^m.$$

Em particular, para $\eta = \xi$ obtemos

$$\varphi(\xi) \geq \varphi(s\nu+\xi) + \langle\nabla\varphi(s\nu+\xi), \xi-(s\nu+\xi)\rangle = \varphi(s\nu+\xi) - \langle\nabla\varphi(s\nu+\xi), s\nu\rangle$$

pelo que

$$s\langle\nabla\varphi(s\nu+\xi), \nu\rangle \geq \varphi(s\nu+\xi) - \varphi(\xi)$$

e, se $s > 0$,

$$\langle\nabla\varphi(s\nu+\xi), \nu\rangle \geq \frac{\varphi(s\nu+\xi)-\varphi(\xi)}{s}.$$

Assim, para qualquer $s \in \mathcal{D}(\varphi_{\nu,\xi})$ tal que $s > 0$, temos

$$\varphi'_{\nu,\xi}(s) = \langle\nabla\varphi(s\nu+\xi), \nu\rangle \geq \frac{\varphi(s\nu+\xi)-\varphi(\xi)}{s}$$

e uma vez que ψ é superlinear, o quociente $\frac{\varphi(s\nu+\xi)-\varphi(\xi)}{s}$ tende para $+\infty$ quando s tende para $+\infty$, o que mostra que φ é estritamente convexa no infinito e, portanto $\psi \in \mathcal{G}$.

Lema 4.2.6 *Seja $\psi \in \mathcal{G}$ satisfazendo $\psi \geq 0$ e $\psi(0) = 0$. Então existem duas constantes positivas C e ρ tais que $\psi(\xi) \geq C|\xi|$ sempre que $|\xi| > \rho$.*

Demonstração
Podemos supor que ψ é convexa pois, se o não for, substituimos ψ por ψ^{**}. (Note-se que $\psi \geq \psi^{**}$.)
Comecemos por mostrar que

$$\psi(\xi) \to +\infty \text{ quando } |\xi| \to \infty.$$

Uma vez que ψ é convexa, os conjuntos

$$\psi^a \doteq \{\xi\in\mathbb{R}^m : \psi(\xi) < a\}$$

são subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^m$, qualquer que seja $a \geq 0$.

Com efeito, sejam ξ_1,ξ_2 dois elementos quaisquer de ψ^a, $\lambda \in [0,1]$ e $\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$.

Por definição de função convexa, temos

$$\psi(\xi) = \psi(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2) \leq \lambda\psi(\xi_1) + (1-\lambda)\psi(\xi_2)$$

e como $\xi_1,\xi_2 \in \psi^a$, temos

$$\psi(\xi_1) < a \text{ e } \psi(\xi_2) < a$$

donde

$$\psi(\xi) < \lambda a + (1-\lambda)a = a.$$

Isto significa que $\xi \in \psi^a$, logo ψ^a é um conjunto convexo para todo $a \in \mathbb{R}$, em particular, é convexo para qualquer $a \geq 0$ [1].

Com vista a uma contradição, suponhamos que existe $a > 0$ tal que ψ^a é ilimitado.

Uma vez que ψ^a é convexo e ilimitado, contém, pelo menos, uma semi-recta

$$\{s\nu : s \geq 0\}$$

para algum $\nu \in \psi^a \subset \mathbb{R}^m$, $\nu \neq 0$, e isto significa que

$$\psi_{\nu,0}(s) < a, \quad \forall s \geq 0.$$

[1] Note-se que se $a < 0$, então

$$\psi^a \doteq \{\xi\in\mathbb{R}^m : \psi(\xi) < a < 0\} = \emptyset,$$

uma vez que, por hipótese, $\psi \geq 0$ (e $\emptyset$ é um conjunto convexo).

De facto, temos

$$\{s\nu : s \geq 0\} \subset \psi^a = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \psi(\xi) < a\}$$

então

$$\psi(s\nu) = \psi(s\nu + 0) = \psi_{\nu,0}(s) < a, \quad \forall s \geq 0.$$

Note-se que sendo ψ uma função convexa, temos, para quaisquer $s_1, s_2 \geq 0$ e $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\psi_{\nu,0}(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2) &= \psi((\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)\nu) \leq \lambda\psi(s_1\nu) + (1-\lambda)\psi(s_2\nu) = \\ &= \lambda\psi_{\nu,0}(s_1) + (1-\lambda)\psi_{\nu,0}(s_2)\end{aligned}$$

e portanto $\psi_{\nu,0}$ é convexa.

A função $h(s) \doteq s\nu$ (por ser lipschitziana) é absolutamente contínua em qualquer intervalo $[0,\beta] \subset \mathbb{R}$; em particular é contínua nesse intervalo, pelo que o conjunto $h([0,\beta])$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Por outro lado, como $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, pela proposição 2.16.24 é lipschitziana em $h([0,\beta])$. Daqui resulta, pela proposição 2.14.5, que $\psi(h(s)) = \psi(s\nu) = \psi_{\nu,0}(s)$ é absolutamente contínua em $[0,\beta]$, e então, pela proposição 2.14.6, para cada $\tau > 0$, é

$$\psi_{\nu,0}(\tau) - \psi_{\nu,0}(0) = \int_0^\tau \psi'_{\nu,0}(\sigma)\, d\sigma.$$

Por outro lado, por hipótese, temos

$$\psi_{\nu,0}(\tau) = \psi(\nu\tau) \geq 0 \quad \text{e} \quad \psi_{\nu,0}(0) = \psi(\nu.0) = \psi(0) = 0$$

então

$$\int_0^\tau \psi'_{\nu,0}(\sigma)\, d\sigma \geq 0$$

donde existe $s_0 \in \mathcal{D}(\psi_{\nu,0}) \cap [0,\tau)$ tal que

$$\psi'_{\nu,0}(s_0) \geq 0.$$

Uma vez que ψ é estritamente convexa no infinito, podemos concluir que existe $s_1 > s_0$, tal que $\psi'_{\nu,0}(s_1) > \psi'_{\nu,0}(s_0) \geq 0$, isto é, existe $s_1 \in \mathcal{D}(\psi_{\nu,0})$, tal que

$$\psi'_{\nu,0}(s_1) > 0$$

e portanto, pela convexidade de $\psi_{\nu,0}$,

$$\begin{aligned}&\psi_{\nu,0}((1-\lambda)s_1 + \lambda s) \leq (1-\lambda)\psi_{\nu,0}(s_1) + \lambda\psi_{\nu,0}(s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &\psi_{\nu,0}(s_1 + \lambda(s - s_1)) \leq \psi_{\nu,0}(s_1) + \lambda(\psi_{\nu,0}(s) - \psi_{\nu,0}(s_1)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{\lambda}(\psi_{\nu,0}(s_1 + \lambda(s - s_1)) - \psi_{\nu,0}(s_1)) \leq \psi_{\nu,0}(s) - \psi_{\nu,0}(s_1).\end{aligned}$$

Para $s \neq s_1$, temos

$$(s - s_1)\frac{\psi_{\nu,0}(s_1 + \lambda(s - s_1)) - \psi_{\nu,0}(s_1)}{\lambda(s - s_1)} \leq \psi_{\nu,0}(s) - \psi_{\nu,0}(s_1)$$

e fazendo $\lambda \to 0$, obtemos,

$$(s - s_1)\psi'_{\nu,0}(s_1) \leq \psi_{\nu,0}(s) - \psi_{\nu,0}(s_1)$$

donde

$$\psi_{\nu,0}(s) \geq \psi_{\nu,0}(s_1) + (s - s_1)\psi'_{\nu,0}(s_1), \quad \forall s \geq 0.$$

Isto implica que

$$\lim_{s \to +\infty} \psi_{\nu,0}(s) = +\infty$$

(pois $\psi_{\nu,0}(s_1) + (s - s_1)\psi'_{\nu,0}(s_1) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$) o que contradiz o facto de se ter $\psi_{\nu,0} < a$, $\forall s \geq 0$.

Concluimos então que, para qualquer $a > 0$, o conjunto ψ^a é limitado e portanto

$$\psi(\xi) \to +\infty \quad \text{quando} \quad |\xi| \to \infty. \tag{4.4}$$

De facto, fixemos $a > 0$ qualquer. Se ξ é tal que $\psi(\xi) < a$, então $\xi \in \psi^a$. Mas, ψ^a é um conjunto limitado, isto é, $\exists k > 0$ tal que $|\xi| \leq k$. Temos então

$$\forall a > 0 \ \exists k > 0 \ \forall \xi \ \ (\psi(\xi) < a \ \Rightarrow \ |\xi| \leq k)$$

isto é,

$$\forall a > 0 \ \exists k > 0 \ \forall \xi \ \ (|\xi| > k \ \Rightarrow \ \psi(\xi) \geq a)$$

e portanto vale (4.4).

Uma vez que ψ verifica (4.4), existem duas constantes positivas ρ e δ tais que

$$\psi(\eta) \geq \delta \ \text{ sempre que } \ |\eta| = \rho.$$

Se $|\xi| > \delta$, definam-se

$$\lambda \doteq \frac{\rho}{|\xi|} \ \text{ e } \ \eta \doteq \lambda\xi.$$

Por convexidade de ψ e recordando que $\psi(0) = 0$, obtemos

$$\psi(\xi) \geq \frac{1}{\lambda}\psi(\eta) = \frac{\psi(\eta)}{\rho}|\xi| \geq \frac{\delta}{\rho}|\xi|.$$

Com efeito, sendo ψ uma função convexa, temos

$$\psi(\lambda_1\xi_1 + (1-\lambda_1)\xi_2) \leq \lambda_1\psi(\xi_1) + (1-\lambda_1)\psi(\xi_2)$$

quaisquer que sejam $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda_1 \in [0,1]$. Em particular, esta desigualdade é válida para $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda$ [2]. Assim,

$$\psi(\lambda\xi) = \psi(\lambda\xi + (1-\lambda)0) \leq \lambda\psi(\xi) + (1-\lambda)\psi(0)$$

donde, atendendo a que $\psi(0) = 0$,

$$\psi(\lambda\xi) \leq \lambda\psi(\xi) \ \Leftrightarrow \ \psi(\xi) \geq \frac{1}{\lambda}\psi(\lambda\xi).$$

Mas, $\eta = \lambda\xi$ e $\lambda = \frac{\rho}{|\xi|} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{|\xi|}{\rho}$. Logo

$$\psi(\xi) \geq \frac{1}{\lambda}\psi(\lambda\xi) = \frac{\psi(\eta)}{\rho}|\xi|$$

e como $|\eta| = |\lambda\xi| = \left|\frac{\rho}{|\xi|}\xi\right| = |\rho| = \rho$, pois ρ é um número positivo, tem-se $\psi(\eta) \geq \delta$, donde resulta que

$$\psi(\xi) \geq \frac{\delta}{\rho}|\xi|.$$

Assim, tomando $C = \frac{\delta}{\rho}$, o lema está provado. ■

4.2.3 A família $\mathcal{E}$

No que segue, a convexificação e o gradiente da função $\psi(t,\xi)$ são entendidos com respeito a ξ. Seja $I \doteq [0,T]$.

Definição 4.2.7 *Notamos por $\mathcal{E}$ a família de todas as funções $\psi : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitadas inferiormente, tais que $\psi(\cdot,\xi)$ é uma função lipschitziana para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, $\psi(t,\cdot)$ é uma função semicontínua inferiormente para cada $t \in I$ fixado, e*

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in I \\ |\xi|>R}} \sup\{\psi^{**}(t,\xi) - \langle p,\xi\rangle : p \in \partial_\xi\psi^{**}(t,\xi)\} = -\infty. \tag{4.5}$$

[2] Note-se que, como

$$\rho > 0, \ \ \rho < |\xi|, \ \text{ e } \ \lambda = \frac{\rho}{|\xi|},$$

tem-se

$$0 < \lambda < 1.$$

A seguinte proposição dá-nos uma caracterização da família $\mathcal{E}$.

Proposição 4.2.8 *A condição (4.5) na definição 4.2.7 é equivalente a*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle \nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n), \xi^n\rangle\right] = -\infty \tag{4.6}$$

para qualquer sucessão de pontos $(t^n,\xi^n) \subset I\times\mathbb{R}^m$ *tal que* $\xi^n \in \mathcal{D}(\psi^{**}(t^n,\cdot))$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *e* $(|\xi^n|)\to\infty$.

Demonstração
Seja (t^n,ξ^n) uma sucessão em $I\times\mathbb{R}^m$ tal que $\xi^n \in \mathcal{D}(\psi^{**}(t^n,\cdot))$ e $(|\xi^n|)\to\infty$.
Seja (R_n) uma sucessão de números reais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = +\infty$.
Comecemos por mostrar que a condição (4.5) implica (4.6).
Por (4.5), temos

$$\lim_{R_n\to+\infty} \sup_{\substack{t^n\in I\\ |\xi^n|>R_n}} \sup\left\{\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle p^n,\xi^n\rangle : p^n \in \partial_\xi\psi^{**}(t^n,\xi^n)\right\} = -\infty.$$

Para cada $t\in I$ fixado, a função $\psi^{**}(t,\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ é uma função convexa. Logo, pela proposição 2.16.24, é lipschitziana numa vizinhança de cada ponto ξ de $\mathbb{R}^m$. Isto significa (proposição 2.21.10) que o gradiente generalizado de $\psi^{**}(t,\cdot)$ coincide, em qualquer ponto ξ de $\mathbb{R}^m$ com o subgradiente de $\psi^{**}(t,\cdot)$ no sentido da análise convexa. Assim, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos

$$\partial_\xi\psi^{**}(t^n,\xi^n) = \left\{p^n\in\mathbb{R}^m : \psi^{**}(t^n,\eta^n) \geq \psi^{**}(t^n,\xi^n) + \langle p^n, \eta^n-\xi^n\rangle,\ \forall \eta^n\in\mathbb{R}^m\right\}.$$

Por hipótese, $\xi^n \in \mathcal{D}(\psi^{**}(t^n,\cdot))$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Então, pela proposição 2.20.19

$$\partial_\xi\psi^{**}(t^n,\xi^n) = \left\{\nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n)\right\},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Logo, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$p^n = \nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n)$$

e, consequentemente,

$$\sup\left\{\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle p^n,\xi^n\rangle : p^n\in\partial_\xi\psi^{**}(t^n,\xi^n)\right\} = \psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n),\xi^n\rangle.$$

Resulta então que

$$\lim_{R_n\to+\infty} \sup_{\substack{t^n\in I\\ |\xi^n|>R_n}} \left\{\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n),\xi^n\rangle\right\} = -\infty.$$

Mas, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n),\xi^n\rangle \leq \sup_{\substack{t^n\in I\\ |\xi^n|>R_n}} \left[\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n),\xi^n\rangle\right],\quad \forall t^n\in I.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty}\left[\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n),\xi^n\rangle\right] = -\infty$$

o que prova o pretendido.
Mostremos agora que (4.6) implica (4.5).
Denotemos por $\chi(R)$ o argumento do limite em (4.5), isto é,

$$\chi(R) = \sup_{\substack{t\in I\\ |\xi|>R}} \sup\left\{\psi^{**}(t,\xi) - \langle p,\xi\rangle : p\in\partial_\xi\psi^{**}(t,\xi)\right\}$$

e fixemos $n\in\mathbb{N}$ qualquer.
Por definição de supremo, existe $(t^n,\xi^n,p^n)\in I\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$, com $p^n\in\partial_\xi\psi^{**}(t^n,\xi^n)$, tal que

$$\chi(R_n) \leq \psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle p^n,\xi^n\rangle + 1. \tag{4.7}$$

Sendo $\psi^{**}(t,\cdot)$ localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^m$, temos, por definição,

$$\partial_\xi\psi^{**}(t^n,\xi^n) = co\left\{\lim_{i\to\infty}\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_i^n) : (\xi_i^n)\to\xi^n,\ \xi_i^n\in\mathcal{D}(\psi^{**}(t^n,\cdot)),\ \text{e } \nabla\psi^{**}(t^n,\xi_i^n) \text{ converge}\right\}.$$

Pelo teorema de Carathéodory, o invólucro convexo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$, pode escrever-se da seguinte forma

$$co\,A = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x_j,\ \widetilde{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in E_{m+1}, x_j \in A,\ \forall j = 1, ..., m+1 \right\}$$

onde E_{m+1} denota o simplexo

$$E_{m+1} = \left\{ \widetilde{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \lambda_j \geq 0,\ \forall j = 1, ..., m+1,\ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Logo, pondo

$$A \doteq \left\{ \lim_{i\to\infty} \nabla\psi^{**}(t^n, \xi_i^n) : (\xi_i^n) \to \xi^n,\ \xi_i^n \in \mathcal{D}(\psi^{**}(t^n, \cdot)),\ \text{e}\ (\nabla\psi^{**}(t^n, \xi_i^n))\ \text{converge} \right\}$$

temos

$$\partial_\xi \psi^{**}(t^n, \xi^n) = co\,A = \left\{ \begin{array}{c} p^n \in \mathbb{R}^m : p^n = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n p_j^n,\ \widetilde{\lambda}^n = (\lambda_1^n, ..., \lambda_{m+1}^n) \in E_{m+1}, \\ p_j^n \in A,\ \forall j \in J \doteq \{1, ..., m+1\} \end{array} \right\}$$

e portanto dizer que $p^n \in \partial_\xi \psi^{**}(t^n, \xi^n)$ significa dizer que existem $m+1$ sucessões (ξ_{ji}^n) tais que

$$(\xi_{ji}^n) \underset{i\to\infty}{\to} \xi^n \ ,\ \xi_{ji}^n \in \mathcal{D}(\psi^{**}(t^n, \cdot)),\ \forall j \in J,\ \forall i \in \mathbb{N}$$

e

$$p^n = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n p_j^n$$

onde

$$p_j^n = \lim_{i\to\infty} \nabla\psi^{**}(t^n, \xi_{ji}^n),\ \forall j \in J.$$

Ora, para cada $j \in J$ podemos encontrar $k_{j1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \geq k_{j1} \Rightarrow |\xi_{ji}^n - \xi^n| < 1.$$

Seja

$$k_1 \doteq \max_{j\in J} k_{j1}.$$

Analogamente, podemos encontrar $k_{j2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \geq k_{j2} \Rightarrow |\nabla\psi^{**}(t^n, \xi_{ji}^n) - p_j^n| < \frac{1}{|\xi^n| + 1}.$$

Seja

$$k_2 \doteq \max_{j\in J} k_{j2}.$$

Então, sendo $k \doteq \max\{k_1, k_2\}$,

$$i \geq k \Rightarrow |\xi_{ji}^n - \xi^n| < 1 \wedge |\nabla\psi^{**}(t^n, \xi_{ji}^n) - p_j^n| < \frac{1}{|\xi^n| + 1},\ \forall j \in J.$$

Assim, podemos afirmar que existem $p_j^n \in A \subset co\,A = \partial_\xi \psi^{**}(t^n, \xi^n)$ e $\xi_j^n \in \mathcal{D}(\psi^{**}(t^n, \cdot))$, com $|\xi_j^n - \xi^n| < 1$, $\forall j \in J$, e existe $\widetilde{\lambda}^n = (\lambda_1^n, ..., \lambda_{m+1}^n) \in E_{m+1}$ tais que

$$p^n = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^n p_j^n$$

e

$$|\nabla\psi^{**}(t^n, \xi_j^n) - p_j^n| < \frac{1}{|\xi^n| + 1},\ \forall j \in J.$$

Daqui resulta que

$$\left|\left\langle \nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-p_j^n,\xi_j^n\right\rangle\right|<\frac{\left|\xi_j^n\right|}{\left|\xi^n\right|+1}<1,\ \ \forall j\in J. \tag{4.8}$$

De facto, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e atendendo a que $\left|\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-p_j^n\right|<\frac{1}{|\xi^n|+1}$, $\forall j\in J$, temos

$$\left|\left\langle \nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-p_j^n,\xi_j^n\right\rangle\right|\leq\left|\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-p_j^n\right|\left|\xi_j^n\right|<\frac{\left|\xi_j^n\right|}{\left|\xi^n\right|+1}$$

e como $\left|\xi_j^n-\xi^n\right|<1$,

$$\left|\xi_j^n\right|=\left|\xi_j^n-\xi^n+\xi^n\right|\leq\left|\xi_j^n-\xi^n\right|+\left|\xi^n\right|<1+\left|\xi^n\right|$$

donde resulta o pretendido.

Devido à convexidade da função $\psi^{**}(t,\cdot)$, temos

$$\partial_\xi\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)=\left\{p^n\in\mathbb{R}^m:\psi^{**}\left(t^n,\eta^n\right)\geq\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)+\left\langle p^n,\eta^n-\xi^n\right\rangle,\ \ \forall\eta^n\in\mathbb{R}^m\right\}.$$

Logo, como $p_j^n\in\partial_\xi\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)$ e $\xi_j^n\in\mathbb{R}^m$, é

$$\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)\geq\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)+\left\langle p_j^n,\xi_j^n-\xi^n\right\rangle\ \Leftrightarrow\ \psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)\leq-\left\langle p_j^n,\xi_j^n-\xi^n\right\rangle$$

e portanto,

$$\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)\leq\left\langle p_j^n,\xi^n-\xi_j^n\right\rangle,\ \ \forall j\in J. \tag{4.9}$$

De (4.8) e (4.9), obtemos

$$\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle\leq\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right),\xi_j^n\right\rangle+1. \tag{4.10}$$

De facto, por (4.9),

$$\begin{aligned}&\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)\leq\left\langle p_j^n,\xi^n-\xi_j^n\right\rangle\ \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)\leq\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle-\left\langle p_j^n,\xi_j^n\right\rangle\ \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle\leq\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi_j^n\right\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, por (4.8),

$$\left|\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-p_j^n,\xi_j^n\right\rangle\right|<1\ \Leftrightarrow\ \left|\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right),\xi_j^n\right\rangle-\left\langle p_j^n,\xi_j^n\right\rangle\right|<1.$$

Assim,

$$\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right),\xi_j^n\right\rangle-\left\langle p_j^n,\xi_j^n\right\rangle<1\ \Leftrightarrow\ -\left\langle p_j^n,\xi_j^n\right\rangle<1-\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right),\xi_j^n\right\rangle$$

donde

$$\begin{aligned}\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle\ &\leq\ \psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi_j^n\right\rangle<\\ &<\ \psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right),\xi_j^n\right\rangle+1.\end{aligned}$$

Multiplicando (4.10) por λ_j^n obtemos

$$\lambda_j^n\left(\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle\right)\leq\lambda_j^n\left(\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right),\xi_j^n\right\rangle+1\right)$$

e então, somando sobre j, resulta que

$$\sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left(\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle\right)\right)\leq\sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left(\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right)-\left\langle\nabla\psi^{**}\left(t^n,\xi_j^n\right),\xi_j^n\right\rangle+1\right)\right).$$

Mas,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left(\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle\right)\right)\ &=\ \sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)\right)-\sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left\langle p_j^n,\xi^n\right\rangle\right)=\\ &=\ \psi^{**}\left(t^n,\xi^n\right)-\left\langle\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^np_j^n,\xi^n\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^n\right\rangle\end{aligned}$$

com $\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^n = 1$ e $\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^n p_j^n = p^n$, donde,

$$\sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left(\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p_j^n,\xi^n\rangle\right)\right)=\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p^n,\xi^n\rangle$$

e

$$\begin{aligned}
\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p^n,\xi^n\rangle &= \sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left(\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p_j^n,\xi^n\rangle\right)\right)\leq\\
&\leq \sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left(\psi^{**}(t^n,\xi_j^n)-\left\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_j^n),\xi_j^n\right\rangle+1\right)\right)=\\
&= \sum_{j=1}^{m+1}\left(\lambda_j^n\left(\psi^{**}(t^n,\xi_j^n)-\left\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_j^n),\xi_j^n\right\rangle\right)\right)+\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^n\leq\\
&\leq \max_j\left\{\psi^{**}(t^n,\xi_j^n)-\left\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_j^n),\xi_j^n\right\rangle\right\}\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^n+1=\\
&= 1+\max_j\left\{\psi^{**}(t^n,\xi_j^n)-\left\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_j^n),\xi_j^n\right\rangle\right\}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p^n,\xi^n\rangle\leq\mu^n$$

onde

$$\mu^n \doteq 1+\max_{j\in J}\left\{\psi^{**}(t^n,\xi_j^n)-\left\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_j^n),\xi_j^n\right\rangle\right\}.$$

Uma vez que, por hipotese, $(|\xi^n|)\to\infty$, temos, para cada $j\in J$, $\left(\left|\xi_j^n\right|\right)\to\infty$ e então (4.6) implica que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\psi^{**}(t^n,\xi_j^n)-\left\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_j^n),\xi_j^n\right\rangle\right)=-\infty,\quad\forall j\in J.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned}
\lim_n\mu^n &= \lim_n\left(1+\max_j\left\{\psi^{**}(t^n,\xi_j^n)-\left\langle\nabla\psi^{**}(t^n,\xi_j^n),\xi_j^n\right\rangle\right\}\right)=\\
&= 1+(-\infty)=-\infty.
\end{aligned}$$

Por (4.7), tem-se

$$\chi(R_n)\leq\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p^n,\xi^n\rangle+1.$$

Como

$$\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p^n,\xi^n\rangle\leq\mu^n$$

vem

$$\chi(R_n)\leq\psi^{**}(t^n,\xi^n)-\langle p^n,\xi^n\rangle+1\leq\mu^n+1.$$

Assim,

$$\lim_n\chi(R_n)\leq\lim_n(\mu^n+1)=1+\lim_n\mu^n=-\infty.$$

Finalmente, temos que χ é uma função não-crescente.

De facto, sejam $R_1,\ R_2\in\mathbb{R}$ tais que $R_1<R_2$. Por definição de supremo,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{t\in I\\|\xi|>R_1}}\sup\left\{\psi^{**}(t,\xi)-\langle p,\xi\rangle : p\in\partial_\xi\psi^{**}(t,\xi)\right\}\geq\\
\geq&\sup_{\substack{t\in I\\|\xi|>R_2}}\sup\left\{\psi^{**}(t,\xi)-\langle p,\xi\rangle : p\in\partial_\xi\psi^{**}(t,\xi)\right\}
\end{aligned}$$

isto é, $\chi(R_1)\geq\chi(R_2)$.

Portanto, verifica-se (4.5). ■

4.2.4 Relação entre $\mathcal{G}$ e $\mathcal{E}$

Lema 4.2.9 *Se $\psi \in \mathcal{E}$, então $\psi(t,\cdot) \in \mathcal{G}$, $\forall t \in I$.*

Demonstração

Se $\psi \in \mathcal{E}$ então, por definição de $\mathcal{E}$, temos que $\psi(t,\cdot)$ é uma função semicontínua inferiormente para qualquer $t \in I$ fixado. Por outro lado, temos também que ψ é limitada inferiormente e, portanto, o mesmo acontece com $\psi^{**}(t,\cdot)$. Daqui resulta que $\psi^{**}(t,\cdot) \not\equiv -\infty$. Falta então mostrar que, para cada $t \in I$ fixado, a função bipolar de $\psi(t,\cdot)$, que será notada por φ, é estritamente convexa no infinito.

Fixemos $t \in I$ qualquer.

Uma vez que $\psi \in \mathcal{E}$, pela proposição 4.2.8, a função $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ verifica a condição

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi(\xi_n) - \langle \nabla\varphi(\xi_n), \xi_n\rangle] = -\infty$$

para qualquer sucessão (ξ_n) de pontos de diferenciabilidade de φ tal que $(|\xi_n|) \to \infty$. Então, pela proposição 3.3.7, φ é um elemento da família $\mathcal{F}$ (definição 3.3.5) e, consequentemente, pelo lema 3.3.8, o conjunto

$$H \doteq \left\{ p \in \mathbb{R}^m : \sup_{\xi\in\mathbb{R}^m} [\langle p, \xi\rangle - \varphi(\xi)] < +\infty \right\}$$

é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Logo, $dom\,\varphi^* = int\,(dom\,\varphi^*)$ e portanto, pelas proposições 2.21.4 e 2.20.4, podemos concluir que $\partial\varphi^*(p)$ ou é um conjunto limitado, se $p \in dom\,\varphi^*$, ou um conjunto vazio, se $p \notin dom\,\varphi^*$. Assim, atendendo à observação 4.2.3, o lema está provado. ■

4.2.5 Continuidade

Teorema 4.2.10 *Seja $I \doteq [0,T] \subset \mathbb{R}$ e seja $h : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua em relação à segunda. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^m$ qualquer. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que*

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |h(t,x) - h(t,x_0)| < \varepsilon,$$

qualquer que seja o t em I.

Demonstração

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existiam $\varepsilon > 0$ e sucessões $(x_k) \subset \mathbb{R}^m$ e $(t_k) \subset I$ tais que

$$|x_k - x_0| < \frac{1}{k} \;\text{ e }\; |h(t_k, x_k) - h(t_k, x_0)| \geq \varepsilon.$$

Sendo I um conjunto compacto, qualquer sucessão de pontos de pontos em I contém uma subsucessão convergente para um elemento de I. Assim, passando se necessário a uma subsucessão, podemos afirmar que existe $t \in I$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} t_k = t.$$

Além disso, dado que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$, temos, evidentemente,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0.$$

Uma vez que h é lipschitziana em relação à primeira variável, existe $M \geq 0$ tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$

$$|h(t_k, x_k) - h(t, x_k)| \leq M|t_k - t| \;\text{ e }\; |h(t_k, x_0) - h(t, x_0)| \leq M|t_k - t|.$$

Por outro lado, h é contínua em relação à segunda variável. Então, para cada $t \in I$ fixado, temos $\lim_{k\to\infty} h(t, x_k) = h(t, x_0)$ o que implica

$$\lim_{k\to\infty} |h(t, x_k) - h(t, x_0)| = 0.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \lim_{k\to\infty} |h(t_k, x_k) - h(t_k, x_0)| = \\
&= \lim_{k\to\infty} |h(t_k, x_k) - h(t, x_k) + h(t, x_k) - h(t, x_0) + h(t, x_0) - h(t_k, x_0)| \leq \\
&\leq \lim_{k\to\infty} (|h(t_k, x_k) - h(t, x_k)| + |h(t, x_k) - h(t, x_0)| + |h(t, x_0) - h(t_k, x_0)|) \leq \\
&\leq \lim_{k\to\infty} (2M|t_k - t| + |h(t, x_k) - h(t, x_0)|) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese de se ter $\varepsilon > 0$. ■

Corolário 4.2.11 *Seja $I \doteq [0,T] \subset \mathbb{R}$ e seja $h : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua em relação à segunda. Então h é contínua em $I \times \mathbb{R}^m$.*

Demonstração
Fixemos $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$ qualquer.
Queremos mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ tal que

$$|t - t_0| + |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(t, x) - h(t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Fixemos então $\varepsilon > 0$ qualquer.
Pelo teorema 4.2.10 existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |h(t, x) - h(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para qualquer $t \in I$. Em particular, temos

$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |h(t_0, x) - h(t_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, uma vez que h é lipschitziana em relação à primeira variável, existe $M \geq 0$ tal que

$$|h(t, x) - h(t_0, x)| \leq M|t - t_0|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Então, se $|t - t_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ e $|x - x_0| < \delta_0$ temos

$$\begin{aligned}
|h(t, x) - h(t_0, x_0)| &= |h(t, x) - h(t_0, x) + h(t_0, x) - h(t_0, x_0)| \leq \\
&\leq |h(t, x) - h(t_0, x)| + |h(t_0, x) - h(t_0, x_0)| \leq \\
&\leq M|t - t_0| + |h(t_0, x) - h(t_0, x_0)| < \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

o que mostra o pretendido. ■

Lema 4.2.12 *Seja $\varphi : I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente, lipschitziana com respeito à primeira variável. Suponhamos que $\varphi(t, x, .)$ é convexa para cada $t \in I$ e para cada $x \in \mathbb{R}^m$. Suponhamos ainda que existem três constantes C_i, $i = 0, 1, 2$, $C_0 \geq 0$, tais que*

$$|v| \leq C_0 |\varphi(t, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2 \tag{4.11}$$

para qualquer $(t, x, \xi) \in I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ e para qualquer $v \in \partial_t \varphi(t, x, \xi)$, onde $\partial_t \varphi$ denota o gradiente generalizado de φ com respeito a t.

Seja $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$ e suponhamos que a função $t \mapsto \varphi(t, u(t), u'(t))$ pertence a $L^1(I, \mathbb{R})$. Então existe $k_0 \in L^1(I, \mathbb{R})$ tal que

$$|\varphi(s_2, u(t), u'(t)) - \varphi(s_1, u(t), u'(t))| \leq k_0(t)|s_2 - s_1|$$

para quaisquer t, s_1, $s_2 \in I$.

Demonstração
Fixemos $t_1, t_2 \in I$ e $x, \xi \in \mathbb{R}^m$ quaisquer.
Consideremos a função definida por

$$g(s) \doteq |\varphi(t_1 + sd, x, \xi) - \varphi(t_1, x, \xi)|, \quad s \in [0,1]$$

onde

$$d \doteq t_2 - t_1.$$

Por (4.11), para cada $s \in [0,1]$, vale

$$g'(s) \leq |d| |\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)| \leq |d| (C_0 g(s) + C_0 |\varphi(t_1, x, \zeta)| + C_1 |x| + C_2).$$

De facto,

(a) por hipótese, a função $t \mapsto \varphi(t, x, \xi)$, $t \in I$, é lipschitziana com respeito à primeira variável;

(b) . $|t_1 + s_1 d - (t_1 + s_2 d)| = |d(s_1 - s_2)| = |d| |s_1 - s_2| \leq |d| |s_1 - s_2|$

donde, a função $s \mapsto t_1 + sd$ é lipschitziana (basta tomar para constante deLipschitz $k = |d|$),
. a função $x \mapsto |x|$ é lipschitziana (basta tomar para constante de Lipschitz $k = 1$).
Assim, pela proposição 2.14.4, as duas funções anteriores são absolutamente contínuas.
Por (a) e (b) e atendendo à proposição 2.14.5, temos, sucessivamente,
$s \mapsto \varphi(t_1 + sd, x, \xi)$ absolutamente contínua
$s \mapsto \varphi(t_1 + sd, x, \xi) - \varphi(t_1, x, \xi)$ absolutamente contínua
$s \mapsto |\varphi(t_1 + sd, x, \xi) - \varphi(t_1, x, \xi)|$ absolutamente contínua.
Então, pela proposição 2.14.6, g' existe quase sempre em $[0,1]$ e consequentemente, para quase todo $s \in [0,1]$,

$$g'(s) = |d\varphi'(t_1 + sd, x, \xi)| = |d| |\varphi'(t_1 + sd, x, \xi)|$$

onde φ' denota a derivada de φ em ordem a t (note-se que φ existe quase sempre porque, por hipótese, φ é lipschitziana com respeito à primeira variável (proposição 2.21.1)).

Atendendo a que, qualquer que seja o conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$, temos, por definição, $|A| \doteq \sup\{|a| : a \in A\}$, resulta que

$$|\varphi'(t_1 + sd, x, \xi)| \leq \sup\{|v| : v \in \partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)\} = |\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)|,$$

e assim,

$$g'(s) = |d| |\varphi'(t_1 + sd, x, \xi)| \leq |d| |\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)|.$$

Por outro lado, para quase todo $s \in [0,1]$, temos $t_1 + sd \in int(I)$ e então, pela proposição 2.21.3, para um tal s, o conjunto $\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)$ é não-vazio e compacto. Daqui resulta que a aplicação contínua $\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi) \ni v \mapsto |v|$ atinge o seu valor máximo em $\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)$, isto é, tem-se

$$\sup\{|v| : v \in \partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)\} = \max\{|v| : v \in \partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)\}.$$

Assim, existe $v' \in \partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)$ tal que $|v'| = |\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)|$ e então, por (4.11), temos

$$\begin{aligned} g'(s) &\leq |d| |\partial_t \varphi(t_1 + sd, x, \xi)| = |d| |v'| \leq \\ &\leq |d| (C_0 |\varphi(t_1 + sd, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2) = \\ &= |d| (C_0 |\varphi(t_1 + sd, x, \xi) - \varphi(t_1, x, \xi) + \varphi(t_1, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2) \leq \\ &\leq |d| (C_0 |\varphi(t_1 + sd, x, \xi) - \varphi(t_1, x, \xi)| + C_0 |\varphi(t_1, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2) = \\ &= |d| (C_0 g(s) + C_0 |\varphi(t_1, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2) \end{aligned}$$

como pretendido.

