

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**DESCRIÇÃO COVARIANTE DA DISPERSÃO ELÁSTICA
DO ELECTRÃO PELOS NÚCLEOS DO HÉLIO-3 E TRÍTIO**

Sérgio Alexandre Pinto Teixeira



141321

Dissertação para a obtenção do grau de doutor em Física

Orientador: Professor Doutor Alfred Stadler

2009

Resumo

Calculamos os factores de forma electromagnéticos elásticos dos núcleos do hélio-3 e trítio na aproximação CIA (*complete impulse approximation*) da teoria covariante da partícula espectadora. Na aproximação CIA são excluídas da corrente completa apenas as correntes de interacção. Utilizamos as funções de vértice nucleares de uma família de modelos de interacção com diferentes energias de ligação. Estudamos a dependência dos factores de forma relativamente aos modelos e comparamo-los com factores de forma obtidos no âmbito da dinâmica hamiltoniana usual (*instant-form*) sem correntes de interacção. A energia de ligação determina os factores de forma num intervalo extenso de momentos transferidos. A concordância com os resultados da dinâmica hamiltoniana é boa quando os modelos têm a mesma energia de ligação. Os nossos resultados indicam a possibilidade de uma descrição realista dos factores de forma.

Abstract

Covariant description of elastic electron scattering from the nuclei of helium-3 and tritium

Within the framework of the Covariant Spectator Theory (CST), we calculate for the first time the elastic electromagnetic form factors of the nuclei of helium-3 and tritium in complete impulse approximation. From the complete CST current, this approximation omits only the interaction currents. The employed nuclear vertex functions were previously obtained for a family of nucleon-nucleon interaction models which yield different three-nucleon binding energies. We study the model dependence of the form factors and compare to others that were obtained in impulse approximation in the framework of the instant-form Hamiltonian Dynamics. We find that the binding energy determines the form factors over a relatively large range of the transferred momentum. The agreement with the results of Hamiltonian Dynamics is surprisingly good when models with the same binding energy are compared. Our results indicate that a realistic description of the three-nucleon form factors within CST is feasible.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Doutor Alfred Stadler pela orientação do doutoramento, aos Professores Doutores Franz Gross e Jiri Adam pela cooperação científica, à Fundação para a Ciência e a Tecnologia pela concessão da bolsa de doutoramento com a referência SFRH/BD/8432/2002 e ao Centro de Física Nuclear da Universidade de Lisboa, onde foi realizada a investigação de doutoramento e redigida a respectiva tese, pela cedência de recursos materiais.

Conteúdo

Prefácio	1
1 Formalismo de Bethe-Salpeter	7
1.1 Matriz S, Funções de Green e Redução de LSZ	7
1.2 Equações de BS, Faddeev e AGS	20
1.3 Demonstração de que na TQRC as funções de onda conjugadas do deuterão e trinucleão não são relacionadas pela conjugação de Dirac	29
1.4 Dedução na TQRC de duas relações entre as funções de onda conjugadas para o deuterão e trinucleão	37
1.4.1 Condições de aplicabilidade no formalismo de BS da relação (1.174)	42
1.5 Inclusão da interacção electromagnética	51
2 Teoria de Gross	61
2.1 Equações quasi-potenciais de dois corpos	61
2.2 Propagador de Gross	64
2.3 Equações de Gross da amplitude de dispersão elástica NN e das funções de vértice conjugadas do trinucleão	70
2.4 Corrente electromagnética de Gross do trinucleão	73
3 Cálculo dos factores de forma electromagnéticos elásticos do trinucleão na aproximação CIA	77
3.1 Factores de forma electromagnéticos elásticos do trinucleão	77
3.2 Propriedades da corrente electromagnética de Gross do trinucleão	79
3.3 Vectores de momento angular	97
3.4 Corrente electromagnética do nucleão	100
3.5 Cálculo dos diagramas A-F no referencial do laboratório	101
3.5.1 Cálculo do diagrama A	106
3.5.2 Cálculo da soma dos diagramas B e C	115

