



**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**

**ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

**Estratégia de hedging dos riscos de mortalidade e de taxa de juros em fundos de pensões e companhias de seguros**

**Carla Lopes Dias**

Orientação: Prof. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo

**Mestrado em Economia Monetária e Financeira**

Dissertação

Évora, 2013



**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**

**ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

**Estratégia de hedging dos riscos de mortalidade e  
de taxa de juros em fundos de pensões e  
companhias de seguros**

**Carla Lopes Dias**

Orientação: Prof. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo

**Mestrado em Economia Monetária e Financeira**

Dissertação

Évora, 2013

Para M.

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Miguel Bravo, pelo acompanhamento e pelo apoio.

A Marco Zambon, “o amor que nos serve e nos faz evoluir é aquele que traz à tona a nossa melhor versão”.

À minha mãe pelo amor, carinho e pela inúmeras orações.

Ao meu Johnny, companheiro de todos os dias.

Às amigas Julce Cornelsen e Cristina Dias.

A todos que incentivaram e aos que não impediram a conclusão deste trabalho.

# Resumo

O risco de longevidade - o risco de mudanças inesperadas na sobrevivência - é visto como uma séria ameaça para as seguradoras e para os fundos de pensões. Suposições imprecisas das taxas de mortalidade podem gerar implicações importantes, como subavaliação dos preços, estimativa incorreta de pagamento, sub-reserva e incompatibilidade *cash flow*/duração. Por isso, a cobertura (*hedging*) do risco de longevidade vem desempenhando um papel cada vez mais importante nas empresas de seguro do ramo vida. Os artigos que tratam de estratégias de *hedging* são recentes e muito poucos são os que abordam simultaneamente os riscos demográfico e financeiro. O objetivo deste trabalho é abordar o risco de longevidade e uma estratégia de *hedging* quando as taxas de mortalidade e de juro são estocásticas.

# Hedging strategy of the risks of mortality and interest rates at pension funds and insurance companies

## Abstract

Longevity risk - the risk of unexpected increase in life expectancy - is seen as a serious threat for insurers and pension funds. Inaccurate assumptions of mortality rates can generate important implications, such as undervaluation of prices, incorrect estimation of payments, subreserve and incompatibility of cash flow/duration. Therefore, the hedging of the longevity risk is playing an increasingly important role in life insurance companies. The articles dealing with strategies hedging of the longevity risk are recent and very few have dealt simultaneously with financial and demographic risks. The objective of this work is to address longevity risk and a strategy of hedging when mortality rates and interest rates are stochastic.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Síntese sobre taxa de juro</b>	<b>1</b>
1.1	Conceitos e notação . . . . .	1
1.1.1	Estrutura Temporal das Taxas de juro . . . . .	3
1.1.2	Fatos estilizados . . . . .	4
1.2	Modelação das taxas de juro . . . . .	5
1.2.1	Organização dos modelos de taxas de juro . . . . .	5
1.2.2	Modelos estocásticos de taxa de juro . . . . .	7
1.3	Modelos Clássicos . . . . .	8
1.3.1	Modelo de Vasicek . . . . .	8
1.3.2	Modelo de Cox, Ingersoll e Ross . . . . .	10
1.3.3	Modelo de Hull e White . . . . .	11
1.3.4	Modelo de Heath, Jarrow e Morton . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Síntese sobre taxa de mortalidade</b>	<b>14</b>
2.1	Risco de mortalidade e risco de longevidade . . . . .	15
2.2	Conceitos atuariais . . . . .	16
2.2.1	Função de sobrevivência . . . . .	16
2.3	Modelos estocásticos de mortalidade . . . . .	18
2.3.1	Requisitos relevantes para os modelos . . . . .	19
2.3.2	Classificação dos modelos . . . . .	19
2.4	Modelos do tipo afm para a intensidade de mortalidade em tempo contínuo	20
2.4.1	Intensidades de mortalidade <i>forward</i> . . . . .	22
2.5	Alguns exemplos . . . . .	23
2.5.1	Modelo de Vasicek . . . . .	23
2.5.2	Modelo de Vasicek com incerteza ditada exclusivamente por saltos .	24

2.5.3	Modelo de Cox, Ingersoll e Ross . . . . .	25
2.5.4	Modelo de Merton . . . . .	26
2.5.5	Modelo de Merton com saltos . . . . .	27
2.5.6	Modelo de Dothan . . . . .	27
2.5.7	Modelo de Feller . . . . .	27
2.5.8	Modelo de Feller com saltos . . . . .	28
2.5.9	Equação de Ornstein-Uhlenbeck com tendência positiva . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Estratégia de Cobertura</b>	<b>31</b>
3.1	Gestão do risco de longevidade . . . . .	32
3.1.1	Algumas respostas possíveis ao risco de longevidade . . . . .	32
3.1.2	<i>Stakeholders</i> . . . . .	33
3.1.3	Mercado dos novos títulos ligados a mortalidade . . . . .	34
3.2	Dois processos e uma medida . . . . .	35
3.2.1	Mudança da medida . . . . .	36
3.2.2	Avaliações de contratos de seguros . . . . .	38
3.3	Condição HJM nas intensidades de morte <i>forward</i> . . . . .	39
3.4	Estratégia de cobertura . . . . .	41
3.5	Cobertura do risco de mortalidade . . . . .	41
3.5.1	Dinâmica e sensibilidade da reserva . . . . .	42
3.5.2	Cobertura . . . . .	43
3.6	Cobertura de risco financeiro e de mortalidade . . . . .	44
3.7	Aplicação a uma amostra . . . . .	47
3.7.1	Cobertura do risco de mortalidade . . . . .	47
3.7.2	Cobertura do risco financeiro e mortalidade . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>52</b>

# Lista de Tabelas

1.1	Modelos de único fator para a taxa de juro . . . . .	7
3.1	Estimativa da probabilidade de sobrevivência $S(t, T)$ e dos coeficientes de cobertura de mortalidade estocásticos e determinísticos . . . . .	48
3.2	Estimativa dos preços $P(t, T)$ dos contratos e dos coeficientes de cobertura pra o risco financeiro estocástico . . . . .	49

# Lista de Figuras

3.1	Taxas EURIBOR semanais do período de 2007 a 2012 . . . . .	50
-----	--	----

# Introdução

Fundos de pensões e seguradoras do ramo vida estão sujeitos à incerteza relativa a duração do tempo de vida de uma pessoa. Por exemplo, os fundos de pensões estão expostos ao risco de que as taxas de mortalidade dos reformados diminuam a um ritmo mais rápido do que aquelas que foram usadas no cálculo dos seus preços e de suas reservas, bem como as seguradoras de vida estão expostas ao risco de aumentos inesperados na mortalidade. Ademais, as companhias de seguros também estão expostas aos riscos de investimento e, uma vez que suas carteiras de investimento são predominantemente em títulos de rendimento fixo, isso significa que elas estão fortemente expostas às mudanças nas taxas de juro.

O termo risco de longevidade refere-se ao risco de que o tempo de vida de um indivíduo ou uma população seja superior à expectativa. Do lado contrário, tem-se o risco de mortalidade usado, para descrever o risco de que uma população viva, em termos agregados, menos que o esperado, ou seja, que a mortalidade seja superior ao previsto. Apesar de representarem conceitos opostos, os termos risco de longevidade e risco de mortalidade serão usados de forma indistinguível neste trabalho.

Ao longo do século passado, surgiram evidências para mostrar que o risco de mortalidade não é previsível, nem diversificável. As tabelas de vida projetadas (que incluem uma previsão das tendências futuras da mortalidade) usadas nos últimos anos no cálculo dos preços das rendas vitalícias têm, sistematicamente, subestimado a melhoria da mortalidade geral. Esses erros de avaliação do risco de mortalidade têm efeitos financeiros adversos podendo levar os fundos de pensão e as seguradoras à insolvência.

Durante muitos anos, as estratégias utilizadas para a redução do risco demográficos foram o resseguro e *natural hedging*. Esta última consiste em utilizar a compensação natural entre as rendas vitalícias e benefícios por morte para estabilizar os *cash flows* (passivos) das seguradoras. Cox e Lin [16] apresentam prova empírica de que as seguradoras que utilizam a cobertura natural também cobram prêmios mais baixos. Desta forma, as seguradoras

que são capazes de utilizar a *natural hedging* tem uma vantagem competitiva. Recentemente, surgiram outras soluções tais como a adoção de estratégias de *hedging* com base em instrumentos financeiros cujos pagamentos estão ligados a um índice de sobrevivência. No artigo [7], os autores discutem de que maneira, usando títulos ligados a mortalidade reais ou hipotéticos, os seguros de vida, os prestadores de anuidade e os planos de previdência podem gerir sua exposição às mudanças nas taxas de mortalidade.

Por outro lado, não é suficiente estudar apenas o risco de longevidade quando se trata da gestão do risco nos fundos de pensões. Nesse sentido, o outro lado da moeda diz respeito ao risco financeiro. As companhias de seguros devem estimar as suas responsabilidades, ter ativos suficientes para cobri-las bem como são obrigadas a ter reservas de capital ou de solvência para os riscos que enfrentam.

Nesta dissertação abordamos a estratégia de cobertura Delta-Gamma do risco de mortalidade e de taxas de juro, quando ambas as taxas são estocásticas e independentes uma da outra. Esta técnica tem duas grandes vantagens. Primeiro, representa risco de mortalidade sistemática de uma forma muito intuitiva, ou seja, como a diferença entre a intensidade de mortalidade real no futuro e a sua previsão para o futuro feita hoje. O mesmo vale para o risco de taxa de juro. Em segundo lugar, a cobertura Delta-Gamma é facilmente implementável e adaptável às restrições de autofinanciamento, finalizando numa resolução de um sistema de equações lineares. O que propomos neste trabalho baseia-se em [30], mas com uma aplicação empírica considerando amostras e períodos amostrais distintos relativamente às taxas de juro e tábuas de mortalidade consideradas.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma síntese dos principais aspectos envolvendo a modelação das taxas de juro e alguns modelos célebres como: modelos de Vasicek, de Cox, Ingersoll e Ross, de Hull e White e a estrutura de Heath, Jarrow e Morton. O objetivo deste capítulo é introduzir os conceitos e modelos que serão mais tarde usados para abordar o risco financeiro que ameaça os investimentos realizados pelos fundos de pensões e seguradoras. Além disso, os modelos mais tradicionais para mortalidade estocástica são adaptações dos modelos de taxas de juro.

No segundo capítulo, tratamos do fenómeno da mortalidade e sua incerteza. Apresentamos a notação e os conceitos atuariais que serão utilizados ao longo do texto. Também, exploramos as semelhanças entre taxa *spot* e as taxas de mortalidade e veremos como alguns modelos vistos capítulo 1 podem ser adaptados para descrever a dinâmica da intensidade de mortalidade. Ademais, exibimos expressões para a probabilidade de sobrevivência de

um indivíduo (ou de uma geração) com base nos modelos e que serão usadas para calcular o preço de uma especial apólice de seguro.

O capítulo 3 é a parte fundamental desta dissertação; aqui falaremos das possíveis técnicas que as entidades de previdência podem utilizar para combater o risco demográfico, os principais interessados em gerir este risco e abordamos uma estratégia específica, a cobertura Delta-Gama, para lidar simultaneamente com o risco de mortalidade e de taxas de juro. Nessa direção, abordamos inicialmente a cobertura Delta-Gama de um dote puro na presença de apenas o risco de mortalidade sistemática. Depois, assumindo o modelo de Ornstein-Uhlenbeck para o processo de mortalidade veremos que a condição de não arbitragem típica dos mercados financeiros pode ser trasladada para o mercado de seguros. A seguir, sob a independência dos riscos financeiros e de mortalidade, viabilizamos a estratégia de cobertura Delta-Gamma para ambos os riscos. Para ilustrar, aplicamos a técnica de cobertura usando as taxas de mortalidade para uma geração que estava com 55 anos em 31/12/2012 e as taxas de juro EURIBOR do período 2007-2012. Finalmente, no capítulo 4 apresentamos as conclusões desta dissertação.

# Capítulo 1

## Síntese sobre taxa de juro

Apesar da mortalidade ser a principal fonte de risco para um grande número de produtos de seguro de vida e de pensões, é bem conhecido que as companhias de seguros também estão expostas a riscos financeiros, e desde que seus investimentos são predominantemente investimentos em títulos de rendimento fixo, isto significa que elas também estão fortemente expostas ao risco de taxa de juro.

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão sobre as taxas de juro e alguns de seus modelos. Começamos apresentando algumas ferramentas básicas e algumas teorias a respeito da dinâmica. Depois examinamos a questão da modelação enfatizando os modelos estocásticos com estrutura do tipo afim e descrevendo alguns exemplos célebres: modelo de Vasicek, modelo de Cox, Ingersoll e Ross, modelo de Hull e White e a estrutura de Heath, Jarrow e Morton.

### 1.1 Conceitos e notação

*Definição 1.1.* Uma obrigação de cupão zero (*zero coupon bond*) com maturidade em  $T$  é um contracto que paga 1 unidade monetária ao seu portador no tempo  $T$ , sem pagamentos intermédios. O preço no momento  $t$  de uma obrigação com maturidade em  $T$  é denotado por  $B(t, T)$ .

A seguir apontamos algumas observações, extraídas de Bjork [1], relativamente a  $B(t, T)$  e às duas variáveis  $t$  e  $T$ .

- Para um valor de  $t$  fixo,  $B(t, T)$  é uma função de  $T$  e associa o preço das obrigações de todas as maturidades  $T$  em um momento  $t$  fixo. O gráfico desta função é geralmente

uma curva muito suave de modo que para cada  $t$  fixo, podemos considerar  $T \mapsto B(t, T)$  uma função diferenciável.

- Para  $T$  fixo,  $B(t, T)$  é uma função de  $t$  e um processo estocástico. Este processo fornece os preços, em diferentes tempos  $t$ , da obrigação com maturidade fixa  $T$  e possui uma trajetória tipicamente muito irregular.

*Definição 1.2.* A taxa de rendimento atuarial (*yield to maturity*) é a taxa de desconto constante que no tempo  $t$  iguala o valor atual da obrigação ao seu preço de mercado. Em fórmulas, temos

$$B(t, T)e^{(T-t)R(t, T)} = 1$$

ou, resolvendo

$$R(t, T) = -\frac{\ln(B(t, T))}{T - t} \quad (1.1)$$

*Definição 1.3.* A taxa de juro *forward* é a taxa de um empréstimo que começa no tempo  $T$  e vence no tempo  $U > T$ . Sejam  $B(t, T)$  e  $B(t, U)$  obrigações com maturidades em  $T$  e  $U$  respectivamente, então

$$F(t, T, U) = \frac{\ln B(t, T) - \ln B(t, U)}{U - T}, \quad t < T < U. \quad (1.2)$$

*Definição 1.4.* A taxa de juro *forward* instantânea é definida por

$$F(t, T) := \lim_{U \rightarrow T^+} F(t, T, U) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}. \quad (1.3)$$

Temos então que

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T F(t, s) ds}. \quad (1.4)$$

*Definição 1.5.* A taxa de juro *spot* é a taxa aplicada no tempo  $t$  em um período de tempo infinitesimal. Em fórmulas,

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = F(t, t). \quad (1.5)$$

Citando [9], “*The easiest way to think  $r(t)$  it is to regard it as the rate of interest on a bank account: this can be changed on a daily basis by the bank with no control on the part of investor or bank account holder*”.

Os preços das obrigações, opções e outros derivados financeiros dependem apenas do processo seguido por  $r$  num mundo neutro ao risco. Num mundo neutro ao risco (*risk-neutral world*) os investidores, em um período de tempo muito curto ( $t, t + \Delta t$ ), ganham em média  $r(t)\Delta t$ .

Veremos mais tarde que a taxa *spot* e o preço de uma obrigação estão relacionados num mundo *risk-neutral* pela seguinte equação

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \right] \quad (1.6)$$

onde  $\mathbb{Q}$  é uma medida de probabilidade neutra face ao risco.