Sendo g absolutamente contínua, pela proposição 2.14.6, para qualquer $s \in [0,1]$, tem-se

$$g(s) - g(0) = \int_0^s g'(t)\, dt.$$

Mas,

$$g'(s) \leq |d| (C_0 g(s) + C_0 |\varphi(t_1, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2)$$

e

$$g(0) = |\varphi(t_1 + 0.d, x, \xi) - \varphi(t_1, x, \xi)| = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g(s)-g(0) &= g(s)=|\varphi(t_1+sd,x,\xi)-\varphi(t_1,x,\xi)|=\int_0^s g'(t)\,dt\leq\\
&\leq \int_0^s |d|\left(C_0 g(s)+C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)dt=\\
&= \int_0^s |d|\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)dt+\int_0^s |d|\,C_0 g(t)\,dt\leq\\
&\leq \int_0^1 |d|\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)dt+\int_0^s |d|\,C_0 g(t)\,dt=\\
&= |d|\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)+\int_0^s |d|\,C_0 g(t)\,dt
\end{aligned}$$

isto é,

$$g(s)\leq |d|\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)+\int_0^s |d|\,C_0 g(t)\,dt.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Gronwall [3] com

$$\alpha(s)\equiv\alpha\doteq|d|\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)\quad\text{e}\quad k(s)\equiv k\doteq|d|\,C_0$$

obtemos

$$\begin{aligned}
g(s) &= |\varphi(t_1+sd,x,\xi)-\varphi(t_1,x,\xi)|\leq\\
&\leq |d|\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)+e^{\int_0^s|d|C_0dt}=\\
&= |d|\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)+e^{sC_0|d|}=\\
&= |t_2-t_1|\,e^{sC_0|t_2-t_1|}\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)\leq\\
&\leq |t_2-t_1|\,e^{sC_0T}\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right),\quad\forall s\in[0,1]
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
|\varphi(t_2,x,\xi)-\varphi(t_1,x,\xi)| &= |\varphi(t_1+d,x,\xi)-\varphi(t_1,x,\xi)|=g(1)\leq\\
&\leq |t_2-t_1|\,e^{C_0T}\left(C_0|\varphi(t_1,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right).
\end{aligned}\tag{4.12}$$

Fazendo, em (4.12), $t_1=t$ e $t_2=s_1$, obtemos

$$|\varphi(s_1,x,\xi)-\varphi(t,x,\xi)|\leq|s_1-t|\,e^{C_0T}\left(C_0|\varphi(t,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right).$$

Logo

$$\begin{aligned}
|\varphi(s_1,x,\xi)| &= |\varphi(s_1,x,\xi)-\varphi(t,x,\xi)+\varphi(t,x,\xi)|\leq\\
&\leq |\varphi(s_1,x,\xi)-\varphi(t,x,\xi)|+|\varphi(t,x,\xi)|\leq\\
&\leq |s_1-t|\,e^{C_0T}\left(C_0|\varphi(t,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)+|\varphi(t,x,\xi)|\leq\\
&\leq |\varphi(t,x,\xi)|+Te^{C_0T}\left(C_0|\varphi(t,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right)
\end{aligned}$$

donde

$$|\varphi(s_1,x,\xi)|\leq|\varphi(t,x,\xi)|+Te^{C_0T}\left(C_0|\varphi(t,x,\xi)|+C_1|x|+C_2\right).\tag{4.13}$$

---

[3] **(Desigualdade de Gronwall)** Sejam $I=[a,b]$, $\alpha(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ funções contínuas, e $k(\cdot)$ uma função integrável não negativa, todas definidas em I. Suponhamos que φ satisfaz a inequação

$$\varphi(t)\leq\alpha(t)+\int_a^t k(s)\,\varphi(s)\,ds,\quad\forall t\in I.$$

Então, para todo o $t\in I$, temos a desigualdade

$$\varphi(t)\leq\alpha(t)+\int_a^t k(s)\,\alpha(s)\,e^{\int_s^t k(u)du}ds.$$

Em particular, se $\alpha(t)\equiv\alpha$ constante, então

$$\varphi(t)\leq\alpha e^{\int_a^t k(u)du}\quad\forall t\in I.$$

Fazendo agora, em (4.12), $t_1 = s_1$ e $t_2 = s_2$, obtemos

$$|\varphi(s_2, x, \xi) - \varphi(s_1, x, \xi)| \leq |s_2 - s_1| e^{C_0 T} (C_0 |\varphi(s_1, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2).$$

Assim, por (4.13), resulta

$$\begin{aligned}
|\varphi(s_2, x, \xi) - \varphi(s_1, x, \xi)| &\leq |s_2 - s_1| e^{C_0 T} (C_0 |\varphi(s_1, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2) \leq \\
&= |s_2 - s_1| e^{C_0 T} \begin{pmatrix} C_0 (|\varphi(t, x, \xi)| + T e^{C_0 T} (C_0 |\varphi(t, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2)) + \\ + C_1 |x| + C_2 \end{pmatrix} = \\
&= |s_2 - s_1| e^{C_0 T} \begin{pmatrix} C_0 \begin{pmatrix} |\varphi(t, x, \xi)| + T e^{C_0 T} C_0 |\varphi(t, x, \xi)| + C_1 T e^{C_0 T} |x| + \\ + T e^{C_0 T} C_2 \end{pmatrix} + \\ + C_1 |x| + C_2 \end{pmatrix} = \\
&= |s_2 - s_1| e^{C_0 T} \begin{pmatrix} C_0 |\varphi(t, x, \xi)| (1 + C_0 T e^{C_0 T}) + C_0 T e^{C_0 T} C_1 |x| + \\ + C_0 T e^{C_0 T} C_2 + C_1 |x| + C_2 \end{pmatrix} = \\
&= |s_2 - s_1| e^{C_0 T} \begin{pmatrix} C_0 |\varphi(t, x, \xi)| (1 + C_0 T e^{C_0 T}) + C_1 |x| (1 + C_0 T e^{C_0 T}) + \\ + C_2 (1 + C_0 T e^{C_0 T}) \end{pmatrix} = \\
&= |s_2 - s_1| \begin{pmatrix} C_0 e^{C_0 T} (1 + T C_0 e^{C_0 T}) |\varphi(t, x, \xi)| + C_1 e^{C_0 T} (1 + T C_0 e^{C_0 T}) |x| + \\ + C_2 e^{C_0 T} (1 + T C_0 e^{C_0 T}) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

isto é,

$$|\varphi(s_2, x, \xi) - \varphi(s_1, x, \xi)| \leq |s_2 - s_1| \left(\widetilde{C_0} |\varphi(t, x, \xi)| + \widetilde{C_1} |x| + \widetilde{C_2} \right)$$

onde

$$\widetilde{C_i} \doteq C_i e^{C_0 T} (1 + T C_0 e^{C_0 T}), \quad i = 0, 1, 2.$$

Finalmente, por hipótese, as funções $t \mapsto u(t)$ e $t \mapsto \varphi(t, u(t, u'(t)))$ pertencem a $L^1(I, \mathbb{R})$. Logo, também a função

$$k_0(t) \doteq \widetilde{C_0} |\varphi(t, u(t), u'(t))| + \widetilde{C_1} |u(t)| + \widetilde{C_2}$$

pertence a $L^1(I, \mathbb{R})$, o que completa a demonstração. ■

4.3 Existência de solução

4.3.1 Hipóteses básicas

A existência de solução para o problema variacional convexo não-coercivo

$$\min \left\{ F(u) : u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m), u(0) = a, u(T) = b \right\}, \qquad (P_R)$$

onde

$$F(u) \doteq \int_0^T [f(t, u'(t)) + g(t, u(t))] \, dt$$

será estabelecida, considerando as seguintes hipóteses básicas nas funções

$$f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ e } g : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

(H0) $f \in \mathcal{E}$ e $f(t, \cdot)$ é uma função convexa para todo $t \in I$ [4].

[4] Isto é, f é limitada inferiormente, $f(\cdot, \xi)$ é uma função lipschitziana para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, $f(t, \cdot)$ é uma função semicontínua inferiormente para cada $t \in I$ fixado, e

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{\substack{t \in I \\ |\xi| > R}} \sup \left\{ f(t, \xi) - \langle p, \xi \rangle : p \in \partial_\xi f(t, \xi) \right\} = -\infty.$$

(H1) Existem duas constantes A e B, com $B > 0$, tais que

$$f(t,\xi) \geq -A + B|\xi|, \quad \forall (t,\xi) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

(H2) A função g é lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua com respeito à segunda; além disso, existem duas constantes α, β, com $0 \leq \beta < \frac{B}{T}$, tais que

$$g(t,x) \geq -\alpha - \beta|x|, \quad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

(H3) Existem três constantes C_i, $i = 0,1,2$, com $C_0 \geq 0$, tais que a condição (4.11) é verificada com

$$\varphi(t,x,\xi) \doteq g(t,x) + f(t,\xi).$$

Note-se que a hipótese (H0) implica que a função f é lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua com respeito à segunda. Por (H2), o mesmo acontece com a função g. Então, pelo corolário 4.2.11, estas funções são contínuas em $I \times \mathbb{R}^m$. Assim, atendendo a que a composta de uma função contínua com uma função mensurável é uma função mensurável, para qualquer função $u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$, as funções $t \mapsto f(t,u'(t))$ e $t \mapsto g(t,u(t))$ são mensuráveis pelo que o funcional $F(\cdot)$ está bem definido.

Note-se ainda que se $f \in \mathcal{E}$ não depende de t então a condição (H1) é sempre verificada.
De facto, suponhamos que $f(t,\xi) = f(\xi)$.
Como $f \in \mathcal{E}$, é limitada inferiormente. Então existe uma constante K tal que f

$$(\xi) \geq -K, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Por outro lado, pelo lema 4.2.9, a função $\xi \mapsto f(\xi)$ pertence à família $\mathcal{G}$. Então o mesmo acontece com a função $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(\xi) = f(\xi) + K.$$

Se $f(0) = -K$, temos $\psi \geq 0$ e $\psi(0) = 0$, pelo que aplicando o lema 4.2.6 a ψ, podemos concluir que existem constantes positivas C e ρ tais que

$$\psi(\xi) \geq C|\xi| \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi) \geq -K + C|\xi|,$$

para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^m$ tal que $|\xi| > \rho$.
Suponhamos agora que $f(0) \neq -K$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \xi = 0 \\ f(\xi) + K & , \text{ caso contrário}. \end{cases}$$

Então $\varphi^{**} \in \mathcal{G}$, $\varphi^{**} \geq 0$ e $\varphi^{**}(0) = \varphi(0) = 0$, pelo que aplicando o lema 4.2.6 a ψ, podemos concluir que existem constantes positivas C e ρ tais que

$$f(\xi) + K \geq \varphi(\xi) \geq \varphi^{**}(\xi) \geq C|\xi|$$

qualquer que seja o $\xi \in \mathbb{R}^m$ tal que $|\xi| > \rho$.
Assim, em qualquer dos casos, podemos sempre encontrar constantes A e B, com $B > 0$, tais que

$$f(\xi) \geq -A + B|\xi|$$

para todo o $\xi \in \mathbb{R}^m$.

4.3.2 Existência de um arco admissível $\overline{u} \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$ tal que $F(\overline{u}) \in \mathbb{R}$

Proposição 4.3.1 *Suponhamos que as funções f e g satisfazem as hipóteses (H0), (H1) e (H2). Então a função lipschitziana $\overline{u} : I \to \mathbb{R}^m$ definida por*

$$\overline{u}(t) = a + t\frac{b-a}{T}$$

é admissível para o problema P_R e, além disso, $F(\overline{u})$ é finito.

Demonstração

Sendo $\overline{u}$ uma função lipschitziana, é absolutamente contínua e, evidentemente satisfaz as condições de fronteira $\overline{u}(0) = a, \overline{u}(T) = b$.

Vejamos que $F(\overline{u}) \in \mathbb{R}$.

Por (H1) e (H2), existem constantes A, B, α, β tais que, para qualquer $t \in I$,

$$\begin{aligned} f(t,\overline{u}'(t)) + g(t,\overline{u}(t)) &\geq -A + B\left|\overline{u}'(t)\right| - \alpha - \beta\left|\overline{u}(t)\right| = -A + B\left|\frac{b-a}{T}\right| - \alpha - \beta\left|a + t\frac{b-a}{T}\right| \geq \\ &\geq -A + B\frac{|b-a|}{T} - \alpha - \beta\left(|a| + \frac{|b-a|}{T}T\right) = \\ &= -A + B\frac{|b-a|}{T} - \alpha - \beta\left(|a| + |b-a|\right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} F(\overline{u}) &= \int_0^T \left[f(t,\overline{u}'(t)) + g(t,\overline{u}(t))\right] dt \geq \int_0^T \left[-A + B\frac{|b-a|}{T} - \alpha - \beta\left(|a| + |b-a|\right)\right] dt = \\ &= (-A - \alpha - \beta|a|)T + (B - T\beta)|b-a|. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por outro lado, dado $\overline{u} \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$, atendendo à proposição 2.12.17 temos

$$|\overline{u}(t)| \leq |\overline{u}|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \quad \text{e} \quad |\overline{u}'(t)| \leq |\overline{u}'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}$$

quase sempre em I, isto é, para quase todo $t \in I$,

$$|\overline{u}(t)| \in \overline{B\left(0, |\overline{u}|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right)} \quad \text{e} \quad |\overline{u}'(t)| \in \overline{B\left(0, |\overline{u}'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right)}$$

o que implica, dado que f e g são funções contínuas, que, para quase todo o $t \in I$, existem constantes M_1 e M_2 tais que

$$|f(t,\overline{u}'(t))| \leq M_1 \quad \text{e} \quad |g(t,\overline{u}(t))| \leq M_2.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} F(\overline{u}) &= \int_0^T \left[f(t,\overline{u}'(t)) + g(t,\overline{u}(t))\right] dt \leq \int_0^T \left|f(t,\overline{u}'(t)) + g(t,\overline{u}(t))\right| dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left|f(t,\overline{u}'(t))\right| + \left|g(t,\overline{u}(t))\right| dt \leq T(M_1 + M_2). \end{aligned} \tag{4.15}$$

De (4.14) e (4.15) resulta então

$$(-A - \alpha - \beta|a|)T + (B - T\beta)|b-a| \leq F(\overline{u}) \leq T(M_1 + M_2)$$

o que mostra que $F(\overline{u}) \in \mathbb{R}$. ■

4.3.3 Existência de solução para os problemas aproximantes. A função valor V_θ.

Seja θ uma qualquer função de Nagumo [5]. Vamos mostrar que, para cada l suficientemente grande, existe uma solução para o problema

$$\min\left\{F(u) : u \in AC_\theta^l(I,\mathbb{R}^m), u(0) = a, u(T) = b\right\}, \tag{$P_\theta(l)$}$$

[5] Diremos que uma função $\theta \in C^1([0,+\infty),\mathbb{R})$ é uma **função de Nagumo** se é convexa, semicontínua inferiormente, crescente e satisfaz

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty.$$

onde $AC_\theta^l(I,\mathbb{R}^m)$ denota a classe de todas as funções $u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$ tais que $\Lambda_\theta(u) \leq l$, com

$$\Lambda_\theta(u) \doteq \int_0^T \theta(|u'(t)|)\,dt.$$

Teorema 4.3.2 *Suponhamos que f e g satisfazem as hipóteses (H0), (H1) e (H2). Então, para cada l suficientemente grande, o problema $P_\theta(l)$ admite uma solução u_l.*

Demonstração

Pela proposição 4.3.1, existe uma função $\overline{u} \in W^{1,\infty}(I,R^m)$ verificando as condições de fronteira $\overline{u}(0)=a, \overline{u}(T)=b$ e tal que $F(\overline{u})$ é finito. Digamos que

$$F(\overline{u}) = M.$$

Dado que θ é crescente e $|\overline{u}'(t)| \leq |\overline{u}'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}$ quase sempre em I, temos

$$\Lambda_\theta(\overline{u}) = \int_0^T \theta(|\overline{u}'(t)|)\,dt \leq \int_0^T \theta\left(|\overline{u}'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right)dt = T\theta\left(|\overline{u}'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right)$$

pelo que, para cada l suficientemente grande, vale

$$\Lambda_\theta(\overline{u}) = \int_0^T \theta(|\overline{u}'(t)|)\,dt \leq l.$$

Fixemos l com esta propriedade.

A desigualdade anterior implica que $\overline{u}$ é um arco admissível para o problema $P_\theta(l)$. Então, para mostrar a existência de u_l, basta considerar o conjunto de nível

$$\Gamma(\overline{u}) \doteq \left\{u \in AC_\theta^l(I,\mathbb{R}^m) : u(0)=a, u(T)=b, F(u) \leq F(\overline{u})\right\}$$

o qual é não-vazio.

Vamos ver que $\Gamma(\overline{u})$ é um subconjunto de $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$ fracamente sequencialmente relativamente compacto, isto é, que qualquer sucessão em $\Gamma(\overline{u})$ contém uma subsucessão fracamente convergente em $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Seja (u_k) uma qualquer sucessão em $\Gamma(\overline{u})$, isto é, uma sucessão em $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$ verificando

$$\Lambda_\theta(u_k) = \int_0^T \theta(|\overline{u}_k'(t)|)\,dt \leq l \tag{4.16}$$

$$u_k(0)=a, \quad u_k(T)=b \tag{4.17}$$

$$F(u_k) \leq M$$

para qualquer k em $\mathbb{N}$.

De (4.16) resulta que a sucessão (u_k') é equiabsolutamente integrável (proposição 4.4.7).

Por outro lado, dadas as condições em θ, existe $N \geq 0$ tal que $\theta(\xi) \geq \xi$ sempre que $\xi \geq N$.

Fixemos $k \in \mathbb{N}$.

Seja E^* o subconjunto de $[0,T]$ onde $|u_k'(t)| \geq N$ e seja $E \doteq [0,T]\backslash E^*$. Temos

$$\begin{aligned}|u_k'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} &= \int_0^T |u_k'(t)|\,dt = \int_{E^*}|u_k'(t)|\,dt + \int_E |u_k'(t)|\,dt < \\ &< \int_{E^*}\theta(|u_k'(t)|)\,dt + \int_E N dt \leq \int_0^T \theta(|u_k'(t)|)\,dt + \int_E N dt\end{aligned}$$

pelo que

$$|u_k'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \leq l + TN \tag{4.18}$$

o que significa, dado que k é qualquer, que a sucessão(u_k') é limitada em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

Podemos então afirmar, pelo teorema de Dunford-Pettis (proposição 4.4.6), que existem uma subsucessão de (u_k'), ainda notada por (u_k'), e uma função $v \in L^1(I,\mathbb{R}^m)$ tais que $(u_k') \rightharpoonup v$, isto é, temos

$$\left(\int_0^T u_k'(t)\varphi(t)\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \int_0^T v(t)\varphi(t)\,dt, \quad \forall\varphi \in L^\infty(I,\mathbb{R}^m); \tag{4.19}$$

em particular,

$$\left(\int_0^T u_k'(t)\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\to} \int_0^T v(t)\,dt \tag{4.20}$$

A sucessão (u_k) é equicontínua. De facto, sendo (u_k') equiabsolutamente integrável, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_E |u_k'(t)|\,dt \le \varepsilon$$

para cada k em $\mathbb{N}$ e qualquer que seja o subconjunto mensurável E de $[0,T]$ com $m(E) \le \delta$. Então se $|t'' - t'| \le \delta$, temos

$$\begin{aligned} |u_k(t'') - u_k(t')| &= \left| u_k(0) + \int_0^{t''} u_k'(s)\,ds - u_k(0) - \int_0^{t'} u_k'(s)\,ds \right| = \left| \int_{t'}^{t''} u_k'(s)\,ds \right| \le \\ &\le \int_{t'}^{t''} |u_k'(s)|\,ds \le \varepsilon \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, (u_k) é equilimitada. Com efeito, atendendo a (4.17) e (4.18), temos, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} |u_k(t)| &= \left| u_k(0) + \int_0^t u_k'(s)\,ds \right| \le |a| + \int_0^t |u_k'(s)|\,ds \le |a| + \int_0^T |u_k'(s)|\,ds = \\ &= |a| + |u_k'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \le |a| + l + TN. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Assim, pelo teorema de Ascoli-Arzelà (proposição 4.4.2) existe uma subsucessão de (u_k), que notaremos ainda por (u_k), uniformente convergente em $[0,T]$ para uma função contínua u, isto é, temos

$$\left(\sup_{t\in I} |u_k(t) - u(t)|\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{4.22}$$

e, consequentemente, temos também a convergência pontual

$$(u_k(t)) \underset{k\to\infty}{\to} u(t), \quad \forall t \in I. \tag{4.23}$$

Ora, a convergência

$$\begin{cases} (u_k) \to u & \text{uniformente em } I \\ (u_k') \rightharpoonup v & \text{(fracamente) em } L^1(I,\mathbb{R}^m) \end{cases}$$

implica que $u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$, $u' = v$ quase sempre em I e $(u_k) \rightharpoonup u$ (fracamente) em $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

De facto, atendendo a (4.17) e a que, para cada k, u_k é absolutamente contínua, temos

$$u_k(t) = u_k(0) + \int_0^t u_k'(s)\,ds = a + \int_0^t u_k'(s)\,ds, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daqui resulta, atendendo a (4.20) e (4.23), que

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) = \lim_{k\to\infty} \left(a + \int_0^t u_k'(s)\,ds\right) = a + \lim_{k\to\infty} \int_0^t u_k'(s)\,ds = a + \int_0^t v(s)\,ds$$

o que significa que u é absolutamente contínua e $u'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in I$.

Note-se que a convergência uniforme de (u_k) para u implica ainda que

$$u(0) = a, \quad u(T) = b$$

(basta atender a (4.17) e a que se tem (4.23)).

Falta então ver que $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$, isto é, que

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \left(\left(\textstyle\int_0^T u_k(t)\,\varphi(t)\right) dt\right) \underset{k\to\infty}{\to} \textstyle\int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \forall \varphi \in L^\infty(I,\mathbb{R}^m), \\ &\text{(ii)} \quad \left(\textstyle\int_0^T u_k'(t)\,\varphi(t)\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\to} \textstyle\int_0^T u'(t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \forall \varphi \in L^\infty(I,\mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Como temos (4.19) e $u'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in I$, vale (ii).

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder (proposição 2.12.18) e por (4.22), podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_0^T (u_k(t) - u(t)) \varphi(t) \, dt \right| \leq \int_0^T |(u_k(t) - u(t)) \varphi(t)| \, dt \leq |u_k - u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} |\varphi|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} = \\ &= |\varphi|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \int_0^T |u_k(t) - u(t)| \, dt \leq |\varphi|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \int_0^T \sup_{t\in[0,T]} |u_k(t) - u(t)| \, dt = \\ &= T |\varphi|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \sup_{t\in[0,T]} |u_k(t) - u(t)| \, dt \to 0, \text{ quando } k \to \infty \end{aligned}$$

o que significa que também vale (i).

Ficou asim provado que se $(u_k) \subset \Gamma(\overline{u})$ então existe uma função $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$ tal que, passando se necessário a uma subsucessão, $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$. Além disso, tem-se $u(0) = a$ e $u(T) = b$.

Vejamos agora que o funcional F é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$, isto é, tem-se

$$F(u) \leq \liminf_{k\to\infty} F(u_k)$$

sempre que $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$.

Pela proposição 2.17.7, basta mostrar que os funcionais $H : W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m) \to [-\infty, +\infty]$ e $G : W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m) \to [-\infty, +\infty]$ definidos por

$$H(u) = \int_0^T f(t, u'(t)) \, dt \quad \text{e} \quad G(u) = \int_0^T g(t, u(t)) \, dt$$

são semicontínuos inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$.

Consideremos o funcional $\overline{H} : L^1(I, \mathbb{R}^m) \to [-\infty, +\infty]$ definido por

$$\overline{H}(u) = \int_0^T f(t, u(t)) \, dt.$$

Seja $(u_k) \subset L^1(I, \mathbb{R}^m)$ uma sucessão fortemente convergente para $u \in L^1(I, \mathbb{R}^m)$.

Pela proposição 2.12.26 existe uma subsucessão de (u_k), que notaremos ainda por (u_k), tal que $(u_k(t)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t)$ quase sempre em I.

Sendo f uma função contínua em $I \times \mathbb{R}^m$, temos que, para qualquer função $v \in L^1(I, \mathbb{R}^m)$, a função $t \longmapsto f(t, v(t))$ é mensurável em I.

Por outro lado, por (H1), existem constantes A e B, com $B > 0$, tais que

$$f(t, \xi) + A - B|\xi| \geq 0, \ \ \forall (t, \xi) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

Então

$$(f(\cdot, u_k(\cdot)) + A - B|u_k(\cdot)|)$$

é uma sucessão de funções mensuráveis não-negativas.

Ora, uma vez que f pertence à família $\mathcal{E}$, a função $f(t, \cdot)$ é semicontínua inferiormente para cada $t \in I$ fixado. Então temos

$$f(t, u(t)) \leq \liminf_{k\to\infty} f(t, u_k(t)) \quad \text{quase sempre em } I$$

e portanto

$$\begin{aligned} f(t, u(t)) + A - B|u(t)| &\leq \liminf_{k\to\infty} f(t, u_k(t)) + A - B|u(t)| = \\ &= \liminf_{k\to\infty} f(t, u_k(t)) + \liminf_{k\to\infty} A - B \liminf_{k\to\infty} |u_k(t)| \leq \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} (f(t, u_k(t)) + A - B|u_k(t)|) \end{aligned}$$

para quase todo $t \in I$.

Daqui resulta, pelo lema de Fatou (proposição 2.9.15), que

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t,u(t))\,dt + AT - B\,|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} &= \int_0^T (f(t,u(t)) + A - B\,|u(t)|)\,dt \leq \\
&\leq \int_0^T \liminf_{k\to\infty} (f(t,u_k(t)) + A - B\,|u_k(t)|)\,dt \leq \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^T (f(t,u_k(t)) + A - B\,|u_k(t)|)\,dt = \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left(\int_0^T f(t,u_k(t))\,dt + AT - B\,|u_k|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}\,dt \right)
\end{aligned}$$

e atendendo a que (u_k) converge fortemente para u em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$, temos

$$0 \leq \int_0^T ||u_k(t)| - |u(t)||\,dt \leq \int_0^T |u_k(t) - u(t)|\,dt \to 0, \text{ quando } k\to\infty$$

o que significa que $\left(|u_k|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}\right) \underset{k\to\infty}{\to} \left(|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}\right)$, e portanto podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t,u(t))\,dt + AT - B\,|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^T f(t,u_k(t))\,dt + AT - B\,|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \Leftrightarrow \\
\overline{H}(u) &\leq \liminf_{k\to\infty} \overline{H}(u_k)
\end{aligned}$$

o que mostra que o funcional $\overline{H}$ é semicontínuo inferiormente na topologia forte de $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

A aplicação $D : W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m) \to L^1(I,\mathbb{R}^m)$ definida por

$$D(u) \doteq u'$$

é contínua, por ser uma função linear limitada.

De facto, se u e v são dois elementos arbitrários de $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$ então, para qualquer função $\psi \in C_c^1(I,\mathbb{R}^m)$,

$$\exists!\, g \in L^1(I,\mathbb{R}^m) \text{ tal que } \int_0^T u(t)\,\psi'(t)\,dt = -\int_0^T g(t)\,\psi(t)\,dt, \;\; g = u' = D(u)$$

e

$$\exists!\, h \in L^1(I,\mathbb{R}^m) \text{ tal que } \int_0^T v(t)\,\psi'(t)\,dt = -\int_0^T h(t)\,\psi(t)\,dt, \;\; h = v' = D(v).$$

Por outro lado,

$$\exists! m \in L^1(I,\mathbb{R}^m) \text{ tal que } \int_0^T (u+v)(t)\,\psi'(t)\,dt = -\int_0^T m(t)\,\psi(t)\,dt, \;\; m = (u+v)' = D(u+v)$$

e como

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u+v)(t)\,\psi'(t)\,dt &= \int_0^T u(t)\,\psi'(t)\,dt + \int_0^T v(t)\,\psi'(t)\,dt = \\
= -\left(\int_0^T g(t)\,\psi(t)\,dt + \int_0^T h(t)\,\psi(t)\,dt \right) &= -\int_0^T (g+h)(t)\,\psi(t)\,dt
\end{aligned}$$

temos

$$D(u+v) = m = g + h = D(u) + D(v).$$

Analogamente se mostra que, para qualquer escalar λ, é

$$D(\lambda u) = \lambda D(u)$$

o que prova que D é linear.

Para ver que D é limitada basta atender a que

$$|D(u)|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = |u'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \leq |u'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} + |u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = |u|_{W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)}.$$

Sendo $\overline{H}$ semicontínuo inferiormente, pela proposição 2.17.5 o conjunto

$$\left\{v \in L^1(I,\mathbb{R}^m) : \overline{H}(v) \leq \lambda\right\} = \overline{H}^{-1}([-\infty,\lambda])$$

é fechado para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Então o conjunto

$$D^{-1}\left(\overline{H}^{-1}([-\infty,\lambda])\right) = \left(\overline{H}\circ D\right)^{-1}([-\infty,\lambda]) = \left\{u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m) : \overline{H}(D(u)) \leq \lambda\right\}$$

por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua, é fechado. Isto significa que $H = \overline{H}\circ D$ é semicontínuo inferiormente na topologia forte de $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Por outro lado, dado que, para cada $t \in I$ fixado, $f(t,\cdot)$ é uma função convexa, temos

$$\begin{aligned} H(\lambda u + (1-\lambda)v) &= \int_0^T f(t,\lambda u'(t) + (1-\lambda)v'(t))\,dt \leq \\ &\leq \lambda\int_0^T f(t,u'(t))\,dt + (1-\lambda)\int_0^T f(t,v'(t))\,dt = \lambda H(u) + (1-\lambda)H(v) \end{aligned}$$

para cada $\lambda \in [0,1]$ e $\forall u,v \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$, pelo que H é uma função convexa.

O espaço $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$, é localmente convexo. Assim, pela proposição 2.17.8, podemos afirmar que H é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Mostremos agora que o funcional G é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Seja (u_k) uma sucessão fracamente convergente para u em $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Pela proposição 2.13.12, existe uma subsucessão de (u_k), ainda notada por (u_k), tal que $(u_k) \to u$ em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$ e pela proposição 2.12.26, existe uma subsucessão de (u_k), ainda notada por (u_k), tal que $(u_k(t)) \to u(t)$ quase sempre em I.

Dadas as hipóteses de regularidade em g, podemos afirmar que a função $t \mapsto g(t,v(t))$ é mensurável em I, qualquer que seja a função $v \in L^1(I,\mathbb{R}^m)$. Então, como por (H2), existem duas constantes α, β, com $0 \leq \beta < \frac{B}{T}$, tais que

$$g(t,x) \geq -\alpha - \beta|x|, \quad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^m$$

temos que a sucessão

$$(g(\cdot,u_k(\cdot)) + \alpha + \beta|u_k(\cdot)|)$$

é uma sucessão de funções mensuráveis não-negativas. Além disso, para cada $t \in I$, $g(t,\cdot)$ é semicontínua inferiormente. Então

$$\begin{aligned} g(t,u(t)) + \alpha + \beta|u(t)| &\leq \liminf_{k\to\infty} g(t,u_k(t)) + \alpha + \beta|u(t)| \leq \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}(g(t,u_k(t)) + \alpha + \beta|u_k(t)|) \end{aligned}$$

quase sempre em $[0,T]$, e então, pelo lema de Fatou (proposição 2.9.15), temos

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t,u(t))\,dt + T\alpha + \beta|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} &= \int_0^T (g(t,u(t)) + \alpha + \beta|u(t)|)\,dt \leq \\ &\leq \int_0^T \liminf_{k\to\infty}(g(t,u_k(t)) + \alpha + \beta|u_k(t)|)\,dt \leq \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\int_0^T (g(t,u_k(t)) + \alpha + \beta|u_k(t)|)\,dt = \\ &= \liminf_{k\to\infty}\left(\int_0^T g(t,u_k(t))\,dt + T\alpha + \beta|u_k|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}\right) \end{aligned}$$

donde resulta, uma vez que (u_k) converge fortemente para u em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$,

$$\int_0^T g(t,u(t))\,dt + T\alpha + \beta|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \leq \liminf_{k\to\infty}\int_0^T g(t,u_k(t))\,dt + T\alpha + \beta|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}$$

e portanto

$$G(u) \leq \liminf_{k\to\infty} G(u_k)$$

o que prova que o funcional G é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Mostrámos então que F é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Vamos ver que F é limitado inferiormente em $\Gamma(\overline{u})$.

Seja u um qualquer elemento de $\Gamma(\overline{u})$.

Atendendo a que as igualdades (4.18) e (4.21) são válidas para qualquer função em $\Gamma(\overline{u})$, podemos escrever

$$|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = \int_0^T |u(t)|\,dt \leq \int_0^T (|a| + l + TN)\,dt = T(|a| + l + TN)$$

e

$$|u'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \leq l + TN.$$

Seja $\varphi : I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(t,x,\xi) = f(t,\xi) + g(t,x).$$

Por (H1) existem duas constantes A e B, com $B > 0$, tais que

$$f(t,\xi) \geq -A + B|\xi|, \quad \forall (t,\xi) \in I \times \mathbb{R}^m$$

e, por (H2), existem duas constantes α, β, com $0 \leq \beta < \frac{B}{T}$, tais que

$$g(t,x) = -\alpha - \beta|x|, \quad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

Então temos

$$\varphi(t,x,\xi) \geq -A + B|\xi| - \alpha - \beta|x|, \quad \forall (t,x,\xi) \in I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

e assim,

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^T \varphi(t,u(t),u'(t))\,dt \geq \int_0^T (-A + B|u'(t)| - \alpha - \beta|u(t)|)\,dt = \\ &= T(-A-\alpha) + B|u'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} - \beta|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \geq T(-A-\alpha) - \beta|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \geq \\ &\geq T(-A-\alpha) - \beta(l+TN) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalmente, seja $(u_k) \subset \Gamma(\overline{u})$ uma qualquer sucessão minimizante para $F(\cdot)$, isto é, tal que

$$\lim_{k\to\infty} F(u_k) = \inf\{F(u) : u \in \Gamma(\overline{u})\},$$

e seja

$$i \doteq \inf\{F(u) : u \in \Gamma(\overline{u})\}.$$

Então temos

$$i \leq F(\overline{u}) = M < +\infty.$$

Por outro lado, temos também

$$i > -\infty$$

pois F é limitado inferiormente no conjunto $\Gamma(\overline{u})$.

Como $\Gamma(\overline{u})$ é sequencialmente relativamente fracamente compacto, existe uma função $u_l \in W^{1,1}(I,R^m)$, tal que $(u_k) \rightharpoonup u_l$ em $W^{1,1}(I,R^m)$. Além disso, sabemos que u_l satisfaz as condições de fronteira:

$$u_l(0) = a, \quad u_l(T) = b.$$

Por outro lado

$$\Lambda_\theta(u_l) = \int_0^T \theta(|u_l'(t)|)\,dt \leq l.$$

De facto, atendendo às condições em θ, podemos seguir um raciocínio análogo ao usado para mostrar que o funcional $\overline{H}$ é semicontínuo inferiormente, para provar que $\Lambda_\theta(\cdot)$ é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I,R^m)$, pelo que

$$\Lambda_\theta(u_l) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \theta(|u_k'(t)|)\,dt \leq l.$$

Assim, u_l é um arco admissível para o problema $P_\theta(l)$ e, atendendo a que F é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I,R^m)$, podemos escrever

$$-\infty < i \leq F(u_l) \leq \liminf_{k\to\infty} F(u_k) = \lim_{k\to\infty} F(u_k) = i < +\infty,$$

donde se conclui que

$$F(u_l) = i$$

o que significa que u_l é solução para o problema $P_\theta(l)$. ■

Seja

$$V_\theta(l) \doteq \min\left\{F(u) : u \in AC^l_\theta(I, \mathbb{R}^m), u(0) = a, u(T) = b\right\}.$$

Então, sob as hipóteses do teorema 4.3.2, temos a seguinte

Proposição 4.3.3 **(a)** *Para cada l suficientemente grande $V_\theta(l)$ é finito.*

(b) *Sempre que $V_\theta(l)$ é finito, o mínimo definido por $V_\theta(l)$ é atingido.*

(c) *A função $V_\theta(\cdot)$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração
A alínea (a) resulta do teorema 4.3.2. A alínea (b) é evidente. Vamos então mostrar que, se $(l_k) \subset \mathbb{R}$ é uma sucessão convergente para l então

$$V_\theta(l) \leq \liminf_{k\to\infty} V_\theta(l_k).$$

Se existe $\overline{k}$ tal que, para $k \geq \overline{k}$, se tem $V_\theta(l_k) = +\infty$ nada há a provar. Suponhamos então que, para qualquer k bastante grande, $V_\theta(l_k)$ é finito (e vamos pensar em (l_k) como sendo a sucessão cujos termos verificam esta condição). Neste caso, por (b), qualquer que seja o $k \in \mathbb{N}$, o problema $P_\theta(l_k)$ admite uma solução u_k. Então temos

$$u_k \in AC^{l_k}_\theta(I, \mathbb{R}^m), \quad u_k(0) = a, \quad u_k(T) = b, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$F(u_k) = V_\theta(l_k).$$

Por outro lado, a sucessão (l_k) é limitada por ser convergente. Assim, existe $N \geq 0$ tal que

$$|l_k| \leq N, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daqui resulta que

$$\Lambda_\theta(u_k) = \int_0^T \theta(|u_k'(t)|)\, dt \leq l_k \leq N$$

e então podemos mostrar, usando o mesmo argumento que no teorema 4.3.2, que a sucessão (u_k) admite uma subsucessão fracamente convergente para uma função $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$, e que, além disso, u satisfaz as condições de fronteira

$$u(0) = a, \quad u(T) = b.$$

Por outro lado, $\Lambda_\theta(\cdot)$ é um funcional semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$. Portanto, temos

$$\Lambda_\theta(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \Lambda_\theta(u_k) \leq \liminf_{k\to\infty} l_k = l$$

pelo que u é um arco admissível para o problema $P_\theta(l)$.

Finalmente, uma vez que também o funcional $F(\cdot)$ é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$, temos

$$V_\theta(l) \leq F(u) \leq \liminf_{k\to\infty} F(u_k) = \liminf_{k\to\infty} V_\theta(l_k)$$

o que mostra o pretendido. ■

Proposição 4.3.4 *Se ξ é um subgradiente proximal de V_θ em l então $\xi \leq 0$.*

Demonstração

Comecemos por notar que se $l_1 < l_2$ então $AC_\theta^{l_1} \subset AC_\theta^{l_2}$, pelo que $V_\theta(l_1) \geq V_\theta(l_2)$ (o que significa que V_θ é não-crescente).

Suponhamos que ξ é um subgradiente proximal de V_θ em l. Então, por definição de subgradiente proximal, existem $\sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para cada $y \in B_\varepsilon(l)$, temos

$$V_\theta(y) - V_\theta(l) + \sigma |y - l|^2 \geq \xi(y - l).$$

Além disso, como $|y - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon^2 \geq |y - l|^2$, podemos escrever

$$V_\theta(y) - V_\theta(l) + \sigma\varepsilon^2 \geq \xi(y - l).$$

Se $y = l$, a desigualdade anterior é trivialmente verificada qualquer que seja o ξ.

Suponhamos então, sem perda de generalidade, que $y > l$ (para o caso de $y < l$ o raciocínio é análogo).