3.5.3	Cálculo do diagrama D	124
3.5.4	Cálculo da soma dos diagramas E e F	129
3.6	Resultados	135
4	Conclusões	151

Listas de Figuras

2.1	Diagramas <i>box</i> e <i>crossed box</i>	63
2.2	Massa adimensional do estado ligado de duas partículas em função da constante de acoplamento adimensional e do método de cálculo	69
2.3	Diagramas da corrente electromagnética de Gross do trinucleão	74
3.1	Factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e resultantes dos cálculos W16/NCI/Galster, IARC	140
3.2	Combinações isoescalares e isovectoriais dos factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e resultantes dos cálculos W16/NCI/Galster, IARC	141
3.3	Factores de forma de carga dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e resultantes dos cálculos WX/NCI/MMD, $X = 00, 10, 16, 19, 26$	142
3.4	Factores de forma magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e resultantes dos cálculos WX/NCI/MMD, $X = 00, 10, 16, 19, 26$	143
3.5	Factores de forma de carga isoescalar e isovectorial dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e resultantes dos cálculos WX/NCI/MMD, $X = 00, 10,$ $16, 19, 26$	144
3.6	Factores de forma magnéticos isoescalar e isovectorial dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e resultantes dos cálculos WX/NCI/MMD, $X = 00,$ $10, 16, 19, 26$	145
3.7	Factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e resultantes dos cálculos W16/NCX/MMD, $X = I, \dots, V$	146
3.8	Raios de carga quadráticos dos núcleos do ^3He e ^3H em função do inverso da energia de ligação nuclear para os cálculos WX/NCI/MMD, $X = 00,$ $10, 16, 19, 26$	148
3.9	Contribuições das componentes da função de vértice com $\rho_2 = \rho_3 = +$ para os factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H	150

Lista de Tabelas

2.1	Valores da energia de ligação do trinucleão, χ^2/N_{data} e ν para os modelos W00, W10, W16, W19, W26 da interacção NN	73
3.1	Raios de carga dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$	147
3.2	Raios magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$	147
3.3	Momentos magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ e respectivas combinações isoescalar e isovectorial	149

Introdução

Na construção de uma teoria de sistemas de muitos corpos é perdida a conexão das interacções dominantes com as respectivas teorias microscópicas por causa das aproximações que inevitavelmente são feitas. Essa ruptura pode ser evitada nas teorias dos sistemas de poucos corpos particularmente dos núcleos leves como por exemplo os núcleos do deutério, trítio e hélio-3. O carácter microscópico das teorias dos núcleos leves assim como a precisão dos dados experimentais da dispersão nucleão-nucleão (NN) e de observáveis desses núcleos permitem avaliar os modelos das interacções que regulam os fenómenos nucleares nomeadamente as interacções NN e electromagnética.

A dedução da interacção NN a partir da teoria fundamental da interacção forte, a Cromodinâmica Quântica, não foi ainda conseguida. A elevada intensidade da interacção forte a baixas energias impede o tratamento perturbativo. Sabe-se que a componente atractiva de longo alcance da força NN é bem descrita pela troca de um pião. Esta propriedade está na origem dos actuais modelos realistas da interacção NN visto que nesses modelos a força é explicada pela troca de mesões leves.

No *Thomas Jefferson National Accelerator Facility*, Newport News, Virginia, E.U.A, está a ser investigada experimentalmente a dispersão elástica do electrão pelo hélio-3 até um momento transferido próximo de 9 fm^{-1} . As observáveis medidas, os factores de forma de carga e magnético, avaliarão a qualidade dos modelos e imporão limites à parametrização das interacções NN e electromagnética. As previsões teóricas sobre os factores de forma dependem, sobretudo no intervalo de momentos transferidos elevados, dos detalhes dos modelos designadamente da inclusão da relatividade, forças de três corpos e correntes de interacção. Para além disso, no mesmo intervalo, os efeitos da estrutura de quarks e gluões do nucleão poderão ser suficientemente fortes para fixar o limite de validade da representação da interacção NN pela troca de mesões.

A teoria de Gross, também designada por teoria covariante da partícula espectadora, é fundamentada no formalismo de Bethe-Salpeter (BS). O seu propósito é explicar os fenómenos que ocorrem em sistemas de poucos corpos principalmente os que são determinados pela componente periférica da interacção. Na aproximação de ordem mais

baixa dessa teoria cada integração sobre uma energia interna referente a um diagrama de Feynman é substituída pela contribuição do pólo de energia positiva do propagador de BS de uma partícula, colocando-a assim na respectiva camada de massa. Consequentemente, o número de integrações sobre as componentes de um momento interno é reduzido de quatro para três, o que constitui uma vantagem na resolução numérica das equações da teoria. A covariância das equações é preservada porque a restrição de um nucleão à sua camada de massa é uma condição invariante sob as transformações homogéneas de Lorentz.

