UNIVERSIDADE DE ÉVORA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
1995/97

SUB-NORMALIDADE HOMOCEDÁSTICA, VALIDAÇÃO E INFERÊNCIA PARA MÉTODOS ANALÍTICOS COM EXTENSÃO AO ESTUDO DA PRECISÃO RELATIVA

Dissertação de Mestrado realizada por:
Célia Maria Pinto Nunes

Évora 1997

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

1995/97

SUB-NORMALIDADE HOMOCEDÁSTICA, VALIDAÇÃO E INFERÊNCIA PARA MÉTODOS ANALÍTICOS COM EXTENSÃO AO ESTUDO DA PRECISÃO RELATIVA

Dissertação de Mestrado realizada por:

Célia Maria Pinto Nunes

Évora 1997

Autora: *Célia Maria Pinto Nunes*

Orientador: Professor Doutor *João Tiago Mexia*

Co-orientador: Professor Doutor *Carlos Braumann*

Lista de símbolos

Página

$\vec{Y}^n \to$ índice superior indica o número de componentes 2

$I_n \to$ matriz identidade de ordem n 2

$\|\vec{v}^n\| \to$ norma euclidiana do vector $\vec{v}^n$ 3

$Y^n \sim F \to Y^n$ tem distribuição F 6

$\vec{Y}^n \equiv \vec{a}^n \to \vec{Y}^n$ degenera no vector contraste $\vec{a}^n$ 6

$Q(\chi) \to$ matriz de projecção ortogonal sobre χ 6

$U(W) \to$ família das matrizes uniformizadoras de W 7

$Y_1(i)Y_2 \to Y_1$ é independente de Y_2 8

$\{\vec{\beta}_1^n,\ldots,\vec{\beta}_s^n\} = b\perp(\chi) \to \vec{\beta}_1^n,\ldots,\vec{\beta}_s^n$ é uma base ortonormada para χ 8

$\chi^2_{n,\delta} \to$ chi-quadrado com n graus e liberdade e parâmetro de não centralidade δ 8

$\vec{u}^n = £(\vec{u}_1^{n_1},\ldots,\vec{u}_J^{n_J}) \to \vec{u}^n$ é obtido sobrepondo os $\vec{u}_1^{n_1},\ldots,\vec{u}_J^{n_J}$ 8

$A^{\perp} \to$ matriz com vectores linha ortogonais aos de A 9

$car(A) \to$ característica da matriz A 15

$\varphi(t^n) \to$ função característica de ${}^nF$ 16

$\chi^{(\ell,n)} \to$ sub-espaço com dimensão ℓ de R^n 18

$\lambda(t_1,t_2) \to$ função geradora de momentos para o par (V_1,V_2) 18

$F(v_1,v_2) \to$ distribuição conjunta de (V_1,V_2) 18

$[\vec{a}^n]_\chi \to$ classe de congruência associada a $\chi^{(r,n)}$ que contém $\vec{a}^n$ 24

$A^0 = q.o(A') \to A^0$ é a matriz cujos vectores linha são obtidos aplicando o processo de ortonormalização de GRAM-SCHMIDT aos vectores linha de A' 25

$£(B\text{-}A) \to$ sub-matriz formada pelas linhas de B que não pertencem a A 27

UMP $\to$ uniformemente mais potente 29

$\beta(v,q) \to$ função potência condicional de um teste de nível q 29

$\beta(q|F) \to$ potência do teste de nível q dada a distribuição F 29

$\Gamma(n) \to$ função gama 42

Índice

Página

1- Introdução ... 1

2- Validação dos modelos sub-normais

2.1- Pressupostos ... 2

2.2- Amostras ... 2

2.3- Verificação dos pressupostos ... 4

3- Distribuições normais e sub-normais

3.1- Distribuições normais ... 6

3.2-Distribuições normais homocedásticas e projecções ... 8

3.3- Representação sub-normal ... 12

3.4- Distribuições sub-normais regulares ... 14

3.5- Distribuições sub-normais homocedásticas e projecções ... 17

4- Testes F com restrições

4.1- Hipóteses simples ... 24

4.2- Hipóteses e fraccionamento ... 31

4.3- Hipóteses e partições ortogonais ... 39

5- Precisão relativa

5.1- Considerações prévias ... 41

5.2- Estimação pontual ... 41

5.3- Intervalo de confiança ... 45

5.4- Testes de hipóteses ... 46

1- Introdução

Para além dos bem conhecidos erros de primeira e segunda espécie, que correspondem à rejeição duma hipótese verdadeira e à aceitação duma falsa, tem que se considerar o erro de terceira espécie que se verifica quando se escolhe um modelo errado . Para nos protegermos deste erro convém reduzir o número de pressupostos em que os nossos modelos assentam e desenvolver técnicas para verificar os mesmos .

Na interpretação de resultados obtidos através de modelos numéricos é usual admitirem-se modelos normais . Dado que essa admissão tem muitas vezes carácter automático compreende-se que não existe, nestes casos, protecção contra eventuais erros de terceira espécie . Uma alternativa a este procedimento consistirá em substituir os modelos normais por sub-normais . No que se segue começaremos por analizar os pressupostos em que estes novos modelos assentam utilizando o teste de FRIEDMAN e um teste baseado em quocientes de chi-quadrados para a sua verificação . Após termos considerado a validação destes modelos veremos como realizar a inferência estatística nos mesmos . Para isso começamos por estudar as distribuições sub-normais que são as distribuições dos vectores de observações quando se consideram modelos sub-normais . Este estudo permitir-nos-á construir testes F quando se admitem restrições ao vector das observações . Como veremos essas restrições são de natureza muito geral sendo de admitir na maioria das situações de interesse prático . A concluir apresentamos resultados novos sobre a precisão relativa de métodos de medida no quadro dos modelos sub-normais .

2- Validação dos modelos sub-normais

2.1- Pressupostos

Nos modelos sub-normais admite-se que o vector $\vec{Y}^n$ das observações é a soma de duas componentes independentes, ou seja

(1) $$\vec{Y}^n = \vec{Z}^n + \vec{e}^n$$

onde $\vec{Z}^n$ representa o que se mede e $\vec{e}^n$ corresponde aos erros de medida e é suposto ser normalmente distribuido .

Subjacentes à anterior definição estão dois pressupostos :

a) objectividade - os erros de medida são independentes do que se mede;

b) normalidade dos erros .

Este segundo pressuposto é muitas vezes completado exigindo-se que $\vec{e}^n$ tenha vector médio nulo, $\xi(\vec{e}^n) = \vec{0}^n$, e matriz de covariância $\sum(\vec{e}^n) = \sigma^2 I_n$ onde I_n é a matriz identidade de ordem n, sendo portanto normais homocedásticas . Os modelos sub-normais que então se têm são sub-normais homocedásticos .

Um outro pressuposto que muitas vezes é introduzido é o de reprodutibilidade que consiste em admitir que observações colhidas nas mesmas condições têm erros independentes e identicamente distribuidos . Este pressuposto é, como é fácil de se ver, coerente com o admitir-se que o modelo é sub-normal homocedástico . As componentes de $\vec{Z}^n$ correspondentes a observações colhidas nas mesmas condições serão idênticas e as de $\vec{e}^n$ i.i.d . Verifica-se-á então uma situação de delineabilidade em que se sabe, à priori, que $\vec{Z}^n \in \Omega$ com Ω sub-espaço de R^n conhecido . Com efeito conhecem-se os grupos de componentes iguais de $\vec{Z}^n$.

2.2- Amostras

Existe delineabilidade se podermos tomar repetidas medidas para algumas combinações de níveis dos factores a considerar . Estas combinações de níveis serão os tratamentos de um delineamento . Assim delineabilidade significa a possibilidade de escolha dos tratamentos para os quais são tomadas medidas repetidas . Vamos admitir que se possui delineabilidade . As amostras primárias serão constituidas por medidas repetidas tomadas para o mesmo tratamento .

Quando medidas anteriores não interferem nas seguintes, os nossos resultados não dependem da sua ordem e haverá reprodutibilidade .

Finalmente, a objectividade, que é a independência entre os erros de medida e o que é medido, exige que a variação interna das amostras primárias não dependa dos tratamentos correspondentes . Seja $\vec{Y}^m$ um vector cujas componentes $Y_1,\dots,Y_m$ constituem uma amostra primária e $\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$ a sua média . A matriz ortogonal $P = [p_{i,j}]$ do tipo m×m, é ortogonal standardizada se $p_{1,1} = \dots = p_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{m}}$, as m-1 linhas inferiores de P constituem uma matriz de contrastes standardizada K do tipo (m-1) ×m . A correspondência entre ambas as familias de matrizes é, ver MEXIA (1988),uma bijecção e, com $\vec{Z}^{m-1} = K\vec{Y}^m$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2 = \left\|\vec{Z}^{m-1}\right\|^2 \tag{1}$$

. Assim podemos usar $\vec{Z}^{m-1}$ para representar a variação interna das amostras primárias . Visto que as componentes de $P\vec{Y}^m$ são $\sqrt{m}\overline{Y}$ mais as componentes de $\vec{Z}^{m-1}$ teremos :

$$\vec{Y}^m = P^T\begin{bmatrix}\sqrt{m}\overline{Y}\\ \cdots \\ \vec{Z}^{m-1}\end{bmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{m}}\vec{1}^m \;\vdots\; K^T\right]\begin{bmatrix}\sqrt{m}\overline{Y}\\ \cdots \\ \vec{Z}^{m-1}\end{bmatrix} = \overline{Y}\vec{1}^m + K^T\vec{Z}^{m-1} \tag{2}$$

deste modo podemos escrever $\vec{Y}^m$ como a soma de um vector com componentes iguais a $\overline{Y}$ e da imagem de $\vec{Z}^{m-1}$ por K^T . Além disto, se P_1 e P_2 são matrizes ortogonais standardizadas do tipo m×m às quais correspondem, respectivamente, as matrizes de contrastes standardizadas K_1 e K_2, atendendo a (2), teremos $K_2^T\vec{Z}_2^{m-1} = K_1^T\vec{Z}_1^{m-1} = \vec{Y}^m - \overline{Y}\vec{1}^m$ e, visto que $K_2K_2^T = I_{m-1}$

$$\vec{Z}_2^{m-1} = K_2K_1^T\vec{Z}_1^{m-1} \tag{3}$$

assim os vectores que podemos usar para representar a variação interna duma amostra primária são equivalentes .

2.3 - Verificação dos pressupostos

Se tivermos J_1 ,..., J_L níveis para os factores relevantes e usarmos um delineamento completo no qual são consideradas todas as possíveis combinações teremos $J = \prod_{\ell=1}^{L} J_\ell$ tratamentos . Se forem tomadas m medidas $Y_{j,1}$,..., $Y_{j,m}$ para o tratamento com índice j, j = 1,...,J teremos a matriz $[Y_{j,t}]$ dos resultados . Além das amostras primárias que constituem as linhas desta matriz temos as amostras secundárias alinhadas segundo as colunas . Estas amostras são constituidas pelas medidas tomadas no primeiro, segundo, ..., lugar para cada tratamento, logo elas estão emparelhadas . Quando existe reprodutibilidade as amostras secundárias terão a mesma distribuição e sendo assim podemos aplicar-lhes o teste de FRIEDMAN com o objectivo de verificar se possuem reprodutibilidade .

Consideremos que a matriz $[Y_{j,t}]$ tem como vectores linha $\vec{Y}_j^m$, j = 1 ,..., J . Sendo K uma matriz de contrastes standardizada do tipo (m-1)×m, se existir objectividade as matrizes derivadas constituidas pelas componentes de $\vec{Z}_j^{m-1} = K\vec{Y}_j^m$, j = 1 ,..., J , terão a mesma distribuição . Estas matrizes são obviamente emparelhadas assim , verificando-se a objectividade , podemos aplicar o teste de FRIEDMAN às matrizes derivadas .

Ambas as aplicações do teste de FRIEDMAN que considerámos podem ser realizadas independentemente . Podemos igualmente juntá-las num teste para hipóteses de reprodutibilidade e objectividade . Estas hipóteses conjuntas serão rejeitadas se uma das sub-hipóteses o for . Se os testes parciais tiverem níveis q_1 e q_2 , representando por rej_1 e rej_2 [rej] as falsas rejeições das sub-hipóteses [hipóteses] , teremos $pr(rej_i) = q_i$, i = 1,2 . Visto que $rej = rej_1 \cup rej_2$ temos , para o teste conjunto de nível q , as desigualdades :

(1) $$0 \le q \le q_1 + q_2$$

visto que $q = pr(rej)$.

Finalmente, se admitirmos que $Y_{j,i} = V_j + e_{j,i}$, $i = 1,\ldots, m$, $j = 1,\ldots, J$, sendo as $e_{j,i}$, $i = 1,\ldots, m$, $j = 1,\ldots, J$, i.i.d. normais com valor médio nulo e variância σ^2, ter-se-á

(2) $$\vec{Z}_j^{m-1} = K\vec{Y}_j^m = K\vec{e}_j^m \; ; j = 1,\ldots, J$$

e como $\vec{e}_j^m$ é normal com vector médio $\vec{0}^m$ e matriz de covariância $\sigma^2 I_m$, $\vec{e}_j^m \sim N(\vec{0}^m,\sigma^2 I_m)$, ter-se-á, ver SEBER (1980, pag 52), $\vec{Z}_j^m \sim N(\vec{0}^{m-1},\sigma^2 I_{m-1})$, $j = 1,\ldots, J$.

Seja $\vec{Z}^{m\,J} = £(\vec{Z}_1^m,\ldots,\vec{Z}_J^m)$ o vector obtido subrepondo os $\vec{Z}_1^m,\ldots,\vec{Z}_J^m$. Quando estes são i.i.d. com distribuição $N(\vec{0}^m,\sigma^2 I_{m-1})$ ter-se-á $\vec{Z}^{m\,J} \sim N(\vec{0}^m,\sigma^2 I_{J(m-1)})$. Assim, a partir do pressuposto de que os erros eram normais e homocedásticos, chega-se à hipótese testável

(3) $$H_0\text{: } \vec{Z}^{J(m-1)} \sim N(\vec{0}^m,\sigma^2 I_{J(m-1)})$$

. Sendo $Z_0 = \frac{1}{J(m-1)}\sum_{i=1}^{J(m-1)} Z_i$ e $\Delta = \sum_{i=1}^{J(m-1)} (Z_i - Z_0)^2$, o teorema de FISHER das amostras normais diz-nos que, quando H_0 se verifica, $Z_0 \sim n(z|\ 0,\frac{\sigma^2}{J(m-1)})$ independente de $\Delta \sim \sigma^2 \chi_{J(m-1)-1}$, tendo-se $J(m-1)Z_0^2 \sim \sigma^2\chi_1^2$ independente de Δ. Assim, ainda quando H_0 se verifica

(4) $$\Im = \frac{\Delta}{J(m-1)Z_0^2}$$

será o quociente de dois chi-quadrados independentes . Sendo $[\Im_{q/2}\ ;\ \Im_{1-q/2}]$ o intervalo limitado pelos quantis, para as probabilidades q/2 e 1-q/2 , da distribuição do quociente de chi-quadrados independentes com J(m-1)-1 e 1 graus de liberdade mostra-se, ver MEXIA (1989, pags 47 a 66), que o teste para H_0 com estatística $\Im$ e região de aceitação $[\Im_{q/2}\ ;\ \Im_{1-q/2}]$ tem boas propriedades .