Como V_θ é não-crescente, temos $V_\theta(y) \leq V_\theta(l)$. Assim, na desigualdade anterior, é

$$V_\theta(y) - V_\theta(l) \leq 0, \quad \sigma\varepsilon^2 > 0, \quad y - l > 0$$

donde, fazendo $\varepsilon \to 0$, concluimos que terá que ser $\xi \leq 0$. ■

Definição 4.3.5 *Diremos que a função $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante se existe l_0 tal que $V_\theta(l) = V_\theta(l_0)$ sempre que $l \geq l_0$.*

Teorema 4.3.6 *Se $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante então existe uma solução para o problema*

$$\min\{F(u) : u \in AC_\theta(I, \mathbb{R}^m), u(0) = a, u(T) = b\}, \qquad (P_\theta)$$

onde $AC_\theta(I, \mathbb{R}^m)$ denota a classe de todas as funções $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$ tais que $\Lambda_\theta(u) < +\infty$.

Demonstração

Suponhamos que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante.

Como, pelo teorema 4.3.2, para l suficientemente grande $V_\theta(l)$ é finito, podemos afirmar que existe $l_0 > 0$ tal que $V_\theta(l_0)$ é finito e $V_\theta(l) = V_\theta(l_0)$ para cada $l \geq l_0$.

Seja u_{l_0} uma solução do problema $P_\theta(l_0)$ (a qual existe pela proposição 4.3.3). Evidentemente u_{l_0} é admissível para P_θ. Vamos mostrar que u_{l_0} é uma solução de P_θ.

Suponhamos que não. Então existe uma função $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$ verificando $\Lambda_\theta(u) < +\infty$, $u(0) = a$, $u(T) = b$, tal que

$$F(u) < F(u_{l_0})\,[6].$$

Seja $l > 0$ tal que

$$\Lambda_\theta(u) < l$$

(este l existe pois $\Lambda_\theta(u) < +\infty$). Então temos

$$V_\theta(l) \leq F(u) < F(u_{l_0}) = V_\theta(l_0)$$

o que contradiz a hipótese de $V_\theta(\cdot)$ ser definitivamente constante. ■

4.3.4 O resultado principal

Estamos agora em condições de mostrar a existência de solução para o problema variacional convexo.

$$\min\left\{F(u) : u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m), u(0) = a, u(T) = b\right\}, \qquad (P_R)$$

onde

$$F(u) \doteq \int_0^T [f(t, u'(t)) + g(t, u(t))]\, dt.$$

Como já referimos, vamos admitir as seguintes hipóteses básicas na função integranda:

(H0) $f \in \mathcal{E}$ e $f(t, \cdot)$ é uma função convexa para cada $t \in I$.

[6] Note-se que a função $\overline{u}(t) = a + t\frac{b-a}{T}$ é também um arco admissível para o problema P_θ e, além disso, $F(\overline{u})$ é finito.

(H1) Existem duas constantes A e B, com $B > 0$, tais que

$$f(t,\xi) \geq -A + B|\xi|, \quad \forall (t,\xi) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

(H2) A função g é lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua com respeito à segunda; além disso, existem duas constantes α, β, com $0 \leq \beta < \frac{B}{T}$, tais que

$$g(t,x) \geq -\alpha - \beta|x|, \quad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

(H3) Existem três constantes C_i, $i = 0,1,2$, com $C_0 \geq 0$, tais que a condição (4.11) é verificada com

$$\varphi(t,x,\xi) \doteq g(t,x) + f(t,\xi).$$

Teorema 4.3.7 *Sejam f e g duas funções satisfazendo as hipóteses (H0), (H1), (H2) e (H3). Então existe uma solução $\widetilde{u}$ para o problema P_R. Além disso, $\widetilde{u}$ pertence a $W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$ e satisfaz, para quase todo $t \in I$,*

$$f(t,\widetilde{u}'(t)) - \langle p(t), \widetilde{u}'(t)\rangle + g(t,\widetilde{u}(t)) = c + \int_0^t v(\tau)\,d\tau \tag{4.24}$$

onde c é uma constante e $(v(t), p(t)) \in (\partial_t f(t,\widetilde{u}'(t)) + \partial_t g(t,\widetilde{u}(t)), \partial_\xi f(t,\widetilde{u}'(t)))$ para quase todo $t \in I$.

Demonstração

A demonstração divide-se em duas partes:

- mostramos que V_θ é definitivamente constante (donde o problema P_θ admite uma solução u_k); num passo intermédio, mostramos que $u_k \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$ e satisfaz (4.24);

-mostramos que u_k é solução de P_R.

Provemos que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante.

Atendendo à proposição 4.4.20, basta mostrar que, para l suficientemente grande, sempre que ξ é um subgradiente proximal de V_θ em l, temos $\xi = 0$.

Suponhamos, com vista a uma contradição, que V_θ não é definitivamente constante. Então atendendo a que V_θ é semicontínua inferiormente, pelas proposições 4.4.18 e 4.3.4, e pelo teorema 4.3.2, podemos encontrar uma sucessão $(l_k) \subset \mathbb{R}$, com $(l_k) \to +\infty$, tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $V_\theta(l_k)$ é finito, V_θ admite um subgradiente proximal ξ_k em l_k e $\xi_k = -r_k$ com $r_k > 0$.

Seja u_k uma solução de $P_\theta(l_k)$ (a qual existe porque $V_\theta(l_k)$ é finito). Vamos mostrar que

$$\Lambda_\theta(u_k) = l_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fixemos $k \in \mathbb{N}$ qualquer.

Sendo u_k solução do problema $P_\theta(l_k)$, temos

$$F(u_k) = V_\theta(l_k) \quad \text{e} \quad \Lambda_\theta(u_k) \leq l_k.$$

Suponhamos que $\Lambda_\theta(u_k) < l_k$. Então, para qualquer l verificando

$$\Lambda_\theta(u_k) < l < l_k$$

(note-se que a desigualdade $\Lambda_\theta(u_k) < l$ implica que u_k é um arco admissível para $P_\theta(l)$), obtemos, por definição de V_θ e uma vez que V_θ é não-crescente,

$$V_\theta(l) \leq F(u_k) = V_\theta(l_k) \leq V_\theta(l).$$

Resulta então que

$$V_\theta(l) = V_\theta(l_k), \quad \forall l \in (\Lambda_\theta(u_k), l_k]$$

o que significa que V_θ é constante no intervalo $(\Lambda_\theta(u_k), l_k]$.

Dado que $-r_k$ é um subgradiente proximal de V_θ em l_k, temos para algum $\sigma_k > 0$ e para qualquer y_k nalguma bola de l_k, digamos que $y_k \in B_{\varepsilon_k}(l_k)$,

$$V_\theta(y_k) - V_\theta(l_k) + \sigma_k|y_k - l_k|^2 \geq -r_k(y_k - l_k).$$

Em particular, se $y_k \in (\theta(u_k), l_k] \cap B_{\varepsilon_k}(l_k)$,

$$\sigma_k \varepsilon_k^2 \geq -r_k (y_k - l_k).$$

Se $y_k = l_k$, a desigualdade anterior é trivialmente verificada qualquer que seja r_k. Se $y_k \neq l_k$, fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $r_k = 0$, o que contraria a hipótese de se ter $r_k > 0$.

Concluimos então que $\Lambda_\theta(u_k) = l_k$.

Ora, se $\Lambda_\theta(u_k) = l_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, então temos

$$\lim_{k \to \infty} |u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} = \infty. \tag{4.25}$$

De facto, como, para quase todo $t \in I$,

$$|u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \geq |u_k'(t)|$$

e θ é, por definição, uma função crescente, temos

$$\theta\left(|u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right) \geq \theta(|u_k'(t)|), \text{ quase sempre em } I$$

donde

$$\theta\left(|u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right) T = \int_0^T \theta\left(|u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right) dt \geq \int_0^T \theta(|u_k'(t)|)\, dt = \Lambda_\theta(u_k) = l_k$$

e portanto

$$\theta\left(|u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right) \geq \frac{l_k}{T}.$$

Daqui resulta que

$$|u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \geq \theta^{-1}\left(\frac{l_k}{T}\right)$$

logo

$$\lim_{k\to\infty} |u_k'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \geq \lim_{k\to\infty} \theta^{-1}\left(\frac{l_k}{T}\right) = +\infty.$$

Vamos ver que (u_k') é limitada em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

Consideremos a função

$$\overline{u}(t) \doteq a + \xi t$$

com

$$\xi \doteq \frac{b-a}{T}.$$

Evidentemente, $\overline{u}$ verifica as condições de fronteira $\overline{u}(0) = a$, $\overline{u}(T) = b$ e, além disso,

$$\Lambda_\theta(\overline{u}) = \int_0^T \theta(|\overline{u}'(t)|)\, dt = \int_0^T \theta(|\xi|)\, dt = \theta(|\xi|)\, T < +\infty$$

pelo que $\overline{u}$ é admissível para P_θ.

Sendo $\lim\limits_{k\to\infty} l_k = +\infty$, podemos encontrar l_k tal que $\theta(|\xi|)T \leq l_k$. Para um tal l_k, temos $\Lambda_\theta(\overline{u}) \leq l_k$, o que significa que $\overline{u}$ é também admissível para $P_\theta(l_k)$, e uma vez que u_k é solução de $P_\theta(l_k)$, temos

$$F(\overline{u}) \geq F(u_k).$$

Por outro lado, já vimos (proposição 4.3.1) que $F(\overline{u}) < +\infty$.

Por (H1) e (H2), temos

$$\begin{aligned} F(u_k) &= \int_0^T [f(t, u_k'(t)) + g(t, u_k(t))]\, dt \geq \int_0^T (-A + B|u_k'(t)| - \alpha - \beta|u_k(t)|)\, dt = \\ &= (-A-\alpha)T + B\int_0^T |u_k'(t)|\, dt - \beta \int_0^T |u_k(t)|\, dt = (-A-\alpha)T + B|u_k'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} - \beta |u_k|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

Como, para qualquer $t \in I$, vale

$$|u_k'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = \int_0^T |u_k'(t)|\, dt \geq \int_0^t |u_k'(t)|\, dt \geq |u_k(t) - a|$$

obtemos

$$T\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = \int_0^T \left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} dt \geq \int_0^T \left|u_k(t) - a\right| dt$$

e uma vez que $\beta > 0$,

$$-\beta T\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \leq -\beta\int_0^T \left|u_k(t) - a\right| dt \leq -\beta\left(|a|T + \int_0^T \left|u_k(t)\right| dt\right) = -\beta|a|T - \beta\left|u_k\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}.$$

Assim

$$-\beta\left|u_k\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \geq \beta|a|T - \beta T\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
&(-A-\alpha)T + B\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} - \beta\left|u_k\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \geq \\
\geq\ &(-A-\alpha)T + B\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} + \beta|a|T - \beta T\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = \\
=\ &\widetilde{A} + (B-\beta)T\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}
\end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{A} \doteq (-A - \alpha + \beta|a|)T.$$

Concluimos então que

$$+\infty > F(\overline{u}) \geq F(u_k) \geq \widetilde{A} + (B - \beta T)\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}. \tag{4.26}$$

Por (H2), $0 \leq \beta < \frac{B}{T}$, logo $0 < B - \beta T \leq B$, e portanto $B - \beta T > 0$. Então

$$\widetilde{A} + (B-\beta)T\left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \leq F(\overline{u}) \Leftrightarrow \left|u_k'\right|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \leq \frac{F(\overline{u}) - \widetilde{A}}{(B-\beta)T}$$

e como $F(\overline{u}) \in \mathbb{R}$, (u_k') é limitada em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

Mostremos agora que existe uma constante $M_1 > 0$ tal que

$$\left|u_k\right|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \leq M_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

De facto, se existisse $t_k \in I$ tal que $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|u_k(t_k)\right| = +\infty$, então

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty}\int_0^T \left|u_k'(t)\right| dt \ &\geq\ \limsup_{k\to\infty}\int_0^{t_k} \left|u_k'(t)\right| dt \geq \limsup_{k\to\infty}\left|\int_0^{t_k} u_k'(t)\, dt\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|u_k(t_k) - u_k(0)\right| = \\
&=\ \limsup_{k\to\infty}\left|u_k(t_k) - a\right| = +\infty
\end{aligned}$$

o que é absurdo porque (u_k') é limitada em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

O facto de (u_k) ser limitada em $L^\infty(I,\mathbb{R}^m)$ e a continuidade de g garantem que existe uma constante M_2 tal que

$$\left|g(t,u_k(t))\right| \leq M_2 \tag{4.28}$$

para quase todo $t \in I$ e para cada $k \in \mathbb{N}$.

De facto, por (4.27) e pela proposição 2.12.17, temos

$$\left|u_k(t)\right| \leq \left|u_k\right|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \leq M_1$$

para quase todo $t \in I$ e para qualquer $k \in \mathbb{N}$, o que significa que, para cada $k \in \mathbb{N}$, vale

$$u_k(t) \in \overline{B_{M_1}(0)}$$

quase sempre.

Ora, o conjunto $g\left(I, \overline{B_{M_1}(0)}\right)$ é compacto, por ser a imagem por uma aplicação contínua de um conjunto compacto. Em particular, é limitado. Isto justifica a existência de uma constante M_2 tal que se verifica (4.28).

Fixemos agora $k \in \mathbb{N}$.

Como $\xi_k = -r_k$ é um subgradiente proximal de V_θ em l_k, por definição, existem $\sigma_k > 0$ e $\varepsilon_k > 0$ tais que, para qualquer $y_k \in B_{\varepsilon_k}(l_k)$,

$$V_\theta(y_k) - V_\theta(l_k) + \sigma_k |y_k - l_k|^2 \geq -r_k(y_k - l_k).$$

Atendendo a que u_k é uma solução para o problema $P_\theta(l_k)$, temos $F(u_k) = V_\theta(l_k)$. Além disso, vimos que $\Lambda_\theta(u_k) = l_k$. Então, substituindo, na desigualdade anterior, $V_\theta(l_k)$ por $F(u_k)$ e l_k por $\Lambda_\theta(u_k)$, obtemos

$$V_\theta(y_k) - F(u_k) + \sigma_k |y_k - \Lambda_\theta(u_k)|^2 \geq -r_k(y_k - \Lambda_\theta(u_k))$$

para qualquer $y_k \in B_{\varepsilon_k}(\Lambda_\theta(u_k))$.

Seja u um arco admissível para o problema P_θ tal que $\Lambda_\theta(u) \in B_{\varepsilon_k}(\Lambda_\theta(u_k))$. Então, substituindo y_k por $\Lambda_\theta(u)$, obtemos

$$\begin{aligned} & V_\theta(\Lambda_\theta(u)) - F(u_k) + \sigma_k |\Lambda_\theta(u) - \Lambda_\theta(u_k)|^2 \geq -r_k(\Lambda_\theta(u) - \Lambda_\theta(u_k)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & F(u_k) + r_k\Lambda_\theta(u_k) \leq V_\theta(\Lambda_\theta(u)) + r_k\Lambda_\theta(u) + \sigma_k |\Lambda_\theta(u) - \Lambda_\theta(u_k)|^2 \end{aligned}$$

e atendendo a que $V_\theta(\Lambda_\theta(u)) \leq F(u)$ (porque u é admissível para o problema $P_\theta(\Lambda_\theta(u))$), temos

$$\begin{aligned} & F(u_k) + r_k\Lambda_\theta(u_k) \leq F(u) + r_k\Lambda_\theta(u) + \sigma_k |\Lambda_\theta(u) - \Lambda_\theta(u_k)|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & F(u_k) + r_k\Lambda_\theta(u_k) + \sigma_k |\Lambda_\theta(u_K) - \Lambda_\theta(u_k)|^2 \leq F(u) + r_k\Lambda_\theta(u) + \sigma_k |\Lambda_\theta(u) - \Lambda_\theta(u_k)|^2. \end{aligned}$$

Podemos assim afirmar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante σ_k tal que, se definirmos

$$G(u) \doteq F(u) + r_k\Lambda_\theta(u) + \sigma_k |\Lambda_\theta(u) - \Lambda_\theta(u_k)|^2$$

obtemos

$$G(u_k) \leq G(u)$$

para qualquer função u admissível para o problema P_θ, tal que $\Lambda_\theta(u)$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(u_k)$.

Por outro lado, dadas as hipóteses básicas na função integranda, esta satisfaz as condições do lema 4.2.12. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $t \mapsto \varphi(t, u_k(t), u_k'(t)) = f(t, u_k'(t)) + g(t, u_k(t))$ é integrável em I (porque $F(u_k) = V_\theta(l_k) \in \mathbb{R}$). Então, podemos concluir existe $k_0 \in L^1(I, \mathbb{R})$ tal que, para quaisquer $s_1, s_2, t \in I$,

$$|f(s_1, u_k'(t)) + g(s_1, u_k(t)) - f(s_2, u_k'(t)) - g(s_2, u_k(t))| \leq k_0(t)|s_1 - s_2|.$$

Assim, podemos aplicar o teorema 4.4.21 e obtemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma função integrável $v_k(\cdot)$ tal que,

$$v_k(t) \in \partial_t\varphi(t, u_k(t), u_k'(t)), \text{ para quase todo } t \in I.$$

Além disso, existem uma constante c_k e uma função p_k satisfazendo

$$p_k(t) \in \partial_\xi f(t, u_k'(t)), \text{ quase sempre em } I$$

tais que

$$\begin{aligned} & \varphi(t, u_k(t), u_k'(t)) - \langle u_k'(t), p_k(t)\rangle + r_k\theta(|u_k'(t)|) - r_k|u_k'(t)|\theta'(|u_k'(t)|) = \\ = \ & f(t, u_k'(t)) - \langle u_k'(t), p_k(t)\rangle + g(t, u_k(t)) + r_k[\theta(|u_k'(t)|) - |u_k'(t)|\theta'(|u_k'(t)|)] = \\ = \ & c_k + \int_0^t v_k(s)\,ds \end{aligned}$$

para quase todo o $t \in I$. Logo, pondo

$$E_f(t, u_k'(t)) \doteq f(t, u_k'(t)) - \langle u_k'(t), p_k(t)\rangle$$

e

$$E_\theta(s) \doteq \theta(s) - s\theta'(s)$$

temos

$$E_f(t, u_k'(t)) + g(t, u_k(t)) + r_kE_\theta(|u_k'(t)|) = c_k + \int_0^t v_k(s)\,ds, \text{ quase sempre em } I. \tag{4.29}$$

Por (H3), existem três constantes C_i, $i = 0, 1, 2$, com $C_0 \geq 0$, tais que

$$|v| \leq C_0 |\varphi(t, x, \xi)| + C_1 |x| + C_2$$

para cada $(t, x, \xi) \in I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ e para cada $v \in \partial_t \varphi(t, x, \xi)$. Tem-se então, qualquer que seja o $k \in \mathbb{N}$,

$$|v_k(s)| \leq C_0 |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| + C_1 |u_k(s)| + C_2, \quad \text{quase sempre em } I$$

donde

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t v_k(s)\, ds \right| &\leq \int_0^t |v_k(s)|\, ds \leq \int_0^T |v_k(s)|\, ds \leq \\ &\leq \int_0^T [C_0 |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| + C_1 |u_k(s)| + C_2]\, ds, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Ora, como

$$\begin{aligned} |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| &= |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s)) + \alpha + \beta |u_k(s)| - \alpha - \beta |u_k(s)|| \leq \\ &\leq |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s)) + \alpha + \beta |u_k(s)|| + |\alpha| + \beta |u_k(s)| \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} &C_0 |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| \leq \\ &\leq C_0 |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s)) + \alpha + \beta |u_k(s)|| + C_0 |\alpha| + C_0 \beta |u_k(s)| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &C_0 |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| + C_1 |u_k(s)| + C_2 \leq \\ &\leq C_0 |f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s)) + \alpha + \beta |u_k(s)|| + C_0 |\alpha| + C_0 \beta |u_k(s)| + C_1 |u_k(s)| + C_2 = \\ &= C_0 |\alpha + \beta |u_k(s)| + f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| + \widetilde{C}_1 |u_k(s)| + \widetilde{C}_2 \end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{C}_1 \doteq C_0 \beta + C_1 \ \text{ e } \ \widetilde{C}_2 \doteq C_0 |\alpha| + C_2.$$

Assim, vale

$$\left| \int_0^t v_k(s)\, ds \right| \leq \int_0^T \left[C_0 |\alpha + \beta |u_k(s)| + f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| + \widetilde{C}_1 |u_k(s)| + \widetilde{C}_2 \right] ds \tag{4.30}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in I$.

Por (H1), $f(t, \xi) \geq -A + B |\xi|$, $\forall (t, \xi) \in I \times \mathbb{R}^m$, com $B > 0$. Tem-se então

$$f(t, \xi) \geq -A + B |\xi| \geq -A$$

donde

$$f(t, \xi) + A \geq 0, \quad \forall (t, \xi) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que f é não-negativa.

Além disso, por (H2), $g(t, x) + \alpha + \beta |x| \geq 0$, $\forall (t, \xi) \in I \times \mathbb{R}^m$.

Resulta então que

$$f(t, u_k'(t)) + g(t, u_k(t)) + \alpha + \beta |u_k(t)| \geq 0 \tag{4.31}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in I$.

Por (4.26), (4.30) e (4.31), existem $M_3 > 0$ e duas constantes $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ tais que

$$\left| \int_0^t v_k(s)\, ds \right| \leq C_0 F(u_k) + \widehat{C}_1 |u_k|_{L^1(I, \mathbb{R}^m)} + \widehat{C}_2 \leq M_3, \quad \forall t \in I. \tag{4.32}$$

Com efeito, por (4.30) e (4.31), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t v_k(s)\, ds \right| &\leq \int_0^T \left[C_0 |\alpha + \beta |u_k(s)| + f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))| + \widetilde{C}_1 |u_k(s)| + \widetilde{C}_2 \right] ds = \\ &= \int_0^T \left[C_0 (\alpha + \beta |u_k(s)| + f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))) + \widetilde{C}_1 |u_k(s)| + \widetilde{C}_2 \right] ds = \\ &= \left(C_0 \alpha + \widetilde{C}_2 \right) T + \left(C_0 \beta + \widetilde{C}_1 \right) \int_0^T |u_k(s)|\, ds + C_0 \int_0^T [f(s, u_k'(s)) + g(s, u_k(s))]\, ds = \\ &= \left(C_0 \alpha + \widetilde{C}_2 \right) T + \left(C_0 \beta + \widetilde{C}_1 \right) |u_k|_{L^1(I, \mathbb{R}^m)} + C_0 F(u_k) \end{aligned}$$

pelo que existem duas constantes

$$\widehat{C}_1 \doteq C_0\beta + \widetilde{C}_1 \text{ e } \widehat{C}_2 \doteq C_0\alpha + \widetilde{C}_2$$

tais que

$$\left|\int_0^t v_k(s)\,ds\right| \leq C_0 F(u_k) + \widehat{C}_1 |u_k|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} + \widehat{C}_2, \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \;\; \forall t \in I.$$

Como existe $M_1 > 0$ tal que $|u_k|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \leq M_1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos

$$|u_k(t)| \leq |u_k|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)} \leq M_1$$

para quase todo o $t \in I$ e para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$|u_k|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = \int_0^T |u_k(t)|\,dt \leq \int_0^T |u_k|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\,dt = M_1 T, \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

isto é, a sucessão (u_k) é limitada em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

Por outro lado, por (4.26), temos $F(u_k) \leq F(\overline{u}) < +\infty$. Assim,

$$\left|\int_0^t v_k(s)\,ds\right| \leq C_0 F(\overline{u}) + \widehat{C}_1 M_1 T + \widehat{C}_2, \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \;\; \forall t \in I$$

o que significa que existe uma constante $M_3 > 0$ tal que

$$\left|\int_0^t v_k(s)\,ds\right| \leq C_0 F(\overline{u}) + \widehat{C}_1 M_1 T + \widehat{C}_2 \leq M_3, \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \;\; \forall t \in I.$$

Por (4.29), (4.28) e (4.32), obtemos

$$\begin{aligned} E_f(t, u_k'(t)) + r_k E_\theta(|u_k'(t)|) &= c_k + \int_0^t v_k(\tau)\,d\tau - g(t, u_k(t)) \leq \\ &\leq c_k + \left|\int_0^t v_k(\tau)\,d\tau\right| + |g(t,u_k(t))| \leq c_k + M_2 + M_3 \end{aligned}$$

para cada k em $\mathbb{N}$ e qualquer que seja o

$$t \in \widetilde{I} \doteq \left\{ \begin{array}{l} t \in I: \; |g(t,u_k(t))| \leq M_2, \;\; p_k(t) \in \partial_\xi f(t, u_k'(t)) \;\; \text{e} \\ \qquad E_f(t, u_k'(t)) + g(t, u_k(t)) + r_k E_\theta(|u_k'(t)|) = c_k + \int_0^t v(s)\,ds \end{array} \right\}$$

(note-se que $m\left(I \backslash \widetilde{I}\right) = 0$).

Vamos ver que não é possível existir uma subsucessão de (c_k) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = -\infty$.

De facto, se existisse uma tal sucessão, que notaremos ainda por (c_k), teriamos, para qualquer t em $\widetilde{I}$,

$$\lim_{k\to\infty} \left[E_f(t, u_k'(t)) + r_k E_\theta(|u_k'(t)|)\right] \leq \lim_{k\to\infty} (c_k + M_2 + M_3) = -\infty,$$

isto é,

$$\lim_{k\to\infty} \left[f(t, u_k'(t)) - \langle p_k(t), u_k'(t)\rangle + r_k\left(\theta(|u_k'(t)|) - |u_k'(t)|\,\theta'(|u_k'(t)|)\right)\right] = -\infty. \tag{4.33}$$

Ora, como por hipótese $f \in \mathcal{E}$, e $f(t,\cdot)$ é uma função convexa para cada $t \in I$, temos, por definição da família $\mathcal{E}$, que f verifica

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in I \\ |\xi|>R}} \sup\left\{f(t,\xi) - \langle p, \xi\rangle : p \in \partial_\xi f(t,\xi)\right\} = -\infty.$$

Isto implica que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in I} \sup\left\{f(t,\zeta_k) - \langle p_k, \zeta_k\rangle : p_k \in \partial_\xi f(t,\zeta_k)\right\} = -\infty$$

sempre que $(|\zeta_k|) \to \infty$.

Reciprocamente, se

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{t\in I}\sup\{f(t,\zeta_k)-\langle p_k,\zeta_k\rangle : p_k\in\partial_\xi f(t,\zeta_k)\}=-\infty$$

então $(|\zeta_k|)\to\infty$.

De facto, suponhamos que existe $K>0$ tal que

$$|\zeta_k|\le K,\ \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Vimos que a função f é uma função contínua em $[0,T]\times\mathbb{R}^m$. Então existe $K_1>0$ tal que

$$|f(t,\xi)|\le K_1,\ \ \forall(t,\xi)\in[0,T]\times B_{2K}(0).$$

Fixemos $t\in[0,T]$.

Como $f(t,\cdot)$ é convexa, pela proposição 2.16.25, $f(t,\cdot)$ é lipschitziana, com constante de Lipschitz $\frac{2K_1}{K}$, em $\overline{B}_K(0)$, e então, pela proposição 2.21.3, para cada $\xi\in\overline{B}_K(0)$,

$$|p|\le\frac{2K_1}{K},\ \ \forall p\in\partial_\xi f(t,\xi).$$

Como t é qualquer, podemos afirmar que, qualquer que seja o par $(t,\xi)\in[0,T]\times\overline{B}_K(0)$,

$$|p|\le\frac{2K_1}{K},\ \ \forall p\in\partial_\xi f(t,\xi).$$

As funções

$$(t,\xi,p)\mapsto f(t,\xi)$$

e

$$(t,\xi,p)\mapsto\langle p,\xi\rangle$$

são contínuas. Então também é contínua a função

$$(t,\xi,p)\mapsto W(t,\xi,p)\doteq f(t,\xi)-\langle p,\xi\rangle.$$

Assim,

$$W\left([0,T]\times\overline{B}_K(0)\times\overline{B}_{\frac{2K_1}{K}}(0)\right)\subset\mathbb{R}$$

é um conjunto compacto; em particular é limitado, isto é, existe $K_2>0$ tal que

$$|f(t,\xi)-\langle p,\xi\rangle|\le K_2,\ \ \forall(t,\xi,p)\in[0,T]\times\overline{B}_K(0)\times\overline{B}_{\frac{2K_1}{K}}(0).$$

Portanto

$$|f(t,\zeta_k)-\langle p_k,\zeta_k\rangle|\le K_2,\ \ \forall t\in[0,T],\ \ \forall k\in\mathbb{N},\ \ \forall p_k\in\partial_\xi f(t,\zeta_k).$$

Daqui resulta que

$$\sup_{t\in I}\sup\{f(t,\zeta_k)-\langle p_k,\zeta_k\rangle : p_k\in\partial_\xi f(t,\zeta_k)\}\ge -K_2,\ \ \forall k\in\mathbb{N}$$

e portanto não pode ser

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{t\in I}\sup\{f(t,\zeta_k)-\langle p_k,\zeta_k\rangle : p_k\in\partial_\xi f(t,\zeta_k)\}=-\infty.$$

Assim, para cada $t\in\widetilde{I}$ fixado, temos que

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\left[f(t,u_k'(t))-\langle p_k(t),u_k'(t)\rangle\right]\le\\ \le\ &\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in\widetilde{I}}\sup\left[f(t,u_k'(t))-\langle q_k(t),u_k'(t)\rangle : q_k(t)\in\partial_\xi f(t,u_k'(t))\right]=-\infty\end{aligned}$$

implica $(|u_k'(t)|)\to\infty$.

Por outro lado, atendendo à proposição 4.4.9 e seguindo um raciocínio análogo ao anterior, podemos mostrar que, para cada $t\in\widetilde{I}$ fixado,

$$(r_k\left[\theta(|u_k'(t)|)-|u_k'(t)|\,\theta'(|u_k'(t)|)\right])\to-\infty\ \text{ implica }\ (|u_k'(t)|)\to\infty.$$

Assim, (4.33) implica que $\lim_{k\to\infty} |u_k'(t)| = \infty$, qualquer que seja o $t \in \widetilde{I}$ e então, pelo lema de Fatou,

$$+\infty = \int_{\widetilde{I}} \liminf_{k\to\infty} |u_k'(t)|\, dt = \int_0^T \liminf_{k\to\infty} |u_k'(t)|\, dt \le \liminf_{k\to\infty} \int_0^T |u_k'(t)|\, dt = \liminf_{k\to\infty} |u_k'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}$$

o que contradiz a limitação de $(|u_k'|)$ em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

Concluimos então que existe c^* tal que

$$c_k \ge c^* \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{4.34}$$

De (4.29) resulta que, para cada $t \in \widetilde{I}$,

$$E_f(t, u_k'(t)) + r_k E_\theta(|u_k'(t)|) = c_k - g(t, u_k(t)) + \int_0^t v_k(\tau)\, d\tau$$

e então, por (4.28), (4.32) e (4.34)

$$E_f(t, u_k'(t)) + r_k E_\theta(|u_k'(t)|) \ge c^* - M_2 - M_3, \quad \forall t \in \widetilde{I}. \tag{4.35}$$

Suponhamos agora que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $t_k \in \widetilde{I}$ tal que

$$\limsup_{k\to\infty} |\xi_k| = \infty$$

onde

$$\xi_k \doteq u_k'(t_k).$$

Note-se que se $\mu > 0$ então a função

$$\widetilde{I} \times R^m \ni (t,\xi) \mapsto h(t,\xi) \doteq \mu\theta(|\xi|)$$

é convexa em relação à segunda variável.

De facto, para cada $t \in \widetilde{I}$ fixado, e para quaisquer $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^m$, temos, qualquer que seja $0 \le \lambda \le 1$,

$$h(t, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) = \mu\theta(|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|)$$

e como $|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2| \le \lambda|\xi_1| + (1-\lambda)|\xi_2|$, $\mu > 0$, θ é crescente e convexa,

$$\begin{aligned} \mu\theta(|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|) &\le \mu\theta(\lambda|\xi_1| + (1-\lambda)|\xi_2|) \le \lambda\mu\theta(|\xi_1|) + (1-\lambda)\mu\theta(|\xi_2|) = \\ &= \lambda h(t,\xi_1) + (1-\lambda) h(t,\xi_2). \end{aligned}$$

Pelas condições em θ, a função h é limitada inferiormente, é lipschitziana com respeito à primeira variável e semicontínua inferiormente com respeito à segunda.

Além disso, se $n(\xi) \doteq |\xi|$ então $\nabla n(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|}$ e portanto, $\frac{d}{d\xi}(\mu\theta(|\xi|)) = \mu\theta'(|\xi|)\frac{\xi}{|\xi|}$, pelo que $\partial_\xi h(t,\xi) = \partial_\xi(\mu\theta)(|\xi|) = \left\{\mu\theta'(|\xi|)\frac{\xi}{|\xi|}\right\}$. Assim, pela proposição 4.4.9, podemos escrever, para cada $t \in \widetilde{I}$ fixado,

$$\begin{aligned} &\sup\{h(t,\xi) - \langle p,\xi\rangle : p \in \partial_\xi h(t,\xi)\} = \sup\{\mu\theta(|\xi|) - \langle p,\xi\rangle : p \in \partial_\xi(\mu\theta)(|\xi|)\} = \\ &= \sup\left\{\mu\theta(|\xi|) - \langle p,\xi\rangle : p = \mu\theta'(|\xi|)\frac{\xi}{|\xi|}\right\} = \mu\theta(|\xi|) - \left\langle \mu\theta'(|\xi|)\frac{\xi}{|\xi|}, \xi\right\rangle = \\ &= \mu\theta(|\xi|) - \mu\theta'(|\xi|)\frac{\langle\xi,\xi\rangle}{|\xi|} = \mu[\theta(|\xi|) - \theta'(|\xi|)|\xi|] \to -\infty \text{ quando } (|\xi|) \to \infty. \end{aligned}$$

Daqui resulta que

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in\widetilde{I} \\ |\xi|>R}} \sup\{h(t,\xi) - \langle p,\xi\rangle : p \in \partial_\xi h(t,\xi)\} = -\infty$$

pelo que podemos concluir que $h \in \mathcal{E}$.

Dado que, para cada $t \in \widetilde{I}$, $f(t,\cdot)$ e $h(t,\cdot)$ são funções convexas, o mesmo acontece com a função $(f+h)(t,\cdot)$. Além disso, como $f \in \mathcal{E}$ e $h \in \mathcal{E}$, a função $f+h$ é limitada inferiormente, lipschitziana com respeito a t e semicontínua inferiormente com respeito a ξ.

Por outro lado, pela proposição 2.21.10, se $p \in \partial_\xi (f+h)(t,\xi)$ então $p \in \partial_\xi f(t,\xi) + \partial_\xi h(t,\xi)$, isto é, existem $p_1 \in \partial_\xi (t,\xi)$ e $p_2 \in \partial_\xi h(t,\xi) = \partial_\xi (\mu\theta)(|\xi|) = \left\{\mu\theta'(|\xi|)\frac{\xi}{|\xi|}\right\}$ tais que $p = p_1 + p_2$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in\widetilde{I}\\|\xi|>R}} \sup\{f(t,\xi)+h(t,\xi)-\langle p,\xi\rangle : p\in\partial_\xi(f+h)(t,\xi)\} \leq \\
\leq\; &\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in\widetilde{I}\\|\xi|>R}} \sup\{f(t,\xi)+h(t,\xi)-\langle p_1+p_2,\xi\rangle : p_1\in\partial_\xi f(t,\xi), p_2\in\partial_\xi h(t,\xi)\} \leq \\
\leq\; &\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in\widetilde{I}\\|\xi|>R}} \sup\{f(t,\xi)-\langle p_1,\xi\rangle : p_1\in\partial_\xi f(t,\xi)\} + \\
&+ \lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in\widetilde{I}\\|\xi|>R}} \sup\{h(t,\xi)-\langle p_2,\xi\rangle : p_2\in\partial_\xi h(t,\xi)\} \\
=\; &-\infty
\end{aligned}$$

o que mostra que $f+h\in\mathcal{E}$ e, além disso

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in\widetilde{I}\\|\xi|>R}} \sup\{f(t,\xi)-\langle p,\xi\rangle+\mu[\theta(|\xi|)-|\xi|\theta'(|\xi|)] : p\in\partial_\xi f(t,\xi)\} = -\infty.$$

Isto implica que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in\widetilde{I}} \sup\{f(t,\zeta_k)-\langle p_k,\zeta_k\rangle+\mu[\theta(|\zeta_k|)-|\zeta_k|\theta'(|\zeta_k|)] : p_k\in\partial_\xi f(t,\zeta_k)\} = -\infty \tag{4.36}$$

sempre que $(|\zeta_k|)\to\infty$ quando $k\to\infty$.

Portanto, uma vez que $\limsup\limits_{k\to\infty} |u_k'(t_k)| = \limsup\limits_{k\to\infty} |\xi_k| = \infty$ e $p_k(t_k)\in\partial_\xi f(t,u_k'(t_k)) = \partial_\xi f(t,\xi_k)$, por (4.36) temos

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k\to\infty}[E_f(t_k,u_k'(t_k))+r_kE_\theta(|u_k'(t_k)|)] = \liminf_{k\to\infty}[E_f(t_k,\xi_k)+r_kE_\theta(|\xi_k|)] = \\
=\; &\liminf_{k\to\infty}[f(t_k,\xi_k)-\langle p_k(t_k),\xi_k\rangle+\mu(\theta(|\xi_k|)-|\xi_k|\theta'(|\xi_k|))] \leq \\
\leq\; &\liminf_{k\to\infty}\sup_{t\in\widetilde{I}}[f(t,\xi_k)-\langle p_k(t_k),\xi_k\rangle+\mu(\theta(|\xi_k|)-|\xi_k|\theta'(|\xi_k|))] \leq \\
\leq\; &\liminf_{k\to\infty}\sup_{t\in\widetilde{I}}\sup\{f(t,\xi_k)-\langle q_k,\xi_k\rangle+\mu(\theta(|\xi_k|)-|\xi_k|\theta'(|\xi_k|)) : q_k\in\partial_\xi f(t,\xi_k)\} = \\
=\; &-\infty
\end{aligned}$$

o que contradiz (4.35).