Substituindo (1.6) em (1.1), temos

$$R(t, T) = -\frac{\ln \left( \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \right] \right)}{T - t}.$$

Para  $t$  fixo, as equações (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6) mostram que conhecendo uma das três variáveis: preço das obrigações, taxas de juro *spot* ou taxas de juro *forward*, podemos determinar as outras duas.

### 1.1.1 Estrutura Temporal das Taxas de juro

A estrutura temporal das taxas de juro (ETJ) também denominada *yield curve* relaciona, a cada momento do tempo  $t$ , as taxas de juro implícitas nos preços dos ativos financeiros pertencentes a mesma classe de risco com suas respectivas maturidades.

Economistas e investidores acreditam que a forma da *yield curve* reflete a expectativa futura do mercado em relação as taxas de juro e às condições da política monetária. Desta forma, a estimação da *yield curve* é fundamental para avaliar o preço dos derivados, medir e gerir o risco de taxa de juro e utilizar estratégias de *hedging*.

A *yield curve* pode apresentar várias formas, as mais conhecidas são: crescente, decrescente, *quasi-flat* e *humped*. Existem muitas teorias que tentam explicar a forma da *yield curve*, ou seja, como as taxas de juro são determinadas. A seguir listamos algumas teorias clássicas, para mais detalhes veja Choudhry [13] e Munk [34].

**Teoria das Expectativas Puras:** esta teoria afirma que as taxas de juro *forward* são iguais as taxas *spot* esperadas no futuro. Assim, curvas decrescentes indicam que o mercado espera que as taxas de juro baixem, enquanto as curvas crescentes refletem as expectativas de um aumento das taxas de curto prazo. Existem várias versões da Teoria das Expectativas Puras, porém nenhuma delas é coerente com qualquer comportamento realista das taxas de juro. Assim, a análise da forma da curva e os modelos de estrutura dinâmica de rendimento a prazo não devem ser baseados nesta hipótese.

**Teoria da Preferência pela Liquidez:** esta teoria baseia-se na noção que os investidores são aversos ao risco e, portanto, exigem um prêmio para empréstimos a longo prazo. Por outro lado, os mutuários, geralmente preferem tomar empréstimos por longos períodos de tempo e aceitam pagar este prêmio. De acordo com este ponto de vista, as taxas *forward* devem ser sempre maiores do que as taxas *spot* esperadas no futuro. E portanto a *yield curve* tende a ser crescente, se as taxas futuras esperadas forem crescentes ou constantes.

**Teoria da Segmentação de Mercado:** esta teoria afirma que os diferentes participantes do mercado, com exigências diferentes, investem em diferentes intervalos de tempo da ETTJ (segmento de maturidade). Por exemplo, um fundo de pensão com passivos com vencimento em 20 e 30 anos pode reduzir o risco se investir em títulos com maturidades semelhante. Por outro lado, os bancos centrais normalmente precisam de obrigações de curto prazo. Razões regulatórias também podem afetar as preferências para investimentos em vencimentos específicos. Desta maneira, os mercados das diferentes maturidades são mercados separados. Assim, a relação entre as taxas de juro e maturidade vai depender da oferta e da procura em cada um dos mercados.

**Teoria do Habitat Preferido:** esta teoria assenta-se na idéia que os investidores têm vencimentos preferenciais (o seu habitat preferido), porém, eles podem escolher outros prazos se forem compensados em termos de um maior rendimento. Isso explica a forma *humped* da *yield curve*; se os investidores têm vencimentos preferenciais então eles comprarão nessas datas, diminuindo os rendimentos e criando uma concavidade ali. Note que, para que haja equilíbrio da oferta e da procura, o prêmio de risco ligado às obrigações de diferentes maturidades terá que ser positivo, negativo ou igual a zero.

### 1.1.2 Fatos estilizados

A seguir listamos alguns fatos observados empiricamente no comportamento das taxas de juro.

- Reversão a média: existe um valor identificado com o “estado estacionário” para o qual a taxa de curto prazo sempre tende a retornar. As razões econômicas frequentemente utilizadas para convencer o uso desta hipótese são que taxas de juro

excessivamente altas afetam a economia de forma negativa. Em razão disso, forças políticas e econômicas pressionam as taxas para baixo. No caso de taxas de juro muito baixas, o efeito é inverso.

- As taxas de juro com diferentes maturidades são positivamente correlacionadas entre si. Esta correlação não é perfeita e decresce a medida que cresce a diferença entre as maturidades.
- A dinâmica da *yield curve* pode ser decomposta em três movimentos *standard*
  1. Choques paralelos (alterações no nível), que representam em média 70% a 80% dos movimentos observados.
  2. Movimentos de rotação (*twist*) (alterações na inclinação), que representam em média 15 a 30% dos movimentos observados.
  3. Butterfly movements (alterações na curvatura), que representam em média 1 a 5% dos movimentos observados.

## 1.2 Modelação das taxas de juro

Nesta seção, vamos dedicar nossa atenção aos modelos de taxas de juro. Esses modelos buscam identificar elementos ou fatores que podem explicar a dinâmica da taxa de juro. Esses fatores são estocásticos, i.e, os seus níveis futuros não podem ser previstos com certeza. Portanto, na modelação das taxas de juro são usados processos estocásticos para alcançar representações razoavelmente precisas do seu comportamento. Mas antes de ocupar-nos com a parte matemática, veremos como estes modelos podem ser classificados.

### 1.2.1 Organização dos modelos de taxas de juro

A seguir enumeramos algumas das muitas classificações para os modelos de taxas de juro.

- Modelos contínuos  $\times$  modelos discretos: A maioria dos modelos de taxas de juro consideram a variável tempo contínua uma vez que através das técnicas do cálculo estocástico contínuo produzem soluções teóricas mais precisas.
- Modelos de único fator  $\times$  modelos multifatoriais:

Em um modelo de fator único a ETTJ deriva do comportamento uma única variável de estado (fonte de incerteza). Esta hipótese não é tão restritiva: implica que todas as taxas se movem na mesma direção em um intervalo de tempo curto, mas não que todas elas se movem na mesma proporção. Portanto, a forma da *yield curve* pode mudar com o passar do tempo. No entanto, análises históricas sugerem que mais de uma componente podem explicar 99,1% da variância total da *yield curve*.

- Modelos de equilíbrio  $\times$  modelos de não arbitragem

Nos modelos de equilíbrio, a dinâmica da taxa de juro *spot*  $r(t)$  é derivada considerando os mercados completos e livres de arbitragem. As taxas de juro de outras maturidades são obtidas assumindo que  $R(t, T)$  é uma função linear de  $r(t)$ . Sob tais modelos, os preços teóricos evoluem de forma que são livres de arbitragem. Nestes modelos, a ETTJ atual é um *output* e nem sempre corresponde a ETTJ observada nos mercados. Pode-se obter um bom ajuste escolhendo cuidadosamente os parâmetros do modelo, porém é praticamente impossível reproduzir a ETTJ observada nos mercados. Os erros de ajuste podem ser significativos no cálculo dos preços das obrigações e isto limitada a capacidade de previsão destes modelos. Os modelos de Vasicek e de Cox, Ingersoll e Ross incluem-se nesta classe de modelos.

Os modelos de não-arbitragem edificam-se a partir da ETTJ atual de modo que os preços futuros evoluem de maneira consistente e livre de arbitragem. Alguns modelos de equilíbrio podem ser convertidos em modelos de não arbitragem colocando uma função do tempo no *drift* do processo de forma a se ajustarem a ETTJ inicial observada nos mercados. Isto permite que a ETTJ futura seja obtida com maior precisão e permite uma melhor precificação das obrigações, aumentando a confiança no modelo. Citamos os modelos de Ho-Lee e de Hull-White.

*Observação 1.6.* De acordo com Cairns [9], as seguintes características são desejáveis, mas não essenciais para um bom modelo da ETTJ:

- As taxas de juro devem ser positivas.
- $r(t)$  deve incorporar o fenómeno de reversão a média. Isto é,  $r(t)$  não pode divagar para mais ou menos infinito e nem para zero, mas eventualmente será puxada para uma média de longo prazo.

- Possibilitar fórmulas simples para os preços das obrigações e de alguns derivados.
- O modelo deve ser flexível o suficiente e produzir dinâmicas que são realistas com relação a preços históricos e atuais do mercado.

### 1.2.2 Modelos estocásticos de taxa de juro

Agora descreveremos um modelo estocástico geral de fator único para a taxa *spot* em tempo contínuo. Mostraremos também como calcular o preço das obrigações de cupão zero com base neste modelo para a taxa de juro.

Primeiro fixaremos algumas notações usuais. Consideremos um espaço  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$  e  $\mathcal{H}_t$  uma filtração gerada pelo movimento Browniano  $W(t)$  em  $\mathbb{R}$ . A fim de focalizarmos em questões puramente de avaliações iremos ignorar os impostos e custos de transação.

A modelação estocástica da evolução da taxa de juro *spot*  $r(t)$  será dividida duas partes: uma determinística e outra aleatória. Essencialmente, assumiremos que a dinâmica da taxa *spot* é dada pela equação diferencial estocástica:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t). \quad (1.7)$$

As componentes  $\mu(t, r(t))$  e  $\sigma(t, r(t))$  são chamadas, respectivamente, de tendência (*drift*) e volatilidade do processo. Estas componentes são funções reais que determinarão completamente o comportamento da taxa *spot*. A Tabela 1.1 agrupa alguns modelos clássicos da literatura.

Tabela 1.1: Modelos de único fator para a taxa de juro

Modelo	$\mu(t, r(t))$	$\sigma(t, r(t))$
Merton (1973)	$\mu$	$\sigma$
Vasicek (1977)	$k(\mu - r)$	$\sigma$
Dothan (1978)	0	$\sigma r$
Rendleman-Bartter (1980)	$kr$	$\sigma r$
Cox, Ingersoll e Ross (1985)	$k(\mu - r)$	$\sigma\sqrt{r}$

Um dos métodos utilizados para derivar o preço das obrigações livre de arbitragem a partir de um modelo para  $r(t)$  é o método das equações diferenciais parciais. Os princípios gerais desta técnica são:

- a dinâmica de  $r(t)$  é dada por (1.7).
- O preço  $B(t, T)$  de uma obrigação de cupão zero depende de uma avaliação no tempo  $t$  de como  $r(t)$  varia entre  $t$  e  $T$ .
- O mercado é eficiente, sem custos de transação e todos os investidores são racionais.

Da aplicação do argumento de não arbitragem resulta que  $B(t, T)$  é solução da equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial B}{\partial r} [\mu(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))] + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \sigma^2(t, r(t)) - r(t)B = 0, \quad (1.8)$$

onde  $\lambda(t, r(t))$  denota o preço de mercado do risco. Para detalhes veja Bravo [5].

Pode-se mostrar que a solução de (1.8) com condição de fronteira  $B(T, T) = 1$  pode ser representada da seguinte forma

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \right],$$

onde  $\mathbb{Q}$  é uma medida de probabilidade neutra face ao risco.

Assim, num mundo livre de arbitragem o preço de uma obrigação de cupão zero é o valor esperado dos seus *cash flows* futuros descontados a uma medida neutra face ao risco.

## 1.3 Modelos Clássicos

Nesta seção apresentamos alguns modelos clássicos das taxas de juro, suas particularidades e faremos comparações simples entre eles. Os modelos Vasicek e de Cox, Ingersoll e Ross [15] são modelos clássicos da literatura de equilíbrio e os modelos de Hull-White [24] e de Heath, Jarrow e Morton [23] são modelos clássicos da literatura de não-arbitragem.

### 1.3.1 Modelo de Vasicek

O modelo de Vasicek [41] assume que a taxa de juro *spot* segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck definido por

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW_t, \quad r(0) = r_0 \quad (1.9)$$

com  $k, \theta, \sigma, r_0$  constantes positivas. A seguir, explicamos cada uma dessas constantes

- $r_0$  é a taxa de juro atual,
- $\theta$  é a média a longo prazo da taxa de juro *spot*,
- $k$  é a velocidade com a qual  $r(t)$  tende  $\theta$ ,
- $\sigma$  é a volatilidade constante que faz com que o processo flutue em torno de  $\theta$  de forma irregular, mas contínua.

Dado um conjunto de informação  $\mathcal{H}_s$  no tempo  $s \leq t$ , a distribuição de  $r(t)$  é Normal com média e variância dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E\{r(t)|\mathcal{H}_s\} &= r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}), \\ \text{Var}\{r(t)|\mathcal{H}_s\} &= \frac{\sigma^2}{2k} [1 - e^{-2k(t-s)}]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Segue então que  $E\{r(t)\} \rightarrow \theta$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto o modelo apresenta a propriedade de reversão a média.

Assumindo que o preço de risco do mercado é constante, então o preço de uma obrigação de cupão zero no tempo  $t$  com maturidade  $T$  é dado por

$$B(t, T) = \mathcal{A}(t, T)e^{-\mathcal{B}(t, T)r(t)}, \quad (1.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, T) &= \exp \left\{ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) [B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2 \right\}, \\ \mathcal{B}(t, T) &= \frac{1}{k} [1 - e^{-k(T-t)}]. \end{aligned}$$

De acordo com (1.1) e (1.11), para esboçar a ETTJ precisamos apenas da média a longo prazo, da velocidade de ajuste e do desvio padrão. Observemos que em  $t = 0$ , a curva inicial das taxa de juro é um *output* do modelo, dependendo dos parâmetros  $k$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  e da dinâmica de  $r(t)$ .

A grande desvantagem do modelo de Vasicek é que as taxas podem ser negativas com probabilidade positiva. Isto não é um grande problema a longo prazo, uma vez que a distribuição da taxa *spot* é estacionária e Normal com  $E\{r(t)\} \rightarrow \theta$  e  $\text{Var}\{r(t)\} \rightarrow \sigma^2/2k$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Outra desvantagem é que se assumimos que  $r = 0$ , a volatilidade condicional das alterações das taxas de juro será constante por tempo indeterminado.

### 1.3.2 Modelo de Cox, Ingersoll e Ross

O modelo, denotado por (CIR) e desenvolvido por John Cox, Jonathan Ingersoll e Stephen Ross em 1985 é uma extensão do modelo de Vasicek fundamentado no seguinte processo estocástico para a taxa *spot*:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t, \quad r(0) = r_0 \quad (1.12)$$

com  $k, \theta, \sigma, r_0$  são constantes positivas com a mesma interpretação do modelo de Vasicek, porém satisfazendo a condição  $2k\theta > \sigma^2$ .

Este modelo preserva a propriedade de reversão a média do modelo proposto por Vasicek e introduz um termo envolvendo uma raiz quadrada no coeficiente de volatilidade. Desta maneira, temos então uma volatilidade condicional: a volatilidade de  $r(t)$  não é constante e sim uma função crescente de  $r(t)$ .

A condição  $2k\theta > \sigma^2$  assegura que a  $r(t)$  é sempre positiva. Dado um conjunto de informação  $\mathcal{H}_s$  no tempo  $s \leq t$ , a taxa spot  $r(t)$  exhibe uma distribuição chi-quadrada, com média e variância dadas por:

$$\begin{aligned} E\{r(t)|\mathcal{H}_s\} &= r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}), \\ Var\{r(t)|\mathcal{H}_s\} &= r(s)\frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta\frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-k(t-s)})^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , os limites são  $\theta$  e  $\theta\sigma^2/2k$  respectivamente.

Assumindo que o preço de mercado do risco é  $\lambda(t) = \lambda\sqrt{r(t)}$ , o preço no tempo  $t$  de uma obrigação de cupão zero com maturidade  $T$  é

$$B(t, T) = \mathcal{A}(t, T)e^{-\mathcal{B}(t, T)r(t)},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, T) &= \left[ \frac{2h \exp\{(k+h)(T-t)/2\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{2k\theta/\sigma^2} \\ \mathcal{B}(t, T) &= \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \\ h &= \sqrt{k^2 + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

Este modelo mantém um certo grau de tratabilidade analítica, mas é menos tratável do que o modelo de Vasicek. Veja em [[9], seção 4.7] uma detalhada comparação entre os modelos de Vasicek e CIR.