A teoria de Gross teve origem na análise de uma classe de diagramas de Feynman da amplitude de dispersão elástica de duas partículas escalares que interagem por meio da troca de uma outra partícula escalar. Essa classe é constituída pelos diagramas *ladder* e *crossed-ladder*. Descobriu-se que, sob certas condições, obtém-se a parte dominante da soma dos diagramas fazendo a substituição referida no parágrafo anterior. Dessa substituição resulta uma equação mais simples - a equação de Gross na aproximação de ordem mais baixa - do que a equação de BS. Para além disso, a solução da equação de Gross na aproximação de ordem mais baixa é uma aproximação melhor à solução da equação de BS do que a solução da equação de BS na aproximação *ladder*. Esta última equação resulta da exclusão dos diagramas *crossed-ladder*. Contudo, nos casos mais interessantes, como o da interacção NN, aquelas condições não são satisfeitas.

As amplitudes de dispersão e as funções de onda da teoria de Gross são soluções de equações integrais. A solução da equação integral que determina uma amplitude de dispersão é interpretada como a soma de um conjunto infinito de diagramas de Feynman. Quando se passa de um referencial inercial para outro, a transformação das amplitudes e das funções de onda é trivial e não depende da interacção. Esta independência é uma vantagem em relação aos formalismos construídos no contexto da *Relativistic Hamiltonian Dynamics*, em que o termo de interacção do hamiltoniano está presente nalguns dos geradores que determinam a transformação dos estados e das observáveis. Na teoria de Gross há um importante método de construção dos vértices electromagnéticos que garante a conservação de qualquer corrente de transição electromagnética na presença de factores de forma nos vértices electromagnéticos e restantes.

Antes da elaboração desta tese, a teoria de Gross na aproximação de ordem mais baixa foi aplicada com êxito à descrição da dispersão elástica do protão e neutrão, dos factores de forma electromagnéticos elásticos do deuterão, em particular para grandes momentos transferidos, da electrodess integração do deuterão e da energia de ligação do núcleo do trítio. A interacção NN foi representada pela soma de diagramas de troca de um mesão que preservam a simetria de isospin. Os vértices NN-mesão contêm factores

de forma fenomenológicos do nucleão e dos mesões. Esses factores de forma regularizam os integrais sobre os momentos internos. Embora possam ser incluídas forças de três corpos irredutíveis, estas foram até agora desprezadas. Quando, pela primeira vez, a equação da teoria de Gross para o estado ligado de três nucleões foi resolvida com um modelo da interacção NN convencional, obteve-se uma energia de ligação do núcleo do trítio muito baixa. A introdução do acoplamento *off-mass-shell* dos mesões escalares σ e δ ao nucleão permitiu reproduzir praticamente o valor experimental da energia de ligação. Variando a intensidade do acoplamento, obteve-se uma família de modelos NN que descrevem os dados experimentais de observáveis de dois nucleões com maior ou menor precisão. Verificou-se que o modelo que descreve melhor os dados experimentais é o que tem a melhor energia de ligação. A energia de ligação de um núcleo é apenas um aspecto da sua descrição. Por si só não garante que a estrutura nuclear também seja bem representada. Um método usado para obter informação experimental sobre a estrutura interna dos núcleos é a dispersão elástica de electrões. A secção eficaz diferencial correspondente depende dos factores de forma electromagnéticos elásticos do núcleo.

O passo seguinte na avaliação e eventual desenvolvimento da teoria foi o principal objectivo da nossa investigação: o cálculo na aproximação CIA (*complete impulse approximation*) da teoria de Gross dos factores de forma electromagnéticos elásticos dos núcleos do hélio-3 e trítio para a família de modelos da interacção NN acima referida. A aproximação CIA exclui a contribuição das correntes de interacção e enquadra-se na aproximação de ordem mais baixa da teoria. O cálculo da corrente completa, com as correntes de interacção, seria mais ambicioso. No entanto, numa primeira etapa é desnecessária a inclusão das correntes de interacção, visto que a contribuição dominante para os factores de forma é a da aproximação CIA.

Dividimos esta tese em quatro capítulos.