Concluimos então que existe uma constante $N>0$ tal que

$$|u_k'|_{L^\infty(I)} = \inf\{c : |u_k'(t)|\leq c \text{ q.s. em } I\} = \inf\left\{c : |u_k'(t)|\leq c \text{ q.s. em } \widetilde{I}\right\} \leq N$$

para cada $k\in\mathbb{N}$, o que significa que $(|u_k'|)$ é limitada em $L^\infty(I,\mathbb{R}^m)$, o que contradiz (4.25).

Consequentemente, podemos afirmar que para cada $k\in\mathbb{N}$, $r_k=0$, donde V_θ é definitivamente constante e portanto, pelo teorema 4.3.6, para qualquer k suficientemente grande, $u_k\in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$ é uma solução do problema P_θ. Além disso, dado que, para cada $k\in\mathbb{N}$, $r_k=0$, por (4.29) temos que u_k satisfaz (4.24).

Seja $\widetilde{u} \doteq u_k \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$, para algum k suficientemente grande, uma solução de P_θ.

Vamos mostrar que $\widetilde{u}$ é solução do problema P_R.

A demonstração anterior foi elaborada considerando uma função de Nagumo θ fixada. Seja agora ψ uma qualquer outra função de Nagumo.

Afirmamos que $\widetilde{u}$ é solução do problema

$$\min\left\{F(u) : u\in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m), \Lambda_\psi(u)<+\infty, u(0)=a, u(T)=b\right\} \tag{P_ψ}$$

onde

$$\Lambda_\psi(u) = \int_0^T \psi(|u'(t)|)\,dt.$$

Com efeito, seja $y \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$ uma solução de P_ψ (a sua existência é garantida pela demonstração anterior, substituindo θ por ψ).

Temos que y é admissível para P_θ.

De facto, dado que $y \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$, é

$$|y'(t)| \leq |y'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}, \quad \text{quase sempre em } I,$$

e como θ é crescente, podemos escrever

$$\theta(|y'(t)|) \leq \theta\left(|y'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right), \quad \text{quase sempre em } I.$$

Assim, se y não fosse admissível para P_θ, isto é, se $\Lambda_\theta(y) = +\infty$, teríamos

$$+\infty = \Lambda_\theta(y) = \int_0^T \theta(|y'(t)|)\, dt \leq \int_0^T \theta\left(|y'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right) dt = \theta\left(|y'|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^m)}\right) T,$$

o que é absurdo.

Analogamente se mostra que $\widetilde{u}$ é admissível para o problema P_ψ.

Portanto, temos

$$F(y) \underbrace{\qquad\qquad\leq\qquad\qquad}_{\substack{\text{porque } y \text{ é admissível para } P_\theta \\ \text{e } \widetilde{u} \text{ é solução de } P_\theta}} F(\widetilde{u}) \underbrace{\qquad\qquad\leq\qquad\qquad}_{\substack{\text{porque } \widetilde{u} \text{ é admissível para } P_\psi \\ \text{e } y \text{ é solução de } P_\psi}} F(y)$$

donde $F(y) = F(\widetilde{u})$, o que prova a afirmação.

Seja agora u um qualquer arco admissível para o problema P_R. Então, como $u' \in L^1(I,\mathbb{R}^m)$, u' é absolutamente integrável e então, pela proposição 4.4.7, existe uma função de Nagumo ψ tal que $u \in AC_\psi$. Consequentemente, u é admissível para P_ψ. Mas então, uma vez que $\widetilde{u}$ é solução de P_ψ, temos

$$F(\widetilde{u}) \leq F(u)$$

donde $\widetilde{u}$ é solução de P_R. ■

4.4 Anexos

4.4.1 Critério de compacidade fraca em $L^1(I,\mathbb{R}^m)$

Recordemos que um subconjunto U de um espaço topológico diz-se sequencialmente relativamente compacto quando qualquer sucessão com termos em U possui uma subsucessão convergente (cujo limite não pertence necessariamente a U).

O primeiro teorema de compacidade que aprendemos deve-se a Heine e a Borel: um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ é sequencialmente relativamente compacto se e só se é limitado. Existem resultados análogos em espaços de funções. Começamos por enunciar um dos mais importantes: o teorema de Ascoli-Arzelà.

Definição 4.4.1 *Uma sucessão (u_k), de funções definidas num intervalo de números reais $[a,b]$ com valores em $\mathbb{R}^m$, diz-se* ***equilimitada*** *se existe $N > 0$ tal que $|u_k(t)| \leq N$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

A sucessão (u_k) diz-se ***equicontínua*** *sempre que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, quaisquer que sejam $t', t'' \in [a,b]$ verificando $|t' - t''| < \delta$ e para cada $k \in N$, se tenha $|u_k(t') - u_k(t'')| < \varepsilon$.*

Proposição 4.4.2 *(**Teorema de Ascoli-Arzelà**) Seja (u_k) uma sucessão de funções definidas num intervalo de números reais $[a,b]$ com valores em $\mathbb{R}^m$, equilimitada e equicontínua. Então existem uma subsucessão (u_{k_s}) de (u_k) e uma função contínua u tais que $(u_{k_s}) \to u$ uniformemente em $[a,b]$ quando $s \to \infty$.*

Demonstração

Ver [29], teorema IV.6.7.

O teorema seguinte (teorema de Dunford-Pettis) diz respeito a conjuntos de funções integráveis em $[a,b]$. Antes de o enunciar vamos recordar algumas definições.

Seja $I \doteq [a,b]$.

Definição 4.4.3 *Um conjunto* $\varphi \subset L^1(I, \mathbb{R}^m)$ *diz-se* ***fortemente (fracamente) sequencialmente relativamente compacto*** *se qualquer sucessão com termos em* φ *contém uma subsucessão fortemente (fracamente) converegente em* $L^1(I, \mathbb{R}^m)$. *Se o limite forte (fraco) de uma tal (sub)sucessão pertence a* U *dizemos que* U *é* ***fortemente (fracamente) sequencialmente compacto.***

Definição 4.4.4 *Dizemos que uma família* φ *de funções* $f \in L^1(I, \mathbb{R}^m)$ *é* ***equiabsolutamente integrável*** *se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que* $\int_E |f(t)|\, dt \leq \varepsilon$, *para qualquer função* $f \in \varphi$ *e qualquer que seja o subconjunto mensurável* E *de* I *com* $m(E) \leq \delta$.

Observação 4.4.5 *Note-se que qualquer função* $f \in L^1(I, \mathbb{R}^m)$ *é absolutamente integrável, isto é, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(f, \varepsilon) > 0$ *tal que* $\int_E |f(t)|\, dt \leq \varepsilon$, *qualquer que seja o subconjunto mensurável* E *de* I *com* $m(E) \leq \delta$.

Proposição 4.4.6 ***(Teorema de Dunford-Pettis)*** *Seja* φ *um subconjunto de* $L^1(I, \mathbb{R}^m)$. *Então* φ *é sequencialmente relativamente compacto se e só se*

(i) φ *é limitado, isto é,* $\sup_{f \in \varphi} |f|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} < +\infty$, *e*

(ii) φ *é equiabsolutamente integrável.*

Demonstração
Ver [29], corolário IV.8.11.

Proposição 4.4.7 *Seja* φ *um subconjunto de* $L^1(I, \mathbb{R}^m)$. *Então* φ *é equiabsolutamente integrável se e só se existem uma constante* M *e uma função* $\Theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *(que podemos supor convexa, semicontínua inferiormente e crescente) verificando* $\lim_{\xi \to +\infty} \frac{\Theta(\xi)}{\xi} = +\infty$, *tais que*

$$\int_I \Theta(|f(t)|)\, dt \leq M$$

para qualquer função $f \in \varphi$.

Demonstração
Ver [8], teorema 2.12.

4.4.2 Funções de Nagumo

Teorema 4.4.8 *Seja* $f : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty]$ *uma função convexa semicontínua inferiormente e seja* $\omega \in int(domf)$, $\omega \neq 0$. *Seja ainda* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

$$\theta(|z|) \leq f(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Então, para cada $\varepsilon \in (0, |\omega|)$ *e para cada* $p \in \partial f(\omega)$ *tem-se*

$$\langle p, \omega \rangle - f(\omega) \geq \frac{\varepsilon \theta(|\omega|)}{|\omega| - \varepsilon} - f\left(\frac{\varepsilon \omega}{|\omega|}\right) \frac{|\omega|}{|\omega| - \varepsilon}.$$

Demonstração
Suponhamos que $\omega \in int(domf)$, $\omega \neq 0$.
Uma vez que, por hipótese, f é convexa, pela proposição 2.20.10 podemos afirmar que

$$\partial f(\omega) = \{p \in \mathbb{R}^m : f(z) \geq f(\omega) + \langle p, z - \omega \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^m\} \neq \emptyset.$$

Seja então $p \in \partial f(\omega)$ qualquer. Temos

$$f(z) \geq f(\omega) + \langle p, z - \omega \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^m. \tag{4.37}$$

Fixemos $\varepsilon \in (0, |\omega|)$ qualquer. Então, pela desigualdade (4.37), é

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\varepsilon \omega}{|\omega|}\right) &\geq f(\omega) + \left\langle p, \frac{\varepsilon \omega}{|\omega|} - \omega \right\rangle = f(\omega) + \left\langle p, \omega \left(\frac{\varepsilon}{|\omega|} - 1\right) \right\rangle = \\ &= f(\omega) + \langle p, \omega \rangle \left(\frac{\varepsilon}{|\omega|} - 1\right) = f(\omega) + \langle p, \omega \rangle \frac{\varepsilon}{|\omega|} - \langle p, \omega \rangle = \\ &= \frac{\varepsilon}{|\omega|} \left(\frac{|\omega|}{\varepsilon} f(\omega) + \langle p, \omega \rangle - \frac{|\omega|}{\varepsilon} \langle p, \omega \rangle\right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\frac{|\omega|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right) \geq \langle p, \omega\rangle - \frac{|\omega|}{\varepsilon}\langle p, \omega\rangle + \frac{|\omega|}{\varepsilon} f(\omega) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\frac{|\omega|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right) - f(\omega) \geq \langle p, \omega\rangle - f(\omega) - \frac{|\omega|}{\varepsilon}\langle p, \omega\rangle + \frac{|\omega|}{\varepsilon} f(\omega) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\frac{|\omega|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right) - f(\omega) \geq \langle p, \omega\rangle - f(\omega) - \frac{|\omega|}{\varepsilon}\left(\langle p, \omega\rangle - f(\omega)\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\frac{|\omega|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right) - f(\omega) \geq \left(\langle p, \omega\rangle - f(\omega)\right)\left(1 - \frac{|\omega|}{\varepsilon}\right).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Como $0 < \varepsilon < |\omega|$, temos $1 - \frac{|\omega|}{\varepsilon} < 0$ e portanto, dividindo ambos os membros da desigualdade (4.38) por $1 - \frac{|\omega|}{\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle p, \omega\rangle - f(\omega) &\geq \frac{1}{1 - \frac{|\omega|}{\varepsilon}}\left(\frac{|\omega|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right) - f(\omega)\right) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - |\omega|}\left(\frac{|\omega|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right) - f(\omega)\right) = \\
&= \frac{|\omega|}{\varepsilon - |\omega|} f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - |\omega|} f(\omega)
\end{aligned}$$

donde

$$\langle p, \omega\rangle - f(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{|\omega| - \varepsilon} f(\omega) - f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right)\frac{|\omega|}{|\omega| - \varepsilon}$$

pelo que, atendendo a que $\frac{\varepsilon}{|\omega|-\varepsilon} > 0$ e a que, por hipótese $f(\omega) \geq \theta(|\omega|)$, podemos concluir que

$$\langle p, \omega\rangle - f(\omega) \geq \frac{\varepsilon\theta(|\omega|)}{|\omega| - \varepsilon} - f\left(\frac{\varepsilon\omega}{|\omega|}\right)\frac{|\omega|}{|\omega| - \varepsilon}$$

como pretendiamos. ■

Proposição 4.4.9 *Seja θ uma função de Nagumo. Então,*

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\theta(r) - \theta'(r)r\right] = -\infty.$$

Demonstração
Aplicando o teorema 4.4.8 a θ, para cada $r \in int((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ e para cada $\varepsilon \in (0, |r|) = (0, r)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\theta(r) - \theta'(r)r &\leq \frac{|r|}{|r| - \varepsilon}\theta\left(\frac{\varepsilon r}{|r|}\right) - \frac{\varepsilon\theta(|r|)}{|r| - \varepsilon} = \\
&= \frac{r}{r - \varepsilon}\theta\left(\frac{\varepsilon r}{r}\right) - \frac{\varepsilon}{r - \varepsilon}\theta(r) = \\
&= \frac{r}{r - \varepsilon}\theta(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{r}}\frac{\theta(r)}{r}
\end{aligned}$$

e como, $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{\theta(r)}{r} = +\infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r}{r - \varepsilon}\theta(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{r}}\frac{\theta(r)}{r}\right) &= \lim_{r\to+\infty}\frac{r}{r - \varepsilon}\theta(\varepsilon) - \lim_{r\to+\infty}\frac{\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{r}}\frac{\theta(r)}{r} = \\
&= \theta(\varepsilon) - \varepsilon\lim_{r\to+\infty}\frac{\theta(r)}{r} = -\infty
\end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\theta(r) - \theta'(r)r\right] = -\infty. \blacksquare$$

4.4.3 Subgradientes proximais

Seja C um subconjunto fechado e não-vazio de $\mathbb{R}^m$ e seja x um ponto de $\mathbb{R}^m$. Definimos a distância $d(x, C)$,de x a C, pondo

$$d_C(x) \doteq \inf\{|x - c'| : c' \in C\}.$$

Proposição 4.4.10 *Seja C um subconjunto fechado e não-vazio de $\mathbb{R}^m$ e seja x um ponto de $\mathbb{R}^m$ não pertencente a C. Então, existe pelo menos um ponto c em C que é o mais próximo, em C, de x, isto é, tal que*

$$d_C(x) = |x - c|,$$

ou, o que é o mesmo, tal que

$$|x - c'| \geq |x - c|, \ \forall c' \in C.$$

Demonstração

Como o ínfimo de um conjunto de números reais é o limite de uma sucessão de elementos desse conjunto, temos

$$d_C(x) = \lim_{n \to \infty} |x - c_n|$$

onde (c_n) é uma sucessão conveniente de pontos de C.

Da desigualdade

$$|c_n| \leq |x - c_n| + |x|$$

resulta que a sucessão (c_n) é limitada, pois é limitada a sucessão $(|x - c_n|)$, por ser convergente, e $|x|$ é um número real fixado. Assim, passando se necessário a uma subsucessão, podemos afirmar que existe $c \in C$ tal que

$$(c_n) \to c \text{ quando } n \to \infty$$

e como C é fechado, $c \in C$. Além disso,

$$d_C(x) = \lim_{n \to \infty} |x - c_n| = |x - c|$$

pelo que o torema está provado. ■

Assim, se c é o ponto mais próximo em C de x, a bola aberta de raio $|x - c|$ e centro em x não contém pontos de C e c pertence à sua fronteira.

Note-se que

$$|x - c'| \geq |x - c| \Leftrightarrow \langle \omega, c' - c \rangle \leq \frac{1}{2} |c' - c|^2 \tag{4.39}$$

onde $\omega = x - c$.

A condição (4.39) está relacionada com o conceito de hiperplano suporte. Com efeito, se o membro direito fosse substituido por 0, então (4.39) significaria que para qualquer ponto c' em C, o vector $c' - c$ faria um ângulo de amplitude$\frac{\pi}{2}$, ou mais, com o vector ω, isto é, que o hiperplano com direcção normal ω e passando por c suportaria o conjunto C (todos os pontos de C estariam de um dos lados do hiperplano). A presença do termo quadrático modifica esta situação. Nem todos os pontos c' de C estão necessariamente de um dos lados do hiperplano, mas é isso que acontece quando c' se aproxima de c : o hiperplano suporte é substituido por uma "hiperparábola" suporte.

Definição 4.4.11 *O vector ω diz-se* ***perpendicular*** *ao conjunto C no ponto c.*

Definição 4.4.12 *Um vector normal proximal a C em c é um qualquer múltiplo não-negativo de um vector perpendicular a C em c.*

Equivalentemente, atendendo a (4.39), temos que

Proposição 4.4.13 *O vector ξ é um* ***vector normal proximal*** *a C no ponto c se e só se, para algum escalar positivo σ, tivermos*

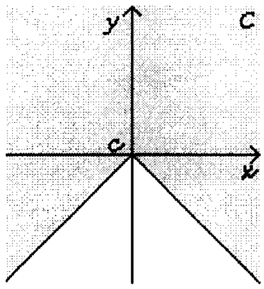
$$\langle \xi, c' - c \rangle \leq \sigma |c' - c|^2, \ \forall c' \in C.$$

Notamos por $\Pi_C(c)$ o conjunto dos vectores normais proximais ao conjunto C no ponto c.

Nem todo o ponto c na fronteira de C admite um vector normal proximal não trivial, isto é, não nulo). Isto é o que acontece, por exemplo, com o conjunto, em $\mathbb{R}^2$,

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + |x| \geq 0 \right\}$$

e o ponto $c = (0, 0)$.



No entanto, temos a seguinte

Proposição 4.4.14 *Qualquer ponto c na fronteira de C está arbitrariamente próximo de um ponto* $\widetilde{c}$ *que admite um vector proximal normal (não trivial).*

Demonstração
Basta considerar um ponto $x \notin C$ suficientemente próximo de c e tomar para $\widetilde{c}$ o ponto mais próximo em C de de x. ■

Definição 4.4.15 *Seja* $f : \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ *uma função semicontínua inferiormente. Um vector* $\xi \in \mathbb{R}^m$ *diz-se um* ***subgradiente proximal*** *de* f *em* $x \in dom f$ *se existem* $\sigma > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que*

$$f(y) - f(x) + \sigma |y - x|^2 \geq \langle \xi, y - x \rangle, \quad \forall y \in x + \delta B_1(0).$$

Notamos por $\partial^\pi f(x)$ o conjunto de todos os subgradientes proximais de f em x.

Proposição 4.4.16 *O vector* ξ *é um subgradiente proximal da função* f *em* x *se e só se*

$$(\xi, -1) \in \Pi_{epi\, f}(x, f(x)).$$

Demonstração
Ver [33], proposição 4A.3.

Proposição 4.4.17 *Seja* $f : \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ *uma função semicontínua inferiormente. Se* f *é diferenciável à Gâteaux em* x *então* $\partial^\pi f(x) \subset \{\nabla f(x)\}$.

Demonstração
Ver [33], corolário 4A.5.

Proposição 4.4.18 *Seja* $f : \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ *uma função semicontínua inferiormente. Então o conjunto* $\{x \in R^m : \partial^\pi f(x) \neq \emptyset\}$ *é um subconjunto denso de* $dom f$.

Demonstração
Ver [33], proposição 3C.6.

Proposição 4.4.19 *Seja* U *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^m$, *sejam* $f, g : U \to (-\infty, +\infty]$ *funções semicontínuas inferiormente finitas em* $x^* \in U$, *e seja* $\zeta \in \partial^\pi (f + g)(x^*)$. *Então, para cada* $\varepsilon > 0$, *existem* y^* *e* z^* *em* $x^* + \varepsilon B_1(0)$ *tais que*

$$f(y^*) \in f(x^*) + \varepsilon B_1(0)$$

$$g(z^*) \in g(x^*) + \varepsilon B_1(0)$$

e

$$\zeta \in \partial^\pi f(y^*) + \partial^\pi g(z^*) + \varepsilon B_1(0).$$

Demonstração
Ver [18], proposição 1.4.

Teorema 4.4.20 *Seja* U *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^m$ *e seja* $f : U \to (-\infty, +\infty]$ *uma função semicontínua inferiormente. Suponhamos que, sempre que* ξ *é um subgradiente proximal de* f *em* $x \in U$, *temos* $\xi = 0$. *Então* f *é localmente constante em* U.

Demonstração

Seja x_0 um ponto de U onde f é finita (nada há a provar se um tal ponto não existe).
Seja $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 + \varepsilon B_1(0) \subseteq U$ e tal que f é limitada inferiormente em $x_0 + \varepsilon B_1(0)$.
Seja x um qualquer outro ponto da bola aberta de raio ε e centro x_0.
Vamos começar por mostrar que

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Com vista a um absurdo, vamos supor que

$$f(x) < f(x_0).$$

Podemos encontrar uma função $g : x_0 + \varepsilon B_1(0) \to \mathbb{R}$ tal que

(a) g é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B_1(0)$,

(b) g admite um único ponto de mínimo global em x_0,

(c) g' anula-se apenas em x_0,

(d) $g(\omega) \to +\infty$ e $|g'(\omega)| \to +\infty$ quando ω se aproxima da fronteira da bola $x_0 + \varepsilon B_1(0)$,

(e) $g(x) - g(x_0) < f(x_0) - f(x)$.

Ora, dado que f é, por hipótese, semicontínua inferiormente e g, em particular, é contínua, temos que a função $f + g$ é semicontínua inferiormente. Assim, o conjunto

$$\Gamma \doteq \{x \in x_0 + \varepsilon B_1(0) : (f+g)(x) \leq f(x_0) + g(x_0)\} \subset x_0 + \varepsilon B_1(0)$$

é um subconjunto fechado e limitado (logo compacto) de $\mathbb{R}^m$. Portanto, existe

$$z \in \Gamma \subset x_0 + \varepsilon B_1(0)$$

tal que z é um ponto de mínimo global para $f + g$ em $x_0 + \varepsilon B_1(0)$, isto é

$$(f+g)(y) \geq f(z) + g(z), \quad \forall y \in x_0 + \varepsilon B_1(0).$$

Daqui resulta que $\xi = 0$ é um subgradiente proximal de $f + g$ em z. De facto, para cada $\sigma > 0$ e para cada $y \in x_0 + \varepsilon B_1(0)$, temos

$$(f+g)(y) - (f+g)(z) + \sigma |y - z| \geq 0 = \langle 0, y - x \rangle.$$

Pela proposição 4.4.19, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar pontos u e v em $z + \varepsilon B_1(0)$ tais que

$$\xi = 0 \in \left(\overline{\xi} + \overline{\overline{\xi}}\right) + \varepsilon B_1(0)$$

onde $\overline{\xi}$ é um subgradiente proximal de f em u e $\overline{\overline{\xi}}$ é um subgradiente proximal de g em v. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, existem pontos u_i e v_i tais que

$$|u_i - z| < \frac{1}{i}, \quad |v_i - z| < \frac{1}{i} \quad \text{e} \quad \left|\overline{\xi}_i + \overline{\overline{\xi}}_i\right| < \frac{1}{i}$$

onde $\overline{\xi}_i$ é um subgradiente proximal de f em u_i e $\overline{\overline{\xi}}_i$ é um subgradiente proximal de g em v_i.

Por hipótese, temos

$$\overline{\xi}_i = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo, de $\left|\overline{\xi}_i + \overline{\overline{\xi}}_i\right| < \frac{1}{i}$ resulta que

$$\left|\overline{\overline{\xi}}_i\right| < \frac{1}{i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, sendo g contínuamente diferenciável, é

$$\overline{\overline{\xi}}_i = g'(v_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Então

$$|g'(v_i)| = \left|\overline{\overline{\xi}}_i\right| < \frac{1}{i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e isto significa que

$$(g'(v_i)) \to 0, \text{ quando } i \to \infty.$$

De $|v_i - z| < \frac{1}{i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, resulta que

$$(v_i) \to z, \text{ quando } i \to \infty.$$

Então, uma vez que g é contínua, temos

$$0 = \lim_{i \to \infty} g'(v_i) = g'(z),$$

portanto

$$g'(z) = 0$$

e então, pela hipótese (c) em g,

$$z = x_0.$$

Concluimos então que

$$(f+g)(x) \geq (f+g)(z) = (f+g)(x_0)$$

donde

$$f(x) + g(x) \geq f(x_0) + g(x_0)$$

o que contraria a hipótese (e) em g.

Para mostrar que, se f é finita em x, não pode ser $f(x) > f(x_0)$, podemos seguir o raciocínio anterior, supondo que era verdade que $f(x) > f(x_0)$ e considerando a função $f + \widetilde{g}$ onde $\widetilde{g} : x_0 + \varepsilon B_1(0) \to \mathbb{R}$ verificando

(a') $\widetilde{g}$ é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B_1(0)$,

(b') $\widetilde{g}$ admite um único ponto de máximo global em x_0,

(c') $\widetilde{g}'$ anula-se apenas em x_0,

(d') $\widetilde{g}(\omega) \to -\infty$ e $|\widetilde{g}'(\omega)| \to +\infty$ quando ω se aproxima da fronteira da bola $x_0 + \varepsilon B_1(0)$,

(e') $\widetilde{g}(x_0) - \widetilde{g}(x) > f(x) - f(x_0)$.

Resulta então que f tem um valor constante f_0 em todos os pontos da bola $x_0 + \varepsilon B_1(0)$ nos quais f é finita.

Para completar a demonstração, falta mostrar que f é finita em todos os pontos da bola $x_0 + \frac{\varepsilon}{4} B_1(0)$.

Suponhamos que não, isto é, suponhamos que existe um ponto z em $x_0 + \frac{\varepsilon}{4} B_1(0)$ tal que $f(z) = +\infty$.

Seja $\delta > 0$, $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$. O ponto $(z, f_0 - \delta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ não pertence ao epigráfico de f, o qual é fechado dado que f é semicontínua inferiormente (e não-vazio). Pela proposição 4.4.10, existe pelo menos um ponto $(\omega, r) \in epi\, f$ que está o mais próximo possível de $(z, f_0 - \delta)$, isto é, tal que

$$|(z, f_0 - \delta) - (\omega, r)| \leq |(z, f_0 - \delta) - (x, y)|$$

para qualquer $(x, y) \in epi\, f$, em particular, dado que $(x_0, f_0) \in epi\, f$, temos

$$\begin{aligned} |z - \omega| &\leq |(z - \omega, f_0 - \delta - r)| = |(z, f_0 - \delta) - (\omega, r)| \leq |(z, f_0 - \delta) - (x_0, f_0)| = \\ &= |(z - x_0, f_0 - \delta - f_0)| = |(z - x_0, -\delta)| \leq |z - x_0| + \delta < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

e portanto

$$|\omega - x_0| = |\omega - z + z - x_0| \leq |\omega - z| + |z - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

o que significa que $\omega \in x_0 + \varepsilon B_1(0)$.

Como $(\omega, r) \in epi\, f$, temos que f é finita em ω e então $f(\omega) = f_0$. Segue daqui que $r = f(\omega) = f_0$.

Mostrámos então que o ponto $(\omega, f(\omega)) = (\omega, f_0)$ é o ponto do conjunto $epi\, f$ mais próximo do ponto $(z, f_0 - \delta)$. Em termos geométricos, isto significa que $(z - \omega, -\delta) = \delta\left(\frac{z-\omega}{\delta}, -1\right)$ é um vector proximal normal ao conjunto $epi\, f$ no ponto $(\omega, f(\omega))$, o que é equivalente a afirmar (proposição 4.4.16) que o vector não-nulo $\frac{z-\omega}{\delta}$ é um subgradiente proximal de f em ω, o que contradiz a hipótese de se ter $\xi = 0$ sempre que ξ é um subgradiente proximal de f nalgum ponto. ■

4.4.4 Um resultado em optimização não-suave

Consideremos o seguinte problema

$$\text{minimizar} \quad \Lambda(u) \doteq \int_0^T L(t, u(t), u'(t))\, dt \tag{M}$$

onde $u \in W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^m)$, $(u(0), u(T)) \in C$, $u(t) \in \Omega$ para cada $t \in [0,T]$ e $u'(t) \in K$ para quase todo $t \in [0,T]$, sendo Ω um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^m$, C um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ e K um cone em $\mathbb{R}^m$ (isto é, $tk \in K$ para cada $k \in K$ e para qualquer $t > 0$) convexo fechado.

Suponhamos que pelo menos um dos seguintes conjuntos é compacto:

$$\{x \in \mathbb{R}^m : \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^m,\ (x,y) \in C\}$$
$$\{y \in \mathbb{R}^m : \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^m,\ (x,y) \in C\}$$

e que existe pelo menos uma função lipschitziana $\overline{u}$ para a qual $\Lambda(\overline{u})$ é finito.

Suponhamos ainda que a função integranda $L(t,x,v)$ é semicontínua inferiormente em (x,v) e que, para cada $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$, a função $v \mapsto L(t,x,v)$ é convexa e tem como domínio um conjunto aberto convexo não-vazio.

Além disso, exigimos que a função $L(\cdot, x, v)$ seja lipschitziana para qualquer (x,v), mais precisamente, quaisquer que sejam $x \in \Omega$ e $v \in domL(t,x,\cdot)$ fixados, existem $\delta > 0$ e uma função $k_0 \in L^1([0,T], \mathbb{R})$ tais que

$$|L(s_1,x,v) - L(s_2,x,v)| \leq k_0(t)\, |s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in B_\delta(t)$$

para quase todo o $t \in [0,T]$.

Seja z um arco satisfazendo as restrições do problema (M):

$$(z(0), z(T)) \in C, \quad z(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T], \quad z'(t) \in K \text{ quase sempre em } [0,T];$$

seja θ uma função de Nagumo e seja

$$f(u) \doteq \Lambda(u) + r\Lambda_\theta(u) + \sigma\, |\Lambda_\theta(u) - \Lambda_\theta(z)|^2$$

onde r e σ são constantes positivas, e $\Lambda_\theta(u) \doteq \int_0^T \theta(|u'(t)|)\, dt$, uma função definida em

$$AC_\theta \doteq \left\{u \in W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^m) : \Lambda_\theta(u) < +\infty\right\}.$$

Então temos o seguinte

Teorema 4.4.21 *Suponhamos que, qualquer que seja o arco u admissível para (M), sempre que $\Lambda_\theta(u)$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z)$, temos $f(u) \geq f(z)$. Então existe uma função integrável $\zeta(\cdot)$ tal que*

$$\zeta(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)), \quad \textit{quase sempre em } [0,T]$$

e, para alguma constante c,

$$L(t, z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\theta(|z'(t)|) - r\,|z'(t)|\, \theta'(|z'(t)|) = c + \int_0^t \zeta(\tau)\, d\tau \quad q.s. \text{ em } [0,T]$$

onde $p(t) \in \partial_v L(t, z(t), z'(t))$ para quase todo $t \in [0,T]$.

Demonstração

Ver [16], teorema 5.

Capítulo 5

O problema não-autónomo não-convexo e não-coercivo

5.1 Introdução

Seja $\mathcal{E}$ a classe de todas as funções $\psi : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitadas inferiormente, tais que $\psi(\cdot,\xi)$ é uma função lipschitziana para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, $\psi(t,\cdot)$ é uma função semicontínua inferiormente para cada $t \in I$ fixado e

$$\lim_{n\to\infty} \left[\psi^{**}(t^n,\xi^n) - \langle \nabla\psi^{**}(t^n,\xi^n), \xi^n\rangle\right] = -\infty,$$

para qualquer sucessão $(t^n) \subset [0,T]$ e para qualquer escolha de pontos ξ^n de diferenciabilidade de $\psi^{**}(t^n,\cdot)$ tais que $(|\xi^n|) \to \infty$, e consideremos o problema não-autónomo

$$\min\left\{\int_0^T \left[f(t,u'(t)) + g(t,u(t))\right] dt : u \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m), u(0)=a, u(T)=b\right\}. \tag{5.1}$$

Neste capítulo vamos mostrar que se $f \in \mathcal{E}$ e existem duas constantes A e B, com $B > 0$, tais que $f(t,\xi) \geq -A + B|\xi|$, para cada $(t,\xi) \in I \times \mathbb{R}^m$ e se g é uma função lipschitziana com respeito à primeira variável e côncava relativamente à segunda satisfazendo $g(t,x) \geq -\alpha - \beta|x|$, para cada $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^m$, onde α e β são, constantes adequadas, com $0 < \beta < \frac{B}{T}$, então, admitindo que a função integranda é lipschitziana com respeito a t, o problema (5.1) admite solução e, além disso, tal solução é uma função lipschitziana.

Os principais resultados envolvidos na demonstração são um resultado relativo ao fecho do invólucro convexo do epigráfico de funções cuja bipolar é estritamente convexa no infinito, o qual permitirá para fazer a ligação entre o caso convexo e o caso não-convexo, no sentido em que é sua consequência a representação de Carathéodory para a bipolar de uma função $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente, tal que $h^{**} \not\equiv -\infty$ e h^{**} é estritamente convexa no infinito, um resultado de existência de uma selecção integrável da multifunção $[0,T] \ni t \mapsto -\partial_x(-g(t,\widetilde{u}(t)))$, e o teorema de Liapunov, sobre a imagem de medidas vectoriais não-atómicas, apresentado em [14] (§16).

A demonstração consiste, basicamente em, usando o resultado de existência provado no capítulo anterior, mostrar que o problema relaxado

$$\min\left\{\int_0^T \left[f^{**}(t,u'(t)) + g(t,u(t))\right] dt : u \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^m), u(0)=a, u(T)=b\right\}$$

admite uma solução lipschitziana $\widetilde{u}$ e construir, apartir de $\widetilde{u}$, uma função que será solução do problema (5.1). Esta solução será lipschitziana devido ao facto de $\widetilde{u}$ também o ser.

5.2 Resultados preliminares

5.2.1 Caracterização da bipolar de uma função $f \in \mathcal{G}$

Recordemos que uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pertence à família $\mathcal{G}$ se f é semicontínua inferiormente, $f^{**} \not\equiv -\infty$ e f^{**} é estritamente convexa no infinito.

Vamos começar por mostrar que o invólucro convexo do epigráfico de qualquer elemento de $\mathcal{G}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. A demonstração baseia-se no facto de que, se $f \in \mathcal{G}$ então, qualquer que seja o hiperplano suporte r de f^{**}, a função $f^{**} - r$ pertence a $\mathcal{G}$.

Teorema 5.2.1 *Para qualquer função $f \in \mathcal{G}$, o conjunto $co\,epi\, f$ é fechado.*

Demonstração

Fixemos $(\xi, a) \in \partial\,(co\,epi\, f)$, onde ∂S denota a fronteira do conjunto S.

Pelo teorema 5.4.12, existe um hiperplano suporte H de $co\,epi\, f$ em (ξ, a). Então, pela proposição 5.4.2, existe uma função afim

$$r(\eta) \doteq \langle c, \eta\rangle + d$$

tal que

$$H = \{\eta, r(\eta)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : \langle (x,y), (-c, 1)\rangle = d\}$$

e, além disso, temos

$$\langle (x,y), (-c,1)\rangle \geq d, \quad \forall (x,y) \in co\,epi\, f.$$

Note-se que então também tem que ser

$$\langle (x,y), (-c,1)\rangle \geq d, \quad \forall (x,y) \in \overline{co}\,epi\, f. \tag{5.2}$$

Consideremos a função definida por

$$\varphi(\eta) \doteq f(\eta+\xi) - r(\eta+\xi).$$

Então

$$\varphi^{**}(\eta) = f^{**}(\eta+\xi) - r(\eta+\xi).$$

De facto

$$\begin{aligned}
\varphi^{*}(p) &= \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m} \{\langle p,\eta\rangle - \varphi(\eta)\} = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m} \{\langle p,\eta\rangle - f(\eta+\xi) + r(\eta+\xi)\} = \\
&= \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m} \{\langle p,\eta\rangle - f(\eta+\xi) + \langle c, \eta+\xi\rangle + d\} = \\
&= \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m} \{\langle p,\eta\rangle - f(\eta+\xi) + \langle c, \eta\rangle + \langle c,\xi\rangle + d\} = \\
&= \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m} \{\langle p+c,\eta\rangle - f(\eta+\xi) + \langle c,\xi\rangle + d\} = \\
&= \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m} \{\langle p+c,\eta+\xi\rangle - \langle p+c,\xi\rangle - f(\eta+\xi) + \langle c,\xi\rangle + d\} = \\
&= \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m} \{\langle p+c,\eta+\xi\rangle - f(\eta+\xi) - \langle p,\xi\rangle + d\} = f^{*}(p+c) - \langle p,\xi\rangle + d
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi^{**}(\eta) &= \sup_{p\in\mathbb{R}^m} \{\langle \eta,p\rangle - \varphi^{*}(p)\} = \sup_{p\in\mathbb{R}^m} \{\langle \eta,p\rangle - f^{**}(p+c) + \langle \xi,p\rangle - d\} = \\
&= \sup_{p\in\mathbb{R}^m} \{\langle \eta+\xi,p\rangle - f^{**}(p+c) - d\} = \\
&= \sup_{p\in\mathbb{R}^m} \{\langle \eta+\xi,p+c\rangle - \langle \eta+\xi,c\rangle - f^{**}(p+c) - d\} = \\
&= \sup_{p\in\mathbb{R}^m} \{\langle \eta+\xi,p+c\rangle - f^{**}(p+c) - (\langle \eta+\xi,c\rangle + d)\} = \\
&= f^{**}(\eta+\xi) - r(\eta+\xi).
\end{aligned}$$

Pelas proposições 2.18.7 e 2.19.9, temos que

$$epi\, f^{**} = \overline{co}\,epi\, f.$$

Então, por (5.2), qualquer ponto $(x,y) \in epi\, f^{**}$ satisfaz

$$\langle (x,y), (-c,1)\rangle \geq d \;\Leftrightarrow\; y \geq \langle x, c\rangle + d.$$

Assim, para $x = \eta+\xi$ e $y = f^{**}(\eta+\xi)$, tem-se

$$f^{**}(\eta+\xi) \geq \langle \eta+\xi, c\rangle + d = r(\eta+\xi)$$

pelo que $f^{**}(\eta+\xi)-r(\eta+\xi)\geq 0$, o que significa que

$$\varphi^{**}\geq 0$$

(e portanto $\varphi^{**}\not\equiv-\infty$).