### 1.3.3 Modelo de Hull e White

A necessidade de um ajuste exato para ETTJ observada hoje nos mercados, levou Johan C. Hull e Alan White [24] à introduzirem um parâmetro variável no tempo no modelo de Vasicek (modelo estendido de Vasicek). Eles assumem que a taxa de juro *spot* evolui de acordo com a equação:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t), \quad (1.14)$$

onde  $a$  and  $\sigma$  são constantes positivas e  $\theta(t)$  é uma função determinística dada por

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0, t)}{\partial T} + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}), \quad (1.15)$$

onde  $F(0, T)$  é a taxa instantânea *forward* no tempo 0 para a maturidade  $T$ , veja (1.3).

Esta condição faz com que a curva *forward* inicial  $T \mapsto F(0, T)$  produzida pelo modelo coincida com a curva *forward* inicial observada nos mercados.

O último termo da equação (1.15) geralmente é bastante pequeno. Desprezando-o, temos que a tendência do processo  $r(t)$  no tempo  $t$  é  $F_T(0, t) + a[F(0, t) - r]$ . Isto mostra que, em média,  $r(t)$  segue o declive da curva da taxa instantânea *forward* inicial. Quando  $r(t)$  se desvia desta curva, volta a ela com uma velocidade igual a  $a$ .

Dado um conjunto de informação  $\mathcal{H}_s$  no tempo  $s \leq t$ , a distribuição de  $r(t)$  é Normal com média e variância dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E\{r(t)|\mathcal{H}_s\} &= r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)}, \\ Var\{r(t)|\mathcal{H}_s\} &= \frac{\sigma^2}{2k} [1 - e^{-2k(t-s)}]. \end{aligned}$$

com

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2.$$

O preço de uma obrigação de cupão zero é dado por:

$$B(t, T) = \mathcal{A}(t, T)e^{-\mathcal{B}(t, T)r(t)}$$

onde

$$\mathcal{A}(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left\{ B(t, T)F^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at}B(t, T)^2) \right\},$$

e

$$\mathcal{B}(t, T) = \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}].$$

O modelo de Hull e White é bastante tratável analiticamente no sentido que os preços das obrigações de cupão zero e opções podem ser calculados explicitamente. Também permite a derivação de fórmulas analíticas e a construção de eficientes procedimentos numéricos para apreamento de uma grande variedade de derivativos. Por outro lado, a possibilidade de taxas negativas e o uso de uma única variável de estado torna o modelo pouco aplicável na prática. Outro inconveniente é que este modelo é sensível aos seus parâmetros no sentido que uma pequena alteração nos valores dos parâmetros pode provocar grandes alterações nos preços das obrigações.

### 1.3.4 Modelo de Heath, Jarrow e Morton

Os modelos apresentados anteriormente compartilham algumas características:

- a variável de estado é a taxa *spot*  $r(t)$ ,
- podemos escolher livremente os coeficientes de tendência (*drift*) e de volatilidade que consideremos adequados, sem restrições gerais,
- descrevendo  $r(t)$  como solução de uma equação diferencial estocástica, podemos utilizar a teoria do processo de Markov para trabalhar num cenário de equações diferenciais parciais,
- muitas vezes é possível obter fórmulas analíticas para os preços das obrigações e derivativos.

Em 1992, Heath, Jarrow e Morton [23] apresentaram um método para estudar a ETTJ que difere dos outros essencialmente pelas quatro características citada acima. Eles escolheram como variável de estado a taxa *forward* instantânea e desenvolveram uma estrutura geral para sua dinâmica. O *insight* principal desta estrutura é reconhecer que existe uma relação explícita entre os parâmetros de tendência e de volatilidade da dinâmica da taxa de *forward* em um mundo livre de arbitragem.

Mais precisamente, HJM estabelecem que a taxa *forward* instantânea  $F(t, T)$  para uma maturidade fixa  $T$ , segue o seguinte processo estocástico

$$dF(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t), \quad F(0, T) = F^M(0, T), \quad (1.16)$$

em que  $T \mapsto F^M(0, T)$  é a curva *forward* instantânea observada no mercado em  $t = 0$ .

Por construção, o modelo ajusta perfeitamente a ETTJ atual. Heath, Jarrow e Morton mostraram que a propriedade livre de arbitragem num mundo *risk-neutral*, pode ser obtida através da seguinte condição:

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds. \quad (1.17)$$

Esta igualdade é conhecida como condição de tendência de HJM e significa que, num mundo *risk neutral*, a tendência (*drift*) das taxas *forward* depende da sua própria volatilidade.

Integrando a EDE (1.16) e substituindo (1.17), obtemos

$$F(t, T) = F(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) \left[ \int_u^T \sigma(u, s) ds \right] du + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s). \quad (1.18)$$

Portanto, a evolução da ETTJ é completamente determinada pelas taxas *forward* actuais,  $F(0, T)$ , e pela sua estrutura de volatilidade.

Notemos que não existe “o” modelo de Heath, Jarrow e Morton e sim uma classe deles, cada um é caracterizado através de especificações funcionais para a volatilidade (e consequentemente para a tendência). Outra observação é que a maioria dos modelos da taxa de juro *spot* originados pelo método HJM são não-Markovianos (i.e, dependentes da trajetória). Consequentemente, não é possível utilizar o método computacional baseado em EDP para preços de derivativos. No entanto, existem especificações para a volatilidade  $\sigma$  que asseguram, de fato, um processo de Markov. Podemos ver alguns exemplos de descrições para  $\sigma(t)$  em [[5], Quadro 9.1].

Por último, o modelo HJM consiste em especificar a volatilidade, porém não fornece nenhuma orientação sobre como escolher  $\sigma$ .

## Capítulo 2

# Síntese sobre taxa de mortalidade

Nos últimos anos têm-se observado uma queda nas taxas de mortalidade e um aumento na expectativa de vida principalmente nos países mais desenvolvidos. Por exemplo, o Japão, em Setembro de 2013, tinha mais de 54 mil pessoas com mais de 100 anos. Entre os principais fatores para o aumento da longevidade humana podemos citar o avanço da medicina, o melhoramento na qualidade de vida e a ausência de epidemias e grandes guerras. Contudo, o aumento do número de pessoas idosas mostra-se como um difícil cenário para os fundos de pensões e seguradoras do ramo vida uma vez que aumenta o custo das anuidades e reflete a necessidade de reformulação do cálculo atuarial, para que passe a incorporar tal tendência demográfica.

Citando Blake, etc [7], *“as possíveis consequências do risco de longevidade ganharam destaque público em dezembro de 2000 quando a empresa de seguros do ramo vida mais antiga do mundo, Equitable Life Assurance Society (ELAS), foi forçada a fechar a novos negócios. Entre 1957 e 1988, ELAS tinha vendido produtos de anuidades de pensão com “guaranteed annuity rates” fixadas com referência a pressupostos específicos em relação às taxas de juro e expectativa de vida. Estas opções tornaram-se muito valiosas na década de 1990, devido a uma combinação de queda das taxas de juro e melhorias na mortalidade, e foi o aumento dos valores dessas opções que conduziram ELAS à dificuldades financeiras. Estas poderiam ter sido evitadas se a empresa tivesse coberto a sua exposição tanto do risco de taxa de juro, quanto do risco de longevidade, mas durante anos ELAS ignorou a extensão da sua potencial exposição. O fracasso da companhia evidencia a má gestão dos riscos de taxas de juro e de longevidade na sociedade. No entanto, mesmo se tivesse antecipado o problema, ELAS ainda não tinha bons instrumentos para cobrir a sua exposição a ambos*

*os riscos, particularmente o de longevidade”.*

O caso descrito anteriormente destaca a importância de antecipar-se às melhorias de mortalidade: escolhas mal feitas hoje, podem gerar consequências desastrosas amanhã. Durante muitos anos, os atuários usaram tábuas de mortalidade contemporâneas no cálculo dos prêmios. Porém, este procedimento não inclui a tendência de melhoria da mortalidade, criando, assim, o risco de subestimação da probabilidade de sobrevivência e consequentemente na determinação de contribuições e reservas inadequadas.

Neste capítulo desenvolvemos o fenômeno da longevidade/mortalidade do ponto de vista matemático. Esta abordagem é fundamental para a utilização de estratégia de cobertura do risco de mortalidade. Na Seção 2.1 definimos os riscos de mortalidade e longevidade. Na Seção 2.2 introduzimos alguns conceitos da Matemática Atuarial. Nas Seções 2.3 e 2.4 tratamos da modelação da mortalidade do ponto de vista estocástico. E finalmente na Seção 2.5 apresentamos alguns modelos.

## 2.1 Risco de mortalidade e risco de longevidade

Podemos dividir a incerteza em relação as taxas de mortalidade no futuro em duas componentes:

- risco de mortalidade específico (ou não-sistemático): risco de que os números reais de mortes se afastem dos números antecipados por causa de um número limitado de indivíduos de um determinado grupo. Este tipo de risco pode ser diversificado pelos investidores e portanto, não resultará na incorporação de um prêmio de risco significativo no preço dos derivados de mortalidade.
- risco de mortalidade sistemático: o risco de que a taxa de mortalidade se desenvolva de uma maneira diferente do que o previsto. Esta é a componente não-diversificável do risco de mortalidade e, portanto, leva à incorporação de um prêmio de risco.

Neste trabalho, usaremos o termo risco de mortalidade indicando o risco de mortalidade sistemático. O risco de longevidade refere-se ao risco que, a longo prazo, as taxas de sobrevivência, em termos agregados, sejam mais altas que as antecipadas. O risco de mortalidade catastrófica refere-se ao risco que, durante curtos períodos de tempo, as taxas de mortalidade sejam muito maiores do que normalmente seriam experimentadas. Os

termos risco de longevidade e risco de mortalidade serão usados de forma indistinguível neste trabalho, apesar de representarem conceitos opostos.

## 2.2 Conceitos atuariais

Nesta seção, introduziremos alguns conceitos básicos e a notação atuarial relacionados à mortalidade. Em especial, a variável aleatória tempo de vida, a função de sobrevivência e a força da mortalidade. Em seguida, mostramos como elaborar uma tábua de mortalidade a partir das probabilidades de sobrevivência.

### 2.2.1 Função de sobrevivência

A função de sobrevivência, denotada por  $S(x)$ , representa a probabilidade do indivíduo recém-nascido sobreviver pelo menos  $x$  anos e é expressa pela igualdade

$$S(x) = P(T_0 > x) = 1 - F(x) \quad (2.1)$$

onde  $T_0$  é a variável aleatória contínua que representa o tempo de vida de um indivíduo recém-nascido e  $F(x)$  sua função distribuição. Qualquer função de sobrevivência (para uma distribuição tempo de vida) deve satisfazer as seguintes condições:

- $S(0) = 1$ , isto é, a probabilidade de que uma indivíduo sobreviva 0 anos é 1,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0$ , isto é, todas as vidas acabam por morrer,
- a função de sobrevivência deve ser uma função não crescente, i.e.,  $S(x_1) \geq S(x_2)$ , para  $x_1 \leq x_2$ .

### Notação atuarial

A Notação Atuarial Internacional caracteriza em termos de probabilidade a variável tempo de vida de um indivíduo. Desta forma, as probabilidades de sobrevivência e de morte são, respectivamente

$${}_t p_x = P(T_0 > x + t | T_0 > x) = \frac{S(x + t)}{S(x)}, \quad (2.2)$$

$${}_t q_x = P(T_0 \leq x + t | T_0 > x) = 1 - \frac{S(x + t)}{S(x)}. \quad (2.3)$$

A igualdade (2.2) nos diz a probabilidade de uma pessoa de idade  $x$  atingir (viva) a idade  $x + t$ . Enquanto, (2.3) nos diz a probabilidade de uma pessoa de idade  $x$  morrer antes de atingir a idade  $x + t$ .

Por convenção, no caso  $t = 1$  omite-se o índice nas expressões (2.2) e (2.3), ou seja,  $p_x$  denota a probabilidade da pessoa atingir a idade  $x + 1$  e  $q_x$  denota a probabilidade da pessoa morrer dentro de 1 ano.

### Força da mortalidade

A força de mortalidade ou taxa de mortalidade instantânea ou ainda, intensidade instantânea de transição do estado vivo para o estado morto para um indivíduo com idade  $x$  é definida por

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h q_x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(T_0 \leq x + h \mid T_0 > x)}{h}$$

Para uma interpretação de  $\mu_x$  observemos que para  $h$  muito pequeno, temos a

$$\mu_x h \approx P(T_0 \leq x + h \mid T_0 > x).$$

Assim, para  $h$  muito pequeno, podemos interpretar  $\mu_x h$  como a probabilidade de uma vida que atingiu a idade  $x$  morrer antes de atingir a idade  $x + h$ .

Muitas vezes é mais conveniente descrever a distribuição de tempo de vida utilizando a força de mortalidade em vez da função de sobrevivência. Desta maneira, as probabilidades de sobrevivência e mortalidade podem ser expressas por

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \tag{2.4}$$

e

$${}_t q_x = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}. \tag{2.5}$$

Também podemos obter a probabilidade de morte por outra fórmula

$${}_t q_x = \int_0^t {}_s p_x \mu_{x+s} ds. \tag{2.6}$$

Para uma demonstração das expressões anteriores consulte ([22], seção 1.2.3).

### Tábuas de mortalidade

Segundo Bravo [4], “uma tábua de mortalidade (*life table*) é um modelo tabular de análise demográfica que sintetiza um conjunto de funções básicas que permitem analisar, numa

determinada população, o fenômeno da longevidade e efetuar juízos probabilísticos sobre a evolução da mortalidade”.

Dado um modelo de sobrevivência com probabilidade de sobrevivência  ${}_t p_x$ , podemos construir a tábua de mortalidade para o modelo a partir de alguma idade inicial  $x_0$  até uma idade máxima  $\omega$ . Definimos uma função  $l_x$  para  $x_0 \leq x \leq \omega$  como segue. Seja  $l_{x_0}$  um número positivo arbitrário (chamado de raiz da tabela) e, para  $0 \leq t \leq \omega - x_0$ , defina

$$l_{x_0+t} = l_{x_0} {}_t p_{x_0} \quad (2.7)$$

De (2.7) podemos concluir que para  $x_0 \leq x \leq x+t \leq \omega$ ,

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (2.8)$$

e

$${}_t q_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (2.9)$$

Para qualquer  $x \geq x_0$ , podemos interpretar  $l_{x+t}$  como o número esperado de sobreviventes à idade  $x+t$  dos  $l_x$  indivíduos com idade  $x$ .

É comum numa tábua de mortalidade apresentar os valores  $d_x$  correspondente ao números de mortes ocorridas entre idades  $x$  e  $x+1$ ,

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (2.10)$$

## 2.3 Modelos estocásticos de mortalidade

A idéia da mortalidade estocástica é comprovada por diversos trabalhos que mostram que a taxa de melhoria na mortalidade apresentou variações significativas com o tempo, e que essas melhorias têm variado consideravelmente entre os diferentes grupos etários. Além disso, outras análises utilizando modelos estocásticos indicam que melhorias no futuro da mortalidade não podem ser previstas com qualquer grau de precisão.

Nesta seção, apresentamos um quadro teórico para os modelos de taxa de mortalidade estocástica, veremos alguns critérios para um bom modelo e uma gama de perspectivas que podem ser tomadas para a modelação.

Note que usaremos o termo “determinística” para se referir às tabelas de mortalidade que são construídas e utilizadas sem levar em conta qualquer incerteza. Enquanto que um modelo de projeção levando em consideração a incerteza será classificado como um modelo estocástico.