No primeiro revemos parte do formalismo de BS porque é a base da teoria de Gross. Relembramos a fim de utilizar no segundo capítulo: (a) a equação de BS da amplitude de dispersão elástica de dois nucleões e as equações de Faddeev das funções de onda conjugadas do trinucleão; (b) a condição de normalização das componentes de Faddeev das funções de onda conjugadas do trinucleão; (c) a corrente electromagnética do trinucleão. Um resultado da nossa investigação incluído no primeiro capítulo é: (a) a demonstração de que na teoria quântica relativista de campo (TQRC) as funções de onda conjugadas do deuterão não são ligadas pela conjugação de Dirac assim como as funções de onda conjugadas do trinucleão; (b) a dedução na TQRC de uma relação entre as funções de

onda conjugadas do deuterão e de uma relação entre as funções de onda conjugadas do trinúcleo utilizando a invariância das interacções com respeito às transformações próprias ortocronas de Lorentz e à inversão temporal; (c) a dedução na TQRC de uma relação entre as funções de onda conjugadas do deuterão e de uma relação entre as funções de onda conjugadas do trinúcleo utilizando a invariância das interacções com respeito às transformações homogéneas de Lorentz; (d) a implementação no formalismo de BS das relações mencionadas na alínea (c) impondo condições naturais ao propagador de um corpo e ao potencial de dois corpos. Em cálculos relativistas dos factores de forma dos núcleos do deutério, hélio-3 e tritio, incluindo o nosso, as funções de onda conjugadas de cada um desses núcleos são relacionadas pela conjugação de Dirac. Levada a efeito essa relação, qualquer quantidade dependente das funções de onda nucleares conjugadas transforma-se correctamente com respeito às transformações de simetria do sistema. Assim, um legado desta tese é o interesse na determinação dos efeitos das relações que descobrimos entre as funções de onda conjugadas nos factores de forma dos núcleos do deutério, hélio-3 e tritio.

No segundo capítulo expomos parte da teoria de Gross. Após uma abordagem às equações quasi-potencias de dois corpos, é justificada a importância da contribuição para um diagrama *ladder* dos pólos de energia positiva de uma das partículas em interacção, desde que sejam satisfeitas certas condições. Partindo do formalismo de BS, restringindo o termo não homogéneo da equação não homogénea de BS de dois corpos à soma de termos de troca de um bosão e ignorando as forças de três corpos, são obtidas na aproximação de ordem mais baixa da teoria de Gross: (a) as equações da amplitude de dispersão elástica de dois nucleões e das funções de vértice conjugadas do trinúcleo; (b) a condição de normalização das funções de vértice conjugadas do trinúcleo; (c) uma expressão da corrente electromagnética do trinúcleo.

No terceiro capítulo demonstramos que, sob a condição de invariância das interacções com respeito às transformações homogéneas de Lorentz, a corrente electromagnética do trinúcleo na aproximação de ordem mais baixa da teoria de Gross é conservada, quer completa quer truncada na aproximação CIA, quaisquer que sejam as correntes de um e dois corpos. A arbitrariedade das correntes de um e dois corpos dispensa que a construção das suas componentes longitudinais seja condicionada por identidades de Ward-Takahashi (essas identidades garantem a conservação da corrente electromagnética do trinúcleo). Apresentamos os detalhes do cálculo analítico da corrente electromagnética do trinúcleo na aproximação CIA. Expomos os resultados do cálculo numérico dos factores de forma do trinúcleo na aproximação CIA e comparamo-los com os resultados de um cálculo realizado no âmbito de um formalismo não relativista com correções

relativistas. Discutimos os resultados.

No quarto capítulo apresentamos as principais conclusões acerca dos resultados do cálculo na aproximação CIA da teoria de Gross dos factores de forma electromagnéticos elásticos dos núcleos do hélio-3 e trítio.

Capítulo 1

Formalismo de Bethe-Salpeter

1.1 Matriz S, Funções de Green e Redução de LSZ

Imaginemos um modelo de um sistema de bosões e fermiões em interacção no âmbito da TQRC. Denotemos o sistema por \mathcal{S} e o espaço de Hilbert do modelo por \mathcal{H} . Consideraremos apenas estados puros de \mathcal{S} . Para representar em \mathcal{H} as observáveis e os estados de \mathcal{S} empregamos a representação de Heisenberg em vez da de Schrödinger: convém que os campos elementares sejam funções das coordenadas espaço-temporais, porquanto as transformações de Lorentz puras misturam essas coordenadas. A interpretação de um vector físico de \mathcal{H} é então variável no tempo, visto que é determinada pelos valores expectáveis das observáveis de \mathcal{S} relativamente a esse vector.