Por outro lado, como H é um hiperplano suporte de $co\,epi\,f$ em (ξ,a), temos $r(\xi)=a$. Além disso, por definição de f^{**}, temos, necessariamente $f^{**}(\xi)=a$. Assim,

$$\varphi^{**}(0)=f^{**}(\xi)-r(\xi)=0.$$

Para cada $\nu\in\mathbb{R}^m$, $\nu\neq 0$, para cada $\eta\in\mathbb{R}^m$ e para cada $s\in\mathcal{D}\left(f^{**}_{\nu,\xi+\eta}\right)$[1] temos

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^{**}_{\nu,\eta}\right)'(s) &= \varphi^{**'}(s\nu+\eta)=f^{**'}(s\nu+\eta+\xi)-r'(s\nu+\eta+\xi)= \\
&= \left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s)-\frac{d}{ds}\left(\langle c,s\nu+\eta+\xi\rangle+d\right)= \\
&= \left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s)-\frac{d}{ds}\left(s\langle c,\nu\rangle+\langle c,\eta+\xi\rangle+d\right)= \\
&= \left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s)-\langle c,\nu\rangle.
\end{aligned}$$

Fixemos $\nu\in\mathbb{R}^m$, com $\nu\neq 0$, e $\eta\in\mathbb{R}^m$ quaisquer. Então, como f^{**} é estritamente convexa no infinito (porque $f\in\mathcal{G}$), temos que, para qualquer $s_0\in\mathcal{D}\left(f^{**}_{\nu,\xi+\eta}\right)=\mathcal{D}\left(\varphi^{**}_{\nu,\eta}\right)$ existe $s_1\in\mathcal{D}\left(f^{**}_{\nu,\xi+\eta}\right)=\mathcal{D}\left(\varphi^{**}_{\nu,\eta}\right)$, com $s_1>s_0$, tal que

$$\begin{aligned}
\left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s_1)>\left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s_0) &\Leftrightarrow \left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s_1)-\langle c,\nu\rangle>\left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s_0)-\langle c,\nu\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s_1)-\langle c,\nu\rangle>\left(f^{**}_{\nu,\eta+\xi}\right)'(s_0)-\langle c,\nu\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\varphi^{**}_{\nu,\eta}\right)'(s_1)>\left(\varphi^{**}_{\nu,\eta}\right)'(s_0)
\end{aligned}$$

o que mostra que $\left(\varphi^{**}\right)^{**}=\varphi^{**}$ é estritamente convexa no infinto.

Finalmente, pela proposição 2.19.8, temos que φ^{**} é semicontínua inferiormente.

Mostrámos então que φ^{**}, satisfaz as condições do lema 4.2.6, pelo que podemos afirmar que existem duas constantes positivas C e ρ tais que

$$\varphi^{**}(\eta)\geq C|\eta|,\ \text{ qualquer que seja o } \eta\in\mathbb{R}^m \text{ tal que } |\eta|\geq\rho. \tag{5.3}$$

Note-se que $(\xi,a)\in co\,epi\,f$ se e só se $(0,0)\in co\,epi\,\varphi$. Além disso,$(\xi,a)\in\partial(co\,epi\,f)$ se e só se $(0,0)\in\partial(co\,epi\,\varphi)$.

Assim, para mostrar o teorema basta provar que $(0,0)\in co\,epi\,\varphi$.

Seja$\left(\xi^k,a^k\right)$ uma qualquer sucessão com termos em $co\,epi\,\varphi$. Pelo teorema de Carathéodory (proposição 2.15.8), qualquer ponto do conjunto $co\,epi\,\varphi\subset\mathbb{R}^{m+1}$ é combinação convexa de, no máximo, $m+2$ pontos do conjunto $epi\,\varphi$, isto é:

$$co\,epi\,\varphi=\left\{\sum_{j=1}^{m+2}\lambda_j(\xi_j,a_j):\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_{m+2})\in E_{m+2},(\xi_j,a_j)\in epi\,\varphi,\forall j=1,...,m+2\right\} \tag{5.4}$$

onde E_{m+2} denota o simplexo

$$E_{m+2}\doteq\left\{\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_{m+2})\in\mathbb{R}^{m+2}:\sum_{j=1}^{m+2}\lambda_j=1,\lambda_j\geq 0,\forall j=1,...,m+2\right\}.$$

Então, para cada $k\in\mathbb{N}$, existem um sistema de escalares $\lambda^k=\left(\lambda^k_1,...,\lambda^k_{m+2}\right)\in E_{m+2}$, e pontos $\left(\xi^k_j,a^k_j\right)\in epi\,\varphi\doteq\{(\xi,a)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:a\geq\varphi(\xi)\}$, tais que

$$\left(\xi^k,a^k\right)=\sum_{j=1}^{m+2}\lambda^k_j\left(\xi^k_j,a^k_j\right)=\sum_{j=1}^{m+2}\left(\lambda^k_j\xi^k_j,\lambda^k_ja^k_j\right)=\left(\sum_{j=1}^{m+2}\lambda^k_j\xi^k_j,\sum_{j=1}^{m+2}\lambda^k_ja^k_j\right). \tag{5.5}$$

[1]Recorde-se para toda a função convexa $\psi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, a função $\psi_{\nu,\xi}$ é dada por $\psi_{\nu,\xi}(s)\doteq\psi(s\nu+\xi)$; $\mathcal{D}\left(\psi_{\nu,\xi}\right)$ denota o conjunto dos pontos de diferenciabilidade de $\psi_{\nu,\xi}$.

Por definição de $epi\,\varphi$, tem-se, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $j \in \{1, ..., m+2\}$,

$$a_j^k \geq \varphi\left(\xi_j^k\right)$$

e então

$$a^k = \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k a_j^k \geq \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k \varphi\left(\xi_j^k\right). \tag{5.6}$$

Ora, atendendo a (5.6) e a que $\varphi \geq \varphi^{**}$, podemos escrever

$$a^k \geq \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k \varphi^{**}\left(\xi_j^k\right).$$

Por outro lado, temos $\varphi^{**} \geq 0$, e $\lambda_j^k \geq 0$, $\forall j = 1, ..., m+2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pelo que

$$a^k \geq \lambda_j^k \varphi^{**}\left(\xi_j^k\right), \quad \forall j = 1, ..., m+2, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Seja $J \subset \{1, ..., m+2\}$ o conjunto

$$J \doteq \left\{j \in \{1, ..., m+2\} : \left(\left|\xi_j^k\right|\right)_k \text{ é ilimitada}\right\}$$

e seja

$$\overline{J} \doteq \{1, ..., m+2\} \setminus J.$$

Assim, para cada $j \in \overline{J}$, a sucessão de números reais $\left(\left|\xi_j^k\right|\right)_k$ é limitada, pelo que passando se necessário a subsucessões, podemos admitir que existem $\overline{\xi}_j$, $j \in \overline{J}$ e $\overline{\lambda} = \left(\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_{m+2}\right) \in E_{m+2}$ tais que, quando $k \to \infty$,

$$\left(\left|\xi_j^k\right|\right)_k \to \infty \quad \text{para } j \in J \tag{5.8}$$

$$\left(\xi_j^k\right)_k \to \overline{\xi_j} \quad \text{para } j \in \overline{J} \tag{5.9}$$

$$\left(\lambda^k\right)_k \to \overline{\lambda} \tag{5.10}$$

De facto, se $j \in J$ então $\left(\left|\xi_j^k\right|\right)_k$ é ilimitada. Como $\left|\xi_j^k\right| \geq 0, \forall j$, tem-se que a sucessão $\left(\left|\xi_j^k\right|\right)_k$ não é majorada. Isto significa que $+\infty$ é ponto de acumulação do conjunto dos seus termos e, portanto, um sublimite em $[-\infty, +\infty]$. Assim, temos (5.8).

Por outro lado, se $j \in \overline{J}$ então $\left(\left|\xi_j^k\right|\right)_k$ é limitada em $\mathbb{R}$. Consequentemente, é limitada em $\mathbb{R}^n$, a sucessão $\left(\xi_j^k\right)_k$. Podemos então afirmar que, para cada $j \in \overline{J}$, a sucessão $\left(\xi_j^k\right)_k$ possui uma subsucessão, também notada por $\left(\xi_j^k\right)_k$, convergente. Logo, para cada $j \in I$, existe $\overline{\xi}_j \in \mathbb{R}^n$ tal que $\left(\xi_j^k\right)_k \to \overline{\xi}_j$, pelo que vale (5.9).

Finalmente, como para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, ..., \lambda_{n+2}^k\right) \in E_{m+2}$, tem-se

$$\lambda_j^k \geq 0, \;\; \forall j = 1, ..., m+2 \;\; \text{e} \;\; \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k = 1, \;\; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então $0 \leq \lambda_j^k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j = 1, ..., m+2$. Isto significa que, para cada $j = 1, ..., m+2$, a sucessão $\left(\lambda_j^k\right)_k$ é limitada. Logo, existem $0 \leq \overline{\lambda}_j \leq 1$ e uma subsucessão de $\left(\lambda_j^k\right)_k$, ainda notada por $\left(\lambda_j^k\right)_k$, tais que, quando $k \to \infty$,

$$\left(\lambda_j^k\right)_k \to \overline{\lambda}_j, \;\; \forall j = 1, ..., m+2 \tag{5.11}$$

e portanto $\left(\lambda^k\right)_k = \left(\lambda_1^k, ..., \lambda_{m+2}^k\right) \to \left(\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_{m+2}\right) = \overline{\lambda}$, quando $k \to \infty$.

Resta provar que $\sum_{j=1}^{n+2} \overline{\lambda}_j = 1$.

Dado que, para cada $j \in J$, temos $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\xi_j^k\right| = \infty$, podemos afirmar que, para k suficientemente grande,

$$\left|\xi_j^k\right| > \rho, \;\; \forall j \in J$$

e então, por (5.3), temos

$$\varphi^{**}\left(\xi_j^k\right) \geq C\left|\xi_j^k\right|, \;\; \forall j \in J$$

onde C é uma constante positiva. Daqui resulta, por (5.7), que

$$a^k \geq \lambda_j^k \varphi^{**}\left(\xi_j^k\right) \geq C\lambda_j^k \left|\xi_j^k\right|, \ \ \forall j \in J.$$

Logo

$$0 \leq C\lambda_j^k \left|\xi_j^k\right| \leq a^k, \ \ \forall j \in J$$

donde, atendendo a que, por hipótese, $\lim_{k\to\infty} a^k = 0$, se conclui que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k \left|\xi_j^k\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\lambda_j^k \xi_j^k\right| = 0, \ \ \forall j \in J \tag{5.12}$$

o que implica que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k = 0, \ \ \forall j \in J,$$

uma vez que, para qualquer j em J, temos $\lim_{k\to\infty} \left|\xi_j^k\right| = \infty$.

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j\in\overline{J}} \lambda_j^k = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k - \sum_{j\in J} \lambda_j^k\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k - \sum_{j\in J}\left(\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k.$$

Mas como, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, $\sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k = 1$,resulta

$$\left(\sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k\right) = (1) \to 1 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Portanto, por (5.11),

$$\sum_{j\in\overline{J}} \overline{\lambda}_j = \sum_{j\in\overline{J}} \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j\in\overline{J}} \lambda_j^k = 1$$

e

$$\sum_{j=1}^{m+2} \overline{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{m+2} \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k\right) = \sum_{j\in\overline{J}} \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k\right) + \sum_{j\in J} \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k\right) = 1 + 0 = 1$$

o que mostra que, de facto,

$$\sum_{j=1}^{m+2} \overline{\lambda}_j = 1.$$

Note-se que (5.12) implica ainda que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\lambda_j^k \xi_j^k\right) = 0, \ \ \forall j \in J. \tag{5.13}$$

Por outro lado, por (5.9) e (5.10), resulta que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\xi_j^k \lambda_j^k\right) = \overline{\xi}_j \overline{\lambda}_j, \ \ \forall j \in \overline{J}. \tag{5.14}$$

Assim, por (5.5), (5.13) e (5.14), e recordando que, por hipótese, $\lim_{k\to\infty} \xi^k = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\overline{J}} \overline{\xi}_j \overline{\lambda}_j &= \sum_{j\in\overline{J}} \left(\lim_{k\to\infty} \xi_j^k \lambda_j^k\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j\in\overline{J}} \xi_j^k \lambda_j^k = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{m+2} \xi_j^k \lambda_j^k - \sum_{j\in J} \xi_j^k \lambda_j^k\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\xi^k - \sum_{j\in J} \xi_j^k \lambda_j^k\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, atendendo a (5.13),

$$\sum_{j\in j} \overline{\xi}_j \overline{\lambda}_j = \sum_{j\in j} \left(\lim_{k\to\infty} \xi_j^k \lambda_j^k\right) = 0 \tag{5.15}$$

Uma vez que $\varphi^{**} \geq 0$ e $\varphi^{**} \leq \varphi$, temos que $0 \leq \varphi^{**} \leq \varphi$, o que significa que φ é uma função não-negativa. Assim,

$$0 \leq \sum_{j\in\overline{J}} \overline{\lambda}_j \varphi\left(\overline{\xi}_j\right).$$

Por outro lado, φ é uma função semicontínua inferiormente, porque f é semicontínua inferiormente (por pertencer a $\mathcal{G}$) e r é contínua (por ser uma função linear definida em $\mathbb{R}^m$, um espaço de dimensão finita). Então, como $\overline{\xi}_j = \lim_{k\to\infty} \xi_j^k$ $\forall j \in \overline{J}$, $\overline{\lambda}_j \geq 0$ $\forall j \in \{1, ..., m+2\}$, $\overline{\lambda}_j = \lim_{k\to\infty} \lambda_j^k$ $\forall j \in \{1, ..., m+2\}$, $\sum_{j\in\overline{J}} \lambda_j^k \varphi\left(\xi_j^k\right) \leq \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k \varphi\left(\xi_j^k\right) \leq a^k$, e $\lim_{k\to\infty} a^k = 0$, temos

$$0 \leq \sum_{j\in\overline{J}} \overline{\lambda}_j \varphi\left(\overline{\xi}_j\right) = \sum_{j\in\overline{J}} \liminf_{k\to\infty} \lambda_j^k \varphi\left(\xi_j^k\right) \leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{j\in\overline{J}} \lambda_j^k \varphi\left(\xi_j^k\right) \leq \liminf_{k\to\infty} a^k = 0. \tag{5.16}$$

Note-se que se $\overline{\lambda}_j = 0$ para qualquer $j \in \overline{J}$, então teríamos

$$\sum_{j=1}^{m+2} \overline{\lambda}_j = \sum_{j\in\overline{J}} \overline{\lambda}_j + \sum_{j\in J} \overline{\lambda}_j = 0 + \sum_{j\in J} \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k\right) = 0 + 0 = 0$$

o que significa que, nesse caso, $\overline{\lambda}_j = 0$ para qualquer $j \in \{1, ..., m+2\}$ e então $\left(\lambda_j^k\right)_k \to 0$, $\forall j = 1, ..., m+2$, donde $\lambda_j^k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1, ..., m+2\}$, o que é absurdo porque $\sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j^k = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Concluimos então que existe pelo menos um índice $j \in \overline{J}$ tal que $\overline{\lambda}_j > 0$. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{\lambda}_j > 0$, $\forall j \in \overline{J}$ e então (5.16) implica que, para cada $j \in \overline{J}$, $\varphi\left(\overline{\xi}_j\right) = 0$, pelo que

$$\left(\overline{\xi}_j, 0\right) \in epi\, \varphi, \quad \forall j \in \overline{J}.$$

Por (5.4) qualquer ponto $(\xi, a) \in epi\, \varphi$ tem a forma

$$(\xi, a) = \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j \left(\xi_j, a_j\right)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+2}) \in E_{m+2}$ e $(\xi_j, a_j) \in epi\, \varphi$, $\forall j = 1, ..., m+2$.

Ora, $\overline{\lambda} = \left(\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_{m+2}\right) \in E_{m+2}$ e $\left(\overline{\xi}_j, 0\right) \in epi\, \varphi$, $\forall j \in \overline{J}$.

Além disso, por (5.15),

$$\sum_{j\in J} \overline{\lambda}_j \left(\overline{\xi}_j, 0\right) = \left(\sum_{j\in J} \overline{\xi}_j \overline{\lambda}_j, 0\right) = (0, 0)$$

pelo que podemos supor que $\left(\overline{\xi}_j, 0\right) \in epi\, \varphi$, $\forall j \in \{1, ..., m+2\}$ e afirmar que o ponto

$$\sum_{j=1}^{m+2} \overline{\lambda}_j \left(\overline{\xi}_j, 0\right) = \left(\sum_{j=1}^{m+2} \overline{\lambda}_j \overline{\xi}_j, 0\right) = \left(\sum_{j\in\overline{J}} \overline{\lambda}_j \overline{\xi}_j, 0\right) + \left(\sum_{j\in J} \overline{\lambda}_j \overline{\xi}_j, 0\right) = (0, 0)$$

pertence a $co\, epi\, \varphi$, o que prova que este conjunto é fechado. ■

Corolário 5.2.2 *Se $f \in \mathcal{G}$ então, qualquer que seja o $\xi \in \mathbb{R}^m$,*

$$f^{**}(\xi) = \min \left\{ \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j f\left(\xi_j\right) : \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j \xi_j = \xi, \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in E_{m+1} \right\}$$

onde

$$E_{m+1} \doteq \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j = 1, ..., m+1 \right\}.$$

Demonstração

Pelas proposições 2.18.7 e 2.19.9, tem-se

$$epi\, f^{**} = \overline{co}\, epi\, f$$

e, pelo teorema 5.2.1 o conjunto $co\, epi\, f$ é fechado. Então temos

$$epi\, f^{**} = \overline{co}\, epi\, f = \overline{co\, epi\, f} = co\, epi\, f.$$

Em particular, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$(\xi, f^{**}(\xi)) \in co\,epi\,f.$$

e

$$\forall \varepsilon > 0, \quad (\xi, f^{**}(\xi) - \varepsilon) \notin co\,epi\,f. \tag{5.17}$$

O valor $f^{**}(\xi)$ é o ínfimo dos valores μ tais que $(\xi, \mu) \in co\,epi\,f$. Ora, se $(\xi, \mu) \in co\,epi\,f$ então

$$(\xi, \mu) = \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j (\xi_j, a_j) = \left(\sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j \xi_j, \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j a_j \right)$$

com $(\xi_j, a_j) \in epi\,f \quad \forall j \in \{1, ..., m+2\}$, isto é, com $f(\xi_j) \leq a_j \quad \forall j \in \{1, ..., m+2\}$ e $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+2}) \in E_{m+2}$. Assim, podemos escrever

$$f^{**}(\xi) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j f(\xi_j) : x = \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j \xi_j, \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+2}) \in E_{m+2} \right\}. \tag{5.18}$$

Em particular, podemos encontrar $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_{m+2}) \in E_{m+2}$ e $\overline{\xi}_1, ..., \overline{\xi}_{m+2}$ tais que

$$f^{**}(\xi) = \sum_{j=1}^{m+2} \overline{\lambda}_j f(\overline{\xi}_j) \text{ com } \xi = \sum_{j=1}^{m+2} \overline{\lambda}_j \overline{\xi}_j. \tag{5.19}$$

Se na equação (5.19) todos os $\overline{\lambda}_j$ são não-nulos e o conjunto $\{(\overline{\xi}_j, f(\overline{\xi}_j)), j = 1, ..., m+2\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é independente, isto é se os $m+1$ vectores $(\overline{\xi}_1, f(\overline{\xi}_1)) - (\overline{\xi}_j, f(\overline{\xi}_j))$, $j = 2, ..., m+2$ são linearmente independentes, então $(\xi, f^{**}(\xi))$ é um ponto interior do simplexo de dimensão $m+2$ gerado pelos $(\overline{\xi}_j, f(\overline{\xi}_j))$, $1 \leq j \leq m+2$, o que contradiz (5.17).

Podemos assim concluir que $(\xi, f^{**}(\xi))$ é combinação convexa de, no máximo, $m+1$ pontos do conjunto $co\,epi\,f$ pelo que, tomando em (5.18), $\lambda \in E_{m+1}$, obtemos o pretendido:

$$f^{**}(\xi) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(\xi_j) : \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j = \xi, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1 \right\}. \blacksquare$$

Recordemos que uma função $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diz-se um **integrando normal** se, para quase todo $t \in I$, $f(t, \cdot)$ é semicontínua inferiormente, e existe uma função boreliana $\widetilde{f} : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}(t, \cdot) = f(t, \cdot)$, para quase todo $t \in I$.

Corolário 5.2.3 *Seja $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ um integrando normal. Suponhamos que $f(t, \cdot) \in \mathcal{G}$, qualquer que seja o t em I. Então, para qualquer função mensurável $p : I = [0, T] \to \mathbb{R}^m$, existem uma função mensurável $\lambda : [0, T] \to E_{m+1}$ e $m+1$ funções mensuráveis $q_j : [0, T] \to \mathbb{R}^m$, tais que*

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j(t) q_j(t) = p(t)$$

e

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j(t) f(t, q_j(t)) = f^{**}(t, p(t)),$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Demonstração

Seja $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ um integrando normal. Pela proposição 5.4.18, f^{**} é também um integrando normal. Assim, por definição de integrando normal, modificando estas funções num conjunto de medida nula $N \subset [0, T]$, podemos admitir que f e f^{**} são funções borelianas em $[0, T] \times \mathbb{R}^m$.

Seja $p : I = [0, T] \to \mathbb{R}^m$ uma função mensurável. Pela proposição 2.8.20 existe uma função boreliana $\widetilde{p} : I = [0, T] \to \mathbb{R}^m$ tal que $p = \widetilde{p}$ quase sempre em $[0, T]$. Assim, podemos também admitir que p é uma função boreliana em $[0, T]$.

Consideremos o conjunto

$$C \doteq \left\{ (t,\lambda,\xi) \in [0,T] \times E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1} : \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j = p(t)\,,\ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(t,\xi_j) = f^{**}(t,p(t)) \right\}.$$

Vamos mostrar que C é um subconjunto boreliano de $[0,T] \times E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1}$.

A aplicação

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j$$

é contínua por ser a composição das funções contínuas

$$(\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j$$

e

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto (\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1})\,.$$

Então, pela proposição 2.8.14, é uma função boreliana.

Por outro lado, também é boreliana a função

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto p(t)$$

por ser a composição das funções contínuas

$$t \mapsto p(t)$$

e

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto t.$$

Assim, pela proposição 2.8.6, o conjunto

$$A \doteq \left\{ (t,\lambda,\xi) : \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j = p(t) \right\}$$

é um boreliano.

Fixemos $j \in \{1,...,m+1\}$.

A função

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto f(t,\xi_j)$$

é uma função boreliana por ser a composição da função boreliana f e a função contínua

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto (t,\xi_j)\,.$$

Por outro lado, também é boreliana a função

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto \lambda_j$$

por ser uma função contínua.

Então, pela proposição 2.8.12, é boreliana a função

$$(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(t,\xi_j)\,.$$

Seja $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(t) = f^{**}(t,p(t))\,.$$

Pela proposição 5.4.16, h é mensurável. Assim, ela é, a menos de um conjunto de medida nula, uma função boreliana em $[0,T]$.

Seja $g : [0,T] \times E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1}) = t.$$

A função g é uma função boreliana, por ser contínua.

Assim, pela proposição 2.8.5, se U é um qualquer boreliano de $\mathbb{R}$, o conjunto $h^{-1}(U)$ é um boreliano e o mesmo acontece com o conjunto $g^{-1}\left(h^{-1}(U)\right) = (h \circ g)^{-1}(U)$. Daqui resulta, ainda pela proposição 2.8.5, que a função $h \circ g : E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1} \to \mathbb{R}$,

$$(t, \lambda_1, ..., \lambda_{m+1}, \xi_1, ..., \xi_{m+1}) \mapsto f^{**}(t, p(t))$$

é uma função boreliana.

Pela proposição 2.8.6 podemos então afirmar que o conjunto

$$B \doteq \left\{ (t, \lambda, \xi) : \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(t, \xi_j) = f^{**}(t, p(t)) \right\}$$

é um boreliano e consequentemente o conjunto

$$\begin{aligned} C &= \left\{ (t, \lambda, \xi) \in [0, T] \times E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1} : \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j = p(t), \ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(t, \xi_j) = f^{**}(t, p(t)) \right\} = \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

é um boreliano.

Mostremos agora que para quase todo $t \in [0, T]$, o conjunto

$$C_t \doteq \{(\lambda, \xi) : (t, \lambda, \xi) \in C\}$$

é um subconjunto fechado de $E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1}$ [2].

Fixemos $t \in [0, T]$ tal que a função $f(t, \cdot)$ é semicontínua inferiormente.

Para cada $j \in \{1, ..., m+1\}$, a função

$$E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1} \ni (\lambda, \xi) \mapsto f(t, \xi_j)$$

é semicontínua inferiormente, por ser a composição da função semicontínua inferiormente $f(t, \cdot)$ e a função contínua

$$(\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}, \xi_1, ..., \xi_{m+1}) \mapsto \xi_j.$$

Por outro lado, qualquer que seja o $j = 1, ..., m+1$, também é semicontínua inferiormente a função

$$(\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}, \xi_1, ..., \xi_{m+1}) \mapsto \lambda_j f(t, \xi_j)$$

por ser o produto de uma função contínua por uma função semicontínua inferiormente.

Daqui resulta que a função

$$(\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}, \xi_1, ..., \xi_{m+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(t, \xi_j)$$

é semicontínua inferiormente, por ser a soma de funções semicontínuas inferiormente.

Seja $(\lambda^k, \xi^k) \subset C_t$ tal que $(\lambda^k, \xi^k) \underset{k \to \infty}{\to} (\overline{\lambda}, \overline{\xi}) \in E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1}$. Então, por definição de C_t, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^k \xi_j^k = p(t) \tag{5.20}$$

e

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^k f\left(t, \xi_j^k\right) = f^{**}(t, p(t)). \tag{5.21}$$

Como a plicação

$$(\lambda, \xi) \mapsto \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \xi_j$$

[2] Note-se que, para cada $t \in [0, T]$ fixado, o corolário 5.2.2 garante que C_t é não-vazio.

é contínua, obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^k\xi_j^k=\sum_{j=1}^{m+1}\overline{\lambda}_j\overline{\xi}_j$$

e então, por (5.20), temos

$$\sum_{j=1}^{m+1}\overline{\lambda}_j\overline{\xi}_j=p(t). \tag{5.22}$$

Por outro lado, vimos que aplicação

$$(\lambda,\xi)\mapsto\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j f(t,\xi_j)$$

é semicontínua inferiormente. Logo

$$\liminf_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j^k f\left(t,\xi_j^k\right)\geq\sum_{j=1}^{m+1}\overline{\lambda}_j f\left(t,\overline{\xi}_j\right)$$

e portanto, por (5.21),

$$f^{**}(t,p(t))\geq\sum_{j=1}^{m+1}\overline{\lambda}_j f\left(t,\overline{\xi}_j\right). \tag{5.23}$$

Mas, pelo corolário 5.2.2, é

$$f^{**}(t,p(t))=\min\left\{\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j f(t,\xi_j):\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j\xi_j=p(t),\lambda\in E_{m+1}\right\}.$$

Então, por definição de mínimo e por (5.22), obtemos

$$f^{**}(t,p(t))\leq\sum_{j=1}^{m+1}\overline{\lambda}_j f\left(t,\overline{\xi}_j\right). \tag{5.24}$$

De (5.23) e (5.24) resulta então que

$$f^{**}(t,p(t))=\sum_{j=1}^{m+1}\overline{\lambda}_j f\left(t,\overline{\xi}_j\right). \tag{5.25}$$

Atendendo a (5.22) e (5.25) podemos concluir que $\left(\overline{\lambda},\overline{\xi}\right)\in C_t$, o que mostra que este conjunto é fechado.

Podemos admitir que C é um subconjunto boreliano de um conjunto compacto (dada a existência de um homeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ no interior da bola unitária de $\mathbb{R}^m$, $\overline{B}_1(0)=\{x\in\mathbb{R}^m:|x|\leq 1\}$: pensamos na imagem $\overline{C}$ de C por um homeomorfismo H de $[0,T]\times E_{m+1}\times(\mathbb{R}^m)^{m+1}$ em $[0,T]\times E_{m+1}\times B_1(0)^{m+1}\subset[0,T]\times E_{m+1}\times\overline{B}_1(0)^{m+1}$ [3]; este último conjunto é compacto, por ser o produto cartesiano dos conjuntos compactos $[0,T]$, E_{m+1} [4] e $\overline{B}_1(0)^{m+1}$).

Assim, pela proposição 5.4.19, existe uma aplicação mensurável $u:[0,T]\to E_{m+1}\times(\mathbb{R}^m)^{m+1}$ tal que $u(t)\in C_t$ para quase todo o $t\in[0,T]$ (a função u é obtida da seguinte forma: pensamos em $\overline{C}$ e obtemos uma função $\overline{u}:[0,T]\to E_{m+1}\times\overline{B}_1(0)^{m+1}$ tal que $\overline{u}(t)\in\overline{C}_t$ quase sempre; depois pensamos num homeomorfismo G de, por exemplo, $E_{m+1}\times B_2(0)^{m+1}$ em $E_{m+1}\times(\mathbb{R}^m)^{m+1}$ [5]; obtemos u pondo $u(t)=G(\overline{u}(t))$).

Isto significa que, para quase todo $t\in[0,T]$, existem $\lambda=\lambda(t)\in E_{m+1}$ e $q=q(t)\in(\mathbb{R}^m)^{m+1}$ tais que

$$(t,u(t))=(t,\lambda(t),q(t))=(t,\lambda_1(t),...,\lambda_{m+1}(t),q_1(t),...,q_{m+1}(t))\in C,$$

[3] Por exemplo, $H(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\xi_1,...,\xi_{m+1})=\left(t,\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\frac{\xi_1}{1+|\xi_1|},...,\frac{\xi_{m+1}}{1+|\xi_{m+1}|}\right)$.

[4] O simplexo E_{m+1} é compacto, por ser fechado (proposição 2.15.12) e limitado (por se ter, para todo $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_{m+1})\in E_{m+1}$, $0\leq\lambda_j\leq 1$, $\forall j=1,...,m+1$).

[5] Por exemplo, $G(\lambda_1,...,\lambda_{m+1},x_1,...,x_{m+1})=G\left(\lambda_1,...,\lambda_{m+1},\frac{x_1}{2-|x_1|},...,\frac{x_{m+1}}{2-|x_{m+1}|}\right)$

isto é, tais que

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j(t)\, q_j(t) = p(t) \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j(t)\, f(t, q_j(t)) = f^{**}(t, p(t))$$

pelo que o corolário está provado. ■

5.2.2 Lipschitz-continuidade, com respeito a t, da bipolar de uma função $f \in \mathcal{E}$

Vamos mostrar que se $f \in \mathcal{E}$ e, para cada $R > 0$ existe uma constante L tal que

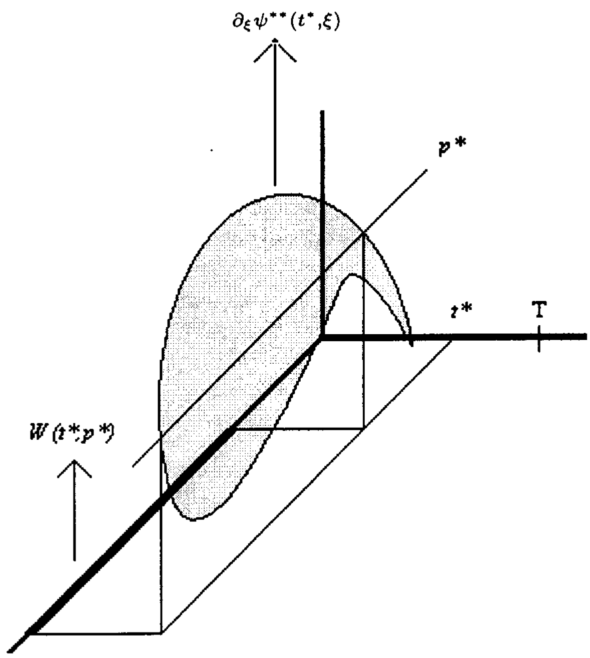
$$|f(t,\xi) - f(s,\xi)| \le L\,|t-s|\,, \quad \forall t,s \in I, \quad \forall \xi \in \overline{B}_R(0)$$

então a função f^{**} é lipschitziana com respeito a t.

Lema 5.2.4 *Seja $\psi \in \mathcal{E}$ e seja, para cada $(t,p) \in I \times \mathbb{R}^m$, $W(t,p)$ o conjunto definido por*

$$W(t,p) \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^m : p \in \partial_\xi \psi^{**}(t^*, \xi)\}\,.$$

Então, para cada $r > 0$ existe $R > 0$ tal que, qualquer que seja o $(t,p) \in I \times \mathbb{R}^m$, a condição $W(t,p) \cap \overline{B}_r(0) \neq \emptyset$ implica $W(t,p) \subset \overline{B}_R(0)$.



Demonstração

Suponhamos, com vista a uma contradição, que existem sucessões

$$(t_k, p_k) \subset I \times R^m, \quad (\eta_k) \subset \overline{B}_r(0)$$

e

$$(\xi_k) \subset \mathbb{R}^m, \quad \text{com } (|\xi_k|) \to \infty$$

tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k \in \partial_\xi \psi^{**}(t_k, \eta_k) \;\; \text{e} \;\; p_k \in \partial_\xi \psi^{**}(t_k, \xi_k)\,. \tag{5.26}$$

De (5.26) resulta que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi^{**}(t_k, \eta_k) - \langle p_k, \eta_k \rangle = \psi^{**}(t_k, \xi_k) - \langle p_k, \xi_k \rangle\,. \tag{5.27}$$

De facto, pela proposição 2.20.6, temos

$$\begin{aligned} p_k &\in \partial_\xi \psi^{**}(t_k, \eta_k) \Leftrightarrow \psi^{**}(t_k, \eta_k) + (\psi^{**})^*(p_k) = \langle p_k, \eta_k \rangle \\ p_k &\in \partial_\xi \psi^{**}(t_k, \xi_k) \Leftrightarrow \psi^{**}(t_k, \xi_k) + (\psi^{**})^*(p_k) = \langle p_k, \xi_k \rangle \end{aligned}$$

donde $\psi^{**}(t_k,\eta_k)-\psi^{**}(t_k,\xi_k)=\langle p_k,\eta_k\rangle-\langle p_k,\xi_k\rangle$ e portanto temos (5.27).

Suponhamos que existe uma subsucessão de $(\psi^{**}(t_k,\eta_k)-\langle p_k,\eta_k\rangle)$, ainda notada por $(\psi^{**}(t_k,\eta_k)-\langle p_k,\eta_k\rangle)$, tal que

$$\lim_{k\to\infty}(\psi^{**}(t_k,\eta_k)-\langle p_k,\eta_k\rangle)=-\infty.$$

Então, uma vez que $\psi\in\mathcal{E}$, isto implicaria que $\lim_{k\to\infty}|\eta_k|=\infty$. Portanto, como (η_k) é limitada (porque $(\eta_k)\subset\overline{B}_r(0)$), concluimos que existe uma constante C tal que

$$\psi^{**}(t_k,\eta_k)-\langle p_k,\eta_k\rangle\geq C,\ \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Daqui resulta que

$$C\leq\psi^{**}(t_k,\xi_k)-\langle p_k,\xi_k\rangle,\ \ \forall k\in\mathbb{N}. \tag{5.28}$$

Por outro lado, temos

$$\psi^{**}(t_k,\xi_k)-\langle p_k,\xi_k\rangle\leq\sup_{t\in I}\{\psi^{**}(t,\xi_k)-\langle q_k,\xi_k\rangle:q_k\in\partial_\xi\psi^{**}(t,\xi_k)\}$$

então, como $(|\xi_k|)\to\infty$,

$$\lim_{k\to\infty}[\psi^{**}(t_k,\xi_k)-\langle p_k,\xi_k\rangle]\leq\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in I}\{\psi^{**}(t,\xi_k)-\langle q_k,\xi_k\rangle:q_k\in\partial_\xi\psi^{**}(t,\xi_k)\}=-\infty$$

o que está em contradição com (5.28). ■

Observação 5.2.5

Fixemos $\xi\in\mathbb{R}^m$.

Sejam $t\in I$, $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_{m+1})\in E_{m+1}$ e $\xi_j\in\mathbb{R}^m$, $j=1,...,m+1$, satisfazendo

$$f^{**}(t,\xi)=\sum_{j=i}^{m+1}\lambda_j f(t,\xi_j),\ \ \sum_{j=i}^{m+1}\lambda_j\xi_j=\xi.$$

Fixemos $j\in\{1,...m+1\}$.

Pela proposição 2.20.10, existe $p_j\in\partial_\xi f^{**}(t,\xi_j)$ pelo que

$$\xi_j\in W(t,p_j).$$

Daqui resulta que $W(t,p_j)\cap\overline{B}_{|\xi_j|}\neq\emptyset$ e então, pelo lema 5.2.4, existe R_j tal que $W(t,p_j)\subset\overline{B}_{R_j}$.

Seja

$$R\doteq\max\{R_j:j\in\{1,...m+1\}\}.$$

Então temos

$$W(t,p_j)\subset\overline{B}_R,\ \ \forall j\in\{1,...m+1\}$$

pelo que

$$\xi_j\in\overline{B}_R,\ \ \forall j\in\{1,...m+1\}.$$

Lema 5.2.6 *Seja $f:I\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ um elemento da família $\mathcal{E}$. Suponhamos que, para cada $R>0$ existe uma constante $L>0$ tal que se*

$$|f(t,\xi)-f(s,\xi)|\leq L|t-s|,\ \ \forall t,s\in I,\ \ \forall\xi\in\overline{B}_R(0)$$

então a função $f^{**}(\cdot,\xi)$ é lipschitziana, qualquer que seja $\xi\in\mathbb{R}^m$.

Demonstração

Se $f\in\mathcal{E}$ então, pelo lema 4.2.9, para cada $t\in I$, $f(t,\cdot)\in\mathcal{G}$ e então, pelo corolário 5.2.2, para cada $t\in I$, temos

$$f^{**}(t,\xi)=\min\left\{\sum_{j=i}^{m+1}\lambda_j f(t,\xi_j):\sum_{j=i}^{m+1}\lambda_j\xi_j=\xi,\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_{m+1})\in E_{m+1}\right\},\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}^m \tag{5.29}$$

onde E_{m+1} denota o simplexo

$$E_{m+1} \doteq \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j = 1, ..., m+1 \right\}.$$

Fixemos $\xi \in \mathbb{R}^m$.