### 2.3.1 Requisitos relevantes para os modelos

Conforme Cairns, Blake, Dowd [10], a fim de que um processo estocástico seja usado para modelar a mortalidade, as condições a seguir devem ser consideradas:

- garantir que as taxas de mortalidade são sempre positivas,
- ser consistente com os dados históricos,
- ser biologicamente coerente. Por exemplo, o modelo deve excluir a priori uma curva de mortalidade invertida, i.e., uma situação em que as taxas de mortalidade nas idades avançadas decrescem com a idade.
- incorporar necessariamente componentes de não reversão em relação a uma média pré-determinada qualquer, em especial a longo prazo.
- não ignorar que a volatilidade das taxas de mortalidade não é homogênea ao longo da vida humana, com idades avançadas a apresentarem, regra geral, uma maior volatilidade.
- ser intuitivo e flexível para ser aplicável em problemas de *pricing* e *hedging*.
- permitir a avaliação de ativos ligados à evolução da longevidade usando soluções analíticas fechadas ou, caso tal não seja possível, métodos numéricos convencionais.

### 2.3.2 Classificação dos modelos

De acordo com Cairns, Blake, Dowd [10], os modelos estocásticos de taxa de mortalidade podem ser classificados da seguinte maneira.

- (i) *spot rate mortality models*: correspondem aos modelos desenvolvidos para taxa de juro *spot*. Exemplos: Vasicek, CIR, Hull e White.
- (ii) *forward mortality models* para  $f_x(t, T)$ : correspondem aos modelos de não-arbitragem para a estrutura temporal da taxa de juro. Exemplo: modelo de HJM.
- (iii) *positive-mortality modelling framework*: correspondem aos modelos desenvolvidos por Flesaker e Hughston [21], Rogers [36] e Rutkowski [37] para a taxa de juro.

- (iv) modelos de mercado para a probabilidade de sobrevivência *forward* ou para os preços *forward* de rendas vitalícias: correspondente aos modelos de mercado (LIBOR e Swap market models) como em Brace, Gatarek e Musiela [3] e Jamshidian [28].

## 2.4 Modelos do tipo afim para a intensidade de mortalidade em tempo contínuo

Antes de avançarmos para considerar estruturas específicas para modelos em tempo contínuo, faremos uma breve discussão sobre quais processos estocásticos subjacentes utilizar. A maioria dos trabalhos sobre modelagem vêm da literatura da taxa de juro e centram-se no uso de processos de difusão, ou seja, a dinâmica da mortalidade é conectada a um ou mais movimentos Brownianos. No entanto, existe a possibilidade desses movimentos Brownianos serem substituídos ou complementados com processos de salto.

Para modelar a força de mortalidade estocástica são aplicadas as mesmas ferramentas matemáticas utilizadas na literatura de risco de crédito para modelar o incumprimento (*default*). Seguindo este tratamento e usando uma notação descomplicada, o tempo de vida restante de um indivíduo, denotado por  $\tau$ , é um tempo de paragem duplamente estocástico com intensidade  $\lambda$ . Em termos gerais, isso significa que,  $\tau$  é o tempo do primeiro salto de um processo de contagem não explosivo  $N$  com intensidade aleatória  $\lambda$ , que registra em cada momento  $t \geq 0$  se o indivíduo faleceu ( $N_t \neq 0$ ) ou sobreviveu ( $N_t = 0$ ).

É possível mostrar que se  $\tau \geq t$ , então a probabilidade de sobrevivência no horizonte  $(t, T]$ , com  $T \geq t \geq 0$  fixo, pode ser definida como:

$$\mathbb{P}(\tau > s | \mathcal{G}_t) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_t^s \lambda(u) du} | \mathcal{G}_t \right] \quad (2.11)$$

onde  $\mathcal{G}_t$  descreve a informação no tempo  $t$  sobre o passado das taxas de mortalidade.

Observe que o lado direito da equação (2.11) é similar ao preço no tempo  $t$  de uma obrigação de cupão zero *default-free* com maturidade no tempo  $T > t$ , se a taxa *spot* é retratada pelo processo  $\lambda$ . Essa semelhança sugere caracterizar a intensidade estocástica  $\lambda$  através de um processo afim como no caso das taxas de juro.

Logo, fixemos um espaço de probabilidade completo filtrado  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ , com  $\mathcal{G}_t$  uma filtração gerada pelo processo  $\lambda$ . Consideremos um indivíduo com idade  $x + t$  no tempo  $t$ , i.e, com idade  $x$  no momento 0 e denotemos por  $\lambda_{x+t}(t)$  o processo que descreve a

intensidade de mortalidade futura. A dinâmica de  $\lambda_{x+t}(t)$  é dada pela equação diferencial estocástica (EDE)

$$d\lambda_{x+t}(t) = \alpha(\lambda_{x+t}(t))dt + \sigma(\lambda_{x+t}(t))dW(t) + dJ(t), \quad (2.12)$$

em que:

- $\alpha(\lambda(t))$ , a matriz de variâncias-covariâncias  $\sigma\sigma^T$  e a intensidade de salto (*jump measure*) associada a  $J$  têm um dependência afim de  $\lambda(t)$ ,
- $W$  é um movimento browniano  $n$  dimensional,
- $J$  é um processo de salto (*pure jump process*).

Os saltos no processo de mortalidade indicam a presença de eventos “raros” tais como mudanças bruscas nas condições ambientais ou avanços médicos radicais que acarretam alterações súbitas na mortalidade.

Notamos que, quando  $t$  muda, o processo  $\lambda_{x+t}(t)$  descreve a intensidade de mortalidade futuro para qualquer idade  $x + t$  de um indivíduo com idade  $x$  no tempo 0. Em outras palavras,  $\lambda_{x+t}(t)$  capta a intensidade de mortalidade para uma determinada geração e uma determinada idade inicial. Desta maneira, quando adotamos uma tábua de mortalidade devemos analisar a “diagonal” da tábua.

A adoção de um processo afim para modelar a intensidade permite-nos representar, sob algumas condições técnicas, a probabilidade de sobrevivência  $S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T)$  de um indivíduo com idade  $x + t$  no tempo  $t$  no horizonte  $(t, T]$  através da expressão,

$$S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T) = e^{\mathcal{A}(T-t) + \mathcal{B}(T-t) \cdot \lambda_{x+t}(t)} \quad (2.13)$$

onde  $\mathcal{A}(\cdot)$  e  $\mathcal{B}(\cdot)$  são soluções de equações diferenciais de Ricatti. Para mais detalhes, veja [[4], Seção 9.2].

Então, usando (2.11) e (2.13), a probabilidade de sobrevivência é

$$S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T) = \mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ e^{-\int_t^T \lambda_{x+s}(s) ds} | \mathcal{F}_t \right] = e^{\mathcal{A}(T-t) + \mathcal{B}(T-t) \cdot \lambda_{x+t}(t)} \quad (2.14)$$

A igualdade (2.14) diz que, num contexto estocástico, a probabilidade de sobrevivência é dada por um valor esperado condicionado a informação sobre as taxas de mortalidade disponíveis até ao momento  $t$ .

Por simplicidade, faremos a mudança de variável  $\tau = T-t$  e identificaremos  $S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T)$  com  ${}_{T-t}p_{x+t}(t)$ , uma vez que as duas expressões tem o mesmo significado. Assim,

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}$$

A seguir citamos algumas observações:

- Note que a intensidade de mortalidade é modelada com respeito a uma medida de probabilidade objectiva  $\mathbb{P}$ .
- Uma vez que estamos interessados na implementação prática do modelo a escolha do processo para  $\lambda$  é crucial. Note que se escolhermos um processo com parâmetros não variando com o tempo, a calibragem do modelo pode ser realizada através de procedimentos convencionais, tais como o princípio de máxima verossimilhança.
- A desvantagem em usar um processo afim está possibilidade de ocorrer valores negativos para a intensidade  $\lambda_{x+t}(t)$ . Por sua vez, isto pode ser contornado na prática, fixando os parâmetros do modelo de modo que a possibilidade de registrarem valores negativos seja irrelevante.
- Um aspecto interessante é a relação entre a intensidade estocástica de mortalidade e a força determinística mortalidade. Recordemos que a força de mortalidade à idade  $x+t$  é definida por

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(T_0 \leq x+t+h \mid T_0 > x+t)}{h} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T)$$

Se a intensidade de mortalidade segue um processo estocástico afim como em (2.12), então

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)).$$

Assim,

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)).$$

### 2.4.1 Intensidades de mortalidade *forward*

Da mesma forma que no caso da taxas de juro *forward*, podemos definir a intensidade de mortalidade *forward* (por vezes abreviada mortalidade *forward*) para a geração  $x$  em  $t$  para o momento  $T$

$$f_x(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T) \quad (2.15)$$

E analogamente a (1.4), temos

$$S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T) = \exp\left(-\int_t^T f_x(t, s) ds\right) \quad (2.16)$$

$f_x(t, T)$  pode ser interpretada uma estimativa, com base na informação disponível no instante  $t$ , da intensidade de mortalidade no tempo  $T$  futuro (isto é,  $T + t$  anos adiante) para indivíduos com idade  $x + T$  no tempo  $T$ .

Para  $T = t$ , a intensidade de mortalidade *forward* coincide com a *força de mortalidade spot*

$$\lambda_{x+t}(t) = f_x(t, t). \quad (2.17)$$

## 2.5 Alguns exemplos

A semelhança na estrutura matemática entre as taxas de juro e a definição da taxa de mortalidade (ver (1.6), (1.3), (1.4), (1.5), juntamente com (2.13), (2.15), (2.16) e (2.17)) sugere que os modelos obtidos no setor das taxas de juro sejam reproduzidos para a intensidade de mortalidade. No entanto, enquanto matematicamente semelhante a um certo nível conceitual, as taxas de mortalidade se comportam de forma muito diferente das taxas de juro. Por exemplo, a estrutura temporal das taxas de mortalidade deve ser crescente para refletir a razoabilidade biológica específica para cada idade, enquanto as taxas de juro podem reverter em alguma situação. Além disso, a propriedade de reversão à média é uma propriedade desejável para as taxas de juro, mas não para a dinâmica da mortalidade.

A seguir listamos alguns modelos para a intensidade de mortalidade  $\lambda_{x+t}(t)$  retirados de Bravo [4]. Todos eles têm uma única variável de estado e todos seguem uma estrutura do tipo afim (2.12). Eles diferem entre si pela inclusão ou não de reversão em relação a uma média de longo prazo e pela inclusão (ou não) de saltos (*jumps*) no processo estocástico.

### 2.5.1 Modelo de Vasicek

Este modelo adequa o processo de Ornstein-Uhlenbeck com coeficientes constantes descrito para as taxas de juro, i.e,

$$d\lambda_{x+t}(t) = a(\theta - \lambda_{x+t}(t))dt + \sigma dW_t, \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x, \quad (2.18)$$

onde  $\bar{\lambda}_x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $\sigma \geq 0$ .

- $\theta$  é a média de longo prazo, específica para cada idade
- $a$  é a velocidade de convergência de  $\lambda_{x+t}(t)$  em direção à  $\theta$
- $\bar{\lambda}_x > 0$  é a intensidade determinística deduzida com base numa tábua de mortalidade.

Integrando a equação (2.18) para  $t \geq s$ ,

$$\lambda_{x+t}(t) = \lambda_{x+s}(s)e^{-a(t-s)} + \theta(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u),$$

Podemos provar que  $\lambda_{x+t}(t)$  segue uma distribuição Normal com média e variância dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}\{\lambda_{x+t}(t)|\mathcal{F}_s\} = \mu_{x+s}(s)e^{-a(t-s)} + \theta(1 - e^{-a(t-s)})$$

e

$$\text{Var}\{\lambda_{x+t}(t)|\mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}].$$

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}$$

com  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau) &= \frac{e^{-a\tau} - 1}{a}, \\ \mathcal{A}(\tau) &= \frac{[\tau + \mathcal{B}(\tau)](\frac{\sigma^2}{2} - a^2\theta)}{a^2} - \frac{\sigma^2\mathcal{B}^2(\tau)}{4a}. \end{aligned}$$

Neste modelo existe probabilidade positiva de  $\lambda_{x+t}(t)$  assumir valores negativos, mas isto dependerá das estimativas dos parâmetros obtidas em estudo empíricos concretos. Além disso, o modelo apresenta a propriedade de reversão a média o que não traduz a realidade observada nas tábuas de mortalidade.

## 2.5.2 Modelo de Vasicek com incerteza ditada exclusivamente por saltos

Neste modelo a parte estocástica é composta apenas por um processo de salto:

$$d\lambda_{x+t}(t) = a(\theta - \lambda_{x+t}(t))dt + dJ(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x,$$

com  $J(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \varepsilon_i$  processo de Poisson composto com intensidade constante  $\eta \geq 0$  e  $\{\varepsilon_i : i = 1, \dots, \infty\}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

Supomos que a dimensão dos saltos (*jump sizes*) segue uma distribuição assimétrica duplamente exponencial com a probabilidade de ocorrer saltos positivos com dimensão média  $v_1 > 0$  é denotada por  $\pi_1$  e a probabilidade de saltos negativos com dimensão média  $v_2 > 0$  é dada por  $\pi_2$ . Observemos que um salto negativo corresponde ao aumento da longevidade e um positivo representa aumento de  $\lambda_{x+t}(t)$  relacionados a catástrofes naturais ou novas epidemias.

A distribuição duplamente exponencial apresenta duas características interessantes:

- é uma distribuição leptocúrtica, ou seja, apresenta uma concentração mais alta em torno de sua média do que a distribuição Normal. Isto reflete o que ocorre na prática: na maioria das vezes, os saltos na mortalidade têm pequena dimensão.
- possui caudas pesadas (significando é relativamente fácil obter valores que se afastam da média a vários múltiplos do desvio padrão) correspondentes, neste caso, a eventos extremos.

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}$$

com  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$ , para  $\tau = T - t < -\frac{1}{a} \ln(1 - \frac{a}{v_2})$ , dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau) &= \frac{e^{-a\tau} - 1}{a} \\ \mathcal{A}(\tau) &= \left[ -\theta + \eta \left( \frac{\pi_1 a}{a + v_1} + \frac{\pi_2 a}{a - v_2} - 1 \right) \right] \tau - \theta \mathcal{B}(\tau) + \eta \left\{ \frac{\pi_1 \ln(1 - v_1 \mathcal{B}(\tau))}{a + v_1} + \frac{\pi_2 \ln(1 + v_2 \mathcal{B}(\tau))}{a - v_2} \right\} \end{aligned}$$

### 2.5.3 Modelo de Cox, Ingersoll e Ross

O modelo denotado por CIR é dado por

$$d\lambda_{x+t}(t) = a[\theta - \lambda_{x+t}(t)]dt + \sigma \sqrt{\lambda_{x+t}(t)} dW(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x.$$

De maneira semelhante ao caso das taxas de juro, o modelo exige que  $2a\theta > \sigma^2$  e isto implica que  $\lambda_{x+t}(t)$  é sempre positiva. O processo apresenta uma distribuição qui-quadrado não

central, com média e variância condicional a  $\mathcal{F}_s$  dadas por

$$\begin{aligned} E\{\lambda_{x+t}(t)|\mathcal{F}_s\} &= \lambda_{x+s}(s)e^{-a(t-s)} + \theta(1 - e^{-a(t-s)}), \\ Var\{\lambda_{x+t}(t)|\mathcal{F}_s\} &= \lambda_{x+s}(s)\frac{\sigma^2}{a}(e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)}) + \theta\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-a(t-s)})^2. \end{aligned}$$

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}$$

com  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tau) &= \frac{a\theta}{\phi}\tau - \frac{a\theta(\phi + \xi)}{\kappa\phi\xi} \ln\left(\frac{\phi + \xi}{\phi + \xi e^{-\kappa\tau}}\right), \\ \mathcal{B}(\tau) &= \frac{(1 - e^{\kappa\tau})}{(\phi + \xi e^{\kappa\tau})}, \begin{cases} \kappa = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \\ \phi = -\frac{(a+\kappa)}{2} \\ \xi = \frac{(a-\kappa)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.5.4 Modelo de Merton

A partir de agora apresentamos modelos que não possuem reversão em relação à média. Consideremos a seguinte equação de difusão

$$d\lambda_{x+t}(t) = a dt + \sigma dW(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x, \quad (2.19)$$

onde  $\bar{\lambda}_x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  assumem seus significados usuais.