3- Distribuições normais e sub-normais

3.1- Distribuições normais

Consideremos que Y^n tem distribuição F , escrevemos $Y^n \sim {}^nF$ ou $Y^n \sim F$, e representemos por AoF a distribuição de AY^n . Se $Y^n \equiv a^n$ pomos $Y^n \sim T_{a^n}$ enquanto $*$ coloca-se para indicar a convolução (*). Então, ver LUKACS e LAHA (1961 , pag 29 a 30)

$$
(1) \qquad \begin{cases} AoN(\mu^n,\sigma^2 W) = N(A\mu^n,\sigma^2 AWA^T) \\ T_{a^n} * N(\mu^n,\sigma^2 W) = N(\mu^n + a^n,\sigma^2 W) \\ N(\mu_1{}^n,\sigma^2 W_1) * N(\mu_2{}^n,\sigma^2 W_2) = N(\sum_{i=1}^{2}\mu_i^n,\sigma^2 \sum_{i=1}^{2} W_i) \end{cases}
$$

donde se conclui que $T_{0^n} * N(\mu^n, \sigma^2 W) = N(\mu^n, \sigma^2 W)$ e que toda a distribuição normal é sub-normal . Uma vez que a matriz de projecção ortogonal $Q(\chi)$ em χ é, ver SEBER (1980, pag 14), simétrica e idempotente, temos

$$
(2) \qquad Q(\chi) \text{ o } N(\mu^n, \sigma^2 I_n) = N(\mu_\chi{}^n, \sigma^2 Q(\chi) I_n Q(\chi)^T) = N(\mu_\chi{}^n, \sigma^2 Q(\chi))
$$

. $N(\mu^n, \sigma^2 W)$ é normal regular quando W é regular, temos então a densidade

$$
(3) \qquad f(y^n / \mu^n,\sigma^2 W) = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y^n-\mu^n)^T W^{-1}(y^n-\mu^n)}}{(2\pi)^{n/2}\sigma^2\sqrt{|W|}}
$$

. Vamos agora estabelecer a

Proposição 1

Uma distribuição normal tem densidade se e só se é regular .

(*) A convolução das distribuições F_1 e F_2 é dada por $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(z-x)dF_2(x)$ pondo-se $F = F_1 * F_2$.

Dem: Visto que quando $N(\mu^n, \sigma^2 W)$ é normal regular ou seja, W é regular, tem densidade, então basta mostrar que se W é singular não tem densidade. Consideremos que W é singular, então tem um vector próprio α^n que corresponde a um valor próprio nulo donde, com $Y^n \sim N(\mu^n, \sigma^2 W)$, $\alpha^T Y^n$ terá valor médio $\alpha^T \mu^n$ e variância $\sigma^2 \alpha^T W \alpha^n = 0$, e de acordo com a inequação de BIENAYMÉ, vem $\alpha^T y^n \equiv \alpha^T \mu^n$ e um conjunto de medida de LEBESGUE nula terá probabilidade um (**), logo não pode ter densidade.

Se $N(\mu^n, \sigma^2 W)$ é normal regular então a matriz W é simétrica e, ver MEXIA (1989, pag 24), definida positiva. Existirá então uma matriz ortogonal P tal que

$$PWP^T = D(k_1, \ldots, k_n) \tag{4}$$

onde $D(k_1, \ldots, k_n)$ é uma matriz diagonal cujos elementos principais $k_1, \ldots, k_n$ são os valores próprios de W. É fácil ver, que

$$G_0 = D(k_1^{-1/2}, \ldots, k_n^{-1/2})\, P \tag{5}$$

é solução da equação matricial

$$GWG^T = I_n \tag{6}$$

Representemos por $U(W)$ a familia das soluções desta equação. $U(W)$ é a familia das <u>matrizes uniformizadoras</u> de W. Temos que $G_0 \in U(W)$. Agora, ver MEXIA (1989, pag 24), se $G \in U(W)$ e P é ortogonal temos $PG \in U(W)$, se $G_1, G_2 \in U(W)$ então $G_2 G_1^{-1}$ é ortogonal, e com L regular, $G_1 L^{-1}$ pertence a $U(LWL^T)$. Então, com $G \in U(W)$, $AG \in U(W)$ se e só se A é ortogonal. Temos ainda com $G \in U(W)$

$$G \circ N(\mu^n, \sigma^2 W) = N(G\mu^n, \sigma^2 GWG^T) = N(G\mu^n, \sigma^2 I_n) \tag{7}$$

assim podemos reduzir heterocedasticidade regular a homocedasticidade.

(**) A densidade, quando existe, é a derivada de RADON-NYKODIM da medida de probabilidade em relação à medida de LEBESGUE.

Se $Y_1^{n_1}(i) \ldots (i)Y_J^{n_J}$ então as covariâncias entre componentes de vectores distintos serão nulas, e se $Y_j^{n_j} \sim N(\mu_j^{n_j}, \sigma^2 W_j)$, $j = 1,\ldots,J$, temos $Y^n = £(Y_1^{n_1}, \ldots, Y_J^{n_J}) \sim N(\mu^n, \sigma^2 W)$ com $\mu^n = £(\mu_1^{n_1}, \ldots, \mu_J^{n_J})$ e $W = D(W_1, \ldots, W_J)$. Se $G_j \in U(W_j)$, $j = 1, \ldots, J$, e $G = D(G_1, \ldots, G_J)$, isto é, se G for diagonal por blocos, temos que $G \in U(W)$ e $G^{-1} = D(G_1^{-1}, \ldots, G_J^{-1})$.

3.2- Distribuições normais homocedásticas e projecções

Seja $N(\mu^n, \sigma^2 I_n)$ uma distribuição normal homocedástica . Dada a matriz A do tipo s×n com vectores linha $\vec{\beta}_1^n, \ldots, \vec{\beta}_s^n$, $A = £(\vec{\beta}_1^T, \ldots, \vec{\beta}_s^T)$ a mesma é quase-ortogonal se e só se $AA^T = I_s$. Com $Z^n \sim N(\mu^n, \sigma^2 I_n)$, vem $A(\mu^n + Z^n) \sim N(A(\mu^n + Z^n), \sigma^2 I_s)$, e se $\vec{\beta}_1^n, \ldots, \vec{\beta}_s^n$ for uma base ortonormada para χ , $\{\vec{\beta}_1^n, \ldots, \vec{\beta}_s^n\} = b\perp(\chi)$, ter-se-á

$$(1) \qquad \left\|A(u^n + \mu^n)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{s} \left[\beta_i^T (u^n + \mu^n)\right]^2 = \left\|(u^n + \mu^n)_\chi\right\|^2$$

vindo, ver SEBER (1980 , pag 5 e 6),

$$(2) \qquad \left\|A(u^n + Z^n)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{s} \left[\beta_i^T (u^n + Z^n)\right]^2 = \left\|(u^n + Z^n)_\chi\right\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{s,\delta}$$

onde

$$(3) \qquad \delta = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{s} \left[\beta_i^T (u^n + \mu^n)\right]^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left\|A(u^n + \mu^n)\right\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left\|(u^n + \mu^n)_\chi\right\|^2$$

. Por exemplo, no caso de A ser ortogonal, temos $\chi = R^n$ e

$$\left\|A(u^n + Z^n)\right\|^2 = \left\|u^n + Z^n\right\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n,\delta}$$

com

$$\delta = \frac{1}{\sigma^2} \left\|A(u^n + \mu^n)\right\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left\|u^n + \mu^n\right\|^2$$

Se os vectores linha [vectores coluna] de A_1 são ortogonais aos de A_2 , A_1 e A_2 são horizontalmente [verticalmente] ortogonais, escrevemos $A_1 \perp (h) A_2$ $[A_1 \perp (v) A_2]$. Considerando $A_1 \perp (h) A_2$ e $Z^n \sim N(\mu^n, \sigma^2 I_n)$ temos

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_2 \end{bmatrix} Z^n = \begin{bmatrix} A_1 Z^n \\ \cdots \\ A_2 Z^n \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_2 \end{bmatrix} \mu^n, \sigma^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_2 \end{bmatrix} I_n \begin{bmatrix} A_1^T & \vdots & A_2^T \end{bmatrix} \right) =$$

$$= N\left(\begin{bmatrix} A_1 \mu^n \\ \cdots \\ A_2 \mu^n \end{bmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} A_1 A_1^T & \vdots & A_1 A_2^T \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_2 A_1^T & \vdots & A_2 A_2^T \end{bmatrix} \right) = N\left(\begin{bmatrix} A_1 \mu^n \\ \cdots \\ A_2 \mu^n \end{bmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} A_1 A_1^T & \vdots & 0_1 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0_2 & \vdots & A_2 A_2^T \end{bmatrix} \right)$$

onde 0_1 e 0_2 são sub-matrizes nulas vindo, ver LUCKACS e LAHA (1961 , pag 29), $A_1 Z^n$ (i) $A_2 Z^n$ dado que os dois vectores têm distribuição conjunta normal e as covariâncias entre as componentes de um e de outro são nulas . Por exemplo, sendo $Q(\nabla)$ a matriz de projecção ortogonal de ∇, se χ_1 e χ_2 são subespaços mutuamente ortogonais de R^n os vectores coluna de $Q(\chi_1)$, pertencentes a χ_1 , são ortogonais aos vectores coluna de $Q(\chi_2)$, os quais pertencem a χ_2, e $Q(\chi_1) \perp (v) Q(\chi_2)$. Visto que estas matrizes são simétricas, os seus vectores coluna são os seus vectores linha e $Q(\chi_1) \perp (h) Q(\chi_2)$. Então, com $Z^n \sim N(\mu^n, \sigma^2 I_n)$, temos $Z^n_{\chi_1} = Q(\chi_1) Z^n (i) Z^n_{\chi_2} = Q(\chi_2) Z^n$. Agora tomando $\{\vec{\beta}^n_1, \ldots, \vec{\beta}^n_n\} = b\perp(R^n)$, se considerármos $A = £(\vec{\beta}^T_1, \ldots, \vec{\beta}^T_m)$ e $A^\perp = £(\vec{\beta}^T_1, \ldots, \vec{\beta}^T_{n-m})$ temos $A \perp (h) A^\perp$ então, se $Z^n \sim N(\mu^n, \sigma^2 I_n)$, vem AZ^n (i) $A^\perp Z^n$. Este segundo caso é similar ao primeiro visto que se χ é o subespaço gerado por $\vec{\beta}^n_1, \ldots, \vec{\beta}^n_m$, $\chi^\perp$ é gerado por $\vec{\beta}^n_{n-m+1}, \ldots, \vec{\beta}^n_n$.

Dado $S_1 \sim \sigma^2 \chi^2_{r,\delta}$ (i) $S_2 \sim \sigma^2 \chi^2_{s,\delta'}$ atendendo à reprodutibilidade dos chi-quadrados, ver SEBER (1980, pgs 5 e 6), tem-se $\sum_{i=1}^{2} S_i \sim \sigma^2 \chi^2_{r+s,\delta+\delta'}$. Temos ainda

$\Im = \frac{S_1}{S_2} \sim \overline{F}(z|r,s,\delta,\delta')$, onde com

$$(5) \qquad \begin{cases} \overline{F}(z|r,s,\delta) = \overline{F}(z|r,s,\delta,0) \\ \overline{F}(z|r,s) = \overline{F}(z|r,s,0,0) \end{cases}$$

se tem, ver KENDAL & STUART (1961, pags 251 e 252),

$$(6)\qquad \begin{cases} \overline{F}(z|r,s,\delta,\delta') = e^{-(\frac{\delta+\delta'}{2})}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^i(\frac{\delta'}{2})^j}{i!\,j!}\overline{F}(z|r+2i,s+2j) \\ \overline{F}(z|r,s,\delta) = e^{-\delta/2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^i}{i!}\overline{F}(z|r+2i,s) \end{cases}$$

, tendo $\overline{F}(z|r,s)$ a densidade

$$(7)\qquad \overline{f}(z|r,s) = \begin{cases} \frac{1}{B(\frac{r}{2},\frac{s}{2})}\frac{z^{\frac{r}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{r+s}{2}}} \ ; \ z \geq 0 \\ 0 \ ; \ z \leq 0 \end{cases}$$

, onde B(u,v) é a função beta .Ora de (6) é fácil obter, com k = i-1

$$\frac{\partial\overline{F}(z|r,s,\delta,\delta')}{\partial\delta} = -\frac{1}{2}e^{-(\frac{\delta+\delta'}{2})}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^i(\frac{\delta'}{2})^j}{i!\,j!}\overline{F}(z|r+2i,s+2j) + e^{-(\frac{\delta+\delta'}{2})}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i}{2}\frac{(\frac{\delta}{2})^{i-1}(\frac{\delta'}{2})^j}{i!\,j!}\overline{F}(z|r+2i,s+2j)$$

$$= -\frac{1}{2}\overline{F}(z|r,s,\delta,\delta') + \frac{1}{2}e^{-(\frac{\delta+\delta'}{2})}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^{i-1}(\frac{\delta'}{2})^j}{(i-1)!\,j!}\overline{F}(z|r+2i,s+2j)$$

$$= -\frac{1}{2}\overline{F}(z|r,s,\delta,\delta') + \frac{1}{2}e^{-(\frac{\delta+\delta'}{2})}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^k(\frac{\delta'}{2})^j}{k!\,j!}\overline{F}(z|r+2+2k,s+2j)$$

$$= \frac{\overline{F}(z|r+2,s,\delta,\delta') - \overline{F}(z|r,s,\delta,\delta')}{2}$$

Análogamente obtem-se

$$\frac{\partial\overline{F}(z|r,s,\delta,\delta')}{\partial\delta'} = \frac{\overline{F}(z|r,s+2,\delta,\delta') - \overline{F}(z|r,s,\delta,\delta')}{2}$$