Sejam t e s pontos quaisquer de I. Então, por (5.29), existem sistemas de escalares $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{m+1})$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_{m+1}) \in E_{m+1}$, e pontos $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, ..., m+1$, tais que

$$f^{**}(t,\xi) = \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j f(t,\xi_j), \quad f^{**}(s,\xi) = \sum_{j=i}^{m+1} \mu_j f(s,\eta_j) \tag{5.30}$$

e

$$\xi = \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j \xi_j = \sum_{j=i}^{m+1} \mu_j \eta_j.$$

Além disso, ainda por (5.29), temos

$$f^{**}(t,\xi) \leq \sum_{j=i}^{m+1} \mu_j f(t,\eta_j) \ \text{ e } \ f^{**}(s,\xi) \leq \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j f(s,\xi_j). \tag{5.31}$$

De (5.30) e (5.31) resulta que

$$f^{**}(s,\xi) - f^{**}(t,\xi) \leq \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j f(s,\xi_j) - \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j f(t,\xi_j) = \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j \left[f(s,\xi_j) - f(t,\xi_j) \right]. \tag{5.32}$$

Pela observação 5.2.5, podemos concluir que existe $R > 0$ tal que $\xi_j \in \overline{B}_R$, qualquer que seja $j \in \{1, ..., m+1\}$, então, por hipótese, existe uma constante $L > 0$, tal que

$$|f(t,\xi_j) - f(s,\xi_j)| \leq L|t-s|, \quad \forall j \in \{1, ..., m+1\}.$$

Assim, atendendo a (5.32) e a que $\sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j = 1$, podemos escrever

$$f^{**}(s,\xi) - f^{**}(t,\xi) \leq \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j (L|t-s|) = L|t-s|. \tag{5.33}$$

Da mesma forma obtemos

$$\begin{aligned} f^{**}(t,\xi) - f^{**}(s,\xi) &\leq \sum_{j=i}^{m+1} \mu_j f(t,\eta_j) - \sum_{j=i}^{m+1} \mu_j f(s,\eta_j) = \sum_{j=i}^{m+1} \mu_j \left[f(t,\eta_j) - f(s,\eta_j) \right] \leq \\ &\leq \sum_{j=i}^{m+1} \lambda_j (L|t-s|) = L|t-s|. \end{aligned} \tag{5.34}$$

De (5.33) e (5.34) concluimos então que, qualquer que seja o $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, temos

$$|f^{**}(t,\xi) - f^{**}(s,\xi)| \leq L|t-s|, \quad \forall t, s \in I,$$

pelo que o lema está provado. ■

5.2.3 Semicontinuidade inferior

Teorema 5.2.7 *Seja $h : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana com respeito à primeira variável e semicontínua inferiormente em relação à segunda. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^m$ qualquer. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow h(t,x) > h(t,x_0) - \varepsilon,$$

qualquer que seja o t em $[0,T]$.

Demonstração
Suponhamos, com vista a um absurdo, que existiam $\varepsilon > 0$ e sucessões $(x_k) \subset \mathbb{R}^m$ e $(t_k) \subset I$ tais que
$$|x_k - x_0| < \frac{1}{k} \text{ e } h(t_k, x_0) - h(t_k, x_k) \geq \varepsilon.$$

Sendo $[0, T]$ um conjunto compacto, qualquer sucessão de pontos de pontos em I contém uma subsucessão convergente para um elemento de $[0, T]$. Assim, passando se necessário a uma subsucessão, podemos afirmar que existe $t \in [0, T]$ tal que
$$\lim_{k \to \infty} t_k = t. \tag{5.35}$$

Além disso, dado que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$, temos, evidentemente,
$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0. \tag{5.36}$$

Uma vez que h é lipschitziana em relação à primeira variável, existe $M \geq 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$
$$|h(t_k, x_k) - h(t, x_k)| \leq M |t_k - t| \text{ e } |h(t_k, x_0) - h(t, x_0)| \leq M |t_k - t|.$$

Assim, podemos escrever
$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq h(t_k, x_0) - h(t_k, x_k) = \\
&= (h(t_k, x_0) - h(t, x_0)) + h(t, x_0) - h(t, x_k) + (h(t, x_k) - h(t_k, x_k)) \leq \\
&\leq |h(t_k, x_0) - h(t, x_0)| + h(t, x_0) - h(t, x_K) + |h(t, x_k) - h(t_k, x_k)| \leq \\
&\leq 2M |t_k - t| + h(t, x_0) - h(t, x_k)
\end{aligned}$$

donde se conclui que
$$h(t, x_k) - h(t, x_0) - 2M |t_k - t| \leq -\varepsilon. \tag{5.37}$$

Por outro lado, h é semicontínua inferiormente em relação à segunda variável. Então, como $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$, temos
$$h(t, x) \leq \liminf_{k \to \infty} h(t, x_k).$$

Daqui resulta, atendendo a (5.35) e a (5.37), que
$$0 = h(t, x_0) - h(t, x_0) - 2M |t - t| \leq \liminf_{k \to \infty} [h(t, x_k) - h(t, x_0) - 2M |t_k - t|] \leq -\varepsilon$$

o que contradiz a hipótese de se ter $\varepsilon > 0$. ■

Corolário 5.2.8 *Seja $h : [0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana com respeito à primeira variável e semicontínua inferiormente em relação à segunda variável. Então h é semicontínua inferiormente em $[0, T] \times \mathbb{R}^m$.*

Demonstração
Fixemos $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$ qualquer. Vamos mostrar que h é semicontínua inferiormente em (t_0, x_0).

Pela proposição 2.17.4, basta mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ tal que
$$|t - t_0| + |x - x_0| < \delta \Rightarrow h(t, x) > h(t_0, x_0) - \varepsilon.$$

Fixemos então $\varepsilon > 0$ qualquer.
Pelo teorema 5.2.7 existe $\delta_0 > 0$ tal que
$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow h(t, x) > h(t, x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $t \in [0, T]$. Em particular, temos
$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow h(t_0, x) > h(t_0, x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

isto é
$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow h(t_0, x_0) - h(t_0, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, uma vez que h é lipschitziana em relação à primeira variável, existe $M \geq 0$ tal que

$$|h(t,x) - h(t_0,x)| \leq M|t - t_0|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Então, se $|t - t_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ e $|x - x_0| < \delta_0$, temos

$$\begin{aligned} h(t_0,x_0) - h(t,x) &= h(t_0,x_0) - h(t_0,x) + h(t_0,x) - h(t,x) \leq \\ &\leq h(t_0,x_0) - h(t,x) + |h(t_0,x) - h(t_0,x_0)| \leq \\ &\leq h(t_0,x_0) - h(t,x) + M|t - t_0| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donde

$$h(t,x) > h(t_0,x_0) - \varepsilon$$

o que mostra o pretendido. ■

5.2.4 Existência de uma selecção integrável do subdiferencial de uma função convexa

Lema 5.2.9 *Seja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

(a) $f(t,x) \leq k|x|^p + b(t) \quad (k > 0, b(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}))$;

(b) $t \mapsto f(t,x)$ *é mensurável para cada* x;

(c) $x \mapsto f(t,x)$ *é convexa para quase todo* t.
Suponhamos ainda que

(d) *existe uma função* $v \in L^p([0,T],\mathbb{R}^m)$ *tal que* $\int_0^T f(t,v(t)) > -\infty$.

Então, para qualquer função contínua $x : [0,T] \to \mathbb{R}^m$*, a multifunção*

$$t \mapsto \partial_x f(t,x(t))$$

admite uma selecção $\delta(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Demonstração
Comecemos por mostrar que a multifunção $t \mapsto \partial_x f(t,x(t))$ é mensurável.
Fixemos $t \in [0,T]$ tal que a função $x \mapsto f(t,x)$ é convexa.
Fixemos $\Delta > 0$. Então, por (a),

$$f(t,x) \leq k\Delta^p + b(t), \quad \forall x \in \Delta B \tag{5.38}$$

onde $B = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$.
Seja $x \in \mathbb{R}^m$ qualquer e seja $\rho > 1$. Então $y \doteq \rho x \in \mathbb{R}^m$ e, se $\lambda \doteq \frac{1}{\rho} < 1$, o conjunto

$$V \doteq \{v \in \mathbb{R}^m : v = (1-\lambda)x' + \lambda y, \ x' \in \Delta B\} = x + (1-\lambda)\Delta B$$

é uma vizinhança de $x = \lambda y$ de raio $(1-\lambda)\Delta$.
Qualquer que seja o $v \in V$ temos, pela convexidade da função $f(t,\cdot)$ e por (5.38),

$$f(t,v) = f(t,(1-\lambda)x' + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(t,x') + \lambda f(t,y) \leq (1-\lambda)(k\Delta^p + b(t)) + \lambda f(t,y) \tag{5.39}$$

pelo que $f(t,\cdot)$ é limitada superiormente em $x + (1-\lambda)\Delta B$.
Se z é um qualquer ponto de V, então existe um outro ponto $z' \in V$ tal que

$$x = \frac{1}{2}(z + z') \tag{5.40}$$

e portanto

$$f(t,x) = f\left(t, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z'\right) \leq \frac{1}{2}f(t,z) + \frac{1}{2}f(t,z')$$

donde

$$2f(t,x) \leq f(t,z) + f(t,z') \tag{5.41}$$

e

$$f(t,z) \geq 2f(t,x) - f(t,z') \geq 2f(t,x) - (1-\lambda)(k\Delta^p + b(t)) - \lambda f(t,y) \tag{5.42}$$

o que mostra que $f(t,\cdot)$ é limitada inferiormente em $x + (1-\lambda)\Delta B$.

Se $x = 0$ temos, por (5.39), (5.42) e dado que $f(t,0) \leq b(t)$,

$$f(t,v) \leq (1-\lambda)(k\Delta^p + b(t)) + \lambda f(t,0) \leq (1-\lambda)(k\Delta^p + b(t)) + \lambda b(t) = (1-\lambda)k\Delta^p + b(t)$$

e

$$\begin{aligned} f(t,v) &\geq 2f(t,0) - (1-\lambda)(k\Delta^p + b(t)) - \lambda f(t,0) \geq 2f(t,0) - (1-\lambda)k\Delta^p - (1-\lambda)b(t) - \lambda b(t) = \\ &= 2f(t,0) - (1-\lambda)k\Delta^p - b(t) \end{aligned}$$

para qualquer $v \in (1-\lambda)\Delta B$.

Fazendo $\lambda \to 0$ obtemos

$$f(t,x) \leq k\Delta^p + b(t) \tag{5.43}$$

e

$$f(t,x) \geq 2f(t,0) - k\Delta^p - b(t) \tag{5.44}$$

para cada $x \in \Delta B$.

Seja $v : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ um elemento de $L^p([0,T],\mathbb{R}^m)$ tal que $\int_0^T f(t,v(t))\,dt > -\infty$ (o qual existe por hipótese).

Por (5.41) e por (a) temos

$$2f(t,v(t)) \leq f(t,0) + f(t,2v(t)) \leq f(t,0) + k2^p|v(t)|^p + b(t)$$

pelo que

$$f(t,0) \geq 2f(t,v(t)) - k2^p|v(t)|^p - b(t)$$

e, uma vez que $f(t,0) \leq b(t)$, resulta que

$$2f(t,v(t)) - k2^p|v(t)|^p - b(t) \leq f(t,0) \leq b(t)$$

donde podemos afirmar que a função $t \mapsto f(t,0)$ é integrável.

Seja $M : [0,T] \to \mathbb{R}$ a função integrável definida por

$$M(t) = \max\{|k(2\Delta)^p + b(t)|, |2f(t,0) - k(2\Delta)^p - b(t)|\}.$$

Então, por (5.43) e (5.44), temos

$$|f(t,x)| \leq M(t) \text{ em } 2\Delta B.$$

Pela proposição 2.16.25 resulta então que a função $x \mapsto f(t,x)$ é lipschitziana em $\Delta\overline{B}$, onde $\overline{B}$ denota a bola unitária fechada de $\mathbb{R}^m$, com constante de Lipschitz $\frac{2}{\Delta}M(t)$ e, pela proposição 2.21.3, o conjunto $\partial_x f(t,x)$ é não-vazio; além disso, para cada $q \in \partial_x f(t,x)$, tem-se

$$|q| \leq \frac{2}{\Delta}M(t).$$

Agora, como

$$|\partial_x f(t,x)| = \sup\{|q| : q \in \partial_x f(t,x)\}$$

podemos afirmar que

$$|\partial_x f(t,x)| \leq \frac{2}{\Delta}M(t)$$

para quase todo $t \in [0,T]$ e para qualquer $x \in \Delta\overline{B}$.

Pelo teorema de Scorza-Dragoni (proposição 2.8.22), para cada $\delta > 0$ existe um conjunto fechado $E_\delta \subset [0,T]$ tal que $m([0,T]\backslash E_\delta) \leq \delta$ e a restrição de f a $E_\delta \times \Delta\overline{B}$ é contínua. Sendo $E_\delta \subset [0,T]$ fechado, é compacto. Então, pelo teorema de Lusin (proposição 2.8.21), para cada $\eta > 0$ existe um conjunto compacto $E_\eta \subset E_\delta$ tal que $m(E_\delta \backslash E_\eta) \leq \eta$ e a restrição de b a E_η é contínua. Portanto, fixado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um conjunto fechado $E_\varepsilon \subset [0,T]$ tal que $m([0,T]\backslash E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e a restrição de f a $E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$ é contínua, assim como a restrição de b a E_ε.

Vamos provar que a multifunção

$$(t,x) \mapsto \partial_x f(t,x)$$

é semicontínua superiormente em $E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$.

Sabemos que as funções

$$t \mapsto |k(2\Delta)^p + b(t)| \quad \text{e} \quad t \mapsto |2f(t,0) - k(2\Delta)^p - b(t)|$$

atingem o seu máximo em E_ε e, portanto, existe $C > 0$ tal que

$$|\partial_x f(t,x)| \leq C$$

para qualquer $t \in E_\varepsilon$ e para qualquer $x \in \Delta\overline{B}$; isto significa que a multifunção

$$(t,x) \mapsto \partial_x f(t,x)$$

com domínio fechado $E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$ toma valores num subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$.

Por outro lado, pela proposição 2.21.3, para cada $(t,x) \in E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$, o conjunto $\partial_x f(t,x)$ é não-vazio, convexo e compacto; em particular, é fechado. Então, pela proposição 2.22.9, basta mostrar que o seu gráfico é fechado.

Seja (t_n, x_n) uma sucessão em $E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$ com $(t_n, x_n) \to (t,x)$ (note-se que $(t,x) \in E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$, dado que este conjunto é fechado) e seja (v_n) uma sucessão convergente para $v \in \mathbb{R}^m$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \partial_x f(t_n, x_n)$. Queremos mostrar que $v \in \partial_x f(t,x)$.

Dado que

$$\partial_x f(t_n, x_n) = \{q \in \mathbb{R}^m : f(t_n, y) \geq f(t_n, x_n) + \langle q, y - x_n\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^m\}$$

temos, em particular,

$$f(t_n, y) \geq f(t_n, x_n) + \langle v_n, y - x_n\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

e, pela continuidade de f em $E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n, y) \geq \lim_{n\to\infty} \left(f(t_n, x_n) + \langle v_n, y - x_n\rangle\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

$$f\left(\lim_{n\to\infty} t_n, y\right) \geq f\left(\lim_{n\to\infty} t_n, \lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left\langle \lim_{n\to\infty} v_n, \lim_{n\to\infty} (y - x_n)\right\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

$$f(t,y) \geq f(t,x) + \langle v, y - x\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

o que mostra que $v \in \partial_x f(t,x)$.

Seja agora $x(\cdot)$ uma função contínua definida em $[0,T]$ com valores em $\mathbb{R}^m$ e seja Δ tal que $|x(t)| \leq \Delta$, $\forall t \in I$. Então, a multifunção $t \mapsto \partial_x f(t, x(t))$ é semicontínua superiormente em E_ε.

De facto, fixemos $t \in E_\varepsilon$ qualquer e $\mu > 0$. Se Δ é tal que $|x(t)| \leq \Delta$, $\forall t \in I$ então $(t, x(t)) \in E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$ e portanto, dado que a multifunção $(t,x) \mapsto \partial_x f(t,x)$ é semicontínua superiormente em $E_\varepsilon \times \Delta\overline{B}$, $\exists \delta = \delta((t, x(t)), \mu) = \delta(t, \mu)$ tal que

$$d((t, x(t)), (t_0, x(t_0))) < \delta \Rightarrow \partial_x f(t_0, x(t_0)) \subset B(\partial_x f(t, x(t)), \mu).$$

Se a aplicação $t \mapsto x(t)$ é contínua, também é contínua a aplicação $t \mapsto (t, x(t))$ e assim, para este δ, podemos encontrar $\eta = \eta(t, \delta) = \eta(t, \mu)$ tal que

$$d(t, t_0) < \eta \Rightarrow d((t, x(t)), (t_0, x(t_0))) < \delta$$

o que prova o pretendido.

Pelo teorema de Lusin para multifunções (proposição 2.22.19) podemos finalmente afirmar, como pretendiamos, que a multifunção $t \mapsto \partial_x f(t, x(t))$ é mensurável em $[0,T]$.

Pelo teorema de Kuratowski-Ryll Nardeski (proposição 2.22.18), existe então uma selecção mensurável $\delta(t)$ da multifunção $\partial_x f(t, x(t))$. Assim, temos

$$|\delta(t)| \leq \sup\{|q| : q \in \partial_x f(t, x(t))\} = |\partial_x f(t, x(t))| \leq \frac{2}{\Delta} M(t)$$

e, uma vez que a função $t \mapsto M(t)$ é integrável, $\delta(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^m)$. ∎

5.3 Existência de solução

5.3.1 Hipóteses básicas

A existência de solução para o problema variacional não-convexo e não-coercivo

$$\min\left\{\Lambda(u) : u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m), u(0) = a, u(T) = b\right\} \tag{M}$$

onde

$$\Lambda(u) \doteq \int_0^T [f(t,u'(t)) + g(t,u(t))]\,dt$$

será estabelecida, considerando as seguintes hipóteses básicas nas funções

$$f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ e } g : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

onde $I \doteq [0,T]$:

(H*0) $f \in \mathcal{E}$ [6].

(H1) Existem duas constantes A e B, com $B > 0$, tais que

$$f(t,\xi) \geq -A + B|\xi|, \quad \forall (t,\xi) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

(H*2) A função g é lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua com respeito à segunda; além disso, existem duas constantes α, β, com $0 < \beta < \frac{B}{T}$, tais que

$$g(t,x) \geq -\alpha - \beta|x|, \quad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^m.$$

(H*3) Existem três constantes C_i, $i = 0,1,2$, com $C_0 \geq 0$, tais que a condição (4.11) é verificada com

$$\varphi(t,x,\xi) \doteq g(t,x) + f^{**}(t,\xi).$$

(H4) Para cada $R > 0$ existe uma constante L tal que

$$|f(t,\xi) - f(s,\xi)| \leq L|t-s|, \quad \forall t,s \in I, \quad \forall \xi \in \overline{B}_R(0).$$

Note-se que a hipótese (H*0) implica que a função f é lipschitziana com respeito à primeira variável e semicontínua inferiormente com respeito à segunda. Então, pelo corolário 5.2.8, $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente.

Por outro lado, a hipótese (H*2) implica que a função g é lipschitziana com respeito à primeira variável e contínua com respeito à segunda. Então, pelo corolário 4.2.11, a função $g : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é contínua, em particular, é semicontínua inferiormente.

Daqui concluimos que a função $h : I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$h(t,x,\xi) = f(t,\xi) + g(t,x)$$

é semicontínua inferiormente, donde, pela proposição 5.4.17, é um integrando normal.

Logo, pela proposição 5.4.16, qualquer que seja $u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$, a função

$$[0,T] \ni t \mapsto f(t,u'(t)) + g(t,u(t))$$

é mensurável, pelo que o funcional $\Lambda(\cdot)$ está bem definido.

[6] Isto é, f é limitada inferiormente, $f(\cdot,\xi)$ é uma função lipschitziana para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, $f(t,\cdot)$ é uma função semicontínua inferiormente para cada $t \in I$ fixado, e

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in I \\ |\xi|>R}} \sup\left\{f^{**}(t,\xi) - \langle p,\xi\rangle : p \in \partial_\xi f^{**}(t,\xi)\right\} = -\infty.$$

5.3.2 Existência de um arco admissível $\overline{u} \in W^{1,\infty}(I, \mathbb{R}^m)$ tal que $\Lambda(\overline{u}) \in \mathbb{R}$

Proposição 5.3.1 *Suponhamos que as funções f e g satisfazem as hipóteses (H*0), (H1) e (H*2). Então a função lipschitziana $\overline{u} : I \to \mathbb{R}^m$ definida por*

$$\overline{u}(t) = a + t\frac{b-a}{T}$$

é admissível para o problema M e, além disso, $\Lambda(\overline{u})$ é finito.

Demonstração
Evidentemente, a função $\overline{u}$ satisfaz as condições de fronteira $\overline{u}(0) = a$, $\overline{u}(T) = b$.
Vejamos que $\Lambda(\overline{u}) \in \mathbb{R}$.
Por (H1) e (H*2), existem constantes A, B, α, β tais que, qualquer que seja o $t \in I$,

$$\begin{aligned} f(t, \overline{u}'(t)) + g(t, \overline{u}(t)) &\geq -A + B|\overline{u}'(t)| - \alpha - \beta|\overline{u}(t)| = -A + B\left|\frac{b-a}{T}\right| - \alpha - \beta\left|a + t\frac{b-a}{T}\right| \geq \\ &\geq -A + B\frac{|b-a|}{T} - \alpha - \beta\left(|a| + \frac{|b-a|}{T}T\right) = \\ &= -A + B\frac{|b-a|}{T} - \alpha - \beta(|a| + |b-a|). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} F(\overline{u}) &= \int_0^T [f(t, \overline{u}'(t)) + g(t, \overline{u}(t))]\,dt \geq \int_0^T \left[-A + B\frac{|b-a|}{T} - \alpha - \beta(|a| + |b-a|)\right] dt = \\ &= (-A - \alpha - \beta|a|)T + (B - T\beta)|b-a|. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Por outro lado, uma vez que por (H*0), $f \in \mathcal{E}$, temos que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, a função $t \mapsto f(t, \xi)$ é lipschitziana. Em particular é contínua.
Daqui resulta que o conjunto $f\left(I, \frac{b-a}{T}\right) \subset \mathbb{R}$ é compacto, e portanto existe uma constante $M_1 > 0$ tal que

$$\left|f\left(t, \frac{b-a}{T}\right)\right| \leq M_1, \quad \forall t \in I.$$

Dado que g é contínua, também é contínua a função

$$t \mapsto g\left(t, a + t\frac{b-a}{T}\right) = g(h(t)),$$

onde $h(t) \doteq \left(t, a + t\frac{b-a}{T}\right)$, por ser a composta de duas aplicações contínuas. Então o conjunto $g\left(I, a + I\frac{b-a}{T}\right)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, e portanto, existe uma constante $M_2 > 0$ tal que

$$\left|g\left(t, a + t\frac{b-a}{T}\right)\right| \leq M_2, \quad \forall t \in I.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Lambda(\overline{u}) &= \int_0^T [f(t, \overline{u}'(t)) + g(t, \overline{u}(t))]\,dt \leq \int_0^T |f(t, \overline{u}'(t)) + g(t, \overline{u}(t))|\,dt \leq \\ &\leq \int_0^T |f(t, \overline{u}'(t))| + |g(t, \overline{u}(t))|\,dt = \int_0^T \left|f\left(t, \frac{b-a}{T}\right)\right| + \left|g\left(t, a + t\frac{b-a}{T}\right)\right| dt \leq \\ &\leq T(M_1 + M_2). \end{aligned} \tag{5.46}$$

De (5.45) e (5.46) resulta então

$$(-A - \alpha - \beta|a|)T + (B - T\beta)|b-a| \leq \Lambda(\overline{u}) \leq T(M_1 + M_2)$$

o que mostra que $\Lambda(\overline{u}) \in \mathbb{R}$. ■

5.3.3 O resultado principal

Teorema 5.3.2 *Sejam f e g funções satisfazendo as hipóteses básicas (H*0), (H1), (H*2), (H*3) e (H4), e suponhamos que, para cada $t \in I = [0,T]$ fixado, $g(t,\cdot)$ é uma função côncava. Então o problema M admite uma solução $u \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$.*

Demonstração

(a) Começamos por mostrar a existência de solução para o problema relaxado

$$\min\left\{\int_0^T [f^{**}(t,u'(t)) + g(t,u(t))]\,dt : u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m), u(0)=a, u(T)=b\right\}. \qquad (MR)$$

Por (H*0), $f \in \mathcal{E}$. Então, por definição de $\mathcal{E}$, f é limitada inferiormente, o que implica que $f^{**} : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ também o é.

Por outro lado, ainda por definição de $\mathcal{E}$, temos que f satisfaz a condição

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\substack{t\in I\\ |\xi|>R}} \sup\{f^{**}(t,\xi) - \langle p,\xi\rangle : p \in \partial_\xi f^{**}(t,\xi)\} = -\infty.$$

Ora, como $(f^{**})^{**} = f^{**}$, a função f^{**} também satisfaz esta condição.

Pela observação 2.19.8, para cada $t \in I$ fixado, $f^{**}(t,\cdot)$ é uma função convexa e semicontínua inferiormente.

Por (H*0) e (H4), e atendendo ao lema 5.2.6, para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, $f^{**}(\cdot,\xi)$ é uma função lipschitziana.

Assim, podemos concluir que f^{**} satisfaz a hipótese (H0) do teorema 4.3.7. As outras hipóteses deste teorema são também, evidentemente, satisfeitas, pelo que podemos afirmar que o problema (MR) admite uma solução $\widetilde{u} \in W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^m)$.

A função f é semicontínua inferiormente. Então, pela proposição 5.4.17, f é um integrando normal. Além disso, pelo lema 4.2.9, $f(t,\cdot) \in \mathcal{G}$, $\forall t \in I$. Então, pelo corolário 5.2.3, existem funções mensuráveis $p_i : [0,T] \to [0,1]$ e $v_i : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, $i = 1,2,...,m+1$, tais que $\sum_{i=1}^{m+1} p_i(t) = 1$ e

$$\widetilde{u}'(t) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i(t)\,v_i(t), \quad f^{**}(t,\widetilde{u}'(t)) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i(t)\,f(t,v_i(t)). \qquad (5.47)$$

(b) Vamos mostrar a integrabilidade de uma função que será usada mais tarde.

Dado que a função f é um integrando normal e, para cada $i = 1,...,m+1$, $v_i(\cdot)$, é uma função mensurável, pela proposição 5.4.16, cada uma das funções $t \mapsto f(t,v_i(t))$, $i = 1,...,m+1$ é mensurável em $I = [0,T]$.

Aplicando repetidamente o teorema de Lusin, podemos construir uma sucessão $(K_j)_j$ de subconjuntos de I compactos e disjuntos tal que a restrição de cada uma das aplicações $t \mapsto f(t,v_i(t))$, $i = 1,...,m+1$, a cada K_j é contínua e

$$I = N \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} K_j\right)$$

onde N é um conjunto de medida nula.

Seja

$$S_k \doteq \cup_{j\le k} K_j.$$

Pelo teorema 5.4.26, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma partição mensurável $\left(E_j^i\right)_i$, $i = 1,...,m+1$, de K_j com a seguinte propriedade:

$$\int_{K_j} \sum_{i=1}^{m+1} p_i(t)\,f(t,v_i(t))\,dt = \int_{K_j} \sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t))\,dt. \qquad (5.48)$$

Queremos mostrar que a aplicação

$$t \mapsto \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\,v_i(t)\right)$$

pertence a $L^1(I,\mathbb{R}^m)$.

Por (H1), existem constantes A, B, com $B > 0$, tais que

$$f(t,v_i(t)) \ge -A + B\,|v_i(t)|, \quad \forall t \in I \qquad (5.49)$$

e, portanto
$$f(t,v_i(t))+A\geq B|v_i(t)|\geq 0,\ \ \forall t\in I.$$

Isto implica, atendendo a que $\chi_{E_j^i}(t)\geq 0$, $\forall t\in I$, que a sucessão de funções não-negativas definidas em I por
$$s_k(t)=\sum_{j\leq k}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t,v_i(t))+A\right)\right)$$
é não-decrescente. De facto, se $l<k$, resulta que
$$s_l(t)=\sum_{j\leq l}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t,v_i(t))+A\right)\right)\leq\sum_{j\leq k}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t,v_i(t))+A\right)\right)=s_k(t),\ \ \forall t\in I.$$

Além disso, tem-se
$$\int_0^T s_k(t)\,dt=\int_0^T\sum_{j\leq k}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t,v_i(t))+A\right)\right)dt=\sum_{j\leq k}\int_0^T\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t,v_i(t))+A\right)\right)dt.$$

Se $t\notin K_j$, para cada $j\leq k$, então t não pertence a nenhum dos E_j^i (porque $K_j=\cup_{i=1}^{m+1}E_j^i$) e então, nesse caso, temos $\chi_{E_j^i}(t)=0$, pelo que
$$\begin{aligned}\sum_{j\leq k}\int_0^T\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t,v_i(t))+A\right)\right)dt &=\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t,v_i(t))+A\right)\right)dt=\\ &=\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t))+\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\,A\right)dt=\\ &=\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t))+A\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\right)dt.\end{aligned}$$

Qualquer que seja $t\in K_j$, t pertence a um e apenas um dos E_j^i (porque $K_j=\cup_{i=1}^{m+1}E_j^i$ e $\cap_{i=1}^{m+1}E_j^i=\emptyset$), portanto, nesse caso, $\sum_{i=1}^{n+1}\chi_{E_j^i}(t)=1$. Assim, temos
$$\begin{aligned}\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t))+A\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\right)dt &=\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t))+A\right)dt=\\ &=\sum_{j\leq k}\left(\int_{K_j}\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t))\,dt+\int_{K_j}Adt\right)\end{aligned}$$
e então, atendendo a (5.48),
$$\begin{aligned}\sum_{j\leq k}\left(\int_{K_j}\sum_{i=1}^{m+1}\chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t))\,dt+\int_{K_j}Adt\right) &=\sum_{j\leq k}\left(\int_{K_j}\sum_{i=1}^{m+1}p_i(t)\,f(t,v_i(t))\,dt+\int_{K_j}Adt\right)=\\ &=\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(\sum_{i=1}^{m+1}p_i(t)\,f(t,v_i(t))+A\right)dt\end{aligned}$$
Mas como $\sum_{i=1}^{m+1}p_i(t)\,f(t,v_i(t))=f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))$, daqui resulta que
$$\begin{aligned}\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(\sum_{i=1}^{m+1}p_i(t)\,f(t,v_i(t))+A\right)dt &=\sum_{j\leq k}\int_{K_j}\left(f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))+A\right)dt=\\ &=\int_{\cup_{j\leq k}K_j}\left(f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))+A\right)dt\end{aligned}$$
e como $S_k\doteq\cup_{j\leq k}K_j$,
$$\begin{aligned}\int_{\cup_{j\leq k}K_j}\left(f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))+A\right)dt &=\int_{S_k}\left(f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))+A\right)dt=\\ &=\int_0^T\chi_{S_k}(t)\left(f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))+A\right)dt\leq\\ &\leq\int_0^T\left(f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))+A\right)dt.\end{aligned}$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^T s_k(t)\,dt \leq \int_0^T \left(f^{**}(t, \widetilde{u}'(t)) + A\right) dt < +\infty$$

pelo que $s_k(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, temos

$$\left|\int_0^T s_k(t)\,dt\right| \leq \int_0^T \left(f^{**}(t, \widetilde{u}'(t)) + A\right) dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e $\int_0^T \left(f^{**}(t, \widetilde{u}'(t)) + A\right) dt$ é uma constante real.

Então, como (s_k) é uma sucessão não-decrescente, pelo teorema da convergência monótona (proposição 2.9.13) existe uma função $s(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R})$ tal que $(s_k) \to s$ em $L^1(I, \mathbb{R})$, isto é,

$$\left(\int_0^T |s_m(t) - s(t)|\,dt\right) \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Mas então, como

$$0 \leq \left|\int_0^T s_k(t)\,dt - \int_0^T s(t)\,dt\right| = \left|\int_0^T (s_k(t) - s(t))\,dt\right| \leq \int_0^T |s_k(t) - s(t)|\,dt$$

também

$$\left(\left|\int_0^T s_k(t)\,dt - \int_0^T s(t)\,dt\right|\right) \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty$$

e isto significa que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T s_k(t)\,dt = \int_0^T s(t)\,dt.$$

Além disso, ainda pelo teorema da convergência monótona, $(s_k(t)) \to s(t)$ quase sempre em I quando $k \to \infty$. Então podemos escrever

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T s_k(t)\,dt = \int_0^T s(t)\,dt = \int_0^T \lim_{k\to\infty} s_k(t)\,dt.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\left(f(t, v_i(t)) + A\right)\right) dt &= \int_0^T \lim_{k\to\infty} s_k(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^T s_k(t)\,dt \leq \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \int_0^T \left(f^{**}(t, \widetilde{u}'(t)) + A\right) dt \\
&= \int_0^T \left(f^{**}(t, \widetilde{u}'(t)) + A\right) dt < +\infty. \qquad (5.50)
\end{aligned}$$

De (5.49) resulta ainda que, qualquer que seja o $t \in I$,

$$\begin{aligned}
&\chi_{E_j^i}(t)\, f(t, v_i(t)) \geq \chi_{E_j^i}(t)\left(-A + B\,|v_i(t)|\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\chi_{E_j^i}(t)\,|v_i(t)| \leq \frac{1}{B}\chi_{E_j^i}(t)\left(f(t, v_i(t)) + A\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, v_i(t)\right)\right| = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\,|v_i(t)|\right) \quad \text{quase sempre em } I.$$

De facto, dado que $I = N \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} K_j\right)$, onde N é um conjunto de medida nula, e os conjuntos K_j são disjuntos, tem-se que quase todo $t \in I$ pertence a um e um só K_j e como, para cada j fixado,

$E_j^i \cap E_j^k = \emptyset$, para $i \neq k$, $i, k = 1, ..., m+1$, um tal t pertence a um e apenas um dos conjuntos E_j^i. Suponhamos, sem perda de generalidade, que era $t \in E_1^1$. Então

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, v_i(t)\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_1^i}(t)\, v_i(t) + \sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_2^i}(t)\, v_i(t) + ...\right| = \left|\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_1^i}(t)\, v_i(t)\right| =$$

$$= \left|\chi_{E_1^1}(t)\, v_1(t) + \chi_{E_1^2}(t)\, v_2(t) + ... + \chi_{E_1^{m+1}}(t)\, v_{m+1}(t)\right| = \left|\chi_{E_1^1}(t)\, v_1(t)\right| = |v_1(t)|$$

e

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, |v_i(t)|\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_1^i}(t)\, |v_i(t)| + \sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_2^i}(t)\, |v_i(t)| + ... = \sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_1^i}(t)\, |v_i(t)| =$$

$$= \chi_{E_1^1}(t)\, |v_1(t)| + \chi_{E_1^2}(t)\, |v_2(t)| + ... + \chi_{E_1^{m+1}}(t)\, |v_{m+1}(t)| = \chi_{E_1^1}(t)\, |v_1(t)| = |v_1(t)|$$

pelo que $\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, v_i(t)\right)\right| = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, |v_i(t)|\right)$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, v_i(t)\right)\right| &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, |v_i(t)|\right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{B}\chi_{E_j^i}(t)\, f(t, v_i(t)) + A\right) = \\ &= \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, f(t, v_i(t)) + A\right), \quad \text{quase sempre em } I\end{aligned}$$

donde, por (5.50),

$$\int_0^T \left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, v_i(t)\right)\right| dt \leq \frac{1}{B}\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t)\, (f(t, v_i(t)) + A)\right) dt < +\infty.$$

Podemos então afirmar que a aplicação

$$t \mapsto \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\, v_i(t)\right)$$

pertence a $L^1(I, \mathbb{R}^m)$.

(c) Seja

$$\partial^x g(t,x) = -\partial_x(-g(t,x))$$

e consideremos a multifunção

$$t \mapsto \partial^x g(t, \widetilde{u}(t)).$$

A função $(t,x) \mapsto -g(t,x)$ satisfaz as condições (a), (b) e (c) (com $p = 1$) do lema 5.2.9. Além disso, pela proposição 5.3.1, existe uma função $\overline{u} \in W^{1,\infty}(I, \mathbb{R}^m)$ tal que $\int_0^T g(t, \overline{u}(t))\, dt + \int_0^T f(t, \overline{u}'(t))\, dt$ é um número real, pelo que também $\int_0^T g(t, \overline{u}(t))\, dt \in \mathbb{R}$, e isto significa que a condição (d) do referido lema também é satisfeita. Assim, podemos afirmar que existe uma selecção integrável $\delta(\cdot)$ de $\partial^x g(t, \widetilde{u}(t))$.

Seja $B : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ a função definida por

$$B(t) \doteq \int_0^t \delta(s)\, ds.$$

Tal como em (b), aplicando repetidamente o teorema de Lusin, podemos construir uma sucessão $(K_j)_j$ de subconjuntos de I compactos e disjuntos tal que a restrição de cada uma das aplicações

$$t \mapsto (f(t, v_i(t)), v_i(t), \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle),$$

$i = 1, ..., m+1$ a cada K_j é contínua e

$$I = N \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} K_j\right)$$

onde N é um conjunto de medida nula.

Pelo teorema 5.4.26, dadas $m+1$ funções peso $p_i : K_j \to [0,1]$, $i = 1,...,m+1$, existe uma partição mensurável de K_j, $\left(E_j^i\right)_i$, $i = 1,...,m+1$, tal que

$$\int_{E_j^1} f_1(t)\,dt + ... + \int_{E_j^{m+1}} f_{m+1}(t)\,dt = \int_{K_j} p_1(t) f_1(t)\,dt + ... + \int_{K_j} p_{m+1}(t) f_{m+1}(t)\,dt$$

isto é

$$\sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) f_i(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} p_i(t) f_i(t)\,dt$$

onde $f_i(t) = \left(f_i^1(t), ..., f_i^m(t)\right)$, $t \in K_j$, $i = 1,...,n+1$, são funções dadas cujas componentes são integráveis em K_j.