Podemos provar que  $\lambda_x(t)$  segue uma distribuição Normal com média e variância fornecidas por respectivamente:

$$E\{\lambda_{x+t}(t)|\mathcal{F}_s\} = \lambda_{x+s}(s) + a(t-s) \quad \text{e} \quad Var\{\lambda_{x+t}(t)|\mathcal{F}_s\} = \sigma^2(t-s).$$

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}$$

com  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau) &= -\tau, \\ \mathcal{A}(\tau) &= -\frac{a}{2}\tau^2 + \frac{\sigma^2}{6}\tau^3. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados na equação para a probabilidade de sobrevivência, obtemos

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = \exp\left\{-\frac{a}{2}\tau^2 + \frac{\sigma^2}{6}\tau^3 - \tau\lambda_{x+t}(t)\right\}.$$

### 2.5.5 Modelo de Merton com saltos

Introduzindo uma componente de salto na equação (2.19), temos que:

$$d\lambda_{x+t}(t) = adt + \sigma dW(t) + dJ(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x,$$

com  $J(t)$  processo de Poisson composto, independente de  $W(t)$ , com intensidade de salto  $\eta > 0$  e dimensão de salto como no modelo de Vasicek. A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}.$$

Chegamos as seguintes expressões das funções  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  para  $\tau < \frac{1}{v_1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau) &= -\tau, \\ \mathcal{A}(\tau) &= -\frac{a}{2}\tau^2 + \frac{\sigma^2}{6}\tau^6 + \eta\mathcal{B}(\tau) + \eta \left\{ \frac{\pi_1 \ln(1 - v_1\mathcal{B}(\tau))}{v_1} - \frac{\pi_2 \ln(1 + v_2\mathcal{B}(\tau))}{v_2} \right\}. \end{aligned}$$

### 2.5.6 Modelo de Dothan

Neste modelo assume-se que a taxa de mortalidade satisfaz a equação diferencial estocástica

$$d\lambda_{x+t}(t) = \sigma\sqrt{\lambda_{x+t}(t)}dW(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x.$$

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \mu_{x+t}(t)}$$

com  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tau) &= 0, \\ \mathcal{B}(\tau) &= \phi \frac{(e^{\xi\tau} - 1)}{(1 + e^{\xi\tau})}, \quad \begin{cases} \phi = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \\ \xi = -\sigma\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.5.7 Modelo de Feller

Este modelo é descrito através da seguinte equação de Feller

$$d\lambda_{x+t}(t) = a\lambda_{x+t}(t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_{x+t}(t)}dW(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x, \quad (2.20)$$

onde  $\bar{\lambda}_x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  mantêm o significado usual. Observe que se  $a < 0$ , temos um caso particular do modelo CIR com  $\theta = 0$ .

A solução da EDE (2.20) é dada por:

$$\lambda_{x+t}(t) = \lambda_{x+t}(0)e^{at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-u)} \sqrt{\lambda_{x+t}(u)} dW(u).$$

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}$$

com  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tau) &= 0 \\ \mathcal{B}(\tau) &= \frac{1 - e^{\kappa\tau}}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{\kappa\tau}}, \text{ com } \begin{cases} \kappa = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \\ \alpha_0 = \frac{(a+\kappa)}{2} \\ \alpha_1 = \frac{(\kappa-a)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

A principal vantagem deste modelo é que ele não viola a restrição não negatividade da intensidade. É possível o processo de intensidade chegar a 0 e ficar lá com probabilidade positiva. No entanto, a probabilidade de tal evento é negligenciável nas aplicações práticas. Além disso, este evento desafortunado nunca ocorreu nas simulações executadas com os parâmetros calibrados.

### 2.5.8 Modelo de Feller com saltos

Suponhamos agora, que os desvios no trajeto da estrutura temporal da mortalidade sejam estabelecidos também por saltos descontínuos. Neste cenário, consideremos a equação

$$d\lambda_{x+t}(t) = a\lambda_{x+t}(t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_{x+t}(t)}dW(t) + dJ(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x.$$

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \mu_{x+t}(t)}$$

com  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tau) &= \eta\pi_1 \left\{ \frac{\alpha_0\tau}{(\alpha_0 - \nu_1)} + \frac{\nu_1(\alpha_0 + \alpha_1)[\ln(\alpha_0 + \alpha_1) - \ln(\alpha_0 - \nu_1 + (\alpha_1 + \nu_1)e^{\kappa\tau})]}{\kappa(\alpha_0 - \nu_1)(\alpha_1 + \nu_1)} \right\} \\ &+ \eta\pi_2 \left\{ \frac{\alpha_0\tau}{(\alpha_0 + \nu_2)} + \frac{\nu_2(\alpha_0 + \alpha_1)}{\kappa(\alpha_0 - \nu_2)(\alpha_0 + \nu_2)} [-\ln(\alpha_0 + \alpha_1) + \ln(\alpha_0 + \nu_2 + (\alpha_1 - \nu_2)e^{\kappa\tau})] \right\} \\ &- \eta\tau, \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(\tau) = \frac{1 - e^{\kappa\tau}}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{\kappa\tau}}, \text{ com } \begin{cases} \kappa = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \\ \alpha_0 = \frac{(a+\kappa)}{2} \\ \alpha_1 = \frac{(\kappa-a)}{2} \end{cases}$$

### 2.5.9 Equação de Ornstein-Uhlenbeck com tendência positiva

A seguinte adaptação do processo de Ornstein-Uhlenbeck fornece mais um modelo para a mortalidade sem reversão à média

$$d\lambda_{x+t}(t) = a\lambda_{x+t}(t)dt + \sigma dW(t), \quad \lambda_{x+t}(0) = \bar{\lambda}_x, \quad (2.21)$$

onde  $\bar{\lambda}_x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  assumem o significado usual. Observe que se considerarmos  $a < 0$  e  $\theta = 0$  temos um caso particular do modelo de Vasicek.

Ao resolvê-lo, temos a seguinte expressão para a intensidade:

$$\lambda_{x+t}(t) = \lambda_{x+t}(0)e^{at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW(s).$$

A probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade  $x + t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)},$$

as expressões analíticas para  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  são

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau) &= \frac{1 - e^{a\tau}}{a}, \\ \mathcal{A}(\tau) &= \frac{\sigma^2}{2a^2}\tau - \frac{\sigma^2}{a^3}e^{a\tau} + \frac{\sigma^2}{4a^3}e^{a\tau} + \frac{3\sigma^2}{4a^3}. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados na equação para a probabilidade de sobrevivência, obtemos

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = \exp \left\{ \frac{\sigma^2}{2a^2}\tau - \frac{\sigma^2}{a^3}e^{a\tau} + \frac{\sigma^2}{4a^3}e^{a\tau} + \frac{3\sigma^2}{4a^3} + \frac{1 - e^{a\tau}}{a} \lambda_{x+t}(t) \right\}.$$

A principal desvantagem desse processo para a intensidade é que esta torna-se negativa com probabilidade positiva. Além disso, pode-se mostrar que a probabilidade de um indivíduo sobreviver eternamente tende ao infinito. Estas características são irrealistas e indesejáveis. Assim, de um ponto de vista puramente teórico, o modelo Ornstein-Uhlenbeck pode ser considerado inadequado para descrever a intensidade da mortalidade. No entanto, uma vez determinado os parâmetros, é possível obter uma função de sobrevivência decrescente com a idade e a probabilidade de valores negativos de  $\lambda$  acaba por ser negligenciável.

Assim, uma vez calibrado, o modelo é biologicamente razoável e parece ser útil no que diz respeito às aplicações práticas por atuários.

Para uma equação de Ornstein-Uhlenbeck com tendência positiva e saltos e outros modelos veja Bravo [4].

## Capítulo 3

# Estratégia de Cobertura

Neste capítulo trataremos das possíveis respostas que as entidades de previdência podem dar ao risco de longevidade e analisamos uma particular estratégia de cobertura (*hedging*) para os riscos de longevidade e de taxas de juro.

Durante muitos anos, os métodos utilizados pelas seguradoras para a redução do risco de mortalidade foram o resseguro e *natural hedging*. Recentemente, surgiram outras soluções como a adoção de estratégias com base em instrumentos financeiros, denominados *mortality-linked securities*, cujos pagamentos dependem da realização de um índice de sobrevivência. Mais precisamente, existiram duas tentativas para oferecer soluções no mercado de capitais que permitiam alguns desses riscos serem neutralizados. Um deles, o *Swiss Re bond* (que aborda o risco de mortalidade catastrófica a curto prazo) foi lançado com sucesso. O outro, o *EIB bond* (que teve como objetivo combater o risco de longevidade), foi retirado um ano depois de ter sido anunciado.

O ponto essencial deste capítulo é a estratégia de cobertura Delta-Gamma dos riscos de mortalidade e de taxas de juro. De maneira simples, desejamos saber quantos *mortality-linked securities* e/ou obrigações de cupão zero devem ser adquiridos pela seguradora para cada dote puro emitido. Esta abordagem tem duas grandes vantagens. Primeiro, representa risco de mortalidade sistemática de uma forma muito intuitiva, ou seja, como a diferença entre a intensidade de mortalidade real no futuro e a sua previsão atual. O mesmo vale para o risco de taxa de juro. Em segundo lugar, a cobertura Delta-Gamma é facilmente implementável e adaptável às restrições autofinanciamento. Finalizando numa resolução de um sistema de equações lineares. O que propomos neste capítulo baseia-se no artigo [30].

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira. Na Seção 3.1 tratamos da gestão do risco de longevidade apresentando os principais interessados na prevenção deste risco e as formas com as quais podem lidar com ele. Na Seção 3.2 relembramos os dois modelos escolhidos para aplicar a técnica de cobertura. A fim de obter uma equação para a reserva, devemos em primeiro lugar fazer uma mudança de medida. Na Seção 3.3 mostramos uma condição tipo HJM para as intensidades de morte *forward* que equivale a *free-arbitrage*. Na Seção 3.4 definimos os coeficientes Delta e Gamma. Na Seção 3.5 mostramos como efetuar a cobertura do risco de longevidade. Na Seção 3.6 estendemos a técnica de cobertura na presença dos riscos de mortalidade e financeiro. E finalmente na Seção 3.7 fazemos uma aplicação prática.

## 3.1 Gestão do risco de longevidade

Nesta seção veremos como os fundos de pensões e seguradoras do ramo vida podem conviver com o risco de longevidade, uma vez que a sua capacidade de fazer valer as suas promessas depende em grande medida de quão bem eles gerem este risco. A principal referência desta seção é [7].

### 3.1.1 Algumas respostas possíveis ao risco de longevidade

Há muitas formas que podem ser usadas pelas companhias de seguros e planos de previdência em resposta ao risco de longevidade:

- Eles podem simplesmente aceitar o risco como um risco legítimo do negócio que eles entendem bem e estão preparados para assumir.
- *Natural hedging*: utiliza a iteração entre as rendas vitalícias e benefícios por morte para se proteger contra mudanças inesperadas nos pagamentos futuros de benefícios.
- Resseguro: é um seguro comprado por uma companhia de seguro à outra companhia de seguro (ressegurador). Existem muitos contratos de resseguro, alguns podem envolver a repartição de alguns ou todos os danos do risco de longevidade com o ressegurador.
- Provedores de anuidade podem optar por substituir as anuidades (rendas) tradicionais

por contratos que passam parte da exposição a risco de longevidade para os segurados sobreviventes.

- *Securitization*: envolve o isolamento de um conjunto de ativos com um alto nível de risco de longevidade ou direito a um conjunto de fluxos de caixa e do reacondicionamento desses ativos ou fluxos de caixa em títulos que são negociados nos mercados de capitais.
- *Mortality-linked securities*: Eles podem administrar o risco de utilização de títulos ligados a mortalidade. Esses títulos podem ser *longevity bond*, *mortality swap*, *mortality futures* e *mortality options*.

### 3.1.2 *Stakeholders*

A seguir listamos as principais partes interessadas na gestão do risco de longevidade:

- **Governo**: O Governo tem muitas razões para estar interessado em um mercado de títulos ligados a mortalidade. Em primeiro lugar, ele pode querer promover (estimular) tais mercados para ajudar as instituições financeiras que estão expostos ao risco de longevidade, por exemplo, emitindo títulos de longevidade que podem ser usados como instrumentos de cobertura de risco de longevidade. Ações desse tipo podem reduzir potencialmente a probabilidade de falência das grandes empresas por seus fundos de pensões e o resultado é que a sociedade como um todo se beneficia da maior estabilidade da economia. Em segundo lugar, o Governo, como “segurador em última instância”, também é potencialmente o titular residual deste risco em caso de incumprimento por parte de fundos de pensões privados e companhias de seguros. Ademais, o governo também pode estar interessado em gerir a sua própria exposição ao risco de longevidade, uma vez que deve poder garantir a força do seu sistema de saúde e de previdência diante da queda da idade produtiva.
- **Hedgers**: são aqueles que têm uma particular exposição ao risco de longevidade e deseja livrar-se desse risco. Por exemplo, os prestadores de anuidade perdem se a mortalidade aumenta mais do que o previsto, enquanto os seguros de vida têm a ganhar, e vice-versa. Estas compensações de exposições implica que os prestadores de anuidade e seguro de vida podem cobrir os riscos de longevidade de cada um.

Alternativamente, os segmentos com uma indesejada exposição ao risco de longevidade podem pagar a outros para livrar-se de alguns dos seus riscos. Por exemplo, uma seguradora pode proteger o seu risco de longevidade através do resseguro, ou transferindo-o para o mercado de capitais.

- **Investidores gerais:** Se os retornos esperados concedidos são razoáveis, as instituições do mercado de capitais, tais como os bancos de investimento ou *hedge funds* podem estar interessados em adquirir uma exposição ao risco de longevidade, uma vez que tem uma baixa correlação com fatores de risco tradicionais do mercado financeiro. A combinação de um baixo beta e alfa potencialmente positivo deve, portanto, fazer dos títulos ligados a mortalidade investimentos atraentes em carteiras diversificadas.
- **Especuladores e arbitrageurs:** Um mercado de títulos ligados a mortalidade poderia atrair os especuladores que são investidores de curto prazo que negociam segundo suas opiniões sobre a direção dos movimentos dos preços dos seguros. O envolvimento ativo dos especuladores é muito útil para a liquidez do mercado e é de fato essencial para o sucesso do mercado de futuros e de opções. *Arbitrageurs* procuram lucrar com as anomalias de preços em títulos relacionados.
- **Reguladores:** Reguladores financeiros têm dois objetivos principais: (i) o reforço da estabilidade financeira através da promoção de mercados eficientes, ordenados e justos, e (ii) assegurar que os clientes consigam um preço justo.

### 3.1.3 Mercado dos novos títulos ligados a mortalidade

A seguir listamos alguns títulos ligados à mortalidade (*mortality-linked securities*) - alguns existentes e outros ainda hipotéticos - que podem ser usados pelos *stakeholders* para gerenciar suas exposições ao risco de longevidade.

- *Longevity Bonds ou Survivor Bonds:* são instrumentos de dívida cujos *cash-flows* depende de um determinado índice de sobrevivência de uma população de referência e cujo último pagamento termina com a morte do último membro sobrevivente do grupo de referência.
- *Zero-Coupon Longevity Bonds:* são uma variação das *longevity bonds* que poderiam ser obtidas por decomposição das tradicionais LB's. Estes títulos são atraentes pois podem ser considerados *building blocks*.