Considerando $\chi^2_{r,\delta}$ (i) $\chi^2_{s,\delta'}$ (i) $\chi^2_{2,0}$ e atendendo à reprodutibilidade dos chi-quadrados ter-se-á

$$\begin{cases} \dfrac{\chi^2_{r,\delta}}{\chi^2_{s,\delta'}} \sim \overline{F}(z|r,s,\delta,\delta') \\ \dfrac{\chi^2_{r,\delta}+\chi^2_{2,0}}{\chi^2_{s,\delta'}} \sim \overline{F}(z|r+2,s,\delta,\delta') \\ \dfrac{\chi^2_{r,\delta}}{\chi^2_{s,\delta'}+\chi^2_{2,0}} \sim \overline{F}(z|r,s+2,\delta,\delta') \end{cases}$$

pelo que

$$\overline{F}(z|r+2,s,\delta,\delta') < \overline{F}(z|r,s,\delta,\delta') < \overline{F}(z|r,s+2,\delta,\delta')$$

, donde concluimos que

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\overline{F}(z|r,s,\delta,\delta')}{\partial\delta} < 0 \\ \dfrac{\partial\overline{F}(z|r,s,\delta,\delta')}{\partial\delta'} > 0 \end{cases}$$

, logo

$$(9) \qquad \frac{\partial\overline{F}(z|r,s,\delta)}{\partial\delta} < 0$$

Consideremos

$$(10) \qquad \Im = \frac{s}{r}\frac{S_1}{S_2} \sim F(z|r,s,\delta,\delta') = \overline{F}(\frac{r}{s}z|r,s,\delta,\delta')$$

onde F(z|r,s, δ,δ') é a distribuição F com r e s graus de liberdade e parâmetros de não centralidade δ e δ'. Quando δ'= 0 temos

$$(11) \qquad \begin{cases} F(z|r,s,\delta) = F(z|r,s,\delta,0) = \overline{F}(\frac{r}{s}z|r,s,\delta,0) = \overline{F}(\frac{r}{s}z|r,s,\delta) \\ F(z|r,s) = F(z|r,s,0,0) = \overline{F}(\frac{r}{s}z|r,s,0,0) = \overline{F}(\frac{r}{s}z|r,s) \end{cases}$$

Seja $\Im_{1-q,r,s}$ o quantil, para a probabilidade 1-q, de F(z|r,s) . Então, ver MEXIA (1989, pag 28), se considerármos $r > 1$ e $G_1 \sim \chi^2_{r-1,0}$ (i) $G_2 \sim \chi^2_{s,0}$ (i) $G_3 \sim \chi^2_{1,0}$ vem $G_4 = G_1 + G_3 \sim \chi^2_{r,0}$ (i) $G_2 \sim \chi^2_{s,0}$ e, com $Z_1 = G_3/G_2 \sim \overline{F}(z|1,s)$ e $Z_2 = G_4/G_2 \sim \overline{F}(z|r,s)$. Como $Z_1 < Z_2$, sendo $Z_{1-q,1,s}$ e $Z_{1-q,r,s}$ os quantis, para a probabilidade 1-q, de $\overline{F}(z|1,s)$ e $\overline{F}(z|r,s)$, temos $Z_{1-q,1,s} < Z_{1-q,r,s}$. Como $sZ_1 \sim F(z|1,s)$ e $\frac{s}{r} Z_2 \sim F(z|r,s)$, temos $\Im_{1-q,1,s} = s\, Z_{1-q,1,s}$ e $\Im_{1-q,r,s} = \frac{s}{r} Z_{1-q,r,s}$, donde se conclui que

$$\Im_{1-q,1,s} < r\, \Im_{1-q,r,s}$$

Caso $r > 1$ e $s > 2$ vê-se nas tabelas da distribuição F que para os valores mais usuais de q

(12) $$\Im_{1-q,r,s} < \Im_{1-q,1,s} < r \Im_{1-q,r,s}$$

3.3 - Representação sub-normal

Se $F_2 = F_{2,1} * N$, com N normal temos uma representação sub-normal de F_2 . Visto que $*$ é associativa, virá

(1) $$F_1 * F_2 = F_1 * (F_{2,1} * N) = (F_1 * F_{2,1}) * N$$

donde concluimos que a convolução preserva representações sub-normais .

Considerando $0_{n,n}$ como a matriz nula n×n temos, para toda a distribuição ${}^nF$

(2) $${}^nF * N(0^n, 0_{n,n}) = {}^nF$$

como tal , todas as distribuições têm representação sub-normal . Apenas quando exigimos que N seja regular chegamos a uma classe especial de distribuições .

Se Y_1^n (i) Y_2^n e $Y_i^n \sim {}^nF_i$, i = 1,2 poremos $(Y_1^n, Y_2^n) \sim ({}^nF_1, {}^nF_2)$ .Vamos estabelecer a

Proposição 2

Tem-se $Ao(F_1 * F_2) = (Ao\, F_1) * (Ao\, F_2)$.

Dem : Dados $(Y_1^n, Y_2^n) \sim ({}^nF_1, {}^nF_2)$, uma vez que $Y_i^n \sim {}^nF_i$, temos $\sum_{i=1}^{2} Y_i^n \sim {}^nF_1 * {}^nF_2$ bem como $\sum_{i=1}^{2} AY_i^n = A\sum_{i=1}^{2} Y_i^n \sim Ao({}^nF_1 * {}^nF_2)$. Dado $(AY_1^n, AY_2^n) \sim (Ao\,{}^nF_1, Ao\,{}^nF_2)$ temos ainda $\sum_{i=1}^{2} AY_i^n \sim (Ao\,{}^nF_1) * (Ao\,{}^nF_2)$, donde se conclui que $Ao({}^nF_1 * {}^nF_2) = (Ao\,{}^nF_1) * (Ao\,{}^nF_2)$.

Corolário

Tem-se $Ao(F * N(\mu^n, \sigma^2 W)) = (Ao\, F) * N(A\mu^n, \sigma^2 AWA^T)$.

Dem: Utilizando a proposição 2 temos que $Ao(F * N(\mu^n, \sigma^2 W)) = (AoF) * (\,Ao\, N(\mu^n, \sigma^2 W)) = (Ao\, F) * N(A\mu^n, \sigma^2 AWA^T)$.

Seja $M(C)$, com $\varnothing \subset C \subset \{1,\ldots, n\}$, a submatriz das linhas de I_n com índices em C . As componentes de $M(C)v^n$ serão as componentes de v^n com índices em C, e dada a matriz W do tipo n×n, os elementos de $M(C)\, W\, M(C)^T$ serão os elementos de W com índices de linha e coluna em C . Então $M(C)\ o\ {}^nF$ será a marginal de ${}^nF$ que corresponde a C, e

$$M(C)o(F * N(\mu^n, \sigma^2 W)) = (M(C)o\, F) * N(M(C)\mu^n, \sigma^2 M(C)WM(C)^T) \tag{3}$$

Dado $\vec{u}^n = £(\vec{u}_1^{n_1}, \ldots, \vec{u}_J^{n_J})$, isto é, $\vec{u}^n$ é obtido sobrepondo os $\vec{u}_1^{n_1}, \ldots, \vec{u}_J^{n_J}$, seja

$$h(u^n) = \bigotimes_{j=1}^{J} h_j(u_j^{n_j}) \tag{4}$$

a função de u^n cujos valores são dados por $\prod_{j=1}^{J} h_j(u_j^{n_j})$. Então, se $(Y_1^{n_1},\ldots,Y_J^{n_J}) \sim ({}^{n_1}F_1,\ldots,{}^{n_J}F_J)$ temos

(5) $$Y^n = £(Y_1^{n_1},\ldots,Y_J^{n_J}) \sim {}^{n}F(y^n) = \bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F(y_j^{n_j})$$

Temos agora

<u>Proposição 3</u>

Se ${}^{n}F_i = \bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F_{i,j}$, $i = 1,2$, temos ${}^{n}F_1 * {}^{n}F_2 = \bigotimes_{j=1}^{J} ({}^{n_j}F_{1,j} * {}^{n_j}F_{2,j})$.

Dem : Com $(Y_{1,1}^{n_1}, Y_{2,1}^{n_1},\ldots,Y_{1,J}^{n_J}, Y_{2,J}^{n_J}) \sim ({}^{n_1}F_{1,1}, {}^{n_1}F_{2,1},\ldots,{}^{n_J}F_{1,J}, {}^{n_J}F_{2,J})$ temos $Y_i^n = £(Y_{i,1}^{n_1},\ldots,Y_{i,J}^{n_J}) \sim {}^{n}F_i = \bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F_{i,j}$, $i = 1,2$ e $\sum_{i=1}^{2} Y_i^n \sim {}^{n}F_1 * {}^{n}F_2$. Visto que $\sum_{i=1}^{2} Y_i^n = £(\sum_{i=1}^{2} Y_{i,1}^{n_1},\ldots,\sum_{i=1}^{2} Y_{i,J}^{n_J}) \sim \bigotimes_{j=1}^{J} ({}^{n_j}F_{1,j} * {}^{n_j}F_{2,j})$ então ${}^{n}F_1 * {}^{n}F_2 = \bigotimes_{j=1}^{J} ({}^{n_j}F_{1,j} * {}^{n_j}F_{2,j})$.

<u>Corolário</u>

Se ${}^{n_j}F_j = {}^{n_j}F_{1j} * N(\mu_j^{n_j}, \sigma^2 W_j)$, $j=1,\ldots,J$ temos que $\bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F_j = (\bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F_{1j}) * N(\mu^n, \sigma^2 W)$ com $\mu^n = £(\mu_1^{n_1},\ldots,\mu_J^{n_J})$ e $W = D(W_1,\ldots,W_J)$.

3.4 - <u>Distribuições sub-normais regulares</u>

As distribuições sub-normais regulares obtêm-se através da convolução com distribuições normais regulares . Uma vez que $*$ é associativa, da convolução com distribuições sub-normais regulares resultam distribuições sub-normais regulares .

Com $(U^n, Z^n) \sim ({}^{n}F_1, N(\mu^n, \sigma^2 W))$ temos $(U^n + \mu^n , Z^n - \mu^n) \sim (F_{\mu^n} * {}^{n}F_1, N(\vec{0}^n, \sigma^2 W))$ e $U^n + Z^n = (U^n + \mu^n) + (Z^n - \mu^n)$, logo toda a distribuição sub-normal regular é dada pela convolução com uma distribuição normal regular de vector médio nulo .

Quando $Y^n = U^n + Z^n$ tem uma distribuição sub-normal regular com $Z^n \sim N(0^n, \sigma^2 W)$ e consideramos a transformação

(1) $$Y^{+n} = A(Y^n + d^n)$$

temos

(2) $$Y^{+n} = U^{+n} + Z^{+n}$$

com

(3) $$\begin{cases} U^{+n} = A(U^n + d^n) \\ Z^{+n} = AZ^n \end{cases}$$

Quando os vectores linha de A são linearmente independentes, A é horizontalmente livre e se A é uma matriz do tipo $r \times n$ temos $car(A) = r$. Vamos estabelecer a

Proposição 4

Se A é uma matriz horizontalmente livre do tipo $r \times n$ e W é regular, AWA^T é regular .

Dem: Dada $G \in U(W)$, como G é regular vem $AWA^T = AG^{-1}GWG^T(G^T)^{-1}A^T = AG^{-1}I_n(G^T)^{-1}A^T = AG^{-1}(AG^{-1})^T$ e, ver SHEPHARD (1966 , pag 173) , AG^{-1} é uma matriz $r \times n$ com característica r, e AWA^T é uma matriz $r \times r$ regular visto que $car(AWA^T) = car(AG^{-1}) = r$.

Corolario 1

Se $N(\mu^n, \sigma^2 W)$ é normal regular e A é horizontalmente livre , $A \circ N(\mu^n, \sigma^2 W)$ é normal regular .

Dem: Como $A \circ N(\mu^n, \sigma^2 W) = N(A\mu^n, \sigma^2 AWA^T)$ e AWA^T é, atendendo à proposição 4 , regular, a tese está estabelecida .

Corolário 2

Se F é sub-normal regular e A é horizontalmente livre $A \circ F$ é sub-normal regular .

Dem: Pelo corolário da proposição 2 temos que $Ao(F * N(\mu^n, \sigma^2 W)) = (Ao\ F) * N(A\mu^n, \sigma^2 AWA^T)$ donde se conclui que AoF é sub-normal regular .

Corolário 3

As marginais de distribuições sub-normais regulares são sub-normais regulares.

Dem: Uma vez que as matrizes M(C) são horizontalmente livres, as marginais de uma distribuição sub-normal regular F, isto é as M(C)oF, são pelo corolário 2 sub-normais regulares .

Temos agora

Proposição 5

Se as ${}^{n_j}F_j$, j = 1,..., J , são sub-normais regulares então ${}^{n}F = \bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F_j$ é sub-normal regular .

Dem: Seja ${}^{n_j}F_j = {}^{n_j}F_{1,j} * N(0^{n_j}, \sigma^2 W_j)$ onde W_j são regulares, j = 1,..., J , de acordo com a proposição 3 temos que ${}^{n}F = \bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F_j = (\bigotimes_{j=1}^{J} {}^{n_j}F_{1,j}) * (\bigotimes_{j=1}^{J} N(0^{n_j}, \sigma^2 W_j))$. Visto que $\bigotimes_{j=1}^{J} N(0^{n_j}, \sigma^2 W_j) = N(0^n, \sigma^2 D(W_1, \ldots, W_J))$ é normal regular ${}^{n}F$ é sub-normal regular .

Proposição 6

As distribuições sub-normais regulares têm densidades .

Dem: Se ${}^{n}F$ é sub-normal regular temos que ${}^{n}F = {}^{n}F_1 * {}^{n}N(0^n, \sigma^2 W)$ com W regular e, ver LUKACS e LAHA (1961, pag 28), a função caracteristica de ${}^{n}F$ será $\varphi(t^n) = \varphi_1(t^n)\ e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^T W t}$ onde $\varphi_1(t^n)$ e $e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^T W t}$ são, respectivamente, as funções caracteristicas de ${}^{n}F_1$ e de $N(0^n, \sigma^2 W)$. Uma vez que $|\varphi_1(t^n)| \leq 1$ e $e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^T W t}$ é , visto que W é definida positiva, absolutamente integrável, $\varphi(t^n)$ será absolutamente integrável e, ver LUKACS e LAHA (1961, pag 4), ${}^{n}F$ tem densidade .

Corolário

Se ${}^nN_1$ é normal e ${}^nN_2$ é normal regular então ${}^nN_1 * {}^nN_2$ é normal regular .