Então, para cada j, existe uma partição mensurável $\left(E_j^i\right)_i$, $i = 1,...,m+1$, tal que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) \left(f(t, v_i(t)), v_i(t), \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle\right) dt = \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} p_i(t) \left(f(t, v_i(t)), v_i(t), \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle\right) dt
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) f(t, v_i(t))\,dt, \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\,dt, \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle\,dt\right) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m+1} p_i(t) f(t, v_i(t))\,dt, \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} p_i v_i(t)\,dt, \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} p_i(t) \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle\,dt\right)
\end{aligned}$$

pelo que

$$\sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} p_i(t) v_i(t)\,dt \tag{5.51}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) f(t, v_i(t))\,dt = \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} p_i(t) f(t, v_i(t))\,dt \tag{5.52}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle\,dt = \sum_{i=1}^{m+1} \int_{K_j} p_i(t) \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle\,dt. \tag{5.53}$$

(d) Vamos mostrar que a função $u : I \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\right) \\
u(0) &= \widetilde{u}(0)
\end{aligned}$$

é uma solução do problema (M).

Começamos por notar que quase todo o t em $[0,T]$ pertence a exactamente um dos E_j^i pelo que, para quase todo o t, $u'(t)$ é igual a um dos $v_i(t)$. Além disso, pela mesma razão,

$$f(t, u'(t)) = f\left(t, \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t) f(t, v_i(t))\right).$$

Em (b) provámos que $u' \in L^1(I, \mathbb{R}^m)$, e portanto, u está em $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m)$.

De facto, temos que

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds$$

e então

$$\begin{aligned}
|u|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} &= \int_0^T |u(t)|\,dt = \int_0^T \left| u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds \right| dt \leq \\
&\leq \int_0^T |u(0)|\,dt + \int_0^T \left| \int_0^t u'(s)\,ds \right| dt \leq \\
&\leq T\,|u(0)| + \int_0^T \left(\int_0^t |u'(s)|\,ds \right) dt \leq \\
&\leq T\,|u(0)| + \int_0^T \left(\int_0^T |u'(s)|\,ds \right) dt = \\
&= T\,|u(0)| + \int_0^T |u'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)}\,dt = \\
&= T\,|u(0)| + T\,|u'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} = \\
&= T\left(|u(0)| + |u'|_{L^1(I,\mathbb{R}^m)} \right) < +\infty
\end{aligned}$$

pelo que $u \in L^1(I,\mathbb{R}^m)$ e, consequentemente, $u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m)$.

Além disso, por (5.51) e atendendo a que $\sum_{i=1}^{n+1} p_i(t)\,v_i(t) = \widetilde{u}'(t)$, temos

$$\begin{aligned}
u(T) &= u(0) + \int_0^T u'(t)\,dt = \widetilde{u}(0) + \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\,v_i(t) \right) dt = \\
&= \widetilde{u}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\,v_i(t) \right) dt = \widetilde{u}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i(t)\,v_i(t) \right) dt = \\
&= \widetilde{u}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \widetilde{u}'(t)\,dt = \widetilde{u}(0) + \int_0^T \widetilde{u}'(t)\,dt = \widetilde{u}(0) + \widetilde{u}(T) - \widetilde{u}(0) = \\
&= \widetilde{u}(T)
\end{aligned}$$

Ainda em (b), vimos que, sempre que (5.52) se verifica, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\,(f(t,v_i(t)) + A) \right) dt = \\
&= \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t)) \right) + A \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t) \right) \right) dt = \\
&= \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t)) \right) + A \right) dt \leq \\
&\leq \int_0^T \left(f^{**}(t,\widetilde{u}'(t)) + A \right) dt < +\infty
\end{aligned}$$

pelo que

$$0 \leq \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t)) \right) dt \leq \int_0^T f^c(t,\widetilde{u}'(t))\,dt < +\infty$$

o que mostra que $f(t,u'(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t)\,f(t,v_i(t)) \right)$ é integrável e

$$\int_0^T f(t,u'(t))\,dt \leq \int_0^T f^{**}(t,\widetilde{u}'(t))\,dt \tag{5.54}$$

sempre que a igualdade (5.52) é verdadeira.

A função $\delta(\cdot)$ é uma selecção (integrável) da multifunção $\partial^x g(t,\widetilde{u}(t)) = -\partial_x(-g(t,\widetilde{u}(t)))$. Então, qualquer que seja o $t \in [0,T]$, tem-se

$$\delta(t) \in -\partial_x(-g(t,\widetilde{u}(t)))$$

onde

$$\partial_x \left(-g\left(t,\widetilde{u}\left(t\right)\right)\right) = \left\{p \in \mathbb{R}^n : -g\left(t,y\right) \geq -g\left(t,\widetilde{u}\left(t\right)\right) + \left\langle p, y-\widetilde{u}\left(t\right)\right\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Mas, se

$$\delta\left(t\right) \in -\partial_x \left(-g\left(t,\widetilde{u}\left(t\right)\right)\right), \forall t \in \left[0,T\right],$$

então

$$-\delta\left(t\right) \in \partial_x \left(-g\left(t,\widetilde{u}\left(t\right)\right)\right), \forall t \in \left[0,T\right],$$

e assim, temos

$$g\left(t,y\right) \leq g\left(t,\widetilde{u}\left(t\right)\right) + \left\langle \delta\left(t\right), y-\widetilde{u}\left(t\right)\right\rangle \tag{5.55}$$

para cada t em $[0,T]$ e para cada y em $\mathbb{R}^n$; em particular,

$$g\left(t,u\left(t\right)\right) \leq g\left(t,\widetilde{u}\left(t\right)\right) + \left\langle \delta\left(t\right), u\left(t\right)-\widetilde{u}\left(t\right)\right\rangle$$

pelo que

$$\int_0^T g\left(t,u\left(t\right)\right)dt \leq \int_0^T g\left(t,\widetilde{u}\left(t\right)\right)dt + \int_0^T \left\langle \delta\left(t\right), u\left(t\right)-\widetilde{u}\left(t\right)\right\rangle dt. \tag{5.56}$$

Vamos mostrar que

$$\int_0^T \left\langle \delta\left(t\right), u\left(t\right)-\widetilde{u}\left(t\right)\right\rangle dt = 0. \tag{5.57}$$

Denotemos por x_l a l-ésima componente de um vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Atendendo à definição de $B\left(\cdot\right)$, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\langle \delta\left(t\right), u\left(t\right)-\widetilde{u}\left(t\right)\right\rangle dt = \int_0^T \sum_{l=1}^n \delta_l\left(t\right)\left(u_l\left(t\right)-\widetilde{u}_l\left(t\right)\right)dt = \sum_{l=1}^n \int_0^T \delta_l\left(t\right)\left(u_l\left(t\right)-\widetilde{u}_l\left(t\right)\right)dt = \\
&= \sum_{l=1}^n \int_0^T \delta_l\left(t\right)\left(\int_0^t \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)ds + u_l\left(0\right)-\widetilde{u}_l\left(0\right)\right)dt = \\
&= \sum_{l=1}^n \int_0^T \delta_l\left(t\right)\left(\int_0^t \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)ds\right)dt = \\
&= \sum_{l=1}^n \int_0^T \delta_l\left(t\right)\left(\int_0^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)ds - \int_t^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)ds\right)dt = \\
&= \sum_{l=1}^n \left(\int_0^T \delta_l\left(t\right)\left(\int_0^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)ds\right)dt - \int_0^T \delta_l\left(t\right)\left(\int_t^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)ds\right)dt\right) = \\
&= \sum_{l=1}^n \left(\int_0^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)\left(\int_0^T \delta_l\left(t\right)dt\right)ds - \int_0^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)\left(\int_0^s \delta_l\left(t\right)dt\right)ds\right) = \\
&= \sum_{l=1}^n \left(\int_0^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)B_l\left(T\right)ds - \int_0^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)B_l\left(s\right)ds\right) = \\
&= \sum_{l=1}^n \int_0^T \left(u_l'\left(s\right)-\widetilde{u}_l'\left(s\right)\right)\left(B_l\left(T\right)-B_l\left(s\right)\right)ds = \int_0^T \left\langle u'\left(s\right)-\widetilde{u}'\left(s\right), B\left(T\right)-B\left(s\right)\right\rangle ds.
\end{aligned}$$

Como $u'\left(t\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\chi_{E_j^i}\left(t\right)v_i\left(t\right)\right)$ e $\widetilde{u}'\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n+1}p_i\left(t\right)v_i\left(t\right)$, por (5.53) temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\langle \delta\left(t\right), u\left(t\right)-\widetilde{u}\left(t\right)\right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\chi_{E_j^i}\left(t\right)v_i\left(t\right)\right) - \sum_{i=1}^{n+1}p_i\left(t\right)v_i\left(t\right), B\left(T\right)-B\left(t\right)\right\rangle dt = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_j} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\chi_{E_j^i}\left(t\right)v_i\left(t\right)\right) - \sum_{i=1}^{n+1}p_i\left(t\right)v_i\left(t\right), B\left(T\right)-B\left(t\right)\right\rangle dt = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_j} \left\langle \sum_{i=1}^{n+1}\chi_{E_j^i}\left(t\right)v_i\left(t\right) - \sum_{i=1}^{n+1}p_i\left(t\right)v_i\left(t\right), B\left(T\right)-B\left(t\right)\right\rangle dt = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_j} \left\langle \sum_{i=1}^{n+1}\left(\chi_{E_j^i}\left(t\right)v_i\left(t\right) - p_i\left(t\right)v_i\left(t\right)\right), B\left(T\right)-B\left(t\right)\right\rangle dt =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \left(\chi_{E_j^i}(t) - p_i(t) \right) v_i(t), B(T) - B(t) \right\rangle dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \sum_{i=1}^{n+1} \left(\left(\chi_{E_j^i}(t) - p_i(t) \right) \langle v_i(t), B(T) - B(t) \rangle \right) dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{K_j} \sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t) \langle v_i(t), B(T) - B(t) \rangle dt - \int_{K_j} \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) \langle v_i(t), B(T) - B(t) \rangle dt \right) = 0.$$

De (5.56) e (5.57) resulta então que

$$\int_0^T g(t, u(t))\, dt \leq \int_0^T g(t, \widetilde{u}(t))\, dt$$

pelo que, atendendo a (5.54),

$$\int_0^T g(t, u(t))\, dt + \int_0^T f(t, u'(t))\, dt \leq \int_0^T g(t, \widetilde{u}(t))\, dt + \int_0^T f^{**}(t, \widetilde{u}'(t))\, dt. \tag{5.58}$$

Mas, vimos que $\widetilde{u}$ é solução do problema (MR). Então, atendendo a (5.58), às definições de ínfimo e a que $f^{**} \leq f$, podemos escrever

$$\int_0^T g(t, \widetilde{u}(t))\, dt + \int_0^T f^{**}(t, \widetilde{u}'(t))\, dt =$$
$$= \inf \left\{ \int_0^T g(t, v(t))\, dt + \int_0^T f^{**}(t, v'(t))\, dt : v \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m), v(0) = a, v(T) = b \right\} \leq$$
$$\leq \inf \left\{ \int_0^T g(t, v(t))\, dt + \int_0^T f(t, v'(t))\, dt : v \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^m), v(0) = a, v(T) = b \right\} \leq$$
$$\leq \int_0^T g(t, u(t))\, dt + \int_0^T f(t, u'(t))\, dt \leq$$
$$\leq \int_0^T g(t, \widetilde{u}(t))\, dt + \int_0^T f^{**}(t, \widetilde{u}'(t))\, dt$$

pelo que todas as desigualdades anteriores são de facto igualdades, e portanto u é uma solução do problema (M).

Finalmente, $\widetilde{u} \in W^{1,\infty}(I, \mathbb{R}^m)$ também $u \in W^{1,\infty}(I, \mathbb{R}^m)$. ■

Note-se que se, para quase todo o $t \in [0, T]$, a função $g(t, \cdot)$ é estritamente côncava, então a desigualdade (5.55) é estrita.

De facto, suponhamos que,

$$g(t, \lambda x + (1 - \lambda) y) > \lambda g(t, x) + (1 - \lambda) g(t, y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^m, \ \ \lambda \in [0, 1] \tag{5.59}$$

e

$$g(t, y) = g(t, \widetilde{u}(t)) + \langle \delta(t), y - \widetilde{u}(t) \rangle, \ \ \forall y \in \mathbb{R}^m. \tag{5.60}$$

Suponhamos ainda que $y \neq \widetilde{u}(t)$.

Então, de (5.60) resulta

$$\lambda g(t, x) = \lambda g(t, \widetilde{u}(t)) + \langle \delta(t), \lambda (x - \widetilde{u}(t)) \rangle$$

e

$$(1 - \lambda) g(t, y) = (1 - \lambda) g(t, \widetilde{u}(t)) + \langle \delta(t), (1 - \lambda)(y - \widetilde{u}(t)) \rangle,$$

donde

$$\lambda g(t, x) + (1 - \lambda) g(t, y) = g(t, \widetilde{u}(t)) + \langle \delta(t), \lambda x + (1 - \lambda) y - \widetilde{u}(t) \rangle.$$

Mas, por (5.59) e (5.60), temos também

$$\lambda g(t, x) + (1 - \lambda) g(t, y) < g(t, \lambda x + (1 - \lambda) y) = g(t, \widetilde{u}(t)) + \langle \delta(t), \lambda x + (1 - \lambda) y - \widetilde{u}(t) \rangle$$

pelo que

$$\lambda g(t, x) + (1 - \lambda) g(t, y) < g(t, \widetilde{u}(t)) + \langle \delta(t), \lambda x + (1 - \lambda) y - \widetilde{u}(t) \rangle$$

o que é absurdo.

Se, sempre que $y \neq \widetilde{u}(t)$, a desigualdade (5.55) é estrita, o mesmo acontece com a desigualdade (5.58) e então temos

$$\int_0^T g(t,u(t))\,dt + \int_0^T f(t,u'(t))\,dt < \int_0^T g(t,\widetilde{u}(t))\,dt + \int_0^T f^c(t,\widetilde{u}'(t))\,dt =$$
$$= \inf\left\{\int_0^T g(t,v(t))\,dt + \int_0^T f(t,v'(t))\,dt : v \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^m), v(0)=a, v(T)=b\right\},$$

isto é, o valor do funcional em u é estritamente inferior ao seu ínfimo, o que é absurdo. Assim, concluimos que se, para quase todo o $t \in [0,T]$, $g(t,\cdot)$ é estritamente côncava, então $u = \widetilde{u}$ ($u(t) = \widetilde{u}(t)$ quase sempre em $[0,T]$), o que significa que, neste caso, qualquer solução do problema relaxado (MR) é também solução do problema original (M).

5.4 Anexos

5.4.1 Hiperplanos suporte de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Definição 5.4.1 *Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ diz-se um **conjunto afim** se, quaisquer que sejam $x,y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, se tem*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in M.$$

Proposição 5.4.2 *O gráfico de uma transformação afim $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (isto é, uma função da forma $Tx = Ax + a$, onde A é uma transformação linear e $a \in \mathbb{R}^m$), é um subconjunto afim de $\mathbb{R}^{n+m}$. Reciprocamente, qualquer conjunto afim não-trivial é o gráfico de uma transformação afim.*

Demonstração
Ver [43], páginas 8 e 9.

Teorema 5.4.3 *Os subespaços de $\mathbb{R}^n$ são os subconjuntos afins de $\mathbb{R}^n$ que contêm a origem.*

Demonstração
Ver [43], teorema 1.1.

Definição 5.4.4 *Um conjunto afim $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **paralelo** a um conjunto afim $L \subset \mathbb{R}^n$ se $M = L + a$, para algum $a \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 5.4.5 *Cada conjunto afim $M \subset \mathbb{R}^n$ é paralelo a um único subespaço de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração
Ver [43], teorema 1.2.

Definição 5.4.6 *A **dimensão** de um conjunto afim não-vazio é, por definição, a dimensão do subespaço que lhe é paralelo.*

Definição 5.4.7 *Os conjuntos afins de dimensão 0,1 e 2 dizem-se, respectivamente, **pontos**, **rectas** e **planos**.*

*Um subconjunto afim de $\mathbb{R}^n$ com dimensão $n-1$ diz-se um **hiperplano**.*

Teorema 5.4.8 *Dados $\beta \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, o conjunto*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,b\rangle = \beta\}$$

é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$. Além disso, qualquer hiperplano em $\mathbb{R}^n$ pode ser representado desta forma.

Demonstração
Ver [43], teorema 1.3.

Definição 5.4.9 *No teorema anterior, o vector b diz-se **normal** ao hiperplano H.*

Definição 5.4.10 *Dados $\beta \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, os conjuntos*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle \leq \beta\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle \geq \beta\}$$

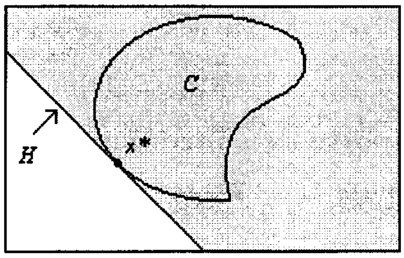
dizem-se ***semi-espaços fechados*** *e os conjuntos*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle < \beta\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle > \beta\}$$

dizem-se ***semi-espaços abertos****. Ora, estes semi-espaços dependem apenas do hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle = \beta\}$, por isso se dizem os* ***semi-espaços associados a*** *H.*

Definição 5.4.11 *Seja C um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Um* ***semi-espaço suporte*** *de C é um semi-espaço fechado que contém C e cuja fronteira contém um ponto de C.*

Um ***hiperplano suporte*** *H de C é um hiperplano que é a fronteira de um semi-espaço suporte de C.*



Teorema 5.4.12 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e seja D um subconjunto convexo e não-vazio de C (por exemplo um conjunto com apenas um elemento). Então para que exista um hiperplano suporte de C contendo D é necessário e suficiente que $D \cap intC = \emptyset$.*

Demonstração
Ver [43], teorema 11.6.

Observação 5.4.13 *Note-se que se existe um tal hiperplano suporte H, então H separa (no sentido lato) D de C no sentido em que D está contido num dos semi-espaços fechados associados, a H, e C está contido no outro.*

Observação 5.4.14 *Se no teorema anterior o conjunto D é constituido apenas por um ponto, digamos que $D = \{a\}$, e existe um hiperplano suporte H de C contendo D então dizemos que H é um* ***hiperplano suporte de*** *C* ***em*** *a.*

5.4.2 Integrandos normais

Definição 5.4.15 *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e B um subconjunto de $\mathbb{R}^p$. Uma aplicação f de $\Omega \times B$ em $[-\infty, +\infty]$ diz-se um* ***integrando normal*** *se*

(i) *para quase todo $t \in \Omega$, $f(t, \cdot)$ é semicontínua inferiormente em B;*

(ii) *existe uma função boreliana $\widetilde{f} : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ tal que $\widetilde{f}(t, \cdot) = f(t, \cdot)$, para quase todo $t \in \Omega$.*

Proposição 5.4.16 *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, B um subconjunto de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ um integrando normal e u uma aplicação mensurável de Ω em B. Então a função $t \mapsto f(t, u(t))$ é mensurável em Ω.*

Demonnstração
Ver [30], página 232.

Proposição 5.4.17 *Seja B um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^p$ e seja $f : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$. A função f é um integrando normal se e só se, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K_\varepsilon \subset K$, com $m(K \backslash K_\varepsilon) \leq \varepsilon$, tal que a restrição de f a $K_\varepsilon \times B$ é uma função semicontínua inferiormente.*

Demonstração
Ver [30], teorema 1.1 (Capítulo VIII).

Proposição 5.4.18 *Se f é um integrando normal em $\Omega \times \mathbb{R}^p$ então f^{**} é também um integrando normal em $\Omega \times \mathbb{R}^p$.*

Demonstração
Ver [30], proposição 1.3 (Capítulo VIII).

Proposição 5.4.19 *Se B é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^p$ e C é um subconjunto boreliano de $\Omega \times B$ cujas secções*

$$C_t \doteq \{a \in B : (t, a) \in B\}$$

são conjuntos fechados e não-vazios para quase todo o t, então existe uma aplicação mensurável $\overline{u} : \Omega \to B$ tal que, para quase todo o t,

$$\overline{u}(t) \in C_t.$$

(Dizemos que $\overline{u}$ é uma selecção mensurável de C.)

Demonstração
Ver [30], corolário 1.1 (Capítulo VIII).

5.4.3 Teorema de Liapunov

Definição 5.4.20 *Seja K um qualquer subconjunto convexo compacto de um espaço vectorial X. Um ponto $\overline{x} \in K$ diz-se um **ponto extremo** de K sempre que possui a seguinte propriedade: se existem pontos de K, x_1 e x_2, e $0 < \alpha < 1$ tais que $\overline{x} = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ então $x_1 = x_2$ (e, portanto, $\overline{x} = x_1 = x_2$). Notamos por $extrK$ o conjunto dos pontos extremos de K.*

Teorema 5.4.21 *(**Teorema de Krein-Milman**) Qualquer subconjunto não-vazio convexo e compacto de um espaço vectorial topológico localmente convexo possui pontos extremos e, além disso,*

$$K = co\, extrK."$$

Demonstração
Ver [29], teorema 4 (Capítulo V).

No que segue, A denota um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^p$ com medida de Lebesgue positiva finita.

Teorema 5.4.22 *Seja f uma função definida em A, com valores em $\mathbb{R}^n$, e cujas componentes, $f_1, ..., f_n$, são funções Lebesgue integráveis em A. Seja w uma função real, também definida em A, verificando $0 \le w(t) \le 1$. Então existe um subconjunto mensurável E de A (dependendo apenas de w), tal que*

$$\int_A f(t)\, w(t)\, dt = \int_E f(t)\, dt.$$

Em particular, para cada α real com $0 \le \alpha \le 1$, existe um subconjunto mensurável $E = E(\alpha)$ tal que

$$\alpha \int_A f(t)\, dt = \int_{E(\alpha)} f(t)\, dt.$$

Demonstração
Fixemos uma função real w satisfazendo as condições do teorema.
Seja X o subconjunto de $L^\infty(A)$ constituido por todas as funções $\rho : A \to \mathbb{R}$ verificando

$$0 \le \rho(t) \le 1, \forall t \in A.$$

Sabemos que, qualquer que seja a função $\rho \in X$, a função $f\rho$ é integrável em A. Então a expressão

$$T\rho = \int_A f(t)\, \rho(t)\, dt$$

define uma aplicação $T : X \to \mathbb{R}^n$.
Se

$$a \doteq Tw$$

então $T^{-1}a$ é um subconjunto não-vazio de X.
Vamos mostrar que $T^{-1}a$ é um conjunto convexo.

Sejam $\rho_1, \rho_2 \in T^{-1}a$ quaisquer. Temos

$$T\rho_1 = \int_A f(t)\,\rho_1(t)\,dt = a \quad , \quad T\rho_2 = \int_A f(t)\,\rho_2(t)\,dt = a$$

e

$$0 \leq \rho_1(t) \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \rho_2(t) \leq 1, \quad \forall t \in A.$$

Seja $0 \leq \alpha \leq 1$ qualquer. Então

$$0 \leq \alpha\rho_1(t) \leq \alpha \ \text{ e } \ 0 \leq (1-\alpha)\,\rho_2(t) \leq (1-\alpha)\,, \quad \forall t \in A$$

pelo que a função $\rho : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(t) = \alpha\rho_1(t) + (1-\alpha)\,\rho_2(t)$$

verifica

$$0 \leq \rho(t) \leq \alpha + (1-\alpha) = 1, \quad \forall t \in A$$

e além disso, temos $\rho \in L^\infty(A)$. Isto significa que ρ é um elemento de X. Por outro lado,

$$\begin{aligned} T\rho &= \int_A f(t)\,\rho(t)\,dt = \\ &= \int_A f(t)\left(\alpha\rho_1(t) + (1-\alpha)\,\rho_2(t)\right)dt = \\ &= \alpha\int_A f(t)\,\rho_1(t)\,dt + (1-\alpha)\int_A f(t)\,\rho_2(t)\,dt = \\ &= \alpha a + (1-\alpha)\,a = a \end{aligned}$$

donde $\rho \in T^{-1}a$, o que mostra que $T^{-1}a$ é convexo.

Mostremos agora que

$$T^{-1}a = \left\{\rho \in L^\infty(A) : 0 \leq \rho(t) \leq 1, \ \forall t \in A, \ \int_A f(t)\,\rho(t)\,dt = a\right\}$$

é sequencialmente compacto na topologia fraca* de $L^\infty(A)$.

Seja (ρ_k) uma qualquer sucessão de elementos de $T^{-1}a$. Então

$$0 \leq \rho_k(t) \leq 1, \quad \forall t \in A, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

pelo que

$$|\rho_k|_{L^\infty(A)} = \inf\{c : |\rho_k(t)| \leq c \text{ quase sempre em } A\} \leq 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e como $L^1(A)$ é um espaço de Banach separável (proposições 2.12.14 e 2.12.16) pela proposição 2.11.9 existem $\rho \in L^\infty(A)$ e uma subsucessão de (ρ_k), ainda notada por (ρ_k), tais que

$$(\rho_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \text{ em } L^\infty(A).$$

Necessariamente tem-se $0 \leq \rho(t) \leq 1$, $\forall t \in A$.

De facto, pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (proposição 2.10.19), o conjunto $\overline{B}_{L^\infty(A)} = \{u \in L^\infty(A) : |u| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca* de $L^\infty(A)$. Daqui resulta que

$$|\rho|_{L^\infty(A)} \leq 1$$

e como $|\rho(t)| \leq |\rho|_{L^\infty(A)}$ quase sempre em A, temos

$$|\rho(t)| \leq 1 \text{ quase sempre em } A.$$

Vejamos que teremos que ter $0 \leq \rho(t) \leq 1$ para quase todo o t em A.

Suponhamos que não. Então existe um conjunto mensurável $E \subset A$, com $m(E) > 0$, tal que $-1 \leq \rho(t) < 0$ em E.

Ora, dizer que $(\rho_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \rho$ em $L^\infty(A)$ significa dizer que

$$\left(\int_A \rho_k(t)\,h(t)\,dt\right) \to \int_A \rho(t)\,h(t)\,dt, \quad \forall h \in L^1(A). \tag{5.61}$$

Em particular, temos

$$\left(\int_A \rho_k(t)\,\chi_E(t)\,dt\right) \to \int_A \rho(t)\,\chi_E(t)\,dt$$

onde $\chi_E(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ denota a função característica do conjunto E :

$$\chi_E(t) \doteq \begin{cases} 1, & \text{se } t \in E \\ 0, & \text{se } t \in A \backslash E. \end{cases}$$

Assim,

$$\left(\int_E \rho_k(t)\,dt\right) \to \int_E \rho(t)\,dt.$$

Dado que $0 \leq \rho_k(t) \leq 1$ para cada t em A e para cada k em $\mathbb{N}$, temos também

$$0 \leq \rho_k(t) \leq 1, \quad \forall t \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

pelo que

$$0 \leq \int_E \rho_k(t)\,dt \leq m(E)$$

e portanto

$$0 \leq \int_E \rho(t)\,dt \leq m(E). \tag{5.62}$$

Mas se $-1 \leq \rho(t) < 0$ em E, temos

$$-m(E) \leq \int_E \rho(t)\,dt < 0$$

o que contradiz 5.62.

Existe então um conjunto $N \subset A$, de medida nula, tal que $0 \leq \rho(t) \leq 1$ em $A \backslash N$. Modificando ρ em N (pondo, por exemplo $\rho(t) = 0$ para $t \in N$), podemos afirmar que

$$0 \leq \rho(t) \leq 1 \text{ em A.}$$

Por outro lado, dado que $(\rho_k) \subset T^{-1}a$, temos

$$\int_A f(t)\,\rho_k(t)\,dt = a, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

pelo que

$$\left(\int_A f(t)\,\rho_k(t)\,dt\right) \to a.$$

Por outro lado, de (5.61) resulta que

$$\left(\int_A f(t)\,\rho_k(t)\,dt\right) \to \int_A f(t)\,\rho(t)\,dt.$$

Então temos

$$\int_A f(t)\,\rho(t)\,dt = a$$

o que mostra que $\rho \in T^{-1}a$ e portanto este conjunto é um subconjunto fracamente* sequencialmente compacto de $\overline{B}_{L^\infty(A)}$.

Pela proposição 2.11.8, a bola $\overline{B}_{L^\infty(A)}$ é metrizável para a topologia $\sigma\left(L^\infty(A), L^1(A)\right)$. Então, pela proposição 2.3.10, é fracamente* compacto.

Concluimos então que $T^{-1}a$ é um subconjunto convexo compacto de um espaço vectorial topológico localmente convexo. Daqui resulta, pelo teorema de Krein-Milman (proposição 5.4.21), que $T^{-1}a$ admite pelo menos um ponto extremo $\theta : A \to \mathbb{R}$. Em particular $\theta \in T^{-1}a$, pelo que satisfaz

$$0 \leq \theta(t) \leq 1, \; \forall t \in A \;\text{ e }\; \int_A f(t)\,\theta(t)\,dt = a.$$

Mostremos que θ assume os valores 0 e 1 quase sempre em A.

Suponhamos que não. Pelo teorema de Lusin, podemos encontrar um subconjunto compacto E de A, com medida positiva, tal que a restrição de θ a E é contínua. Por outro lado, dado que a imagem de um compacto por uma função contínua é um compacto, temos que $\theta(E)$ é, em particular, limitado. Assim, podemos afirmar que existe um número real $0 < \varepsilon < 1$ tal que

$$\varepsilon \leq \theta(t) \leq 1-\varepsilon, \ \ \forall t \in E.$$

Sejam E_1 e E_2 dois quaisquer subconjuntos de E, com medida positiva, verificando

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \ \text{ e } \ E_1 \cup E_2 = E.$$

Suponhamos que $n = 1$ e consideremos as funções características $\chi_1, \chi_2 : A \to \mathbb{R}$ dos conjuntos E_1 e E_2 definidas, respectivamente, por:

$$\chi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in E_1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\chi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in E_2 \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Podemos encontrar números α e β, não ambos simultaneamente nulos, com $|\alpha| \leq \varepsilon$ e $|\beta| \leq \varepsilon$ tais que, se tomarmos

$$h(t) = \alpha h_1(t) + \beta h_2(t), \ \ \forall t \in A$$

temos

$$\int_E f(t)\, h(t)\, dt = \alpha \int_{E_1} f(t)\, dt + \beta \int_{E_2} f(t)\, dt = 0$$

pelo que, dado que $\chi_j = 0$ em $A \backslash E_j$, $j = 1, 2$ (e portanto, $h(t) = 0$ em $A \backslash E$),

$$\int_A f(t)\, h(t)\, dt = \int_{A \backslash E} f(t)\, h(t)\, dt + \int_E f(t)\, h(t)\, dt = 0.$$

Assim,

$$\int_A f(t)\,(\theta(t) \pm h(t))\, dt = \int_A f(t)\, \theta(t)\, dt \pm \int_A f(t)\, h(t)\, dt = \int_A f(t)\, \theta(t)\, dt = a.$$

Se $t \in E_1$ então $h(t) = \alpha$ e como $|\alpha| \leq \varepsilon$, resulta que $|h(t)| \leq \varepsilon$ em E_1. Analogamente, se $t \in E_2$ então $h(t) = \beta$ com $|\beta| \leq \varepsilon$, pelo que $|h(t)| \leq \varepsilon$ em E_2. Podemos então dizer que $|h(t)| \leq \varepsilon$ em E e como $\varepsilon \leq \theta(t) \leq 1 - \varepsilon$ em E resulta que

$$\begin{aligned} \varepsilon - \varepsilon &\leq \theta(t) \pm h(t) \leq \varepsilon + (1-\varepsilon) \\ 0 &\leq \theta(t) \pm h(t) \leq 1 \ \ \forall t \in E. \end{aligned}$$

Por outro lado, em $A \backslash E$ temos $h(t) = 0$ e $0 \leq \theta(t) \leq 1$. Assim, podemos afirmar que

$$0 \leq \theta(t) \pm h(t) \leq 1 \ \ \forall t \in A.$$

Então $\theta + h$ e $\theta - h$ são elementos de $T^{-1}a$ e como θ é o ponto médio do segmento cujos extremos são $\theta + h$ e $\theta - h$, concluimos que θ não é um ponto extremo de $T^{-1}a$, o que é absurdo.

Portanto, podemos dizer que θ apenas toma os valores 0 e 1, quase sempre em A.

Seja F o subconjunto de A onde θ toma o valor 1. Então, como $a = Tw = \int_A f(t)\, w(t)\, dt$, temos

$$\int_A f(t)\, \theta(t)\, dt = \int_F f(t)\, dt = \int_A f(t)\, w(t)\, dt,$$

o que mostra o teorema no caso de $n = 1$.

Seja agora $n > 1$ e suponhamos que a afirmação do teorema é verdadeira para $n - 1$. Então podemos dizer que existem conjuntos mensuráveis $F_1 \subset E_1$ e $F_2 \subset E_2$ tais que

$$\int_{E_1} f_i(t)\, dt = 2 \int_{F_1} f_i(t)\, dt \ \text{ e } \ \int_{E_2} f_i(t)\, dt = 2 \int_{F_2} f_i(t)\, dt, \ \ \forall i = 1, ..., n-1.$$

Sejam $h_1, h_2 : A \to \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in F_1 \\ -1 & \text{se } t \in E_1 \backslash F_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$h_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in F_2 \\ -1 & \text{se } t \in E_2 \backslash F_2 \\ 0 & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \int_{E_1} f_i(t)\, h_1(t)\, dt &= \int_{F_1} f_i(t)\, h_1(t)\, dt + \int_{E_1 \backslash F_1} f_i(t)\, h_1(t)\, dt = \int_{F_1} f_i(t)\, dt - \int_{E_1 \backslash F_1} f_i(t)\, dt = \\ &= \int_{F_1} f_i(t)\, dt - \int_{E_1} f_i(t)\, dt + \int_{F_1} f_i(t)\, dt = 2\int_{F_1} f_i(t)\, dt - \int_{E_1} f_i(t)\, dt = \\ &= 2\int_{F_1} f_i(t)\, dt - 2\int_{F_1} f_i(t)\, dt = 0, \quad \forall i = 1, ..., n-1. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Analogamente concluimos que

$$\int_{E_2} f_i(t)\, h_2(t)\, dt = 0, \quad \forall i = 1, ..., n-1. \tag{5.64}$$

Por outro lado, como $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e $h_j(t) = 0$ em $A \backslash E_j$, $j = 1, 2$, temos

$$\int_{E_2} f_i(t)\, h_1(t)\, dt = 0 \text{ e } \int_{E_1} f_i(t)\, h_2(t)\, dt = 0, \quad \forall i = 1, ..., n-1. \tag{5.65}$$

Podemos encontrar números α e β, não ambos simultaneamente nulos, com $|\alpha| \leq \varepsilon$ e $|\beta| \leq \varepsilon$ tais que, se tomarmos

$$h(t) = \alpha h_1(t) + \beta h_2(t), \quad \forall t \in A$$

temos, por (5.63), (5.64) e (5.65),

$$\begin{aligned} \int_E f_n(t)\, h(t)\, dt &= \int_E f_n(t)\, (\alpha h_1(t) + \beta h_2(t))\, dt = \alpha \int_E f_n(t)\, h_1(t)\, dt + \beta \int_E f_n(t)\, h_2(t)\, dt = \\ &= \alpha \int_{E_1} f_n(t)\, h_1(t)\, dt + \alpha \int_{E_2} f_n(t)\, h_1(t)\, dt + \beta \int_{E_1} f_n(t)\, h_2(t)\, dt + \beta \int_{E_2} f_n(t)\, h_2(t)\, dt = \\ &= 0 \end{aligned}$$

e como $h_j(t) = 0$ em $A \backslash E_j$, $j = 1, 2$, temos $h(t) = 0$ em $A \backslash E$, pelo que

$$\int_A f_n(t)\, h(t)\, dt = \int_{A \backslash E} f_n(t)\, h(t)\, dt + \int_E f_n(t)\, h(t)\, dt = 0. \tag{5.66}$$

Por outro lado, também

$$\int_E f_i(t)\, h(t)\, dt = 0, \quad \forall i = 1, ..., n-1. \tag{5.67}$$

De facto, dado que, por (5.63), $\int_{E_1} f_i(t)\, h_1(t)\, dt = 0, \ \forall i = 1, ..., n-1$, e, por definição, $h_2(t) = 0$ em E_1, temos

$$\int_{E_1} f_i(t)\, h(t)\, dt = \alpha \int_{E_1} f_i(t)\, h_1(t)\, dt + \beta \int_{E_1} f_i(t)\, h_2(t)\, dt = 0, \quad \forall i = 1, ..., n-1$$

e como, por (5.64), $\int_{E_2} f_i(t)\, h_2(t)\, dt = 0, \ \forall i = 1, ..., n-1$, e, por definição, $h_1(t) = 0$ em E_2, temos

$$\int_{E_2} f_i(t)\, h(t)\, dt = \alpha \int_{E_2} f_i(t)\, h_1(t)\, dt + \beta \int_{E_2} f_i(t)\, h_2(t)\, dt = 0 \quad \forall i = 1, ..., n-1$$

donde

$$\int_E f_i(t)\,h(t)\,dt = \int_{E_1} f_i(t)\,h(t)\,dt + \int_{E_2} f_i(t)\,h(t)\,dt = 0 \ \ \forall i = 1, ..., n-1.$$

Temos então, por (5.67) e uma vez que $h(t) = 0$ em $A \backslash E$,

$$\int_A f_i(t)\,h(t)\,dt = \int_{A\backslash E} f_i(t)\,h(t)\,dt + \int_E f_i(t)\,h(t)\,dt = 0 \ \ \forall i = 1, ..., n-1. \qquad (5.68)$$

De (5.66) e (5.68) concluimos então que

$$\int_A f(t)\,(\theta(t) \pm h(t))\,dt = \int_A f(t)\,\theta(t)\,dt \pm \int_A f(t)\,h(t)\,dt = \int_A f(t)\,\theta(t)\,dt$$

e, uma vez que $\theta \in T^{-1}a$,

$$\int_A f(t)\,(\theta(t) \pm h(t))\,dt = a.$$

Além disso,

$$0 \leq (\theta \pm h)(t) \leq 1 \ \ \forall t \in A.$$

Com efeito, se $t \in E_1$ então $h(t) = \alpha$ para t em F_1 e $h(t) = -\alpha$ para t em $E_1 \backslash F_1$, com $|\alpha| \leq \varepsilon$, pelo que $|h(t)| \leq \varepsilon$ em E_1. Analogamente se conclui que $|h(t)| \leq \varepsilon$ em E_2. Daqui resulta que $-\varepsilon \leq h(t) \leq \varepsilon$ em E e como $\varepsilon \leq \theta(t) \leq 1 - \varepsilon$ em E, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon - \varepsilon &\leq \theta(t) \pm h(t) \leq \varepsilon + (1 - \varepsilon) \\ 0 &\leq \theta(t) \pm h(t) \leq 1, \ \ \forall t \in E. \end{aligned}$$

Por outro lado, em $A \backslash E$ é $h(t) = 0$ e $0 \leq \theta(t) \leq 1$. Assim, podemos afirmar que

$$0 \leq \theta(t) \pm h(t) \leq 1, \ \ \forall t \in A.$$

Então $\theta + h$ e $\theta - h$ são elementos de $T^{-1}a$ e como θ é o ponto médio do segmento cujos extremos são $\theta + h$ e $\theta - h$, concluimos que θ não é um ponto extremo de $T^{-1}a$, o que é absurdo.