- *Mortality Swap*: é um contrato para troca de um ou mais *cash flows* no futuro com base no resultado de pelo menos um (aleatório) sobrevivente ou índice de mortalidade.
- *Mortality Futures*: usa o(s) preço(s) dos *longevity bonds* como ativo subjacente.

Na próxima seção desenvolveremos uma abordagem de gestão do risco que lida simultaneamente com os riscos de taxa de juro e de longevidade. Mais precisamente, investigamos a cobertura Delta-Gamma quando a intensidade de mortalidade segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck com tendência positiva e a dinâmica da taxa de juro *forward* é dada por um modelo Heath-Jarrow-Morton (HJM).

## 3.2 Dois processos e uma medida

Começamos esta seção relembando os dois processos que serão utilizados para a abordagem da estratégia de cobertura. Para isto, consideremos um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ , equipado com a filtração  $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ . Esta filtração transporta toda a informação sobre o processo de mortalidade até o tempo  $t$ . Considere um indivíduo com idade  $x$  no tempo 0. Relembramos o processo, descrito no capítulo anterior, para a intensidade de mortalidade de Ornstein-Uhlenbeck (OU):

$$d\lambda_{x+t}(t) = a\lambda_{x+t}(t)dt + \sigma dW_x(t). \quad (3.1)$$

A probabilidade de sobrevivência no horizonte  $(t, T]$  para um indivíduo com idade  $x+t$  no momento  $t$  é

$${}_{T-t}p_{x+t}(t) = S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ e^{-\int_t^T \lambda_{x+s}(s)ds} | \mathcal{F}_t \right] = e^{\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau) \cdot \lambda_{x+t}(t)}, \quad (3.2)$$

as expressões analíticas para  $\mathcal{A}(\tau)$  e  $\mathcal{B}(\tau)$  são

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau) &= \frac{1 - e^{a\tau}}{a}, \\ \mathcal{A}(\tau) &= \frac{\sigma^2}{2a^2}\tau - \frac{\sigma^2}{a^3}e^{a\tau} + \frac{\sigma^2}{4a^3}e^{2a\tau} + \frac{3\sigma^2}{4a^3}. \end{aligned}$$

Através da equação (2.15), obtemos a intensidade instantânea *forward* para o processo OU

$$f_x(t, T) = \lambda_x(t)e^{a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2}(e^{a(T-t)} - 1)^2.$$

Para simplificar, a partir de agora, denotaremos por  $S_x(t, T)$  a probabilidade de sobrevivência  $S(t, x, \lambda_{x+t}(t), T) =_{T-t} p_{x+t}(t)$ .

Para analisarmos o risco financeiro adotaremos o modelo HJM para a taxa de juro *forward*  $F(t, T)$ , recordando-o:

$$dF(t, T) = A(t, T)dt + \Sigma(t, T)dW_F(t) \quad (3.3)$$

em que  $A(t, T)$  e  $\Sigma(t, T)$  são funções reais e  $W_F$  é um movimento Browniano univariado (unidimensional) independente de  $W_x$  para todo  $x$ .

A independência entre os movimentos Browniano significa, basicamente, a independência entre os riscos de mortalidade e financeiro.

A filtração gerada pelo processo de taxa de juro será denotada por  $\{\mathcal{H}_t : 0 \leq t \leq T\}$ . O preço, no tempo de  $t$ , de uma obrigação de cupão zero com maturidade  $T$  é calculado segundo uma medida neutra face ao risco  $\mathbb{Q}$  através da expressão

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(u)du \right) \right]. \quad (3.4)$$

Observamos que a probabilidade de sobrevivência e o preço de uma obrigação de cupão zero são calculados sob medidas diferentes como mostram as expressões (3.2) e (3.4).

### 3.2.1 Mudança da medida

O objetivo desta seção é analisar a relação entre as medida  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$  e representar o preço das apólices sujeitas ao risco de mortalidade em função da medida  $\mathbb{Q}$ .

Primeiro, definimos o processo de ocorrência de morte de uma amostra de pessoas seguradas. Sejam  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  os tempos de vida de um grupo composto por  $N$  assegurados com idade  $x$  no tempo  $t$ , satisfazendo (3.2). Seja  $M(x, t)$  o processo que conta o número de mortes nesta carteira de seguros:

$$M(x, t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$$

em que  $\mathbf{1}$  é a função característica. Definimos uma nova filtração sobre  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$  cujas  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{G}_t : 0 \leq t \leq T\}$  são geradas por  $\mathcal{F}_t$  e  $\{M(x, s) : 0 \leq s \leq t\}$ . Intuitivamente esta filtração coleta as informações sobre a intensidade da mortalidade passada e sobre a ocorrência de morte atual na carteira. Vamos considerar as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{I}_t := \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$

gerada pelas uniões do tipo  $\mathcal{G}_t \cup \mathcal{H}_t$ , onde a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}_t$  recolhe informação sobre a intensidade de mortalidade e atual processo de morte, enquanto  $\mathcal{H}_t$ , que é independente da  $\mathcal{G}_t$ , reflete informações sobre o mercado financeiro, ou seja, sobre o processo de taxa *forward*. Portanto, a filtração  $\{\mathcal{I}_t : 0 \leq t \leq T\}$  representa todas as informações disponíveis sobre ambos os riscos financeiro e de mortalidade.

De modo a avaliar as apólices de seguros no espaço  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$  equipado com a filtração  $\mathcal{I}_t$ , é necessário caracterizar pelo menos uma medida equivalente a  $\mathbb{P}$ .

Pode-se mostrar que dadas funções  $\theta_x(t)$  e  $\theta_F(t)$  satisfazendo certas condições, então existe uma medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$  equivalente a  $\mathbb{P}$  tal que as expressões

$$\begin{aligned} dW'_x &:= dW_x - \theta_x(t)dt, \\ dW'_F &:= dW_F - \theta_F(t)dt \end{aligned}$$

definem  $\mathbb{Q}$ -movimentos Brownianos. Veja [[30], Teorema 5.1].

De fato, as funções  $\theta_x(t)$  e  $\theta_F(t)$  representam os preços dos riscos de mortalidade sistemática e financeiro respectivamente. Mais detalhadamente,  $\theta_x(t)$  representa o risco de mortalidade sistemática que é originado a partir da aleatoriedade da intensidade da morte e portanto não é diversificável. Por uma questão de tratabilidade analítica consideramos o prêmio de risco de mortalidade sistemática dado por

$$\theta_x(t) := \frac{p(t) + q(t)\lambda_{x+t}(t)}{\sigma(t, \lambda_{x+t}(t))}$$

com  $p(t)$  e  $q(t)$  funções contínuas do tempo.

Na verdade, com tal prêmio de risco, o processo de intensidade (2.12) sob  $\mathbb{Q}$  é

$$d\lambda_{x+t}(t) = [a(t, \lambda_x(t)) + p(t) + q(t)\lambda_{x+t}(t)]dt + \sigma(t, \lambda_{x+t}(t))dW'_x \quad (3.5)$$

que ainda é afim. Para o processo OU escolhemos as funções  $p = 0$  e  $q$  constante, desta maneira temos o mesmo tipo de processo sob  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$ , com o coeficiente  $a$  na equação (3.1) substituído por  $a' := a + q$ .

O risco financeiro tem origem na natureza estocástica das taxas de juro e é representado pelo processo  $\theta_F(t)$ . Supondo que o mercado financeiro é completo, a única escolha para  $\theta_F(t)$  consistente com a condição de tendência de HJM (veja (1.17)) a qual equivale a propriedade de não arbitragem, é

$$\theta_F(t) := -A(t, T)\Sigma^{-1}(t, T) + \int_t^T \Sigma(t, u)du. \quad (3.6)$$

Uma vez que sob tal prêmio, o “novo” coeficiente de tendência  $A'(t, T)$  da dinâmica *forward* está ligado ao coeficiente de difusão por uma relação HJM:

$$A'(t, T) = \Sigma(t, T) \int_t^T \Sigma(t, u) du \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.3) segue que, sob a medida  $\mathbb{Q}$ ,

$$dF(t, T) = \left[ \Sigma(t, T) \int_t^T \Sigma(t, u) du \right] dt + \Sigma(t, T) dW'_F(t).$$

Os valores no tempo  $t$  da taxa de juro *forward* e *spot* são, respectivamente,

$$F(t, T) = F(0, T) + \int_0^t \Sigma(s, T) \int_s^T \Sigma(s, m) dm ds + \int_0^t \Sigma(u, T) dW'_F(u), \quad (3.8)$$

$$r(t) = F(0, t) + \int_0^t \Sigma(s, t) \int_s^t \Sigma(s, m) dm ds + \int_0^t \Sigma(u, t) dW'_F(u) \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} dW'_F &= dW_F - \theta_F(t) dt, \\ \theta_F(t) &= -A(t, T) \Sigma^{-1}(t, T) + \int_t^T \Sigma(t, u) du. \end{aligned}$$

Em relação ao risco de mortalidade não-sistemática, decorrente da aleatoriedade de ocorrência de morte dentro da carteira de segurados, assumiremos que o mercado não dá valor a ele. Portanto não existe prêmio associado a este risco de mortalidade idiossincrático.

Na presença de carteiras de seguros bem diversificadas, as companhias de seguros não estão interessadas na cobertura desta componente idiossincrática do risco de mortalidade.

### 3.2.2 Avaliações de contratos de seguros

Nesta seção veremos como calcular o preço de uma apólice de seguro. Antes porém, alguns conceitos preliminares:

- Um dote puro (*pure endowment*) é uma apólice de seguro de vida em que seu valor facial é pago somente se o segurado sobreviver até o fim do período declarado; nenhum benefício é pago se o segurado falecer durante o período de investidura.
- O prêmio justo inerente a um contrato é o valor atual de todas as indenizações que a seguradora se compromete a pagar, caso ocorram os acontecimentos previstos no mesmo.

- A reserva matemática num determinado momento  $t$ , é a diferença entre o valor atuarial das responsabilidades futuras da seguradora e o valor atuarial das responsabilidades futuras do segurado, a partir deste momento.

Por simplicidade restringiremos a nossa atenção ao dotes puros e títulos longevidade. Lembremos também que - juntamente com o seguro de vida e títulos de morte - eles representam os ativos base do mercado de seguros. Depois de cobertura é fornecida para eles, pode ser estendida a todos os outros instrumentos.

O prêmio justo e as reservas das apólices de seguros podem ser calculados como valores esperados sob a medida  $\mathbb{Q}$ . Com este intuito, consideremos o caso de um contrato dote puro começando no tempo 0 e pagando uma unidade monetária se o indivíduo com idade  $x + t$  no tempo  $t$  estiver vivo no tempo  $T$ . O prêmio justo ou o preço de tal apólice de seguro (dote puro), dada a independência entre o risco financeiro e atuarial, é

$$P(0, T) = S_x(0, T)B(0, T) = e^{\alpha(T) + \beta(T)\lambda_x(0)} E_{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r(u) du \right) \right].$$

O valor da mesma apólice em um tempo  $t$  qualquer é

$$P(t, T) = S_x(t, T)B(t, T) = E_{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T \lambda(s) ds \right) \right] E_{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(u) du \right) \right] \quad (3.10)$$

Assim, podemos definir uma “estrutura temporal dos contratos de dotes puro”. A última expressão, líquida do prêmio inicial, é também a reserva de  $t$  tempo para a apólice, que a companhia de seguros estará interessada em proteger. Observe que não impomos *free-arbitrage* no mercado destes instrumentos.

Uma vez que a mudança de medida foi efetuada, podemos escrever  $P(t, T)$  em termos da intensidade de mortalidade *forward* e da taxa de juro *forward* instantânea ( $f$  e  $F$ , respectivamente):

$$P(t, T) = \exp \left( - \int_t^T [f_x(t, u) + F(t, u)] du \right). \quad (3.11)$$

### 3.3 Condição HJM nas intensidades de morte *forward*

Como já foi dito no Capítulo 1, a condição de tendência HJM (1.17) é equivalente à ausência de arbitragem. Nesta seção mostramos que se o prêmio de risco para a mortalidade é constante, como no caso do processo OU, o processo para a intensidade da mortalidade satisfaz uma restrição tipo HJM.

Fixamos um indivíduo com idade  $x+t$  no tempo  $t$ , e na notação omitimos a dependência de  $x$ .

Começamos derivando uma expressão para a dinâmica da sobrevivência. Sejam  $S$  a probabilidade de sobrevivência e a intensidade  $\lambda$  dada por (19). Aplicando o lema de Itô, obtemos:

$$dS(t, T) = S(t, T)m(t, T)dt + S(t, T)n(t, T)dW'(t)$$

onde

$$\begin{aligned} m(t, T) &= \frac{1}{S} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \lambda} [a(t, \lambda) + p(t) + q(t)\lambda(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} \sigma^2(t, \lambda) \right], \\ n(t, T) &= \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial \lambda} \sigma(t, \lambda). \end{aligned}$$

Usando a expressão acima e (2.15), temos que a intensidade de morte *forward*  $f(t, T)$  é dada por

$$df(t, T) = v(t, T)dt + w(t, T)dW'(t) \quad (3.12)$$

em que os coeficientes de tendência (*drift*) e difusão são

$$\begin{aligned} v(t, T) &= \frac{\partial n(t, T)}{\partial T} n(t, T) - \frac{\partial m(t, T)}{\partial T}, \\ w(t, T) &= -\frac{\partial n(t, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Uma vez que já temos uma expressão para a intensidade de morte *forward*, resta agora mostrar uma condição HJM. O teorema a seguir dá uma condição necessária e suficiente para *free-arbitrage*.

*Teorema 3.1.* Seja  $\lambda$  um processo como em (3.5). Então, a condição HJM

$$v(t, T) = w(t, T) \int_t^T w(t, s) ds \quad (3.13)$$

é satisfeita se, e somente se,

$$\frac{\partial m(t, T)}{\partial T} = n(t, t) \frac{\partial n(t, T)}{\partial T}.$$

Em particular, esta condição é satisfeita no caso do processo de OU com  $p = 0$  e  $q$  constante.

*Demonstração.* Para uma prova deste teorema veja [[30], Teorema 6.1]. □

Portanto o processo OU escolhido satisfaz a condição HJM e assim a arbitragem está descartada. Notemos que a dinâmica da intensidade *forward* sob  $\mathbb{Q}$  neste caso é

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{a'} e^{a'(T-t)} \left( e^{a'(T-t)} - 1 \right) dt + \sigma e^{a'(T-t)} dW'(t). \quad (3.14)$$

## 3.4 Estratégia de cobertura

Como vimos na subseção 3.1.1, a fim de reduzir sua exposição ao risco de longevidade (risco de que uma população de referência sobrevivam, em média em termos agregados, para além do estimado) as seguradoras e fundos de pensões podem utilizar variadas técnicas de cobertura (*hedging*). Neste trabalho estamos interessados na cobertura através dos derivados de mortalidade e taxa de juro. Antes de ver os detalhes e o funcionamento desta técnica, introduziremos dois conceitos fundamentais.

- O Delta de uma carteira,  $\Delta$ , é definido como a taxa de variação do valor da carteira relativamente ao preço do ativo subjacente  $s$ . Em geral,

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial s}.$$

Uma carteira com Delta igual a zero é referida como *Delta neutral*.

- O Gamma de uma carteira sobre um ativo subjacente,  $\Gamma$ , é a taxa de variação do Delta da carteira com respeito ao preço do ativo subjacente  $s$ . Em fórmulas,

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial s^2}.$$

Se o valor do Gamma é pequeno, significa que Delta muda lentamente, e os ajustes para manter uma carteira Delta neutral precisam ser feitos relativamente com pouca frequência. No entanto, se Gamma é grande em termos absolutos, o Delta é altamente sensível ao preço do ativo subjacente. Então é muito arriscado deixar uma carteira *Delta-neutral* inalterada por qualquer período de tempo.