Dem: ${}^nN_1 * {}^nN_2$ é não só normal como sub-normal regular, então de acordo com a proposição 6 concluimos que ${}^nN_1 * {}^nN_2$ tem densidade . Pela proposição1 concluimos que ${}^nN_1 * {}^nN_2$ é regular .

3.5 - Distribuições sub-normais homocedásticas e projecções

As distribuições ${}^nF_1 * N(\mu^n, \sigma^2 I_n)$ são sub-normais homocedásticas . Uma vez que * é associativa então a convolução com distribuições sub-normais homocedásticas originam distribuições sub-normais homocedásticas . Podemos mostrar que toda a distribuição sub-normal homocedástica é dada pela convolução com uma distribuição normal homocedástica de vector médio nulo . Se ${}^nF_1 * N(0^n, \sigma^2 W)$ é sub-normal regular e $G \in U(W)$ obtemos , de acordo com a proposição 2

(1)
$$Go({}^nF_1 * N(0^n, \sigma^2 W)) = (Go{}^nF_1) * (GoN(0^n, \sigma^2 W)) =$$
$$= (Go{}^nF_1) * N(0^n, \sigma^2 GWG^T) = (Go{}^nF_1) * N(0^n, \sigma^2 I_n)$$

, quando $W = D(W_1 ,..., W_J)$ podemos utilizar $G = D(G_1 ,..., G_J)$ com $G_j \in U(W_j)$, $j = 1,..., J$ para reduzir a heterocedasticidade . Temos agora

Proposição 7

Se A é quase-ortogonal e ${}^nF$ é sub-normal homocedástica então $Ao{}^nF$ será sub-normal homocedástica .

Dem : Se A é uma matriz quase-ortogonal do tipo $r \times n$ temos que $A\, I_n\, A^T = I_r$ e uma vez que ${}^nF = {}^nF_1 * N(0^n, \sigma^2 I_n)$ então pela proposição 2 temos $Ao{}^nF = Ao({}^nF_1 * N(0^n, \sigma^2 I_n)) = (Ao\, {}^nF_1) * (Ao\, N(0^n, \sigma^2 I_n)) = (Ao\, {}^nF_1) * N(0^r, \sigma^2 A\, I_n A^T) = (Ao\, {}^nF_1) * N(0^r, \sigma^2 I_r)$ donde se conclui que $Ao{}^nF$ é sub-normal homocedástica .

Corolário

As marginais de distribuições sub-normais homocedásticas são sub-normais homocedásticas .

Dem : As matrizes M(C) são quase-ortogonais, então a marginal de uma distribuição sub-normal homocedástica ${}^nF$, ou seja $M(C)o{}^nF$, pela proposição 7 é sub-normal homocedástica .

Vamos agora considerar $Y^n = U^n + Z^n$ com $(U^n, Z^n) \sim ({}^nF, N(0^n, \sigma^2 I_n))$ e representar por $\chi^{(v,n)}$ um sub-espaço com dimensão v de R^n .

Proposição 8

Dados os subespaços ortogonais $\chi_1{}^{(r,n)}$ e $\chi_2{}^{(s,n)}$ com $V_k = \left\| U^n_{\chi_k} \right\|^2$, k = 1,2 , a função geradora de momentos $\lambda(t_1,t_2)$ para o par (V_1,V_2) está definida e é indefinidamente derivável para $t_k < 0$, k = 1,2 e com $\lambda^{(i,j)}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial^{i+j}\lambda(t_1,t_2)}{\partial t_1^i \, \partial t_2^j}$

i = 0,1,... ; j = 0,1,... temos

$$\begin{cases} \mathfrak{I} = \dfrac{\left\| Y^n_{\chi_1} \right\|^2}{\left\| Y^n_{\chi_2} \right\|^2} \sim \tilde{F}(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(i,j)}(-\frac{1}{2\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2})}{i!\,j!(2\sigma^2)^{i+j}} \overline{F}(z|r+2i, s+2j) \\ \mathfrak{S} = \dfrac{s}{r}\dfrac{\left\| Y^n_{\chi_1} \right\|^2}{\left\| Y^n_{\chi_2} \right\|^2} \sim F^0(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(i,j)}(-\frac{1}{2\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2})}{i!\,j!(2\sigma^2)^{i+j}} \overline{F}(\frac{r}{s}z|r+2i, s+2j) \end{cases}$$

Dem: Seja $F(v_1,v_2)$ a distribuição conjunta de (V_1,V_2) . Uma vez que estas variáveis apenas tomam valores não negativos para $t_1<0$ e $t_2<0$ temos,

$$\lambda(t_1,t_2) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{t_1 v_1 + t_2 v_2} dF(v_1,v_2)$$

assim como

$$\lambda^{(i,j)}(t_1,t_2)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v_1^i v_2^j \; e^{t_1 v_1 + t_2 v_2}\, dF(v_1,v_2)$$

Agora , de acordo com a expressão (2) e (3) da secção 3.2 , quando $V_1= v_1$ e $V_2= v_2$, temos $\left\|Y^n_{\chi_1}\right\|^2 \sim \sigma^2\chi^2_{r,\delta_1}$ onde $\delta_1=\frac{1}{\sigma^2}\left\|(u^n+0^n)_{\chi_1}\right\|^2=\frac{1}{\sigma^2}\left\|u^n_{\chi_1}\right\|^2=\frac{v_1}{\sigma^2}$ e $\left\|Y^n_{\chi_2}\right\|^2 \sim \sigma^2\chi^2_{s,\delta_2}$ onde $\delta_2=\frac{1}{\sigma^2}\left\|(u^n+0^n)_{\chi_2}\right\|^2=\frac{1}{\sigma^2}\left\|u^n_{\chi_2}\right\|^2=\frac{v_2}{\sigma^2}$ isto é

$$\left\|Y^n_{\chi_1}\right\|^2 \sim \sigma^2\chi^2_{r,\frac{v_1}{\sigma^2}} \; (i) \left\|Y^n_{\chi_2}\right\|^2 \sim \sigma^2\chi^2_{s,\frac{v_2}{\sigma^2}}$$

então

$$\mathfrak{I}=\frac{\left\|Y^n_{\chi_1}\right\|^2}{\left\|Y^n_{\chi_2}\right\|^2} \sim \overline{F}(z|r,s,\frac{v_1}{\sigma^2},\frac{v_2}{\sigma^2})$$

onde

$$\overline{F}(z|r,s,\frac{v_1}{\sigma^2},\frac{v_2}{\sigma^2})=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{v_1+v_2}{\sigma^2}} \frac{(\frac{v_1}{2\sigma^2})^i(\frac{v_2}{2\sigma^2})^j}{i!\,j!}\overline{F}(z|r+2i,s+2j)$$

. Logo descondicionando

$$\mathfrak{I}\sim \widetilde{F}(z)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\overline{F}(z|r,s,\frac{v_1}{\sigma^2},\frac{v_2}{\sigma^2})dF(v_1,v_2)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\overline{F}(z|r+2i,s+2j)}{i!\,j!}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{v_1+v_2}{2\sigma^2}}(\frac{v_1}{2\sigma^2})^i(\frac{v_2}{2\sigma^2})^j dF(v_1,v_2)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\overline{F}(z|r+2i,s+2j)}{i!\,j!(2\sigma^2)^{i+j}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{v_1+v_2}{2\sigma^2}} v_1^i v_2^j dF(v_1,v_2)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\overline{F}(z|r+2i,s+2j)}{i!\,j!(2\sigma^2)^{i+j}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v_1^i v_2^j \; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}v_1-\frac{1}{2\sigma^2}v_2}\, dF(v_1,v_2)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{F}(z|r+2i, s+2j)}{i!\,j!(2\sigma^2)^{i+j}} \lambda^{(i,j)}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

. Visto que $\mathfrak{S} = \frac{s}{r}\mathfrak{I}$ temos

$$\mathfrak{S} \sim F^0(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{F}(\frac{r}{s}z|r+2i, s+2j)}{i!\,j!(2\sigma^2)^{i+j}} \lambda^{(i,j)}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

o que conclui a demonstração .

Seguidamente temos

<u>Proposição 9</u>

A função geradora de momentos de V_1 = $\left\|U^n_{\chi_1}\right\|^2$ está definida e é indefinidamente derivável para $t_1<0$. Com $\lambda_1^{(i)}(t_1) = \frac{d^i\lambda(t_1)}{dt_1^i}$, i = 0,1,... , se V_2 = $\left\|U^n_{\chi_2}\right\|^2 \equiv 0$ temos :

$$\begin{cases} \mathfrak{I} \sim \widetilde{F}_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{(i)}(-\frac{1}{2\sigma^2})}{i!(2\sigma^2)^i} \overline{F}(z|r+2i, s) \\ \mathfrak{S} \sim F_0^0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{(i)}(-\frac{1}{2\sigma^2})}{i!(2\sigma^2)^i} \overline{F}(\frac{r}{s}z|r+2i, s) \end{cases}$$

. Se $pr(V_2>0)>0$, $z>0$ temos $\mathfrak{I} \sim \widetilde{F}(z) > \widetilde{F}_0(z)$ e $\mathfrak{S} \sim F^0(z) > F_0^0(z)$.

Dem: Como $V_1 \geq 0$ a função geradora de momentos $\lambda_1(t_1)$ de V_1 está definida e é indefinidamente derivável para $t_1<0$. Raciocinando como para a demonstração da <u>proposição 8</u> obtemos as expressões de $\widetilde{F}_0(z)$ e que $F_0^0(z)$. Quando $pr(V_2>0)>0$, visto que $z>0$, $\frac{\partial\overline{F}(z|r, s, \frac{v_1}{\sigma^2}, \frac{v_2}{\sigma^2})}{\partial v_2} > 0$, logo temos

$$\widetilde{F}(z)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\overline{F}(z|r,s,\frac{v_1}{\sigma^2},\frac{v_2}{\sigma^2})\ dF(v_1,v_2)>\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\overline{F}(z|r,s,\frac{v_1}{\sigma^2},0)\ dF(v_1,v_2)=\widetilde{F}_0(z)$$

. Uma vez que $\mathfrak{S}=\frac{s}{r}\mathfrak{I}$, para z >0 , teremos ainda $F^0(z)=\widetilde{F}(\frac{r}{s}z)>\widetilde{F}_0(\frac{r}{s}z)=F^0_0(z)$.

Proposição 10

Se $V_1\equiv 0$ então $\widetilde{F}_0(z|r,s)=\overline{F}(z|r,s)$ e $F^0_0(z)=F(z|r,s)$. Quando $pr(V_1>0)>0$, para z >0 , temos $\widetilde{F}_0(z)<\overline{F}(z|r,s)$ e $F^0_0(z)<F(z|r,s)$.

Dem: Quando $V_1\equiv 0$ e $V_2\equiv 0$ temos $\left\|Y^n_{\chi_1}\right\|^2\sim\sigma^2\chi^2_{r,0}(i)\left\|Y^n_{\chi_2}\right\|^2\sim\sigma^2\chi^2_{s,0}$ então $\mathfrak{I}=\frac{\left\|Y^n_{\chi_1}\right\|^2}{\left\|Y^n_{\chi_2}\right\|^2}\sim\widetilde{F}_0(z)=\overline{F}(z|r,s)$. Agora , para z >0 , $\frac{\partial\overline{F}(z|r,s,\frac{v_1}{\sigma^2})}{\partial v_1}<0$ e , se $pr(V_1>0)>0$, teremos , com $V_1\sim F_1(v_1)$

$$\mathfrak{I}\sim\widetilde{F}_0(z)=\int_0^{+\infty}\overline{F}(z|r,s,\frac{v_1}{\sigma^2})\ dF_1(v_1)<\int_0^{+\infty}\overline{F}(z|r,s,0)\ dF_1(v_1)=\overline{F}(z|r,s)$$

. Visto que $\mathfrak{S}=\frac{s}{r}\mathfrak{I}$ então se $V_1\equiv 0$ e $V_2\equiv 0$ temos $\mathfrak{S}\sim F^0_0(z)=\widetilde{F}_0(\frac{r}{s}z)=\overline{F}(\frac{r}{s}z|r,s)=$ $F(z|r,s)$ para z >0 , teremos ainda $F^0_0(z)=\widetilde{F}_0(\frac{r}{s}z)<\overline{F}(\frac{r}{s}z|r,s)=F(z|r,s)$.

As proposições 8 , 9 e 10 permitem estudar os testes F em modelos sub-normais quando se admite que $pr(\vec{Z}^n\in\Omega)=1$ para se estimar o erro . Cada vez que utilizármos estes resultados especificaremos os subespaços χ_1 e χ_2 e os vectores U^n e Z^n .Vamos assumir agora que $U^n(i)\ Z^n(i)\ S$ com $S\sim\sigma^2\chi^2_{g,\delta}$ e considerar

(2) $$V=\|\ U^n_\chi\|^2$$

com $\chi^{(r,n)}$ um sub-espaço com dimensão r de R^n .

Proposição 11

A função geradora de momentos $\lambda(t)$ de V está definida e é indefinidamente derivável para $t<0$. Com $\lambda^{(i)}(t)=\frac{d^i\lambda(t)}{dt^i}$, $i=0,1,\ldots$ temos

$$\begin{cases} \mathfrak{I}=\dfrac{\left\|Y_\chi^n\right\|^2}{S}\sim\tilde{F}(z|\delta)=e^{-\delta/2}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{(i)}(-\frac{1}{2\sigma^2})(\frac{\delta}{2})^j}{i!\,j!(2\sigma^2)^i}\overline{F}(z|r+2i,g+2j) \\ \mathfrak{S}=\dfrac{g}{r}\dfrac{\left\|Y_\chi^n\right\|^2}{S}\sim F^0(z|\delta)=e^{-\delta/2}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{(i)}(-\frac{1}{2\sigma^2})(\frac{\delta}{2})^j}{i!\,j!(2\sigma^2)^i}\overline{F}(\frac{r}{g}z|r+2i,g+2j) \end{cases}$$

Dem: Se $V\sim F(v)$ então , para $t<0$, $\lambda^{(i)}(t)=\int_0^{+\infty}v^ie^{tv}dF(v)$, $i=0,1,\ldots$ está definida .