Uma regra de superselecção é uma condição que restringe os vectores físicos de \mathcal{H} e o princípio da sobreposição [1, 2]. Por exemplo: (a) segundo a regra de superselecção de univalência, qualquer vector físico é uma combinação linear de vectores de momento angular total inteiro ou semi-inteiro, em virtude da invariância dos estados de \mathcal{S} com respeito a uma rotação de 2π radianos; (b) de acordo com as regras de superselecção da carga eléctrica, do número bariónico e dos três números leptónicos, os vectores físicos são vectores próprios dessas observáveis respectivamente. Há uma regra de superselecção quando existe um operador hermítico que comuta com as observáveis e é distinto dos múltiplos da identidade. Nesse caso, qualquer vector físico é um vector próprio desse operador [3]. Se os operadores que produzem as regras de superselecção comutam entre si, como admitimos, \mathcal{H} é decomposto em subespaços mutuamente ortogonais e invariantes relativamente à acção de cada observável, designados por subespaços coerentes [2, 3]. Cada subespaço coerente é gerado pelos vectores próprios comuns dos operadores das regras de superselecção. Uma condição necessária para um vector de \mathcal{H} representar um estado de \mathcal{S} é pertencer a um subespaço coerente. Consequentemente, o princípio da

sobreposição é aplicado apenas aos vectores físicos de um subespaço coerente.

Nesta tese, escolhemos encarar as transformações espaço-temporais de acordo com o ponto de vista activo: o sistema de referência permanece inalterado e o estado de \mathcal{S} é objecto de uma transformação desse género.

Uma transformação de simetria de \mathcal{S} é uma função, T_s , que satisfaz as seguintes condições [2]: (a) o domínio e a imagem de T_s são o conjunto dos raios físicos unitários; (b) T_s é injectiva; (c) sendo $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ raios físicos unitários e $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v'_1\rangle, |v'_2\rangle$ vectores de $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, T_s\mathcal{R}_1, T_s\mathcal{R}_2$ respectivamente, então, $|\langle v_1|v_2\rangle| = |\langle v'_1|v'_2\rangle|$. Referimos, a propósito, que um raio físico unitário é o conjunto constituído por um vector físico unitário de \mathcal{H} , $|v\rangle$, e pelos vectores do tipo $c|v\rangle$, sendo c um número complexo unitário. A definição apresentada de transformação de simetria justifica-se, porquanto: (a) estados distintos de \mathcal{S} são transformados por T_s em estados distintos; (b) a transformação inversa de T_s é uma transformação de simetria; (c) T_s preserva as probabilidades de transição entre os estados de \mathcal{S} ; (d) dado um subespaço coerente de \mathcal{H} , \mathcal{H}_c , existe um subespaço coerente de \mathcal{H} , \mathcal{H}'_c , tal que se \mathcal{R} é um raio físico unitário de \mathcal{H}_c , então, $T_s\mathcal{R}$ é um raio físico unitário de \mathcal{H}'_c [4].

Uma transformação de simetria pode ser representada em \mathcal{H}_c por um operador. A representação não é única. Um operador, $U(T_s)$, representa T_s em \mathcal{H}_c quando: (a) o domínio de $U(T_s)$ é o conjunto dos vectores físicos de \mathcal{H}_c ; (b) se \mathcal{R} é um raio físico unitário de \mathcal{H}_c e $|v\rangle$ é um vector físico tal que $|v\rangle/|v|$ pertence a \mathcal{R} , então, $U(T_s)(|v\rangle/|v|)$ pertence a $T_s\mathcal{R}$.

Segundo um importante teorema de Wigner, há uma representação especial de T_s em \mathcal{H}_c [5, 6]: (a) existe um operador linear unitário ou antilinear antiunitário, $U(T_s)$, que representa T_s em \mathcal{H}_c ; (b) se $U'(T_s)$ é um operador com essas características de $U(T_s)$, então, existe um número complexo unitário, c , tal que $U'(T_s) = cU(T_s)$; (c) o carácter linear unitário ou antilinear antiunitário de $U(T_s)$ é uma propriedade intrínseca de T_s . $U(T_s)$ é um operador linear unitário ou antilinear antiunitário consoante $\langle U(T_s)v_2, U(T_s)v_1\rangle = \langle v_2, v_1\rangle$ ou $\langle U(T_s)v_2, U(T_s)v_1\rangle = \langle v_2, v_1\rangle^*$, quaisquer que sejam os vectores físicos $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ de \mathcal{H}_c . O operador adjunto de $U(T_s)$, $U^\dagger(T_s)$, é definido por $\langle v_2|U^\dagger(T_s)|v_1\rangle = \langle v_1|U(T_s)|v_2\rangle^*$ ou $\langle v_2|U^\dagger(T_s)|v_1\rangle = \langle v_1|U(T_s)|v_2\rangle$ conforme $U(T_s)$ é linear ou antilinear. Comprova-se que $U(T_s)$ é invertível e $U^{-1}(T_s) = U^\dagger(T_s)$. A descrição teórica de \mathcal{S} deverá ser mais simples se cada transformação de simetria de \mathcal{S} for representada em \mathcal{H}_c por um operador linear unitário ou antilinear antiunitário. É o que faremos daqui em diante.