Logo, podemos dizer que θ apenas toma os valores 0 e 1, quase sempre em A.

Seja F o subconjunto de A onde θ toma o valor 1. Então, como $a = Tw = \int_A f(t)\,w(t)\,dt$, temos

$$\int_A f(t)\,\theta(t)\,dt = \int_F f(t)\,dt = \int_A f(t)\,w(t)\,dt,$$

o que mostra o teorema. ■

Teorema 5.4.23 *Sejam $f = (f_1, ..., f_n)$ uma função definida em A cujas componentes são funções reais Lebesgue integráveis em A, E e F dois subconjuntos fixados de A e $0 \leq \alpha \leq 1$. Então existe um subconjunto mensurável $C = C(\alpha)$ de $E \cup F$ tal que*

$$\int_{C(\alpha)} f(t)\,dt = (1 - \alpha) \int_E f(t)\,dt + \alpha \int_F f(t)\,dt.$$

Demonstração

Consideremos os conjuntos disjuntos $E \backslash F$ e $F \backslash E$. Pelo teorema 5.4.22 existe um conjunto mensurável

$$C' = C'(\alpha) \subset E \backslash F$$

tal que

$$\int_{C'(\alpha)} f(t)\,dt = \alpha \int_{E\backslash F} f(t)\,dt$$

e existe um subconjunto mensurável

$$C'' = C''(\alpha) \subset F \backslash E$$

tal que

$$\int_{C''(\alpha)} f(t)\,dt = \alpha \int_{F\backslash E} f(t)\,dt.$$

Então, para

$$C(\alpha) \doteq (E\backslash F\backslash C'(\alpha)) \cup C''(\alpha) \cup (E \cap F)$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{C(\alpha)} f(t)\,dt &= \int_{E\backslash F} f(t)\,dt - \int_{C'(\alpha)} f(t)\,dt + \int_{C''(\alpha)} f(t)\,dt + \int_{E\cap F} f(t)\,dt = \\
&= \int_{E\backslash F} f(t)\,dt - \alpha \int_{E\backslash F} f(t)\,dt + \alpha \int_{F\backslash E} f(t)\,dt + \int_{E\cap F} f(t)\,dt = \\
&= (1-\alpha)\int_{E\backslash F} f(t)\,dt + \alpha \int_{F\backslash E} f(t)\,dt + \alpha \int_{E\cap F} f(t)\,dt + (1-\alpha)\int_{E\cap F} f(t)\,dt = \\
&= (1-\alpha)\left(\int_{E\backslash F} f(t)\,dt + \int_{E\cap F} f(t)\,dt\right) + \alpha\left(\int_{F\backslash E} f(t)\,dt + \int_{E\cap F} f(t)\,dt\right) = \\
&= (1-\alpha)\int_E f(t)\,dt + \alpha \int_F f(t)\,dt. \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 5.4.24 *Seja $f = (f_1, ..., f_n)$ uma função definida em A cujas componentes são funções reais Lebesgue integráveis em A. Então*

$$\mu(E) = \int_E f(t)\,dt$$

descreve um subconjunto convexo H de $\mathbb{R}^n$ quando E percorre todos os subconjuntos mensuráveis de A.

Demonstração

Sejam μ_1 e μ_2 dois elementos arbitrários de H, $0 \le \alpha \le 1$, e

$$\overline{\mu} \doteq (1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2.$$

Então existem dois subconjuntos mensuráveis de A, E_1 e E_2, tais que

$$\mu_1 = \mu(E_1) = \int_{E_1} f(t)\,dt$$

e

$$\mu_2 = \mu(E_2) = \int_{E_2} f(t)\,dt.$$

Pelo teorema 5.4.23, existe um subconjunto mensurável

$$C(\alpha) \subset E_1 \cup E_2 \subset A$$

tal que

$$\mu(C(\alpha)) = \int_{C(\alpha)} f(t)\,dt = (1-\alpha)\int_{E_1} f(t)\,dt + \alpha\int_{E_2} f(t)\,dt = (1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2 = \overline{\mu}$$

o que mostra que $\overline{\mu} \in H$ e portanto H é convexo. $\blacksquare$

Teorema 5.4.25 *Sejam $f = (f_1, ..., f_n)$ e $g = (g_1, ..., g_n)$ duas funções definidas em A com valores em $\mathbb{R}^n$, cujas componentes são funções Lebesgue integráveis em A. Para cada subconjunto mensurável E de A, seja $F = A\backslash E$ e seja $h_E : A \to \mathbb{R}^m$ a função definida por*

$$h_E(t) = \begin{cases} f(t), & se\ t \in E \\ g(t), & se\ t \in F. \end{cases}$$

Então

$$\mu(E) = \int_A h_E(t)\,dt = \int_E f(t)\,dt + \int_F g(t)\,dt$$

descreve um subconjunto convexo H de $\mathbb{R}^n$ quando E percorre todos os subconjuntos mensuráveis de A.

Demonstração
Temos

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \int_A h_E(t)\,dt = \int_E f(t)\,dt + \int_F g(t)\,dt = \int_E f(t) - g(t)\,dt + \int_E g(t)\,dt + \int_F g(t)\,dt = \\ &= \int_E f(t) - g(t)\,dt + \int_A g(t)\,dt.\end{aligned}$$

Pelo teorema 5.4.24, $\int_E f(t) - g(t)\,dt$ descreve um subconjunto convexo H' de $\mathbb{R}^n$ quando E percorre todos os subconjuntos mensuráveis de A. Assim, o conjunto H é uma translação de H' em $\mathbb{R}^n$ (associada ao vector $\int_A g(t)\,dt$), pelo que (proposição 2.15.3) é um conjunto convexo. ■

Sejam $f^j = \left(f_1^{(j)}, ..., f_n^{(j)}\right)$, $j = 1, ..., h$, h funções definidas em A com valores em $\mathbb{R}^n$, cujas componentes são funções reais Lebesgue integráveis em A.

Consideremos ainda uma decomposição arbitrária de A constituída por h conjuntos $E_1, ..., E_h$: $E_u \cap E_v = \emptyset$ para $u, v = 1, ..., h$ com $u \neq v$ e $\cup_{u=1}^h E_u = A$.

Então

$$\mu = \mu(E_1, ..., E_h) = \int_{E_1} f^{(1)}(t)\,dt + ... + \int_{E_h} f^{(h)}(t)\,dt$$

descreve um conjunto H de $\mathbb{R}^n$ quando $E_1, ..., E_h$ percorre todas as possíveis decomposições de A em subconjuntos mensuráveis E_j de A, $j = 1, ..., h$.

Analogamente, consideremos h funções peso mensuráveis arbitrárias $p_j : A \to \mathbb{R}$: $0 \leq p_j(t) \leq 1$, $j = 1, ..., h$ e $\sum_{j=1}^h p_j(t) = 1$, para quase todo o $t \in A$.

Então

$$\nu = \nu(p_1, ..., p_h) = \int_A p_1(t)\, f^{(1)}(t)\,dt + ... + \int_A p_h(t)\, f^{(h)}(t)\,dt$$

descreve um conjunto K de $\mathbb{R}^n$ quando $p_1, ..., p_h$ percorre todos os possíveis sistemas de funções mensuráveis $p_j : A \to \mathbb{R}$ verificando $0 \leq p_j(t) \leq 1$, $j = 1, ..., h$ e $\sum_{j=1}^h p_j(t) = 1$, para quase todo o $t \in A$.

Teorema 5.4.26 *Os subconjuntos H e K de $\mathbb{R}^n$ são convexos e compactos. Além disso tem-se $H = K$.*

Demonstração

(a) H é convexo.

Se $h = 1$, H é convexo pelo teorema 5.4.24.

Se $h = 2$, H é convexo pelo teorema 5.4.25.

Suponhamos então que $h > 2$.

Sejam μ_1 e μ_2 elementos arbitrários de H. Queremos mostrar que

$$(1 - \alpha)\,\mu_1 + \alpha\mu_2 \in H$$

qualquer que seja $\alpha \in [0, 1]$.

Se $\mu_1, \mu_2 \in H$ então, por definição de H, existem decomposições $E_1, ..., E_h$ e $F_1, ..., F_h$ de A tais que

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu(E_1, ..., E_h) = \int_{E_1} f^{(1)}(t)\,dt + ... + \int_{E_h} f^{(h)}(t)\,dt \\ \mu_2 &= \mu(F_1, ..., F_h) = \int_{F_1} f^{(1)}(t)\,dt + ... + \int_{F_h} f^{(h)}(t)\,dt\end{aligned}$$

com $E_u \cap E_v = \emptyset$, $F_u \cap F_v = \emptyset$ para $u, v = 1, ..., h$ com $u \neq v$, e $\cup_{u=1}^h E_u = A$, $\cup_{u=1}^h F_u = A$.

Consideremos a decomposição de A em h^2 conjuntos disjuntos

$$A_{jk} = E_j \cap F_k, \quad j, k = 1, ..., h.$$

Seja $\alpha \in [0, 1]$. Aplicando o teorema 5.4.25 a cada conjunto A_{jk}, $j \neq k$, e às duas funções vectoriais $f^{(j)}$ e $f^{(k)}$ obtemos que a imagem da aplicação

$$\left(B'_{jk}, B''_{jk}\right) \mapsto \int_{B'_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \int_{B''_{jk}} f^{(k)}(t)\,dt$$

onde B'_{jk}, B''_{jk} é uma decomposição mensurável de A_{jk}, é um subconjunto convexo H' de $\mathbb{R}^n$.

Por definição de conjunto convexo, qualquer combinação convexa de dois elementos arbitrários de H' é ainda um elemento de H'. Então, atendendo a que

$$\int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt \in H'$$

(basta pôr $B'_{jk} = A_{jk}$ e $B''_{jk} = \emptyset$) e a que

$$\int_{A_{jk}} f^{(k)}(t)\,dt \in H'$$

(basta pôr $B'_{jk} = \emptyset$ e $B''_{jk} = A_{jk}$), podemos afirmar que existe uma decomposição de A_{jk} em partes mensuráveis A'_{jk}, A''_{jk} verificando $A'_{jk} \cap A''_{jk} = \emptyset$, $A'_{jk} \cup A''_{jk} = A_{jk}$ tal que

$$\int_{A'_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \int_{A''_{jk}} f^{(k)}(t)\,dt = (1-\alpha)\int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \alpha\int_{A_{jk}} f^{(k)}(t)\,dt, \quad \text{sempre que } j \neq k.$$

Definamos agora

$$G_j \doteq A_{jj} \cup \left(\cup_{k\neq j} A'_{jk}\right) \cup \left(\cup_{k\neq j} A''_{jk}\right), \quad j = 1, ..., h$$

(note-se que $G_j = \cup_k A_{jk}$).

Então os h conjuntos mensuráveis G_j formam uma decomposição de A.

Com efeito, sempre que $i \neq j$, $i, j = 1, ..., h$, temos $A_{ik} \cap A_{jk} = \emptyset$, $\forall k = 1, ..., h$, então

$$G_i \cap G_j = (\cup_k A_{ik}) \cap (\cup_k A_{jk}) = \emptyset$$

e, por outro lado,

$$A = \cup_{j,k} A_{jk} = (\cup_k A_{ik}) \cup (\cup_k A_{jk}) = G_i \cup G_j.$$

Temos

$$
\begin{aligned}
H \ni \mu &= \sum_j \int_{G_j} f^{(j)}(t)\,dt = \sum_j \int_{A_{jj}\cup\left(\cup_{k\neq j}A'_{jk}\right)\cup\left(\cup_{k\neq j}A''_{jk}\right)} f^{(j)}(t)\,dt = \\
&= \sum_j \left(\int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \int_{\cup_{k\neq j}A'_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \int_{\cup_{k\neq j}A''_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt \right) = \\
&= \sum_j \left(\int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{k\\k\neq j}} \int_{A'_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{k\\k\neq j}} \int_{A''_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt \right) = \\
&= \sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A'_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A''_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt = \\
&= \sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \left(\int_{A'_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \int_{A''_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt \right) = \\
&= \sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \left((1-\alpha)\int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \alpha\int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt \right) = \\
&= \sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + (1-\alpha)\sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \alpha\sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt = \\
&= [(1-\alpha)+\alpha]\sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + (1-\alpha)\sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt + \alpha\sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t) = \\
&= (1-\alpha)\left(\sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt \right) + \alpha\left(\sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k\\k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t) \right)
\end{aligned}
$$

Mas,

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha)\left(\sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k \\ k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt\right) = \\
&= (1-\alpha)\sum_j \left(\int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{k \\ k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt\right) = \\
&= (1-\alpha)\sum_j \left(\int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \int_{\cup_{\substack{k \\ k\neq j}} A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt\right) = \\
&= (1-\alpha)\sum_j \int_{A_{jj}\cup_{\substack{k \\ k\neq j}} A_{jk}} f^{(j)}(t)\,dt = (1-\alpha)\sum_j \int_{E_j} f^{(j)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned}
& A_{jj}\cup_{\substack{k \\ k\neq j}} A_{jk} = A_{jj}\cup\left(\cup_{k\neq j}\left(E_j\cap F_k\right)\right) = A_{jj}\cup\left(\left(\cup_{k\neq j}E_j\right)\cap\left(\cup_{k\neq j}F_k\right)\right) = \\
&= \left(E_j\cap F_j\right)\cup\left(E_j\cap\cup_{k\neq j}F_k\right) = \left(E_j\cup E_j\right)\cap\left(E_j\cup\cup_{k\neq j}F_k\right)\cap\left(F_j\cup E_j\right)\cap\left(F_j\cup\cup_{k\neq j}F_k\right) = \\
&= E_j\cap A = E_j.
\end{aligned}$$

Analogamente se mostra que

$$\alpha\left(\sum_j \int_{A_{jj}} f^{(j)}(t)\,dt + \sum_{\substack{j,k \\ k\neq j}} \int_{A_{jk}} f^{(j)}(t)\right) = \alpha\sum_j \int_{F_j} f^{(j)}(t)\,dt.$$

Assim,

$$H \ni \mu = (1-\alpha)\,\mu_1 + \alpha\mu_2$$

pelo que H é convexo.

(b) K é convexo.

De facto, se ν_1 e ν_2 são dois elementos quaisquer de K, então, por definição de K, existem funções mensuráveis $p_j, q_j : A \to \mathbb{R}$ verificando $0 \le p_j(t) \le 1$, $0 \le q_j(t) \le 1$, $j = 1, ..., h$ e $\sum_{j=1}^h p_j(t) = 1$, $\sum_{j=1}^h q_j(t) = 1$, para quase todo o $t \in A$, tais que

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \nu(p_1, ..., p_h) = \int_A p_1(t)\,f^{(1)}(t)\,dt + ... + \int_A p_h(t)\,f^{(h)}(t)\,dt \\
\nu_2 &= \nu(q_1, ..., q_h) = \int_A q_1(t)\,f^{(1)}(t)\,dt + ... + \int_A q_h(t)\,f^{(h)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Fixemos $\alpha \in [0,1]$.

Seja $h : A \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h_j(t) = ((1-\alpha)\,p_j + \alpha q_j)(t).$$

Dado que $0 \le p_j(t) \le 1$ e $0 \le q_j(t) \le 1$ quase sempre em A, tem-se

$$0 \le (1-\alpha)\,p_j(t) \le (1-\alpha) \;\text{ e }\; 0 \le \alpha q_j(t) \le \alpha, \;\text{ quase sempre em } A$$

pelo que

$$0 \le (1-\alpha)\,p_j(t) + \alpha q_j(t) \le (1-\alpha) + \alpha = 1, \;\text{ para quase todo } t \in A.$$

Por outro lado, como $\sum_{j=1}^h p_j(t) = 1$ e $\sum_{j=1}^h q_j(t) = 1$ quase sempre em A, resulta que

$$\sum_j h_j(t) = \sum_j \left((1-\alpha)\,p_j(t) + \alpha q_j(t)\right) = (1-\alpha)\sum_j p_j(t) + \alpha\sum_j q_j(t) = (1-\alpha) + \alpha = 1$$

para quase todo $t \in A$

Assim,

$$\nu = (1-\alpha)\,\nu_1 + \alpha\nu_2 = \sum_{j=1}^{h}\int_A ((1-\alpha)\,p_j(t) + \alpha q_j(t))\, f^{(j)}(t)\,dt \in K$$

e K é convexo.

(c) K é compacto.

Sendo K um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, para mostrar que K é compacto basta mostrar que é limitado e fechado.

Comecemos por mostrar que é limitado.

Seja ν um qualquer elemento de K. Então, por definição de K, existem h funções mensuráveis $p_j : A \to \mathbb{R}$, com $0 \le p_j(t) \le 1$, $j = 1, ..., h$ e $\sum_{j=1}^{h} p_j(t) = 1$ quase sempre em A, tais que

$$\nu = \sum_{j=1}^{h}\int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\,dt.$$

Então

$$|\nu| = \left|\sum_{j=1}^{h}\int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\,dt\right| \le \sum_{j=1}^{h}\left|\int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\,dt\right| \le \sum_{j=1}^{h}\int_A \left|p_j(t)\, f^{(j)}(t)\right| dt$$

e uma vez que, para cada $j = 1, ..., h$, $f^{(j)} \in L^1(A)$ e $p_j \in L^\infty(A)$, pela desigualdade de Hölder (proposição 2.12.18), tem-se

$$|\nu| \le \sum_{j=1}^{h}\int_A \left|p_j(t)\, f^{(j)}(t)\right| dt \le \sum_{j=1}^{h}\left(|p_j|_{L^\infty(A)} \left|f^{(j)}\right|_{L^1(A)}\right)$$

e como $|p_j|_{L^\infty} = \inf\{c : |p_j(t)| \le c$ quase sempre em $A\} \le 1$, resulta que

$$|\nu| \le \sum_{j=1}^{h}\left(|p_j|_{L^\infty}\left|f^{(j)}\right|_{L^1}\right) = \sum_{j=1}^{h}\left|f^{(j)}\right|_{L^1}$$

o que mostra que K é limitado.

Provemos agora que K é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Sabemos que um subconjunto S de um espaço normado E é fechado se e só se qualquer sucessão convergente contida em S o seu limite em S. Seja então (ν_k) uma sucessão qualquer de elementos de K com $(\nu_k) \to \nu \in \mathbb{R}^n$ quando $k \to +\infty$. Digamos que

$$\nu_k = \sum_{j=1}^{h}\int_A p_j^k(t)\, f^{(j)}(t)\,dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

onde, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $j = 1, ..., h$, $p_j^k : A \to \mathbb{R}$ verifica $0 \le p_j^k(t) \le 1$, e $\sum_{j=1}^{h} p_{k,j}(t) = 1$ quase sempre em A.

Queremos mostrar que $\nu \in K$.

Pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (proposição 2.10.19), a bola unitária fechada de $L^\infty(A)$, $\overline{B}_{L^\infty(A)}$, é compacta para a topologia fraca* $\sigma\left(L^\infty(A), L^1(A)\right)$. Isto significa que qualquer sucessão $(x_n) \subset \overline{B}_{L^\infty(A)}$ contém uma subsucessão, ainda notada por (x_n), tal que

$$(x_n) \xrightarrow{*} x \in \overline{B}_{L^\infty(A)}.$$

Assim, como $\left|p_j^k\right|_{L^\infty(A)} \le 1$, tem-se que $\left(p_j^k\right) \subset \overline{B}_{L^\infty(A)}$ e logo, para cada $j \in \{1, ..., h\}$, existem uma função mensurável $p_j : A \to \mathbb{R}$,verificando $-1 \le p_j(t) \le 1$, para quase todo $t \in A$, e uma subsucessão de $\left(p_j^k\right)$ ainda notada por $\left(p_j^k\right)$, tais que

$$\left(p_j^k\right) \xrightarrow{*} p_j$$

em $L^\infty(A)$.

Vejamos que teremos que ter $0 \le p_j(t) \le 1$ para quase todo o t em A.

Suponhamos que não.

Então existe um conjunto mensurável $E = E(p_j) \subset A$ com $m(E) > 0$ tal que $-1 \leq p_j(t) < 0$ em E.

Como $\left(p_j^k\right) \overset{*}{\rightharpoonup} p_j$ em $L^\infty(A)$, temos

$$\left(\int_A p_j^k(t)\, g(t)\, dt\right) \to \int_A p_j g(t)\, dt, \quad \forall g \in L^1(A). \tag{5.69}$$

Em particular, temos

$$\left(\int_A p_j^k(t)\, \chi_E(t)\, dt\right) \to \int_A p_j(t)\, \chi_E(t)\, dt$$

onde $\chi_E(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ denota a função característica do conjunto E.

Assim,

$$\left(\int_E p_j^k(t)\, dt\right) \to \int_E p_j(t)\, dt.$$

Dado que $0 \leq p_j^k(t) \leq 1$, para cada k em $\mathbb{N}$, temos

$$0 \leq \int_E p_j^k(t)\, dt \leq m(E)$$

e portanto

$$0 \leq \int_E p_j(t)\, dt \leq m(E). \tag{5.70}$$

Mas se $-1 \leq \rho(t) < 0$ em E, temos

$$-m(E) \leq \int_E \rho(t)\, dt < 0$$

o que contradiz 5.70.

Existe então, para cada $j = 1, ..., h$, um conjunto $N = N(p_j) \subset A$, de medida nula, tal que $0 \leq p_j(t) \leq 1$ em $A \backslash N$.

De (5.69) resulta ainda que, para cada $j \in \{1, .., h\}$,

$$\left(\int_A \left(p_j^k(t) - p_j(t)\right) g(t)\, dt\right) \to 0, \quad \forall g \in L^1(A). \tag{5.71}$$

Em particular, temos (5.71) para $h(t) = 1$, $\forall t \in A$. Então

$$\left(\int_A \left(p_{k_j}(t) - p_j(t)\right) dt\right) \to 0, \quad \forall j \in \{1, ..., h\}$$

e portanto

$$\left(\sum_{j=1}^h \int_A \left(p_{k_j}(t) - p_j(t)\right) dt\right) \to 0 \Leftrightarrow \left(\int_A \sum_{j=1}^h \left(p_{k_j}(t) - p_j(t)\right) dt\right) \to 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_A \left(\sum_{j=1}^h p_{k_j}(t) - \sum_{j=1}^h p_j(t)\right) dt\right) \to 0 \Leftrightarrow \left(\int_A \left(1 - \sum_{j=1}^h p_j(t)\right) dt\right) \to 0.$$

Mas $\int_A \left(1 - \sum_{j=1}^h p_j(t)\right) dt$ não depende de k, então, como a medida de A é positiva, terá que ser

$$\int_A \left(1 - \sum_{j=1}^h p_j(t)\right) dt = 0 \Leftrightarrow 1 - \sum_{j=1}^h p_j(t) = 0, \text{ quase sempre em } A.$$

donde

$$\sum_{j=1}^h p_j(t) = 1, \text{ quase sempre em } A.$$

Por outro lado, dado que, para cada natural k, $f^{(j)} \in L^1(A)$ temos também

$$\left(\int_A p_{k_j}(t)\, f^{(j)}(t)\, dt\right) \to \int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt, \quad \forall j \in \{1, ..., h\}$$

pelo que

$$\left(\sum_{j=1}^{h}\int_A p_{k_j}(t)\, f^{(j)}(t)\, dt\right) \to \sum_{j=1}^{h}\int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt$$

e, pela unicidadade do limite,

$$\nu = \sum_{j=1}^{h}\int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt.$$

Assim, $\nu \in K$ e portanto K é fechado.

(d) $H \subset K$

Com efeito, se $\mu \in H$ então, por definição de H,

$$\mu = \sum_j \int_{E_j} f^{(j)}(t)\, dt$$

para subconjuntos convenientes E_j de A com $E_j \cap E_s = \emptyset$, $j, s = 1, ..., h$, $j \neq s$ e $\cup_j E_j = A$.

Definam-se as funções $p_j(t)$, $t \in A$, pondo, para cada $j = 1, ..., h$,

$$p_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in E_j \\ 0, & \text{se } t \notin E_j\,. \end{cases}$$

Então $0 \leq p_j(t) \leq 1$, para cada $t \in A$ e, uma vez que qualquer $t \in A$ pertence a um e a um só E_j, $\sum_j p_j(t) = 1$. Isto significa que $p = (p_1, ..., p_h)$ é um sistema de pesos para o conjunto K e, portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_j \int_{E_j} f^{(j)}(t)\, dt = \sum_j \left(\int_{E_1} p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt + ... + \int_{E_h} p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt\right) = \\ &= \sum_j \int_{\cup_j E_j} p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt = \sum_j \int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt \in K \end{aligned}$$

o que prova o pretendido.

(e) $extrK \subset H$

Dado que K é um conjunto convexo compacto e não-vazio e $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial topológico localmente convexo, pelo teorema de Krein-Milman (proposição 5.4.21) o conjunto dos pontos extremos de K, $extrK$, é não-vazio.

Seja então

$$\nu = \nu(p_1, ..., p_h) = \sum_{j=1}^{h}\int_A p_j(t)\, f^{(j)}(t)\, dt$$

um qualquer ponto extremo de K. Queremos provar que $\nu \in H$, isto é, existem h subconjuntos mensuráveis de A, E_j, $j = 1, ..., h$, com $E_j \cap E_s = \emptyset$, $j, s = 1, ..., h$, $j \neq s$ e $\cup_j E_j = A$ tais que

$$\nu = \sum_j \int_{E_j} f^{(j)}(t)\, dt.$$

Mostremos que as funções p_j tomam os valores 0 e 1 quase sempre em A.

Suponhamos que não.

Então existem um índice i, um número $0 < \varepsilon < 1$ e um subconjunto mensurável E de A com $m(E) > 0$ tais que

$$\varepsilon \leq p_i(t) \leq 1 - \varepsilon \quad \text{em } E^7.$$

Mas então terá que existir um outro índice j com uma propriedade análoga em algum subconjunto de E e para algum outro $0 < \varepsilon < 1$, pois caso contrário não se teria $\sum_j p_j(t) = 1$.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $i = 1$ e $j = 2$. Podemos afirmar que existem um número $0 < \varepsilon < 1$ e um subconjunto mensurável E de A com $m(E) > 0$ tais que

$$0 < \varepsilon \leq p_1(t)\,, \quad p_2(t) \leq 1 - \varepsilon < \quad \text{em } E.$$

[7] Isto resulta do teorema de Lusin (ver demonstração do teorema 5.4.22).

Sejam $q = (q_1, ..., q_h)$ e $r = (r_1, ..., r_h)$, duas funções definidas em A com valores em $\mathbb{R}^n$ verificando

$$q_i = r_i = p_i, \quad i = 1, ..., h$$

em $A \backslash E$ e

$$q_1 = p_1 - \varepsilon, \ \ q_2 = p_2 + \varepsilon, \ \ r_1 = p_1 + \varepsilon, \ \ r_2 = p_2 - \varepsilon, \ \ q_i = r_i = p_i, \ i = 3, ..., h$$

em E.

Então

$$\frac{q+r}{2} = p \text{ em } A$$

e

$$0 \leq q_j \leq 1, \ \ 0 \leq r_j \leq 1, \ \ \sum_j q_j = 1, \ \ \sum_j r_j = 1$$

pelo que

$$\nu_1 = \nu(q_1, ..., q_h) = \sum_j \int_A q_j(t) f^{(j)}(t)\, dt \ \text{ e } \ \nu_2 = \nu(r_1, ..., r_h) = \sum_j \int_A r_j(t) f^{(j)}(t)\, dt$$

são elementos de K e

$$\begin{aligned}
\nu &= \sum_j \int_A p_j(t) f^{(j)}(t)\, dt = \sum_j \int_A \left(\frac{q_j + r_j}{2}\right)(t) f^{(j)}(t)\, dt = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_j \int_A q_j(t) f^{(j)}(t)\, dt + \sum_j \int_A r_j(t) f^{(j)}(t)\, dt\right) = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}
\end{aligned}$$

o que é absurdo dado que, por hipótese, ν é um ponto extremo de K.

O facto de as funções p_j tomarem os valores 0 e 1 quase sempre em A, significa que em cada subconjunto de A cujo complementar tem medida nula, apenas uma delas pode tomar o valor 1. Assim, suponhamos, sem perda de generalidade, que é $p_1(t) = 1$ em $E_1 \subset A$ com $m(A \backslash E_1) = 0$. Então $p_j(t) = 0$, $j = 2, ..., h$ em E_1. Sejam $E_2 = A \backslash E_1$ e $E_j = \emptyset$ para $j = 3, ..., h$. Então tem-se $E_j \cap E_s = \emptyset$, $j, s = 1, ..., h$, $j \neq s$, $\cup_j E_j = A$ e

$$\begin{aligned}
\nu &= \nu(p_1, ..., p_h) = \int_A p_1(t) f^{(1)}(t)\, dt + ... + \int_A p_h(t) f^{(h)}(t)\, dt = \\
&= \int_{E_1 \cup A \backslash E_1} p_1(t) f^{(1)}(t)\, dt + ... + \int_{E_1 \cup A \backslash E_1} p_h(t) f^{(h)}(t)\, dt = \\
&= \int_{E_1} p_1(t) f^{(1)}(t)\, dt + \int_{A \backslash E_1} p_1(t) f^{(1)}(t)\, dt + ... + \int_{E_1} p_h(t) f^{(h)}(t)\, dt + \int_{A \backslash E_1} p_h(t) f^{(h)}(t)\, dt = \\
&= \int_{E_1} 1 f^{(1)}(t)\, dt + \int_{A \backslash E_1} p_1(t) f^{(1)}(t)\, dt + ... + \int_{E_1} 0 f^{(h)}(t)\, dt + \int_{A \backslash E_1} p_h(t) f^{(h)}(t)\, dt
\end{aligned}$$

e como o integral de uma função integrável num conjunto de medida nula é zero tem-se, finalmente

$$\nu = \int_{E_1} f^{(j)}(t)\, dt = \int_{E_1} f^{(1)}(t)\, dt + ... + \int_{E_h} f^{(h)}(t)\, dt \in H.$$

(f) $H = K$

Por (a) H é convexo, então

$$H = co\, H$$

e por (d), $H \subset K$, portanto

$$co\, H \subset co\, K.$$

Por (b), K é convexo então

$$co\, K = K$$

e como, por (c), K é compacto, pelo teorema de Krein-Milman,

$$K = co\, extr K.$$

Por (e) $extr K \subset H$, pelo que se tem, finalmente,

$$co\, extr K \subset co\, H.$$

Assim

$$H = co\, H \subset co\, K = K = co\, extr K \subset co\, H$$

pelo que as inclusões nas relações anteriores são de facto igualdades, e portanto tem-se:

$$H = K$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Bibliografia

[1] ADAMS, R.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] ALEXÉEV, V., TIKHOMIROV, V. and FOMINE, S.: Commande Optimale, Mir, Moscou, 1982.

[3] AMBROSIO, L., ASCENZI, O. and BUTTAZZO, G.: Lipschitz Regularity for Minimizers of Integral Functionals with Highly Discontinuous Integrands, J. Math. Anal. Appl., **142**, 1989, 301-316.

[4] AUBIN, J.: Applied Abstract Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1977.

[5] AUBIN, J. and CELLINA, A.: Differential Inclusions – Set-valued Maps and Viability Theory, Springer-Verlag, New York, 1984.

[6] AUBIN, J. and FRANKOSWKA, H.: Set-valued Analysis, Birkhäuser, Boston, 1990.

[7] BUTTAZZO, G.: Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations, Pitman Res. Notes Math. Ser., **207**, Longman, Harlow, 1989.

[8] BUTTAZZO, G., GIAQUINTA, M. and HILDEBRANDT, S.: One-dimensional Variational Problems – An Introduction, Claredon Press, Oxford, 1998.

[9] BREZIS, H.: Analyse Fonctionnelle – Théorie et applications, 2nd ed., Masson, Paris, 1983.

[10] BROWDER, A.: Mathematical Analysis – An Intruduction, Springer-Verlag, New York, 1996.

[11] CELLINA, A. and COLOMBO, G.: On a Classical Problem of the Calculus of Variations without Convexity Assumptions, Ann. Inst. H. Poincaré, **7**, 1990, 97-106.

[12] CELLINA,A. and MARICONDA C.: The Existence Question in the Calculus of Variations: A Density Result, Proceedings of the American Mathematical Society, **120**, (4), 1994, 1145-1150.

[13] CELLINA, A., TREU, G. and ZAGATTI, S.: On the Minimum Problem for a Class of Non-coercive Functionals, Journal of Differential Equations, **127**, (1), 1996, 225-262.

[14] CESARI, L.: Optimization – Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] CHOQUET, G.: Topology, Academic Press, New York, 1966.

[16] CLARKE, F.: An Indirect Method in the Calculus of Variations, Trans. Amer. Math. Soc., **336**, 1993, 655-673.

[17] CLARKE, F.: Optimization and Nonsmooth Analysis, 2nd ed., Classics in Applied Math., Vol. 5, SIAM, Philadelphia, 1990.

[18] CLARKE, F.: Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., Vol. 57, SIAM, Philadelphia, 1989.

[19] CLARKE, F. and LOEWEN, P.: An Intermediate Existence Theory in the Calculus of Variations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **16**, (4), 1989, 487-526.

[20] COHN, D.: Measure Theory, Birkhäuser, Boston, 1980.

[21] CRASTA, G.: An Existence Result for Non-coercive Non-convex Problems in the Calculus of Variations, Nonlinear Analysis – Methods & Applications, **26**, (9), 1996, 1527-1533.

[22] CRASTA, G. and MALUSA, A.: Existence Results for Non-coercive Variational Problems, SIAM J. Control Optimization, **34**, (6), 1996, 2064-2076.

[23] DACOROGNA, B.: Introduction au Calcul des Variations, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1992.

[24] DACOROGNA, B.: Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[25] DAL MASO, G.: An Introduction to Γ-Convergence, Birkhäuser, Boston, 1993.

[26] DEBNATH, L. and MIKUSINSKI, P.: Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Academic Press, San Diego, 1990.

[27] DEIMLING, K.: Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, New York, 1992.

[28] DUGUNDJI, J.: Topology, Allyn and Bacon , Boston, 1966.

[29] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.: Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience, New York, 1958.

[30] EKELAND, I. and TEMAM, R.: Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[31] HIRIART-URRUTY, J. and LEMARÉCHAL, C.: Convex Analysis and Minimization Algoritms I – Fundamentals, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[32] LIMA, E.: Elementos de Topologia Geral, IMPA, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1970.

[33] LOEWEN, P.: Optimal Control via Nonsmooth Analysis, CRM Proceedings & Lecture Notes, **2**, Montréal, 1991.

[34] MARCELLINI, P.: Alcune Osservazioni sull'Esistenza del Minimo di Integrali del Calcolo delle Variazioni Senza Hipotesi di Convessità, Rend. Mat., **13**, 1980, 271-281.

[35] MARQUES M. and ORNELAS A.: Genericity and Existence of Minimum for Scalar Integral Functionals, Journal of Optimization Theory and Applications, **86**, (2), 1995, 421-431.

[36] OLECH, C.: The Lyapunov Theorem: its Extensions and Applications, in "Methods of Nonconvex Analysis", A. Cellina ed., Springer-Verlag, New York, 1990.

[37] OLECH, C.: Lectures on the Integration of Set-valued Functions, SISSA, Trieste, 1987.

[38] OLECH, C.: Existence Theory in Optimal Control, in Control Theory and Topics in Functional Analysis, Vol. I, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[39] PEDREGAL, P.: Parametrized Measures and Variational Principles, Birkhäuser, Basel, 1997.

[40] ROBERTS, A. and VARBERG, D.: Another Proof that Convex Functions are Locally Lipschitz, Am. Math. Mon., **81**, 1974, 1014-1016.

[41] ROCKAFELLAR, R.: Integral Functionals, Normal Integrands and Measurable Functions, in "Nonlinear Operators and the Calculus of Variations – Bruxelles 1975", Springer-Verlag, New York, 1976.

[42] ROCKAFELLAR, R.: Conjungate Duality and Optimization, CBMS-NSF, Regional Conference Series, Vol. 16, SIAM, Philadelphia, 1974.

[43] ROCKAFELLAR, R.: Convex Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[44] ROCKAFELLAR, R. and WETS, R.: Variational Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[45] RUDIN, W.: Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[46] RUDIN, W.: Real and Complex Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.

[47] TAYLOR, A. and LAY, D.: Introduction to Functional Analysis, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1980.

[48] WHEEDEN, R. and ZYGMUND, A.: Measure and Integral – An Introduction to Real Analysis, Marcel Dekker, New York, 1977.

[49] ZEIDLER, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1986.