Quando $V=v$ temos $\left\|Y_\chi^n\right\|^2\sim\sigma^2\chi^2_{r,v/\sigma^2}$ (i) $S\sim\sigma^2\chi^2_{g,\delta}$ e $\mathfrak{I}=\frac{\left\|Y_\chi^n\right\|^2}{S}$ tem como distribuição condicional

$$\overline{F}(z|r,g,\frac{v}{\sigma^2},\delta)=e^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{\sigma^2}+\delta)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{v}{2\sigma^2})^i(\frac{\delta}{2})^j}{i!\,j!}\overline{F}(z|r+2i,g+2j)$$

. Podemos concluir ainda que

$$\tilde{F}(z|\delta)=\int_0^{+\infty}\overline{F}(z|r,g,\frac{v}{\sigma^2},\delta)\ dF(v)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\delta/2}\overline{F}(z|r+2i,g+2j)}{i!\,j!}\int_0^{+\infty}e^{-v/2\sigma^2}(\frac{v}{2\sigma^2})^i(\frac{\delta}{2})^j\ dF(v)$$

$$=e^{-\delta/2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^j\overline{F}(z|r+2i,g+2j)}{i!\,j!(2\sigma^2)^i}\int_0^{+\infty}v^ie^{-v/2\sigma^2}\ dF(v)$$

$$=e^{-\delta/2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^j\lambda^{(i)}(-\frac{1}{2\sigma^2})}{i!\,j!(2\sigma^2)^i}\overline{F}(z|r+2i,g+2j)$$

. Uma vez que $\mathfrak{S}=\frac{g}{r}\mathfrak{I}$ então

$$\mathfrak{S} \sim F^0(z|\delta) = e^{-\delta/2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{\delta}{2})^j \lambda^{(i)}(-\frac{1}{2\sigma^2})}{i!\,j!(2\sigma^2)^i}\overline{F}(\frac{r}{g}z|r+2i,g+2j)$$

o que conpleta a demonstração .

Proposição 12

Para z >0 temos $\dfrac{\partial\widetilde{F}(z|\delta)}{\partial\delta} > 0$ e $\dfrac{\partial F^0(z|\delta)}{\partial\delta} > 0$.

Dem: Para z >0 , $\dfrac{\partial\overline{F}(z|r,g,\frac{v}{\sigma^2},\delta)}{\partial\delta} > 0$ então $\dfrac{\partial\widetilde{F}(z|\delta)}{\partial\delta} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial\overline{F}(z|r,g,\frac{v}{\sigma^2},\delta)}{\partial\delta}\,dF(v) > 0$.

Como $F^0(z|\delta) = \widetilde{F}(\frac{r}{g}z|\delta)$, $\dfrac{\partial F^0(z|\delta)}{\partial\delta} = \dfrac{\partial\widetilde{F}(\frac{r}{g}z|\delta)}{\partial\delta} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial\overline{F}(\frac{r}{g}z|r,g,\frac{v}{\sigma^2},\delta)}{\partial\delta}\,dF(v) > 0$

Finalmente , considerando $S \sim \sigma^2\chi^2{}_{g,0}$, temos

Proposição 13

Se V≡ 0 então $\widetilde{F}(z|0) = \overline{F}(z|r,g)$ e $F^0(z|0) = F(z|r,g)$. Quando pr(V >0) >0, temos, para z >0, $\widetilde{F}(z|0) < \overline{F}(z|r,g)$ e $F^0(z|0) < F(z|r,g)$.

Dem: Visto que, para z >0, $\dfrac{\partial\overline{F}(z|r,g,\frac{v}{\sigma^2})}{\partial v} < 0$ temos, quando pr(v >0) >0 $\widetilde{F}(z|0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\overline{F}(z|r,g,\frac{v}{\sigma^2})\,dF(v) < \overline{F}(z|r,g,0) = \overline{F}(z|r,g)$ e quando V≡ 0 ,$\widetilde{F}(z|0) = \overline{F}(z|r,g)$. Como $F^0(z|0) = \widetilde{F}(\frac{r}{g}z|0)$ então $F^0(z|0) = \widetilde{F}(\frac{r}{g}z|0) < \overline{F}(\frac{r}{g}z|r,g) = F(z|r,g)$ e quando V≡ 0 , $F^0(z|0) = F(z|r,g)$.

4- Testes F com restrições

4.1- Hipóteses simples

As restrições que a seguir se consideram são de natureza muito geral . Para já observamos que, quando existe delineabilidade, se têm restrições deste tipo visto haver grupos de componentes de $\vec{Z}^n$ que são iguais .

Seja $[\vec{a}^n]_\chi$ a classe de congruência associada a $\chi^{(r,n)}$ que contem $\vec{a}^n$. Vamos considerar $Y^n = U^n + Z^n$ com $(U^n,Z^n) \sim ({}^nF, N(0^n,\sigma^2 W))$ onde W é conhecida e regular . Consideremos ainda a^n e $\Omega^{(m,n)}$ ambos conhecidos e

$$\text{(1)} \qquad pr(U^n \in [a^n]_\Omega) = 1$$

. Com $b^n \in [a^n]_\Omega$ e $w^{(p,n)}$ sub-espaço de $\Omega^{(m,n)}$ vamos testar

$$\text{(2)} \qquad H: pr(U^n \in [b^n]_w) = 1$$

. Existem sempre as matrizes A e B, ver MEXIA (1989, pag 7), tal que Ω [w] é o espaço de nulidade de A [B] pondo-se

$$\text{(3)} \qquad (\Omega,w) = N(A,B)$$

Como vimos anteriormente podemos utilizar $G_0 \in \mathcal{U}(W)$ para reduzir a heterocedasticidade . Consideremos agora

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} U'^n = G_0(U^n - a^n) \\ Z'^n = G_0 Z^n \\ 0'^n = G_0(b^n - a^n) \end{cases}$$

, então $Z'^n \sim N(0^n, \sigma^2 I_n)$. Com

$$\begin{cases} \Omega' = G_0 \Omega \\ w' = G_0 w \\ A' = A G_0^{-1} \\ B' = B G_0^{-1} \end{cases}$$

teremos $(\Omega', w') = N(A', B')$ assim como

(5) $$pr(\,U'^n \in \Omega'^{(m,n)}\,) = 1$$

e as hipóteses

(6) $$H\!: pr(\,U'^n \in [b'^n]_{w'}) = 1$$

Uma vez obtidas $A^0 = q.o.(A') =$ £$(\alpha^T{}_1, \ldots, \alpha^T{}_{n-m})$ e $B^0 = q.o.(B') =$ £$(\alpha^T{}_1, \ldots, \alpha^T{}_{n-p})$ teremos $M^0 =$ £$(B^0 - A^0) =$ £$(\alpha^T{}_{n-m+1}, \ldots, \alpha^T{}_{n-p})$ assim como $\{\alpha^n{}_1, \ldots, \alpha^n{}_{n-m}\} = b\perp(\Omega'^{\perp})$ e $\{\alpha^n{}_{n-m+1}, \ldots, \alpha^n{}_{n-p}\} = b\perp(w^*)$, onde $w^* = w'^{\perp} \cap \Omega'$. É fácil ver que

(7) $$\begin{cases} \left\| Y'^n_{\Omega'^{\perp}} \right\|^2 = \left\| A^0 Y'^n \right\|^2 \\ \left\| (Y'^n - b'^n)_{w^*} \right\|^2 = \left\| M^0 (Y'^n - b'^n) \right\|^2 = \left\| M^0 Y'^n - M^0 b'^n \right\|^2 \\ \left\| (U'^n - b'^n)_{w^*} \right\|^2 = \left\| M^0 (U'^n - b'^n) \right\|^2 = \left\| M^0 U'^n - M^0 b'^n \right\|^2 \end{cases}$$

onde $Y'^n = U'^n + Z'^n$. Podemos igualmente obter as expressões alternativas para H

(8) $$\begin{cases} H\!: M^0 U'^n = M^0 b'^n \\ H\!: \left\| (U'^n - b'^n)_{w^*} \right\|^2 = 0 \end{cases}$$

Aplicando a <u>proposição 10</u> com $[w^*;\ \Omega'^{\perp};\ U'^n - b'^n;\ Z'^n]$ vimos, de acordo com (7), que se

(9) $$\Im = \frac{n-m}{m-p}\frac{\left\|(Y'^n - b'^n)_{w^*}\right\|^2}{\left\|Y'^n_{\Omega^{\perp}}\right\|^2} = \frac{n-m}{m-p}\frac{\left\|M^0Y'^n - M^0b'^n\right\|^2}{\left\|A^0Y'^n\right\|^2} \sim F_0^0(z)$$

temos $F_0^0(z) = F(z|m\text{-}p,n\text{-}m)$ quando e só quando H se verifica, por outro lado, para $z > 0$ temos $F_0^0(z) < F(z|m\text{-}p,n\text{-}m)$. Podemos então utilizar esta estatística bem como a região de rejeição $\left]\Im_{1-q,m-p,n-m};+\infty\right[$ para obter um teste de nível q para H o qual será <u>não distorcido</u> .

Da primeira expressão alternativa vimos que H se verifica se e só se as subhipóteses

(10) $$H'_i: \alpha^T_{n-m+i}U'^n = \alpha^T_{n-m+i}b'^n \; ; i = 1,\dots, m\text{-}p$$

se verificam . Seja w_i^* um subespaço de R^n gerado por α^n_{n-m+i} , utilizando a <u>proposição 10</u> com $[w_i^*; \Omega'^{\perp}; U'^n\text{-}b'^n ; Z'^n]$, $i = 1,\dots, m\text{-}p$, concluimos que, se

(11) $$\Im'_i = (n-m)\frac{(\alpha^T_{n-m+i}Y'^n - \alpha^T_{n-m+i}b'^n)^2}{\left\|A^0Y'^n\right\|^2} \sim F^0_{0,i}(z) \; , i = 1,\dots, m\text{-}p$$

temos $F^0_{0,i}(z) = F(z|1,n\text{-}m)$ se e só se H'_i se verificam, por outro lado, para $z > 0$, $F^0_{0,i}(z) < F(z|1,n\text{-}m)$, $i = 1,\dots, m\text{-}p$. Com esta estatística e a região de rejeição $\left]\Im_{1-q,1,n-m};+\infty\right[$ temos um teste F de nível q para as H'_i , $i = 1,\dots, m\text{-}p$, o qual será <u>não distorcido</u> . Podemos ver ainda que

(12) $$\Im = \frac{1}{m-p}\sum_{i=1}^{m-p}\Im'_i$$

Se $m\text{-}p > 1$ e $n\text{-}m > 2$ temos $\Im_{1-q,m-p,n-m} < \Im_{1-q,1,n-m} < (m-p)\Im_{1-q,m-p,n-m}$ e deste modo H pode ser rejeitada [aceite] enquanto todas as H'_i , $i = 1,\dots, m\text{-}p$, são aceites [a maior parte das H'_i são rejeitadas] . Apesar do trabalho adicional pode ser conveniente testar H e as H'_i , $i = 1,\dots, m\text{-}p$. Neste caso consideramos que as $\mathfrak{I}'_i$, $i = 1,\dots, m\text{-}p$, não são independentes, enquanto noutras dissertações, MARDEN (1982) e MARDEN e PERRIMAN (1982), são consideradas estatisticas $\mathfrak{I}$ independentes .

Seja $\pounds(B\text{-}A)$ a sub-matriz formada pelas linhas de B que não pertencem a A . Visto que existe mais do que uma matriz em $U(W)$ interessa-nos estabelecer

Proposição 14

As estatísticas $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'_i$, $i = 1,\dots, m\text{-}p$, não dependem da matriz $G \in U(W)$ que foi utilizada .

Dem: Se em vez de $G_0 \in U(W)$ usarmos $G \in U(W)$ então em vez de Y'^n e b'^n teremos $Y''^n = G(Y^n - a^n) = PY'^n$ e $b''^n = G(b^n - a^n) = Pb'^n$ com $P = GG_0^{-1}$ ortogonal , em vez de $(\Omega',w') = N(A',B')$ teremos $(\Omega'',w'') = N(A'',B'')$ com $\Omega'' = G\Omega = P\Omega'$, $w'' = Gw = Pw'$, $A'' = AG^{-1} = A'P^T$ e $B'' = BG^{-1} = B'P^T$. Teremos ainda $A^{00} = q.o(A'') = q.o(A'P^T) = A^0P^T$ e $B^{00} = q.o(B'') = q.o(B'P^T) = B^0P^T$ então $M^{00} = \pounds(B^{00}\text{-}A^{00}) = M^0P^T$. Temos apenas que considerar que $A^0Y'^n = A^0 P^TPY'^n = A^{00}Y''^n$, que $M^0Y'^n = M^0 P^TPY'^n = M^{00}Y''^n$ e que $M^0b'^n = M^0 P^TPb'^n = M^{00}b''^n$, para mostrar que $\mathfrak{I}$ não depende da matriz $G \in U(W)$ que tem sido utilizada . Estes resultados estendem-se mesmo às estatísticas $\mathfrak{I}'_i$, $i = 1,\dots, m\text{-}p$, visto que $\alpha^T_{n-m+i}Y'^n$ e $\alpha^T_{n-m+i}b'^n$, $i = 1,\dots, m\text{-}p$, são respectivamente as componentes de $M^0Y'^n$ e de $M^0b'^n$.

Vamos agora considerar as propriedades invariantes dos testes F . Com L regular colocaremos

$$(13)\qquad \begin{cases} U^{+n} = L(U^n + d^n) \\ Z^{+n} = LZ^n \\ a^{+n} = L(a^n + d^n) \\ b^{+n} = L(b^n + d^n) \end{cases}$$

assim como

$$\begin{cases}\Omega^+ = L\Omega \\ w^+ = Lw \\ A^+ = AL^{-1} \\ B^+ = BL^{-1}\end{cases}$$

Temos então, ver MEXIA (1989, pag 7), $(\Omega^+, w^+) = N(A^+, B^+)$ e

(14) $$pr(U^{+n} \in [a^{+n}]_{\Omega^+}) = 1$$

enquanto H pode ser escrita

(15) $$H: pr(U^{+n} \in [b^{+n}]_{w^+}) = 1$$

Uma vez que $Z^{+n} \sim N(0^n, \sigma^2 W^+)$ com $W^+ = LWL^T$, se $G \in \mathcal{U}(W)$, temos $G^+ = GL^{-1} \in \mathcal{U}(W^+)$ então podemos tomar

(16) $$\begin{cases}U^{+'n} = G^+(U^{+n} - a^{+n}) = GL^{-1}[L(U^n + d^n) - L(a^n + d^n)] = G(U^n - a^n) = U'^n \\ Z^{+'n} = G^+Z^{+n} = GL^{-1}LZ^n = GZ^n = Z'^n \\ b^{+'n} = G^+(b^{+n} - a^{+n}) = GL^{-1}[L(b^n + d^n) - L(a^n + d^n)] = G(b^n - a^n) = b'^n\end{cases}$$

assim

(17) $$Y^{+'n} = U^{+'n} + Z^{+'n} = U'^n + Z'^n = Y'^n$$

. Podemos também tomar

(18) $$\begin{cases}A^{+'} = A^+(G^+)^{-1} = AL^{-1}(GL^{-1})^{-1} = AL^{-1}LG^{-1} = AG^{-1} = A' \\ B^{+'} = B^+(G^+)^{-1} = BL^{-1}(GL^{-1})^{-1} = BL^{-1}LG^{-1} = BG^{-1} = B'\end{cases}$$

, então $A^0 = q.o(A^{+'})$ e $B^0 = q.o(B^{+'})$. Será útil estabelecer

<u>Proposição 15</u>

Os testes F de hipóteses e sub-hipóteses não variam com as transformações $Y^{+n} = L(Y^n + d^n)$ onde L é regular .