O conjunto das transformações de simetria de \mathcal{S} juntamente com a composição de transformações é um grupo. Designemo-lo por grupo de simetria de \mathcal{S} e denotêmo-lo por

G_s . Sejam H_s um seu subgrupo, T_s uma transformação de H_s , \mathcal{G}_s um grupo isomorfo¹ a H_s e \mathcal{T}_s o elemento de \mathcal{G}_s associado a T_s . Um operador linear unitário ou antilinear antiunitário representa \mathcal{T}_s em \mathcal{H}_c se representa T_s em \mathcal{H}_c . Chamamos representação de \mathcal{G}_s em \mathcal{H}_c a qualquer função que associa a cada elemento de \mathcal{G}_s um operador linear unitário ou antilinear antiunitário que representa em \mathcal{H}_c esse elemento de \mathcal{G}_s . Se \mathcal{T}'_s , T_s são elementos de \mathcal{G}_s e $U(\mathcal{T}'_s)$, $U(\mathcal{T}_s)$, $U(\mathcal{T}'_s \mathcal{T}_s)$ são os operadores que representam em \mathcal{H}_c , respectivamente, \mathcal{T}'_s , \mathcal{T}_s , $\mathcal{T}'_s \mathcal{T}_s$, demonstra-se que existe um número real, $\phi(\mathcal{T}'_s, \mathcal{T}_s)$, tal que $U(\mathcal{T}'_s)U(\mathcal{T}_s) = e^{i\phi(\mathcal{T}'_s, \mathcal{T}_s)}U(\mathcal{T}'_s \mathcal{T}_s)$ [7]. Uma representação de \mathcal{G}_s é projectiva se não preserva a operação binária de \mathcal{G}_s , ou seja, se existem \mathcal{T}'_s , \mathcal{T}_s tais que $e^{i\phi(\mathcal{T}'_s, \mathcal{T}_s)} \neq 1$ [7].

Há obrigatoriamente dois subgrupos de G_s . Um deles é, de acordo com o princípio da relatividade restrita, o subgrupo isomorfo ao grupo próprio ortocrono não homogéneo de Lorentz, \mathcal{P}_+^\dagger . O outro é, conforme assegura o teorema PCT, o subgrupo cujas transformações são a identidade e a composição da conjugação de carga e das transformações correspondentes às inversões espacial e temporal [2, 8]. O teorema PCT é uma consequência da densidade lagrangiana ser hermética, local, ordenada normalmente e um escalar de Lorentz.

As transformações de \mathcal{P}_+^\dagger são as transformações de coordenadas espaço-temporais do tipo $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$, tendo o vector de translação no espaço-tempo a componentes constantes reais e sendo a matriz de Lorentz Λ uma matriz constante real condicionada por $g_{\mu\nu} = \Lambda^\omega_\mu g_{\omega\rho} \Lambda^\rho_\nu$, $\text{Det}\Lambda = 1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$. Para simplificar a exposição o par ordenado (Λ, a) identifica-se com a transformação $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$. A composição de (Λ', a') após (Λ, a) , $(\Lambda', a')(\Lambda, a)$, é naturalmente $(\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a')$.

Destacamos dois subgrupos de \mathcal{P}_+^\dagger : o das transformações homogéneas, L_+^\dagger , e o das translações. Toda a transformação de \mathcal{P}_+^\dagger é uma transformação de L_+^\dagger seguida de uma translação. Qualquer transformação de L_+^\dagger é decomponível, por exemplo, numa transformação de Lorentz pura seguida de uma rotação. Sejam $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$, respectivamente, os versores dos eixos cartesianos mutuamente perpendiculares X^1, X^2, X^3 tais que $\hat{e}^i \cdot \hat{e}^j = \epsilon_{ijk} \hat{e}^k$ e sejam \hat{n}_r, \hat{n}_b versores. As matrizes relativamente à base canónica de \mathbb{R}^4 da transformação de Lorentz pura de rapidez η sobre o eixo de versor \hat{n}_b , da rotação de ângulo ζ em torno do eixo de versor \hat{n}_r e da translação de vector a são simbolizadas por $B(\eta \hat{n}_b)$, $R(\zeta \hat{n}_r)$ e $T(a)$ respectivamente.