A cobertura Delta-Gamma é uma estratégia que consiste numa manutenção de valores nulos para o Delta e o Gamma da carteira. Esta estratégia é dinâmica no sentido que tem que ser reajustada periodicamente. Salientamos que, no nosso caso, o ativo subjacente será substituído pelos fatores de risco de mortalidade e de taxa de juro.

## 3.5 Cobertura do risco de mortalidade

Nesta seção focamos na cobertura do risco de mortalidade sistemática. Em virtude disto, assumimos que a taxa de juro é determinística e, sem perda de generalidade, igual a zero.

Na seção seguinte, introduziremos novamente o risco financeiro e estudamos o problema da cobertura dos riscos de mortalidade e financeiro simultaneamente.

Uma vez que a medida de risco neutral  $\mathbb{Q}$  foi definida, para estabelecer uma técnica de cobertura do risco de mortalidade sistemática precisamos derivar a dinâmica da reserva a qual representa o valor da apólice para o emissor (assumindo que o prêmio único já foi pago). Faremos isso assumindo um comportamento OU para a intensidade.

### 3.5.1 Dinâmica e sensibilidade da reserva

Assumindo que  $\lambda$  segue um processo de OU, a probabilidade de sobrevivência *forward* é obtida integrando (3.14),

$$f(t, T) = f(0, T) + \frac{\sigma^2}{a'} \left\{ e^{a'(T-t)} \left[ e^{a'(T-t)} - 1 \right] - 2e^{a'T} \left[ e^{-a't} - 1 \right] \right\} dt + \sigma \int_0^t e^{a'(T-t)} dW'(t).$$

Escrevendo  $S(u)$  em vez de  $S(0, u)$ , pode-se a seguinte expressão para a reserva,

$$P(t, T) = S(t, T) = \frac{S(T)}{S(t)} \exp[-X(t, T)I(t) - Y(t, T)] \quad (3.15)$$

onde

$$X(t, T) = \frac{\exp(a'(T-t)) - 1}{a'}, \quad (3.16)$$

$$Y(t, T) = -\sigma^2[1 - e^{2a'(T-t)}]X(t, T)^2/(4a'), \quad (3.17)$$

$$I(t) = \lambda(t) - f(0, t).$$

Temos, portanto, uma expressão para as probabilidades de sobrevivência futuras - e reservas - em termos de quantidades determinísticas ( $X, Y$ ) e de um termo estocástico  $I(t)$ , definido como a diferença entre a intensidade real da mortalidade no tempo  $t$  e sua previsão feita hoje  $f(0, t)$ .

Resulta, então, que os coeficientes Delta e Gamma de cobertura para o risco de mortalidade são

$$\Delta^M = \frac{\partial S}{\partial I} = -S(t, T)X(t, T) \leq 0, \quad (3.18)$$

$$\Gamma^M = \frac{\partial^2 S}{\partial I^2} = S(t, T)X^2(t, T) \geq 0. \quad (3.19)$$

Note que o expoente  $M$  indica que o coeficiente refere-se ao risco de mortalidade.

Considerando a probabilidade de sobrevivência  $S$  como função do tempo e do fator de risco e aplicando o Lema de Itô, temos

$$dP = dS \simeq \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial I} dI + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial I^2} (dI)^2.$$

Para  $t$  fixo,

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} \simeq -X(t, T) dI + \frac{1}{2} X(t, T)^2 (dI)^2.$$

A equação acima indica que os fatores  $\Delta^M$  e  $\Gamma^M$  são os análogos da duração e convexidade na cobertura financeira clássica de obrigações de cupão zero.

No caso, em que a mortalidade não tem nenhuma componente de risco sistemático,  $\sigma(t, \lambda) = \sigma = 0$ , temos

$$Y(t, T) = 0.$$

Portanto, Delta e Gamma são funções apenas de  $a'$ , como no caso determinístico. Temos

$$\Delta^{\sigma=0} = \frac{S(T)}{S(t)} X(t, T), \quad (3.20)$$

$$\Gamma^{\sigma=0} = \frac{S(T)}{S(t)} X^2(t, T). \quad (3.21)$$

Agora considere uma carteira, com valor  $\Pi$ , composta de  $n_i$  apólices de dote puro com vencimento  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , cada uma com valor  $S(t, T_i)$ . A sensibilidade, para cada geração, em relação ao risco de mortalidade é expressa por

$$d\Pi = \sum n_i dS(t, T_i) = \sum_{i=1}^n n_i \frac{\partial S}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n n_i \frac{\partial S}{\partial I} dI + \sum_{i=1}^n n_i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial I^2} (dI)^2.$$

### 3.5.2 Cobertura

A fim de proteger a reserva obtida anteriormente assumimos que a seguradora pode usar outros dotes puros - com diferentes maturidades - ou *zero-coupon longevity bonds* (ZCLB) sobre a mesma geração. Uma vez que não precificamos o risco de mortalidade idiosincrático, o preço/valor de uma *zero-coupon longevity bond* é igual ao do dote puro. A diferença, do ponto de vista de uma companhia de seguros, é que ela pode vender dotes - ou reduzir a sua exposição através de resseguro - e comprar títulos de longevidade, no entanto não pode fazer o inverso.

Restringimos a atenção ao dotes puros e títulos de longevidade por causa da simplicidade. Lembremos que - juntamente com o seguro de vida e títulos de morte - eles

representam os activos base do mercado de seguros. Depois que a cobertura é fornecida para eles, pode ser estendida a todos os instrumentos mais complexos.

Suponhamos por exemplo que, a fim de proteger  $n$  dotes com vencimento  $T$ , é possível escolhermos o número de dotes/obrigações longevidade com vencimento  $T_1$  e  $T_2$ : chamaremos de  $n_1$  e  $n_2$ . O valor de uma carteira composta por três ativos é

$$\Pi(t) = nS(t, T) + n_1S(t, T_1) + n_2S(t, T_2).$$

Delta e Gamma são respectivamente,

$$\begin{aligned}\Delta_{\Pi}^M(t) &= n \frac{\partial S}{\partial I}(t, T) + n_1 \frac{\partial S}{\partial I}(t, T_1) + n_2 \frac{\partial S}{\partial I}(t, T_2), \\ \Gamma_{\Pi}^M(t) &= n \frac{\partial^2 S}{\partial I^2}(t, T) + n_1 \frac{\partial^2 S}{\partial I^2}(t, T_1) + n_2 \frac{\partial^2 S}{\partial I^2}(t, T_2).\end{aligned}$$

Igualando esses coeficientes Delta e Gamma a zero, temos um sistema de duas equações em duas incógnitas  $n_1$  e  $n_2$ ,

$$\begin{cases} \Delta_{\Pi}^M = 0 \\ \Gamma_{\Pi}^M = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos a carteira coberta. Valores negativos para  $n_i$  são interpretados como venda de dotes e valores positivos de  $n_i$  significam compra de títulos longevidade.

O custo da criação da carteira coberta, representado por  $\Pi(t)$ , pode ser pago usando o prêmio dos dotes puros recebido do segurado (titular da apólice).

Podemos também tornar a carteira coberta autofinanciada, para isto devemos resolver simultaneamente as equações  $\Pi = 0$ ,  $\Delta_{\Pi}^M = 0$ ,  $\Gamma_{\Pi}^M = 0$  para  $n$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ . Outra alternativa é, se  $n$  é fixo, um terceiro dote puro/obrigação com vencimento  $T_3$  pode ser emitido ou adquirido, de modo que a carteira composta de  $S(t, T)$ ,  $S(t, T_1)$ ,  $S(t, T_2)$  e  $S(t, T_3)$  seja autofinanciada e Delta e Gamma coberta.

### 3.6 Cobertura de risco financeiro e de mortalidade

Consideremos agora o caso em que existe tanto o risco financeiro e de mortalidade. Mais uma vez, recordamos que estamos assumindo uma intensidade OU. Também selecionamos um parâmetro constante do tipo Hull-White para a taxa de juro no âmbito da medida neutra ao risco,

$$\Sigma(t, T) = \Sigma \exp(-g(T - t)) \tag{3.22}$$

com  $\Sigma, g \in \mathbb{R}^+$ . Substituindo em (3.9), temos que

$$r(t) = F(0, t) + \frac{1}{2} \frac{\Sigma^2}{g^2} (1 - e^{-gt})^2 + \Sigma \int_0^t e^{-g(t-s)} dW'_F(s).$$

Assim, chegamos a uma expressão para  $B(t, T)$  análoga a (3.15):

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp [-\bar{X}(t, T)K(t) - \bar{Y}(t, T)] \quad (3.23)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{X}(t, T) &:= \frac{1 - \exp(-g(T-t))}{g}, \\ \bar{Y}(t, T) &:= \frac{\Sigma^2}{4g} [1 - \exp(-2gt)] \bar{X}^2(t, T), \\ K(t) &:= r(t) - F(0, t). \end{aligned}$$

Observe que  $K$  é o fator de risco financeiro, medido pela diferença entre as taxa *spot* e *forward*. Decorre que os coeficientes Delta e Gamma de cobertura para o risco de mortalidade são

$$\begin{aligned} \Delta^F &= \frac{\partial B(t, T)}{\partial K} = -B(t, T) \bar{X}(t, T) \leq 0, \\ \Gamma^F &= \frac{\partial^2 B(t, T)}{\partial K^2} = B(t, T) \bar{X}^2(t, T) \geq 0. \end{aligned}$$

A reserva de dotes puros no tempo  $t$ , de acordo com a equação (3.11), é

$$P(t, T) = \exp \left( - \int_t^T [f(t, u) + F(t, u)] du \right) = S(t, T) B(t, T).$$

Tendo em conta a independência entre o risco financeiro e de mortalidade, podemos aplicar o lema de Itô e obter a dinâmica da reserva de  $P(t, T)$ ,

$$dP = BdS + SdB \simeq B \left[ \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial I} dI + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial I^2} (dI)^2 \right] + S \left[ \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial K} dK + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial K^2} (dK)^2 \right].$$

Segue que, para  $t$  fixo,

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} \simeq -X(t, T) dI + \frac{1}{2} X(t, T)^2 (dI)^2 - \bar{X}^2(t, T) dK + \frac{1}{2} \bar{X}(t, T) (dK)^2.$$

Mais uma vez, a cobertura da reserva é possível através de uma seleção adequada de dotes puros/obrigações de longevidade com diferentes maturidades e/ou obrigações de

cupão zero com diferentes maturidades. Aqui vamos considerar o caso em que a proteção contra o risco financeiro e de mortalidade é obtido ou emitindo (comprando) dotes puros (obrigações longevidade) ou utilizando também obrigações.

Em primeiro lugar, consideremos a cobertura utilizando somente contratos vinculados a mortalidade. Podemos ver que a cobertura Delta e Gamma de ambos os riscos de mortalidade e financeiro de  $n$  dotes com vencimento  $T$  pode ser obtido através de uma mistura de  $n_1, n_2, n_3, n_4$  dotes/obrigações de longevidade, com vencimentos que variam de  $T_1$  ao  $T_4$ , resolvendo simultaneamente as seguintes equações de cobertura:

$$\begin{cases} \Delta_{\Pi}^M = 0 \\ \Gamma_{\Pi}^M = 0 \\ \Delta_{\Pi}^F = 0 \\ \Gamma_{\Pi}^F = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Na prática, isto significa resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \Delta_{\Pi}^M = nBSX + n_1B_1S_1X_1 + n_2B_2S_2X_2 + n_3B_3S_3X_3 + n_4B_4S_4X_4 = 0 \\ \Gamma_{\Pi}^M = nBSX^2 + n_1B_1S_1X_1^2 + n_2B_2S_2X_2^2 + n_3B_3S_3X_3^2 + n_4B_4S_4X_4^2 = 0 \\ \Delta_{\Pi}^F = nBS\bar{X} + n_1B_1S_1\bar{X}_1 + n_2B_2S_2\bar{X}_2 + n_3B_3S_3\bar{X}_3 + n_4B_4S_4\bar{X}_4 = 0 \\ \Gamma_{\Pi}^F = nBS\bar{X}^2 + n_1B_1S_1\bar{X}_1^2 + n_2B_2S_2\bar{X}_2^2 + n_3B_3S_3\bar{X}_3^2 + n_4B_4S_4\bar{X}_4^2 = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $B$  denota  $B(t, T)$  e  $B_i, X_i, \bar{X}_i$  denotam  $B(t, T_i), X(t, T_i), \bar{X}(t, T_i)$  para  $i = 1, \dots, 4$ . Considere agora que podemos utilizar ambos os contratos ligados a mortalidade e obrigações de cupão zero. Neste caso, as equações de cobertura (3.24) tornam-se:

$$\begin{cases} \Delta_{\Pi}^M = nBSX + n_1B_1S_1X_1 + n_2B_2S_2X_2 = 0 \\ \Gamma_{\Pi}^M = nBSX^2 + n_1B_1S_1X_1^2 + n_2B_2S_2X_2^2 = 0 \\ \Delta_{\Pi}^F = nBS\bar{X} + n_1B_1S_1\bar{X}_1 + n_2B_2S_2\bar{X}_2 + n_3B_3\bar{X}_3 + n_4B_4\bar{X}_4 = 0 \\ \Gamma_{\Pi}^F = nBS\bar{X}^2 + n_1B_1S_1\bar{X}_1^2 + n_2B_2S_2\bar{X}_2^2 + n_3B_3\bar{X}_3^2 + n_4B_4\bar{X}_4^2 = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Essas equações podem ser facilmente resolvidas. Ambos os problemas descritos em (3.25) e (3.26) pode ser estendido para situações de autofinanciamento. Em ambos os casos, o valor da carteira coberta é dada por

$$\Pi(t) = nBS + n_1B_1S_1 + n_2B_2S_2 + n_3B_3S_3 + n_4B_4S_4.$$

Este valor é autofinanciado se  $\Pi(0) = 0$ , ou se um contrato adicional é inserido, de modo que o valor da carteira ampliada é nulo. Em nossas aplicações iremos examinar as duas possibilidades.

## 3.7 Aplicação a uma amostra

Destacamos que o valor de um contrato de seguro está sujeito a evolução estocástica de fatores de risco financeiro e de longevidade sob uma medida  $\mathbb{Q}$ . No que diz respeito ao risco financeiro a prática consiste em deduzir uma medida  $\mathbb{Q}$  a partir dos preços do mercado para os ativos financeiros. No caso dos contratos de seguros, esta abordagem mostra-se mais complicada, pois não existem no mercado ativos contingentes à evolução da intensidade de mortalidade com base nos quais seria possível calibrar o modelo de modo a ter em conta o risco de longevidade. Por esta razão assumimos que  $a' = a$ , ou seja, que o prêmio de risco sobre o risco de mortalidade é nulo.

Assumimos também - a princípio - que a taxa de juro é constante e, sem perda de generalidade, nula - como na Subsecção 3.5.2. Obtemos uma “estrutura temporal dos dotes puros” e os valores dos coeficientes Delta e Gamma dos contratos. Em seguida, introduzimos também uma taxa de juro estocástica.

### 3.7.1 Cobertura do risco de mortalidade

A intenção inicial deste estudo era implementar as metodologias expostas nas seções anteriores em dados portugueses. No entanto, em Portugal não existem tábuas de mortalidade regulamentadas, nem para a população portuguesa, nem para as subpopulações de pessoas cobertas por contratos de seguros ou de beneficiários de fundo de pensões. Em virtude disto, escolhemos para a calibração a tábua TGH/TGF 05 utilizada no mercado de rendas vitalícias da França.

A análise foi feita sobre o intervalo de 44 anos para uma única geração de indivíduos que estavam com 55 anos em 31/12/2012. Os dados disponíveis para análise denotados por  $p_{55}^{model}$  e  $\hat{p}_{55}$  significam, respectivamente, a probabilidades de morte obtidas através do modelo de OU e da tabela.