Os testes F são UMP, ver SEBER (1980, pag 36) e LEHMAN (1959, pag 268), nas classes de testes cuja potência apenas depende dos parâmetros de não centralidade . Este resultado foi obtido para modelos de efeitos fixos . Vamos agora considerar um modelo alargado assumindo que a heterocedasticidade é reduzida, com o fim de tornar mais simples o nosso tratamento vamos assumir as restrições dadas por $\left\|(U'^{n}-b'^{n})_{\Omega'^{\perp}}\right\|^{2} \equiv 0$. Com

$$(19) \qquad \begin{cases} V = \left\|(U'^{n}-b'^{n})_{w^{*}}\right\|^{2} \\ V_i = \left\|(U'^{n}-b'^{n})_{w_i^{*}}\right\|^{2}; i = 1,\dots,m-p \end{cases}$$

quando $V = v$ $[V_i = v_i]$ tomamos $\Im \sim F(z|m\text{-}p,n\text{-}m,\frac{v}{\sigma^2})$ [$\Im'_i \sim F(z|1,n\text{-}m, \frac{v_i}{\sigma^2})$, $i = 1,\dots,m\text{-}p$] então, para um teste de nível q, tomamos as funções potência condicional

$$(20) \qquad \begin{cases} \beta(v,q) = 1 - F(\Im_{1-q,m-p,n-m} / m-p, n-m, \frac{v}{\sigma^2}) \\ \beta_i(v_i,q) = 1 - F(\Im_{1-q,1,n-m} / 1, n-m, \frac{v_i}{\sigma^2}); i = 1,\dots,m-p \end{cases}$$

assim, para as expressões alternativas nas quais $V \sim F(v)$ [$V_i \sim F_i(v)$, $i = 1,\dots,m\text{-}p$], a potência será

$$(21) \qquad \begin{cases} \beta(q|F) = \int_0^{+\infty} \beta(v,q)dF(v) \\ \beta_i(q|F_i) = \int_0^{+\infty} \beta_i(v,q)dF_i(v); i = 1,\dots,m-p \end{cases}$$

Vamos considerar agora

Proposição 16

Se $\widetilde{\beta}(v,q)$ [$\widetilde{\beta}_i(v,q)$] é a função potência condicional de um teste de nível q para H [H'$_i$], o qual apenas depende de v e q temos

$$\begin{cases}\widetilde{\beta}(v,q) \le \beta(v,q)\\ \widetilde{\beta}_i(v,q) \le \beta_i(v,q); i = 1,\dots,m-p\end{cases}$$

Dem: Se tivermos $\widetilde{\beta}(v,q) > \beta(v,q)$ [$\widetilde{\beta}_i(v,q) > \beta_i(v,q)$; i = 1,..., m-p] podemos usar a estatística e a zona de rejeição do novo teste para obter, para modelos de efeitos fixos, um teste de nível q com potência alta, para alternativas com parâmetro de não centralidade v/σ^2, então o teste F de nível q para H [H$_i$; i = 1,..., m-p] que considerámos é impossivel . Donde se conclui que $\widetilde{\beta}(v,q) \le \beta(v,q)$ [$\widetilde{\beta}_i(v,q) \le \beta_i(v,q)$; i = 1,..., m-p] .

Corolário

Se, para a alternativa na qual $V \sim F(v)$ [$V_i \sim F_i(v)$, i = 1,...,m-p], a potência de um teste de nível q para H [H$_i$; i = 1,..., m-p] é $\widetilde{\beta}(q|F)$ [$\widetilde{\beta}_i(q|F_i)$] e se a função potência condicional para esse teste é $\widetilde{\beta}(v,q)$ [$\widetilde{\beta}_i(v,q)$] temos

$$\begin{cases}\widetilde{\beta}(q|F) \le \beta(q|F)\\ \widetilde{\beta}_i(q|F_i) \le \beta_i(q|F_i); i = 1,\dots,m-p\end{cases}$$

Dem: De (21) vem que

$$\begin{cases}\widetilde{\beta}(q|F) = \int_0^{+\infty} \widetilde{\beta}(v,q)dF(v)\\ \widetilde{\beta}_i(q|F_i) = \int_0^{+\infty} \widetilde{\beta}_i(v,q)dF_i(v); i = 1,\dots,m-p\end{cases}$$

, então pela proposição 16 concluimos que $\widetilde{\beta}(q|F) \le \beta(q|F)$ e $\widetilde{\beta}_i(q|F_i) \le \beta_i(q|F_i)$, i = 1,..., m-p .

Vamos considerar agora as transgressões às restrições. Temos então

Proposição 17

Quando as restrições são transgredidas a potência do teste F diminui .

Dem: Para fazer a demonstração, no caso do teste para H, temos apenas que aplicar a proposição 9 tomando $[w^*; \Omega'^{\perp}; U'^n - b'^n; Z'^n]$. No caso dos testes para H'_i , $i = 1,\dots,m-p$, aplicamos a mesma proposição tomando $[w_i^*; \Omega'^{\perp}; U'^n - b'^n; Z'^n]$ $i = 1,\dots, m-p$.

4.2- Hipóteses e fraccionamento

Vamos considerar que $Y^n = U^n + Z^n$ com U^n (i)Z^n e com

$$(1)\qquad \begin{cases} U^n = \pounds(U_1^{n_1},\dots,U_J^{n_J}) \sim {}^nF \\ Z^n = \pounds(Z_1^{n_1},\dots,Z_J^{n_J}) \sim N(0^n,\sigma^2 W) = \bigotimes_{j=1}^{J} N(0^{n_j},\sigma^2 W_j) \end{cases}$$

onde as matrizes $W_1 ,\dots, W_J$ são conhecidas e regulares, então $W = D(W_1 ,\dots, W_J)$ é igualmente conhecida e regular . Se tivermos

$$(2)\qquad pr(U^n \in [a^n]_\Omega) = 1$$

e quisermos testar

$$(3)\qquad H: pr(U^n \in [b^n]_w) = 1$$

para esclarecer a aplicação dos resultados da secção anterior, podemos considerar $a^n = \pounds(a_1^{n_1},\dots,a_J^{n_J})$, $b^n = \pounds(b_1^{n_1},\dots,b_J^{n_J})$ e usar as matrizes $G_{0j} \in \mathcal{U}(W_j)$, $j = 1 ,\dots, J$, para obter $U_j^{'n_j} = G_{0j}(U_j^{n_j} - a_j^{n_j})$, $Y_j^{'n_j} = G_{0j}(Y_j^{n_j} - b_j^{n_j})$ onde $Y_j^n = U_j^n + Z_j^n$ e

$b_j^{'n_j} = G_{0j}(b_j^{n_j} - a_j^{n_j})$, j = 1,..., j . Teremos então $U'^n = £(U_1^{'n_1},\ldots,U_J^{'n_J})$, isto é, U'^n é obtida sobrepondo as $U_1^{'n_1},\ldots,U_J^{'n_J}$, $Y'^n = £(Y_1^{'n_1},\ldots,Y_J^{'n_J})$ e $b'^n = £(b_1^{'n_1},\ldots,b_J^{'n_J})$. Agora, ver MEXIA (1989, pag 7), $(\Omega,w) = N(A,B)$ e podemos escrever as matrizes A e B como

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} A = [A_1 \vdots \cdots \vdots A_J] \\ B = [B_1 \vdots \cdots \vdots B_J] \end{cases}$$

onde as submatrizes A_j e B_j têm n_j colunas, j = 1,..., J . Então, com $A'_j = A_jG_{0j}^{-1}$ e $B'_j = B_jG_{0j}^{-1}$, j = 1,..., J , se considerármos $G_0=D(G_{0,1},\ldots, G_{0,J})$ temos $G_0 \in U(W)$ assim como

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} A' = AG_0^{-1} = [A'_1 \vdots \cdots \vdots A'_J] \\ B' = BG_0^{-1} = [B'_1 \vdots \cdots \vdots B'_J] \end{cases}$$

No caso do <u>fraccionamento equilibrado</u> , onde temos $W_1 = \ldots = W_J = \widetilde{W}$ podemos tomar $G_{0,1} = \ldots = G_{0,J} = \widetilde{G} \in U(\widetilde{W})$. O fraccionamento ocorre , por exemplo , na análise conjunta de experiências independentes. Então considerando $U_1^{n_1}$ (i)$Z_1^{n_1}$ (i)...(i)$U_J^{n_J}$ (i)$Z_J^{n_J}$ podemos usar o conjunto de restrições

$$\text{(6)} \qquad pr(U_j^{n_j} \in [a_j^{n_j}]_{\Omega_j}) = 1; j = 1,\ldots,J$$

para testar hipóteses tais como

$$\text{(7)} \qquad H_j: pr(U_j^{n_j} \in [b_j^{n_j}]_{w_j}) = 1; j = 1,\ldots,J$$

onde $b_j^{n_j} \in [a_j^{n_j}]_{\Omega_j}$ e $w_j^{(p_j,n_j)}$ é um sub-espaço de $\Omega_j^{(m_j,n_j)}$ com $m_j \le n_j$, j = 1,..., J , e onde para um ou mais índices j podemos ter $\Omega_j = R^{n_j}$. Com $\Omega^{(m,n)} = \mathop{X}_{j=1}^{J} \Omega_j^{(m_j,n_j)}$, ver MEXIA (1991, pag 14), temos

$$\text{(8)} \qquad pr(U^n \in [a^n]_\Omega) = 1$$

. Tal como anteriormente podemos usar $G_{0j} \in U(W_j)$ par obter $U_j^{'n_j}$, $Y_j^{'n_j}$ e $b_j^{'n_j}$, $j = 1,\dots, J$. Se tivermos $(\Omega_j,w_j) = N(A_j,B_j)$ com $\Omega'_j = G_{oj}\Omega_j$, $w'_j = G_{oj}w_j$, $A'_j = A_jG_{oj}^{-1}$ e $B'_j = B_jG_{oj}^{-1}$ obtemos $(\Omega'_j,w'_j) = N(A'_j,B'_j)$, $j = 1,\dots, J$, enquanto as restrições serão

$$(9) \qquad pr(U_j^{'n_j} \in \Omega'_j) = 1; j = 1,\dots,J$$

e com $U'^n = £(U_1^{'n_1},\dots,U_J^{'n_J})$ e $\Omega'^{(m,n)} = \underset{j=1}{\overset{J}{X}}\Omega_j^{'(m_j,n_j)}$ teremos

$$(10) \qquad pr(U'^n \in \Omega') = 1$$

As hipóteses podem ser rescritas do seguinte modo

$$(11) \qquad H_j: pr(U_j^{'n_j} \in \left[b_j^{'n_j}\right]_{w'_j}) = 1; j = 1,\dots,J$$

. Com $w_j^* = w'^{\perp}_j \cap \Omega'_j$, se tomarmos $A_j^0 = q.o(A'_j)$ e $B_j^0 = q.o(B'_j)$ teremos $M_j^0 = £(B_j^0 - A_j^0) = £(\alpha^T_{j,n_j-m_j+1},\dots,\alpha^T_{j,n_j-p_j})$ com $\left\{\alpha^{n_j}_{j,n_j-m_j+1},\dots,\alpha^{n_j}_{j,n_j-p_j}\right\} = b\perp(w_j^*)$, $j = 1,\dots, J$, assim as expressões alternativas para H_j serão

$$(12) \qquad \begin{cases} H_j: M_j^0 U_j^{'n_j} = M_j^0 b_j^{'n_j}; j = 1,\dots,J \\ H_j: \left\| (U_j^{'n_j} - b_j^{'n_j})_{w_j^*} \right\|^2 = 0; j = 1,\dots,J \end{cases}$$

Seja agora $(w^*_j)_0$ $\left[\overline{w}'_j\right]$ um sub-espaço de R^n que se obtém substituindo em $\underset{\ell=1}{\overset{J}{X}}(0^{n_\ell})\left[\underset{\ell=1}{\overset{J}{X}}(\Omega'_\ell)\right]$ $(0^{n_j})\left[\Omega'_j\right]$ por $w^*_j[w'_j]$, $j = 1,\dots, J$, temos , uma vez que $\Omega' = \underset{\ell=1}{\overset{J}{X}}\Omega'_\ell$

$$(13) \qquad (w_j^*)_0 = \overline{w}'^{\perp}_j \cap \Omega' , j = 1,\dots, J$$

e com $v^n = \pounds(v_1^{n_1},\ldots,v_J^{n_J})$ é fácil ver que, de acordo com $\left\{\alpha^{n_j}_{j,n_j-m_j+1},\ldots,\alpha^{n_j}_{j,n_j-p_j}\right\}=$ $b\perp(w_j^*), j = 1,\ldots, J$

$$\left\|v^n_{(w_j^*)_0}\right\|^2 = \left\|(v_j^{n_j})_{w_j^*}\right\|^2 = \left\|M_j^0 v_j^{n_j}\right\|^2 ; j = 1,\ldots, J \tag{14}$$

. De acordo com (12) e (14) temos, ver MEXIA (1991, pag 15, proposição 5), para H_j, $j = 1,\ldots, J$, as expressões alternativas como hipóteses em U'^n dadas por

$$\begin{cases} H_j : \left\|(U'^n - b'^n)_{(w_j^*)_0}\right\|^2 = 0 \; ; j = 1,\ldots,J \\ H_j : pr(U'^n \in [b'^n]_{\bar{w}'_j}) = 1 \; ; j = 1,\ldots,J \end{cases} \tag{15}$$

Seja A_j^0 uma matriz quase-ortogonal do tipo $(n_j-m_j)\times n_j$ então $A_j^0(A_j^0)^T = I_{n_j-m_j}$, $j = 1,\ldots, J$, e

$$A^0 = D(A_1^0,\ldots, A_J^0) \tag{16}$$

será quase-ortogonal, uma vez que

$$A^0(A^0)^T = D(A_1^0(A_1^0)^T,\ldots, A_J^0(A_J^0)^T) = D(I_{n_1-m_1},\ldots,I_{n_J-m_J}) = I_{n-m} \tag{17}$$