São aditivos o ângulo da composição de duas rotações em torno de um eixo, a rapidez da composição de duas transformações de Lorentz puras na direcção de um eixo e o vector de translação da composição de duas translações. Por conseguinte, $B(\eta \hat{n}_b)$, $R(\zeta \hat{n}_r)$, $T(a)$

¹Sejam (G, \cdot) , (G', \bullet) grupos. Estes grupos são isomorfos se existe uma função bijectiva de G em G' , F , que satisfaz a condição $F(g_1 \cdot g_2) = F(g_1) \bullet F(g_2)$, quaisquer que sejam g_1, g_2 de G .

relacionam-se com as respectivas derivadas na origem: $B(\eta\hat{n}_b) = \exp[\eta(dB(\eta\hat{n}_b)/d\eta)_{\eta=0}]$, $R(\zeta\hat{n}_r) = \exp[\zeta(dR(\zeta\hat{n}_r)/d\zeta)_{\zeta=0}]$, $T(a) = \exp[a^\mu(\partial T(a)/\partial a^\mu)_{a=0}]$ e, pelo carácter abeliano do grupo das translações, $T(a) = \prod_\mu \exp[a^\mu(\partial T(a)/\partial a^\mu)_{a=0}]$. A dependência das derivadas na origem relativamente aos respectivos versores é expressa pelas igualdades $(dB(\eta\hat{n}_b)/d\eta)_{\eta=0} = i\hat{n}_b\mathcal{K}$ e $(dR(\zeta\hat{n}_r)/d\zeta)_{\zeta=0} = -i\hat{n}_r\mathcal{J}$, sendo \mathcal{K}^i a matriz anti-hermítica $-i(dB(\eta\hat{e}^i)/d\eta)_{\eta=0}$ e \mathcal{J}^i a matriz hermítica $i(dR(\zeta\hat{e}^i)/d\zeta)_{\zeta=0}$. No que concerne às translações, introduzimos a matriz anti-hermítica $i(\partial T(a)/\partial a_\mu)_{a=0}$ e denotamo-la por \mathcal{P}^μ . Confirma-se facilmente que as matrizes \mathcal{K}^i , \mathcal{J}^i , \mathcal{P}^μ satisfazem as relações de comutação

$$[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}^k, [\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^j] = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}^k, [\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu] = 0, [\mathcal{J}^i, \mathcal{K}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}^k,$$

$$[\mathcal{J}^i, \mathcal{P}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{P}^k, [\mathcal{J}^i, \mathcal{P}^0] = 0, [\mathcal{K}^i, \mathcal{P}^j] = i\delta_{ij}\mathcal{P}^0, [\mathcal{K}^i, \mathcal{P}^0] = i\mathcal{P}^i. \quad (1.1)$$

A já mencionada decomposição de toda a transformação de \mathcal{P}_+^\uparrow na sucessão de uma transformação de Lorentz pura, uma rotação e uma translação, a álgebra de Lie de \mathcal{P}_+^\uparrow , eq. (1.1), a representação exponencial acima indicada das transformações de Lorentz puras, rotações e translações assim como a identidade $e^{A+B} = e^A e^B e^{[B,A]/2}$, em que A , B são quaisquer matrizes quadradas da mesma ordem, implicam que as transformações de \mathcal{P}_+^\uparrow são decomponíveis em translações temporais, transformações de Lorentz puras rotações e translações sobre X^1, X^2, X^3 . Nesse sentido, $\mathcal{K}^i, \mathcal{J}^i, \mathcal{P}^\mu$ geram \mathcal{P}_+^\uparrow .

Para a compreensão do que se segue notemos que podemos identificar igualmente as transformações de L_+^\uparrow pelos valores das variáveis alternativas $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, \omega_2^3, \omega_3^1, \omega_1^2$: sejam ω a sequência das variáveis alternativas nessa ordem e $\eta, \hat{n}_b, \zeta, \hat{n}_r$ tais que $(\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) = \eta\hat{n}_b$, $(\omega_2^3, \omega_3^1, \omega_1^2) = \zeta\hat{n}_r$; então, a matriz de Lorentz associada a ω , $A(\omega)$, é $R(\zeta\hat{n}_r)B(\eta\hat{n}_b)$.