A estimação dos parâmetros do processo de OU é efectuada considerando  $t = 0$  e usando o método dos mínimos quadrados. Em fórmulas, o vetor de parâmetros do modelo é dado pelo seguinte problema de optimização:

$$\Theta = \arg \min_{\Theta} \left\{ \mathcal{Q}^2 = \sum_{T=t+1}^{t+(x_{max}-55)+1} \left( {}_{T-t}p_{55}^{model}(t) - {}_{T-t}\hat{p}_{55}(t) \right)^2 \right\}$$

onde  $x_{max} = 98$  e  $t = 0$ .

Para a geração em questão, o parâmetro  $a$  é calibrado em 9,42%,  $\sigma$  é 0,01% e  $\lambda_{65}(0) = -\ln p_{65}$  é 0,274%.

A Tabela 3.1 descreve a “estrutura temporal de contratos de dotes puro” e compara coeficientes Delta e Gamma associados a contratos com diferentes maturidades nos casos estocásticos e determinista.

Maturidade	Cobertura estocástica			Cobertura deteminística	
	$S(t, T)$	$\Delta^M$	$\Gamma^M$	$\Delta^{\sigma=0}$	$\Gamma^{\sigma=0}$
1	0,99713	-1,04560	1,09644	-1,04560	1,09644
2	0,99398	-2,18757	4,81443	-2,18757	4,81443
5	0,98263	-6,27548	40,07762	-6,27548	40,07761
7	0,97318	-9,64540	95,59769	-9,64539	95,59760
10	0,95545	-15,87468	263,75542	-15,87463	263,75447
12	0,94077	-20,94185	466,17066	-20,94170	466,16723
15	0,91348	-30,14199	994,58959	-30,14142	994,57094
18	0,87850	-41,50023	1960,45980	-41,49846	1960,37599
20	0,85009	-50,35465	2982,72089	-50,35108	2982,50909
25	0,73794	-74,72104	7565,97662	-76,70049	7766,40882
27	0,71105	-88,49006	11012,54779	-88,45856	11008,62672
30	0,63022	-106,22964	17905,96903	-106,15786	17893,86947
35	0,46947	-129,73967	35853,75453	-129,49459	35786,02663

Tabela 3.1: Estimativa da probabilidade de sobrevivência  $S(t, T)$  e dos coeficientes de cobertura de mortalidade estocásticos e determinísticos

Na Tabela 3.1 podemos observar que os coeficientes de cobertura para os contratos ligados a mortalidade são um pouco diferente para maturidades longas. Por exemplo, os coeficientes  $\Delta^M$  e  $\Gamma^M$  para um contrato com vencimento 30 anos são, respectivamente, 0,6% menor e maior do que os seus homólogos deterministas, no caso de contratos com maturidade de 35 anos esta diferença sobe para 0,18%. Contratos com prazos longos são claramente mais interessante do ponto de vista de uma seguradora e, portanto, sua cobertura adequada é importante.

Exemplos de estratégia de cobertura:

- Suponhamos que uma seguradora emitiu um contrato de dote puro com vencimento em 15 anos. Admitamos que a seguradora quer proteger essa posição usando como instrumentos de cobertura contratos ligados a mortalidade com prazo de 10 e 20 anos. A um custo de 0,40, a seguradora pode instantaneamente Delta-Gamma proteger de sua carteira, através da compra de, respectivamente, 1,17 e 0,23 ZCLB com estas maturidades.
- Uma estratégia de cobertura Delta-Gamma autofinanciada pode ser implementada utilizando contratos com prazo de vencimento de 30 anos, sobre a mesma população de indivíduos. Neste caso, a estratégia consiste na compra de 0,53 e 0,51 ZCLB com vencimentos, respectivamente, em 10 e 20 anos e emissão de 0,04 dotes puros, com maturidade de 30 anos.

### 3.7.2 Cobertura do risco financeiro e mortalidade

Maturidade	$P(t, T)$	$\Delta^F$	$\Gamma^F$
1	0,99805	-1,00031	0,99970
2	0,99055	-1,99066	3,97647
5	0,89613	-4,54596	22,66060
7	0,80086	-5,73600	39,98101
10	0,67343	-7,00546	69,62891
12	0,61179	-7,74675	92,28374
15	0,55085	-8,96306	133,22298
20	0,49618	-11,53233	227,85485
25	0,43806	-14,61665	359,89866
27	0,42547	-15,89284	422,11464
30	0,37981	-17,75291	522,95654

Tabela 3.2: Estimativa dos preços  $P(t, T)$  dos contratos e dos coeficientes de cobertura pra o risco financeiro estocástico

Na Seção 3.5 vimos que, na presença dos riscos decorrentes de mortalidade e taxas de juro estocásticas, os preços dos contratos de dotes puros já não coincidem com as probabilidades de sobrevivência. No entanto, os fatores associados ao risco de mortalidade,  $\Delta^M$  e

$\Gamma^M$ , permanecem inalterados quando introduzimos o risco financeiro. Uma vez estimado os coeficientes subjacentes ao processo da taxa de juro, podemos facilmente deduzir os valores dos fatores associados ao risco financeiro,  $\Delta^F$  e  $\Gamma^F$ , e os preços  $P(t, T)$  dos contratos de dotes puros/títulos de longevidade.

Calibramos os parâmetros do modelo de Hull-White utilizando as taxas EURIBOR semanais no período de 2007-2012 (veja o gráfico) e o programa R seguindo a metodologia indicada em [12]. O parâmetro  $g$  é de 0,122%, enquanto que o parâmetro de difusão  $\Sigma$  é calibrado para 11,455%.

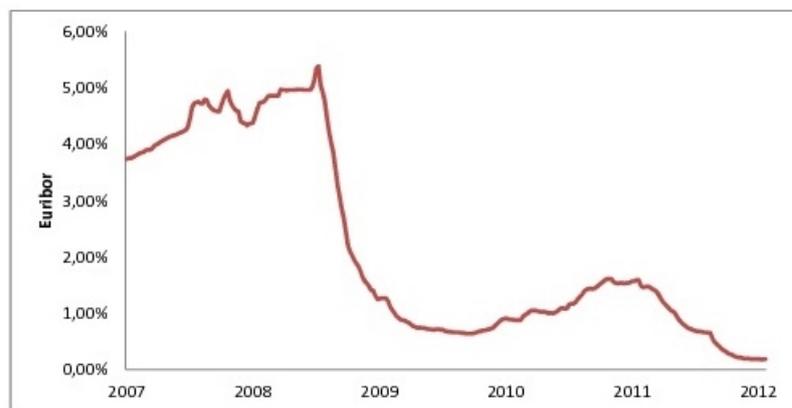


Figura 3.1: Taxas EURIBOR semanais do período de 2007 a 2012

A Tabela 3.2 mostra os preços dos contratos de dotes puros sujeitos aos riscos de mortalidade e financeiro e os fatores de cobertura do risco financeiro  $\Delta^F$  e  $\Gamma^F$ . Observe que os valores absolutos dos fatores relacionados ao mercado financeiro são menores do que os relacionados com o risco de mortalidade.

Exemplos de estratégia de cobertura:

Consideremos novamente a cobertura de um dote puro com vencimento 15 anos. Para efetuar a cobertura Delta-Gamma contra os riscos, precisamos usar quatro instrumentos (cinco, se quisermos autofinanciar a estratégia). Podemos usar quatro dotes puros/obrigações longevidade escritos sobre a vida dos indivíduos de 55 anos ou dois contratos ligados a mortalidade e duas obrigações de cupão zero.

- No primeiro caso, suponhamos que podemos usar quatro dotes puros/obrigações longevidade escritos sobre a vida dos indivíduos de 55 anos. Mais especificamente, imaginemos usar contratos com maturidade de 10, 20, 25 e 30 anos. Resolvendo o sistema (3.25), resulta uma estratégia de *hedging* que consiste em comprar 0,41 títulos de longevidade com vencimento 10 anos, 0,89 com maturidade de 20 anos, e 0,06 com maturidade de 30 anos, enquanto emite 0,36 apólices de dote puro com vencimento de 25 anos.
- No segundo caso, imaginemos que os instrumentos de *hedging* são contratos de mortalidade, com vencimentos de 10 e 20 anos e duas obrigações de cupão zero com vencimento 5 e 20 anos. Neste caso resolvendo o sistema (3.26), temos que a estratégia consiste em comprar títulos de longevidade com vencimento 10 anos e 0,24 com maturidade de 20 anos e em tomar uma posição curta (*spot*) em 0,38 de obrigações de cupão zero com maturidade de 5 anos e uma longa em 0,08 de obrigações de cupão zero com vencimento 20 anos.
- Para uma cobertura autofinanciada é suficiente adicionar um instrumento a carteira. Por exemplo, uma cobertura autofinanciada pode ser obtida através da compra de 0,17 títulos de longevidade com prazo de 10 anos, 2,34 com maturidade de 20 anos, e 4,01 com vencimento de 30 anos e emitindo 4,93 dotes puros, com maturidade de 25 anos e 0,72 com prazo de vencimento de 27 anos.

# Capítulo 4

## Conclusão

Neste trabalho estudamos a cobertura Delta-Gamma dos riscos de mortalidade e de taxa de juro. Assumimos um modelo em tempo contínuo para a intensidade de mortalidade em uma única geração, baseado na equação de Ornstein-Uhlenbeck (OU) e um modelo Hull-White para a taxa de juro estocástica. Também assumimos a independência destes dois riscos.

Com a finalidade de explorar a técnica, calibramos os modelos usando uma geração de indivíduos que tinham 55 anos em 31/12/2012 e as taxas EURIBOR no período de 2007-2012. Os resultados mostram que o efeito sem cobertura de uma mudança brusca na taxa de mortalidade é notável a longo prazo. Além disso, os coeficientes Delta e Gama são maiores para o risco de mortalidade do que no caso do risco financeiro.

Este trabalho deixa espaço para novas pesquisas em várias direções. Seria interessante utilizar modelos de mortalidade tais como OU com saltos ou Feller com saltos, uma vez que, segundo Bravo [4], estes modelos se ajustam melhor a trajetória real da mortalidade.

Além disso, assumimos que o prêmio de risco sobre o risco de mortalidade é nulo. Portanto uma questão que poderá ser colocada é a aplicação de outra estrutura de prêmio de risco de mortalidade.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bjork, T. (2003). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford Finance, 2a ed.
- [2] Bowers, N. , Gerber, H. , Hickman, J. , Jones, D. , Nesbitt, C. (May 1997). *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries; 2a ed.
- [3] Brace, A., Gatarek, D. et Musiela, M. (1997). *The Market Model of Interest Rate Dynamics*. *Mathematical Finance*, 7(2), 127-154.
- [4] Bravo, J.M.V. (2008). *Construção de Tábuas de Mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade*. Ph.D. thesis, Universidade de Évora, Portugal.
- [5] Bravo, J.M.V. (2001). *Modelos de Risco de Taxa de Juro: Estratégias de Cobertura e Imunização*. M.Sc. thesis, ISEG/UTL, Portugal.
- [6] Brigo, D. , Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer, 2nd ed.
- [7] Blake, D., Cairns, A.J.G., and Dowd, K. (2006). *Living with mortality: longevity bonds and other mortality-linked securities*. *British Actuarial Journal* 12, 153-197.
- [8] Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K. (2008). *Modelling and management of mortality risk: a review*. *Scandinavian Actuarial Journal* 108 (2-3), 79-113.
- [9] Cairns, A. J. G. (2004). *Interest rate models, An Introduction*. Princeton University Press.
- [10] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K. (2006). *Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk*, *Astin Bulletin*, 36, 79 – 120.

- [11] Carlos, R. F.E C. P. (2011). *Cobertura do risco de longevidade para a população portuguesa no mercado obrigacionista*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.
- [12] Chaussé, P. (2010). *Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R*, Journal of Statistical Software, volume 34, number 11, pages 1-35.
- [13] Choudhry, M. (2010). *Fixed-Income Securities and Derivatives Handbook* . John Wiley & Sons.
- [14] Coughlan, G., Khalaf-Allah, M., Ye, Y., Kumar, S. Umith and Cairns, A., Blake, D., Dowd, K. (2011). *Longevity hedging 101: A framework for longevity basis risk analysis and hedge effectiveness*. North American Actuarial Journal, Vol. 15, No. 2, pp. 150-176.
- [15] Cox, J. C., Ingersoll, J. E. , Ross, S. A. (1985). *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica 53 (2), 385-407.
- [16] Cox, S., Lin, Y. (2007). *Natural hedging of life and annuity mortality risks*. North American Actuarial Journal, 11(3), 1-15.
- [17] Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S., Walhin, J., (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus Malus Systems*. Wiley-Interscience, 1 edition.
- [18] Dickson, D. C. M. , Hardy, M. R., Waters, H. R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press.
- [19] Dothan, M. U. (1978). *On the term structure of interest rates*. Journal of Financial Economics 6(1), 59-69.
- [20] European Banking Federation, Euro Interbank Offered Rate, historical rates.
- [21] Flesaker, B., Hughston, L.P. (1996). *Positive interest*. Risk 9 (1), 46-49.
- [22] Garcia, J. A., Simões, O. A. (2010). *Matemática Actuarial Vida e Pensões*. Edições Almedina.

- [23] Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. (1992). *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation*. *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, pp. 77-105.
- [24] Hull, J., White, A. (1990). *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*. *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.
- [25] Hull, J. C. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall; 5ª e 8ª edições.
- [26] Jalen, L., Mamon, R. S. (2009). *Valuation of contingent claims with mortality and interest rate risks*. *Mathematical and Computer Modelling* 49, (9-10), 1893-1904.
- [27] James, J., Webber, N. (2000). *Interest Rate Modelling*. Wiley, 1ª Edição.
- [28] Jamshidian, F. (1997). *LIBOR and swap market models and measures*. *Finance Stochastics*, 1, 293-330.
- [29] Liu, X. (2008). *Stochastic mortality modelling*. Ph.D. Thesis, Department of Statistics, University of Toronto.
- [30] Luciano, E., Regis, L., Vigna, E. (2011). *Delta and Gamma hedging of mortality and interest rate risk*. *Insurance: Mathematics and Economics* 50 (3) 2012.
- [31] Luciano, E., Regis, L., Vigna, E. (2012). *Single and cross-generation natural hedging of longevity and financial risk*. No 257, Carlo Alberto Notebooks from Collegio Carlo Alberto.
- [32] Merton, R. C. (1973). *Theory of rational option pricing*. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1), 141-183. Reprinted as Chapter 1 in Merton (1992).
- [33] Mikosch, T. (2006). *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process*. Springer, 1nd edition.
- [34] Munk, C. (2011). *Fixed Income Modelling*. Oxford University Press.
- [35] Rendleman, R. and B. Bartter (1980). *The pricing of options on debt securities*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15(1), 11-24.
- [36] Rogers, L.C.G. (1997). *The potential approach to the term structure of interest rates and foreign exchange rates*. *Math. Finance* 7, 157-164.

- [37] Rutkowski, M. (1997). *A note on the Flesaker-Hughston model on the term structure of interest rates*. Applied Math. Finance 4, 151-163.
- [38] Siu-Hang Li, J.S., Luo, A. (2011). *Key q-duration: A Framework for Hedging Longevity Risk*, Discussion paper PI-1109, The Pensions Institute Cass Business School.
- [39] Stevens, R., De Waegenaere, A., Melenberg, B. (2011), *Longevity risk and natural hedge potential in portfolios of life insurance products: the effect of investment risk*. Discussion Paper, CentER for Economic Research, Series No. 2011-036.
- [40] Sweeting, P. (2008). *Stochastic Mortality made Easy*, Pensions Institute Discussion Paper PI-0822.
- [41] Vasicek, O. (1977). *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics 5(2), 177-188.
- [42] Wang, J. L., Huang, H. C., Yang, S. S., Tsai, J. T. (2010). *An optimal product mix for hedging longevity risk in life insurance companies: the immunization theory approach*. The Journal of Risk and Insurance, Vol. 77, No. 2, 473-497.