. Visto que $N(A_j^0) = \Omega'_j$, $j = 1,\ldots, J$, e que , ver MEXIA (1991, pag 12, proposição 4), $N(D(A_1^0,\ldots, A_J^0)) = \underset{j=1}{\overset{J}{\times}} N(A_j^0)$ teremos

$$N(A^0) = \underset{j=1}{\overset{J}{\times}} N(A_j^0) = \underset{j=1}{\overset{J}{\times}} \Omega'_j = \Omega' \tag{18}$$

então, ver MEXIA (1989, pag 18), a matriz de projecção ortogonal em $\Omega'^{\perp}$ será $(A^0)^T A^0$ e se tomármos $Y'^n = \pounds(Y_1'^{n_1},\ldots,Y_J'^{n_J})$ teremos

$$(19)\qquad \left\|Y'^{n}_{\Omega^{\perp}}\right\|^2 = \left\|A^{0T}A^{0}Y'^{n}\right\|^2 = Y'^{nT}A^{0T}A^{0}A^{0T}A^{0}Y'^{n} = Y'^{nT}A^{0T}I_{n-m}A^{0}Y'^{n}$$

$$= Y'^{nT}A^{0T}A^{0}Y'^{n} = \left\|A^{0}Y'^{n}\right\|^2 = \sum_{j=1}^{J}\left\|A_j^0 Y_j^{n_j}\right\|^2$$

De (14) podemos considerar também

$$(20)\qquad \left\|(Y'^{n}-b'^{n})_{(w_j^*)_0}\right\|^2 = \left\|(Y_j^{'n_j} - b_j^{'n_j})_{w_j^*}\right\|^2 = \left\|M_j^0(Y_j^{'n_j} - b_j^{'n_j})\right\|^2$$

$$= \left\|M_j^0 Y_j^{'n_j} - M_j^0 b_j^{'n_j})\right\|^2 \ ; j = 1,\ldots, J$$

então podemos aplicar a proposição 10 tomando $[(w^*_j)_0;\ \Omega'^{\perp}\ ;\ U'^{n}\text{-}b'^{n}\ ;\ Z'^{n}]$ com $Z'^{n} = £(G_{0,j}Z_1^{n_1},\ldots,G_{0,j}Z_J^{n_J})$ para mostrar que, se

$$(21)\qquad \Im_j = \frac{n-m}{m_j - p_j}\,\frac{\left\|M^0 Y_j^{'n_j} - M^0 b_j^{'n_j}\right\|^2}{\left\|A^0 Y'^{n}\right\|^2} \sim F^0_{0,j}(z)\ ; j = 1,\ldots, j$$

temos $F^0_{0,j}(z) = F(z|m_j\text{-}p_j,n\text{-}m)$ quando e só quando H_j se verificam, por outro lado, para $z>0$ temos $F^0_{0,j}(z) < F(z|m_j\text{-}p_j,n\text{-}m)$; $j = 1,\ldots, J$. Então podemos usar $\Im_j$ assim como a região de rejeição $\left]\Im_{1-q,n_j-m_j,n-m};+\infty\right[$ para obter um teste F de nível q para H_j ; $j = 1,\ldots, J$, o qual é não distorcido .

Da primeira das expressões alternativas de H_j ; $j = 1,\ldots, J$, dada em (12) concluimos que, ver MEXIA (1991, pag 7, corolário da proposição 2), estas hipóteses se verificam se e só se as sub-hipóteses

$$(22)\qquad H'_{j,i} : \alpha^T_{j,n_j-m_j+i}U'_j \equiv \alpha^T_{j,n_j-m_j+i}b'_j\ ; j = 1,\ldots,J\ ,\ i = 1,\ldots,m_j - p_j$$

se verificam . Seja $w_{j,i}^{*(1,n_j)}$ um sub-espaço gerado por $\alpha_{j,n_j-m_j+i}^{n_j}$ e $w_{j,i}^{'(m_j-1,n_j)} = w_{j,i}^{*\perp} \cap \Omega'_j$; $i = 1,\ldots,m_j-p_j$, $j = 1,\ldots, J$. Então $(w^*_{j,i})_0$ $\left[\overline{w}'_{j,i}\right]$ é obtido substituindo $\overset{J}{\underset{\ell=1}{X}}(0^{n_\ell})\left[\overset{J}{\underset{\ell=1}{X}}(\Omega'_\ell)\right]$ $(0^{n_j})\left[\Omega'_j\right]$ por $w^*_{j,i}$ $[w'_{j,i}]$, $i = 1,\ldots,m_j-p_j$, $j = 1,\ldots, J$. Destas sub-hipóteses temos as expressões alternativas

(23)

$$\begin{cases} H'_{j,i} : pr(U_j^{'n_j} \in \left[b_j^{'n_j}\right]_{w'_{j,i}}) = 1 \ ; i = 1,\ldots,m_j - p_j \ , \ j = 1,\ldots,J \\ H'_{j,i} : \left\|(U_j^{'n_j} - b_j^{'n_j})_{w^*_{j,i}}\right\|^2 = 0 \ ; i = 1,\ldots,m_j - p_j \ , \ j = 1,\ldots,J \end{cases}$$

$$\begin{cases} H'_{j,i} : pr(U'^n \in \left[b'^n\right]_{\overline{w}'_{j,i}}) = 1 \ ; i = 1,\ldots,m_j - p_j \ , \ j = 1,\ldots,J \\ H'_{j,i} : \left\|(U'^n - b'^n)_{(w^*_{j,i})_0}\right\|^2 = 0 \ ; i = 1,\ldots,m_j - p_j \ , \ j = 1,\ldots,J \end{cases}$$

. Temos também

$$(24) \qquad \left\|(Y'^n - b'^n)_{(w^*_{j,i})_0}\right\|^2 = \left\|(Y_j^{'n_j} - b_j^{'n_j})_{w^*_{j,i}}\right\|^2 =$$
$$= (\alpha^T_{j,n_j-m_j+i} Y'_j - \alpha^T_{j,n_j-m_j+i} b'_j)^2 \ ; i = 1,\ldots,m_j-p_j \ , j = 1,\ldots, J$$

, então, de acordo com (19) podemos aplicar a proposição 10 tomando $[(w^*_{j,i})_0;\ \Omega'^{\perp}\ ;\ U'^n-b'^n\ ;\ Z'^n]$ para mostrar que, se

$$(25) \quad \mathfrak{F}_{j,i} = (n-m)\frac{(\alpha^T_{j,n_j-m_j+i} Y'_j - \alpha^T_{j,n_j-m_j+i} b'_j)^2}{\left\|A^0 Y'\right\|^2} \sim F^0_{0,j,i}(z);\ i = 1,\ldots,m_j-p_j \ , j = 1,\ldots, J$$

temos $F^0_{0,j,i}(z) = F(z|1,n\text{-}m)$ quando e só quando $H'_{j,i}$ se verificam, por outro lado, para $z > 0$ temos $F^0_{0,j,i}(z) < F(z|1,n\text{-}m)$; $i = 1,\dots,m_j\text{-}p_j$, $j = 1,\dots, J$. Então podemos usar $\Im'_{j,i}$ assim como a região de rejeição $\left]\Im_{1-q,1,n-m};+\infty\right[$ para obter um teste F de nível q para $H'_{j,i}$; $i = 1,\dots,m_j\text{-}p_j$, $j = 1,\dots, J$, o qual é <u>não distorcido</u> .

É fácil ver que

(26)
$$\Im_j = \frac{1}{m_j - p_j}\sum_{i=1}^{m_j-p_j}\Im'_{j,i}$$

donde concluimos que poderá ser conveniente testar tanto as hipóteses como as sub-hipóteses .

Para as H_j , $j = 1,\dots, J$, podemos considerar as hipóteses

(27)
$$H:\ pr(\ U^n \in [b^n]_w) = 1$$

onde $w^{(p,n)} = \underset{j=1}{\overset{J}{X}} w_j^{(p_j,n_j)}$. Estas hipóteses poderão ser rescritas como

(28)
$$H:\ pr(\ U'^n \in [b'^n]_{w'}) = 1$$

com $w'^{(p,n)} = \underset{j=1}{\overset{J}{X}} w'^{(p_j,n_j)}_j$. Observamos que H se verifica, ver MEXIA (1991, pag 14), se e só se H_j , $j = 1,\dots, J$, se verificam . Consideremos

(29)
$$w^* = w'^{\perp} \cap \Omega' = \underset{j=1}{\overset{J}{X}} w_j^*$$

e com $v^n = \pounds(v_1^{n_1},\dots,v_J^{n_J})$, visto que os vectores linha de M_j^0 constituem uma base ortonormal para w_j^*, $j = 1,\dots, J$, temos

(30) $$\left\| v^n_{w^*} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{J} \left\| (v_j^{n\,j})_{w_j^*} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{J} \left\| M_j^0 v_j^{n\,j} \right\|^2 = \left\| M^0 v^n \right\|^2$$

com

(31) $$M^0 = D(M^0{}_1, \ldots, M^0{}_J)$$

Agora, é fácil obter para H as expressões alternativas, dadas por

(32) $$\begin{cases} H: M^0 U'^n = M^0 b'^n \\ H: \left\| (U'^n - b'^n)_{w^*} \right\|^2 \equiv 0 \end{cases}$$

e, uma vez que

(33) $$\left\| (Y'^n - b'^n)_{w^*} \right\|^2 = \left\| M^0 Y'^n - M^0 b'^n \right\|^2$$

, de acordo com (19) a aplicando a proposição 10 tomando $[w^*; \Omega'^{\perp}; U'^n\text{-}b'^n; Z'^n]$ para mostrar que, se

(34) $$\mathfrak{I} = \frac{n-m}{m-p} \frac{\left\| M^0 Y'^n - M^0 b'^n \right\|^2}{\left\| A^0 Y'^n \right\|^2} \sim F_0^0(z)$$

, temos $F_0{}^0(z) = F(z|m\text{-}p,n\text{-}m)$ quando e só quando H se verifica, por outro lado, para $z > 0$ temos $F_0{}^0(z) < F(z|m\text{-}p,n\text{-}m)$ .Então podemos utilizar esta estatística bem como a região de rejeição $\left]\mathfrak{I}_{1-q,m-p,n-m};+\infty\right[$ para obter um teste F não distorcido de nível q para H.

Estas hipóteses que considerámos nesta secção podem ser todas consideradas como hipóteses sobre $\vec{Z}'^n$, assim estes testes F possuirão as propriedades tratadas na secção 4.1 .

4.3- Hipóteses e partições ortogonais

Vamos agora ver como aplicar o nosso modelo a partições ortogonais . Para preservar a ortogonabilidade assumiremos a homocedasticidade desde o ínicio, assim teremos $(U^n, Z^n) \sim ({}^nF, N(0^n, \sigma^2 I_n))$, e as restrições serão

(1) $$pr(U^n \in [a^n]_\Omega) = 1$$

tendo-se a partição ortogonal

(2) $$\Omega^{(m,n)} = \overset{K}{\underset{k=1}{\oplus^\perp}} w_k^{*(s_k,n)}$$

, então, com

(3) $$w_k = w_k^{*\perp} \cap \Omega \; ; k = 1,\ldots, K$$

teremos $(\Omega, w_k) = N(A, B_k)$, $k = 1,\ldots, K$. Sendo $\{\vec{\beta}_1^n,\ldots,\vec{\beta}_m^n\} = b\perp(\overset{K}{\underset{k=1}{\oplus^\perp}} w_k^*)$. Se $\emptyset \subset C \subseteq \{1,\ldots,m\}$ temos $\{\beta_i^n, i \in C\} = b\perp(w^*(C))$. As hipóteses

(4) $$H_k: pr(U^n \in [b^n]_{w_k}) = 1 , k = 1,\ldots, K$$

com $b^n \in [a^n]_\Omega$, pertencem à familia das

(5) $$H(C): pr(U^n \in [b^n]_{w(C)}) = 1$$

onde $w(C) = w^*(C)^\perp \cap \Omega$.

Consideremos $M^0(C)$, que tem como vectores linha β_i^n com $i \in C$. Podemos obter as expressões alternativas para H(C)

(6) $$\begin{cases} H(C): M^0(C)U^n = M^0(C)b^n \\ H(C): \left\|(U^n - b^n)_{w^*(C)}\right\|^2 \equiv 0 \end{cases}$$

. Visto que $\{\beta_i^n , i \in C\} = b\perp(w^*(C))$ temos também

$$(7) \qquad \|M(C)Y^n - M(C)b^n\|^2 = \|M(C)(Y^n - b^n)\|^2 = \left\|(Y^n - b^n)_{w^*(C)}\right\|^2$$

, o qual com $A^0 = q.o(A)$, isto é, sendo A^0 a matriz cujos vectores linha são obtidos aplicando o processo de ortonormalização de GRAM-SCHMIDT aos vectores linha de A, tem-se $Q(\Omega^\perp) = (A^0)^T A^0$, logo

$$(8) \qquad \|A^0 Y^n\|^2 = \left\|Y^n_{\Omega^\perp}\right\|^2$$

, podemos aplicar a proposição 10 tomando $[w^*(C) ; \Omega^\perp ; U^n\text{-}b^n ; Z^n]$ e $\ell(C) = \#(C)$ para mostrar que, se

$$(9) \qquad \Im(C) = \frac{n-m}{\ell(C)} \frac{\|M^0(C)Y^n - M^0(C)b^n\|^2}{\|A^0 Y^n\|^2} \sim F_0^0(z|C)$$

temos $F_0^0(z|C) = F(z|\ell(C),n\text{-}m)$ quando e só quando H(C) se verifica, por outro lado, para $z > 0$ temos $F_0^0(z) < F(z|\ell(C),n\text{-}m)$. Podemos assim utilizar esta estatística bem como a região de rejeição $]\Im_{1-q,\ell(C),n-m};+\infty[$ para obter um teste não distorcido de nível q para H(C) . Este resultado aplicado também aos testes F para $H'_i = H(\{i\})$, $i = 1,...,m$, temos $\ell(\{i\})$, $i = 1,...,m$. Da primeira das expressões alternativas de H(C) dada em (6) concluimos, ver MEXIA (1991, pag 6, corolário da proposição 1), que H(C) se verifica se e só se as H'_i, com $i \in C$, se verificam . A estatística do teste F para H'_i, $i = 1,...,m$, será

$$(10) \qquad \Im'_i = (n-m)\frac{(\beta_i^T Y - \beta_i^T b)^2}{\|A^0 Y^n\|^2} \; ; i = 1,...,m$$

e , visto que $\|M^0(C)v^n\|^2 = \sum_{i \in C}(\beta_i^T v)^2$, concluimos que

(11) $$\Im(C) = \frac{1}{\ell(C)} \sum_{i \in C} \Im'_i$$

. Deste modo, poderá ser conveniente testar as hipóteses e as sub-hipóteses simultaneamente antes de mostrar esta iguladade . Os testes F para H(C) possuem as propriedades tratadas na secção 4.1 .

5 - Precisão relativa

5.1 - Considerações prévias

Vamos agora considerar o caso em que temos dois métodos devidamente validados, um dos quais é o método padrão e o outro expedito . O nosso objectivo será estudar a precisão do método expedito em relação ao método padrão . Esta precisão relativa será dáda pelo quociente $k = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ onde σ_1^2 [σ_2^2] é a variância do erro das observações para o método padrão [expedito] .Vamos estudar questões relativas a k admitindo que as amostras colhidas para um e outro método seguem modelos sub-normais . O caso particular de amostras que seguem modelos normais fica assim automaticamente tratado .

5.2 - Estimação pontual

Sendo $Y_{1,1}, \ldots, Y_{1,n}$ as observações do método padrão e $Y_{2,1}, \ldots, Y_{2,m}$ as observações do método expedito, vamos obter para k um estimador centrado . Os erros das primeiras [segundas] serão $e_{1,1}, \ldots, e_{1,n}$ iid $\sim N(0 \mid \mu_1, \sigma_1)$ [$e_{2,1}, \ldots, e_{2,n}$ iid $\sim N(0 \mid \mu_2, \sigma_2)$]

Para as amostras considerádas pode escrever-se , com $\overline{Y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{1,i}}{n}$, $\overline{Y}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_{2,i}}{m}$

, $\overline{e}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{1,i}}{n}$ e $\overline{e}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} e_{2,i}}{m}$

(1) $$S_1 = \sum_{i=1}^{n}(Y_{1,i} - \overline{Y}_1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_{1,i} - \overline{e}_1)^2 \sim \sigma_1^2\,\chi^2_{n-1}$$

e

(2) $$S_2 = \sum_{i=1}^{m}(Y_{2,i} - \overline{Y}_2)^2 = \sum_{i=1}^{m}(e_{2,i} - \overline{e}_2)^2 \sim \sigma_2^2\,\chi^2_{m-1}$$

o que permite definir

(3) $$W = \frac{S_1/(n-1)}{S_2/(m-1)} = \frac{m-1}{n-1}\frac{S_1}{S_2} = \frac{m-1}{n-1}\frac{\sigma_1^2\chi^2_{n-1}}{\sigma_2^2\chi^2_{m-1}} = k\frac{m-1}{n-1}\frac{\chi^2_{n-1}}{\chi^2_{m-1}}$$

e onde $F_{n-1,m-1} = \frac{m-1}{n-1}\frac{\chi^2_{n-1}}{\chi^2_{m-1}}$ segue uma distribuição F-Snedcor com n-1 e m-1 graus de liberdade, uma vez que χ^2_{n-1} (i) χ^2_{m-1}. Vindo $\mu(W) = \mu\left(k\frac{m-1}{n-1}\frac{\chi^2_{n-1}}{\chi^2_{m-1}}\right) = k\mu(|n-1,m-1)$ tem-se como estimador centrado para k

(4) $$\hat{k} = \frac{W}{\mu(|n-1,m-1)}$$

e o problema resume-se agora a calcular o valor de $\mu(|n-1,m-1)$.

A função densidade de uma distribuição F-Snedcor com n-1 e m-1 graus de liberdade tem a forma

(5) $$f(x|n-1,m-1) = \begin{cases} 0 \quad , \; x < 0 \\[2ex] \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)\left(\frac{n-1}{m-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \dfrac{x^{\frac{n-1}{2}-1}}{\left(1+\frac{n-1}{m-1}x\right)^{\frac{m+n-2}{2}}} \; , x > 0 \end{cases}$$

. Vamos definir agora uma nova variável aleatória de modo a facilitar o cálculo de $\mu(|n-1,m-1)$.

Seja

$$Z=\frac{n-1}{m-1}\left(\frac{m-1}{n-1}\frac{\chi^2_{n-1}}{\chi^2_{m-1}}\right) \tag{6}$$

, como $\frac{m-1}{n-1}\frac{\chi^2_{n-1}}{\chi^2_{m-1}}$ ~ f(x|n-1,m-1) e visto que $\frac{n-1}{m-1}$>0 , então Z ~ f*(z|n-1,m-1) =

$$\frac{m-1}{n-1}f(z\frac{m-1}{n-1}|n-1,m-1)=\frac{m-1}{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{m-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\left(\frac{m-1}{n-1}z\right)^{\frac{n-1}{2}-1}}{\left(1+\frac{n-1}{m-1}\frac{m-1}{n-1}z\right)^{\frac{m+n-2}{2}}}=$$

$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\frac{z^{\frac{n-1}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{m+n-2}{2}}}$, se z >0 . Considerando p = n-1 e q = m-1 temos

$$f^*(z|p,q)=\begin{cases}0 \quad , \ z<0\\ \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\frac{z^{\frac{p}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{p+q}{2}}} & ,z>0\end{cases} \tag{7}$$

. Para qualquer densidade g(x) tem-se $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\ dx=1$, logo $\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(z|p,q)\ dz=$ $\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{p}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{p+q}{2}}}\ dz=1$,vindo

$$\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{p}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{p+q}{2}}}\ dz=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)} \tag{8}$$

. Considerando esta fórmula podemos agora calcular $\mu(Z|n\text{-}1,m\text{-}1)$. Temos então

$$\mu(Z|n\text{-}1,m\text{-}1) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f^{*}(z|n-1,m-1)\, dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} \frac{z\, z^{\frac{n-1}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{m+n-2}{2}}}\, dz =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} \frac{z^{\frac{n+1}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{(n+1)+(m-3)}{2}}}\, dz$$

, de (8)[(*)] e tendo em conta que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$:

$$\mu(Z|n\text{-}1,m\text{-}1) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(n+1)+(m-3)}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\frac{m-3}{2}\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)} = \frac{n-1}{m-3}$$

De (6) vem $\mu(Z|n\text{-}1,m\text{-}1) = \frac{n-1}{m-1}\mu(|n\text{-}1,m\text{-}1)$ o que significa que $\mu(|n\text{-}1,m\text{-}1) = \frac{n-1}{m-3}\frac{m-1}{n-1} = \frac{m-1}{m-3}$ e atendendo a (4) podemos , finalmente, calcular $\hat{k}$:

(9) $$\hat{k} = \frac{W}{\mu(|n-1,m-1)} = \frac{\frac{m-1}{n-1}\frac{S_1}{S_2}}{\frac{m-1}{m-3}} = \frac{m-3}{n-1}\frac{S_1}{S_2}$$

(*) Note que a função $\Gamma(x)$ só está definida se $x > 0$ logo temos que garantir que $m\text{-}3>0 \Leftrightarrow m>3$.

5.3 - Intervalo de confiança

A estatística utilizada no tratamento de k é, como já vimos,

$$W = \frac{m-1}{n-1}\frac{S_1}{S_2} = \frac{m-1}{n-1}\frac{\sigma_1{}^2\chi^2_{n-1}}{\sigma_2{}^2\chi^2_{m-1}} = kF$$

com $k>0$ e $F \sim f(x|n\text{-}1,m\text{-}1)$, então

(1) $$W \sim \frac{1}{k} f(\frac{w}{k}|n-1,m-1)$$

e tem como densidade

$$f^0(w) = \begin{cases} 0 \ , \ w<0 \\ \dfrac{1}{k}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m-1}{2}\right)}\dfrac{\left(\dfrac{n-1}{m-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\dfrac{w}{k}\right)^{\frac{n-1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{n-1}{m-1}\dfrac{w}{k}\right)^{\frac{m+n-2}{2}}} & ,w>0 \end{cases}$$

. Como $\frac{W}{k} \sim F_{n-1,m-1}$, utilizando uma tabela da distribuição F-Snedcor para calcular

$$pr(\Im_{q/2,n-1,m-1} \le \frac{W}{k} \le \Im_{1-q/2,n-1,m-1}) = 1-q \Leftrightarrow pr(W\Im_{1-q/2,n-1,m-1} \le k \le W\Im_{q/2,n-1,m-1}) = 1-q$$

obtemos

(2) $$\left[W\Im_{1-q/2,n-1,m-1}; W\Im_{q/2,n-1,m-1}\right]$$

estando assim definido o intervalo de confiança de nível 1-q para k . Os extremos deste intervalo são facilmente calculados, uma vez que w é função das observações e os valores dos quantis $\Im_{n-1,m-1}$ estão tabelados .

5.4 - Testes de hipóteses

Consideremos o teste bilateral para k

(1) $$\begin{cases} H_0 : k = k_0 \\ H_1 : k \neq k_0 \end{cases}$$

. Dado que $\frac{W}{k_0} \sim F_{n-1,m-1}$, temos como regra de teste para H_0

(2) $$\begin{cases} \frac{W}{k_0} \in \left[\Im_{q/2,n-1,m-1} ; \Im_{1-q/2,n-1,m-1}\right] \text{ não se rejeita } H_0 \\ \frac{W}{k_0} \notin \left[\Im_{q/2,n-1,m-1} ; \Im_{1-q/2,n-1,m-1}\right] \text{ rejeita-se } H_0 \end{cases}$$

. Portanto os valores de k_0 que definem hipóteses que são aceites pelo teste, são as que satisfazem as desigualdades

(3) $$W\Im_{1-q/2,n-1,m-1} \leq k_0 \leq W\Im_{q/2,n-1,m-1}$$

. Estas desigualdades definem um intervalo que coincide com o intervalo de confiança de nível 1-q para k . Assim, se um valor de k está dentro do intervalo de confiança, ele define uma hipótese que é aceite pelo teste, e por isso diz-se que goza da propriedade de dualidade .

Vamos verificar agora se o teste bilateral é não distorcido . Para isso é necessário estudar a função potência $\beta(k)$ = pr(rej H_0| k), ou seja, probabilidade de se rejeitar a hipótese . Rejeita-se H_0 quando, $k \neq k_0$ isto é, quando $k > k_0$ ou $k < k_0$, como tal vamos considerar dois testes unilaterais, para cada um dos casos, com o fim de caracterizar a função potência .

Consideremos então o teste unilateral esquerdo

(4) $$\begin{cases} H_0 : k = k_0 \\ H_1 : k < k_0 \end{cases}$$

. Temos como regra de teste para H_0, sendo q o nível do teste

(5) $$\begin{cases} \dfrac{W}{k_0} \geq \Im_{q,n-1,m-1} \text{ não se rejeita } H_0 \\ \dfrac{W}{k_0} < \Im_{q,n-1,m-1} \text{ rejeita-se } H_0 \end{cases}$$

. Neste caso

(6) $$\beta(k) = pr(rej\ H_0 |\ k) = pr(W < k_0 \Im_{q,n-1,m-1}) = pr(\ k\ F_{n-1,m-1} < k_0 \Im_{q,n-1,m-1}) =$$
$$= pr(\ F_{n-1,m-1} < \frac{k_0}{k} \Im_{q,n-1,m-1})$$

e quando k diminui, $\frac{k_0}{k} \Im_{q,n-1,m-1}$ aumenta, logo a probabilidade de $F_{n-1,m-1}$ ser menor que aquela expressão aumenta . Assim sendo $\beta(k_0) = q$ (visto que o teste é de nível q) e a função potência $\beta(k)$ é decrescente para valores de $k < k_0$, logo a probabilidade de rejeitar a hipótese é maior quando ela é falsa do que quando ela é verdadeira donde se conclui que o teste é não distorcido .

Consideremos agora o teste unilateral direito

(7) $$\begin{cases} H_0 : k = k_0 \\ H_1 : k > k_0 \end{cases}$$

. Temos como regra de teste para H_0, sendo q o nível do teste

(8) $$\begin{cases} \dfrac{W}{k_0} \leq \Im_{q,n-1,m-1} \text{ não se rejeita } H_0 \\ \dfrac{W}{k_0} > \Im_{q,n-1,m-1} \text{ rejeita} - \text{se } H_0 \end{cases}$$

. Neste caso

(9) $$\beta(k) = pr(\text{rej } H_0 | \, k) = pr(wW > k_0 \Im_{q,n-1,m-1}) = pr(\, k\, F_{n-1,m-1} > k_0 \Im_{q,n-1,m-1}) =$$

$$= pr(\, F_{n-1,m-1} > \frac{k_0}{k} \Im_{q,n-1,m-1})$$

e quando k aumenta, $\frac{k_0}{k} \Im_{q,n-1,m-1}$ diminui, logo a probabilidade de $F_{n-1,m-1}$ ser maior que aquela expressão aumenta . Assim sendo a função potência $\beta(k)$ é crescente para valores de $k > k_0$, logo a probabilidade de rejeitar a hipótese é maior quando ela é falsa do que quando ela é verdadeira donde se conclui que o teste é <u>não distorcido</u> .

Como ambos os testes unilaterais são não distorcidos , pode-se concluir que <u>o teste bilateral é igualmente não distorcido</u>, visto que se conhece o comportamento de função potência $\beta(k)$ para qualquer valor de k e a probabilidade de rejeitar a hipótese é maior quando ela é falsa do que quando ela é verdadeira .

Referências Bibliográficas

KENDAL, M. & STUART, A. - The Advenced Theory and Statistics - Vol.II - Charles Griffin & Co - London - 1961

LEHMAN, E. L. - Testing Statistical Hypothesis - John Willey & Sons - New York - 1959

LUKACS, E. & LAHA, R. C. - Applications of Characteristic Functions - Charles Griffin & Co - London - 1961

MENDEN, J. I. - Combining independent chi-squarred or F tests - Ann. Stat., 10, 266-277 - 1982

MENDEN, J. I. & PERRIMAN, M. D. - The minimal complete class of procedures for combining independent non-central F tests - Pro. 3rd. Purdure Symp., West Lafaytte/Indiana - Vol. 2, 135-181 - 1982

MEXIA. J. T. - Standardized Orthogonal Matrices and the Decomposition of the Sum of Squares for Treatments-Trabalhos de Investigação nº 2, Dep. Mat.-FCT/UNL -1988

MEXIA, J. T. - Controlled Heterocedasticity, Quocient Vector Spaces and F Tests for Hypothesis on Mean Vectors - Trabalhos de investigação nº 1, Dep. Mat. - FCT/UNL - 1989

MEXIA, J. T. - Subnormal Distributions and F Tests - Trabalhos de investigação nº 1, Dep. Mat. - FCT/UNL - 1991

SEBER, G. A. F. - The Linear Hypotesis: A General Theory - 2nd ed. - Charles Griffin & Co. - London - 1980

SHEPHARD, G. L. -Vector Spaces of Finite Dimension-Oliver & Boyd-Edimburgh-1966