Importa encontrar-se uma representação de \mathcal{P}_+^\uparrow em \mathcal{H}_c que tenha as propriedades nas seguintes alíneas (a)-(d): (a) a transformação identidade de \mathcal{P}_+^\uparrow é representada em \mathcal{H}_c pelo operador $U(1, 0)$ tal que $U(1, 0) = 1$; (b) os operadores da representação são lineares unitários; (c) $\langle v_1 | U(A(\omega), a) | v_2 \rangle$ é uma função diferenciável de (ω, a) , sendo $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ vectores físicos constantes de \mathcal{H}_c e $U(A(\omega), a)$ o operador da representação associado a $(A(\omega), a)$; (d) existe uma bola aberta de centro no elemento nulo de \mathbb{R}^{10} , \mathcal{V} , tal que se (ω', a') , (ω, a) são elementos de \mathcal{V} , então,

$$U^{-1}(A'(\omega'), a') = U(A^{-1}(\omega'), -A^{-1}(\omega')a'), \quad (1.2)$$

$$U((A(\omega'), a')(A(\omega), a)) = U(A(\omega'), a')U(A(\omega), a), \quad (1.3)$$

$$U((A(\omega'), a')^{-1}(A(\omega), a)(A(\omega'), a')) = U^{-1}(A(\omega'), a')U(A(\omega), a)U(A(\omega'), a'). \quad (1.4)$$

Passemos a esclarecer a importância da alínea (d). Substituindo na eq. (1.4) cada U

pela respectiva série de Taylor em torno da origem, ou seja,

$$U(\Lambda(\omega), a) = 1 - i(\omega^3_2 J^1 + \omega^1_3 J^2 + \omega^2_1 J^3) + i\omega^0_i K^i - ia_\mu P^\mu + \dots, \quad (1.5)$$

sendo J^i , K^i , P^μ operadores hermíticos - por causa da unitariedade de $U(\Lambda(\omega), a)$, deduzem-se as relações de comutação de J^i , K^i , P^μ homólogas às da eq. (1.1) [7]. Denominamos essas relações por álgebra de Lie de \mathcal{P}_+^\dagger em \mathcal{H}_c . São obtidas pondo os operadores J^i , K^i , P^μ no lugar das matrizes \mathcal{J}^i , \mathcal{K}^i , \mathcal{P}^μ respectivamente. Deduzem-se ainda as regras de transformação desses operadores sob $(\Lambda(\omega), a)$, sendo (ω, a) um elemento de \mathcal{V} [7]:

$$U^{-1}(\Lambda(\omega), a) J^{\mu\nu} U(\Lambda(\omega), a) = \Lambda^\mu_\rho(\omega) \Lambda^\nu_\sigma(\omega) J^{\rho\sigma} + a^\mu \Lambda^\nu_\sigma(\omega) P^\sigma - a^\nu \Lambda^\mu_\rho(\omega) P^\rho, \quad (1.6)$$

$$U^{-1}(\Lambda(\omega), a) P^\mu U(\Lambda(\omega), a) = \Lambda^\mu_\nu(\omega) P^\nu, \quad (1.7)$$

em que $J^{23} = J^1$, $J^{31} = J^2$, $J^{12} = J^3$, $J^{i0} = K^i$ e $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$. Por último, se n é um número inteiro e $(\eta \hat{n}_b, 0)$, $(0, \zeta \hat{n}_r, 0)$, $(0, a)$ são elementos de \mathcal{V} , é claro que $(\eta \hat{n}_b/n, 0)$, $(0, \zeta \hat{n}_r/n, 0)$, $(0, a/n)$ também pertencem a \mathcal{V} ; por causa disso, das eqs. (1.3), (1.5) e do carácter aditivo de η , ζ , a , infere-se que

$$U(B(\eta \hat{n}_b)) = \exp(i\eta \hat{n}_b \cdot \mathbf{K}), \quad U(R(\zeta \hat{n}_r)) = \exp(-i\zeta \hat{n}_r \cdot \mathbf{J}), \quad U(T(a)) = \exp(-ia \cdot P). \quad (1.8)$$

A eq. (1.8) sugere que se represente em \mathcal{H}_c a transformação de Lorentz $(\Lambda(\omega), a)$, sendo $(\Lambda(\omega), a) = T(a)R(\zeta \hat{n}_r)B(\eta \hat{n}_b)$ e (ω, a) pertencente ou não a \mathcal{V} , pelo operador linear unitário $U(\Lambda(\omega), a)$ definido por

$$U(\Lambda(\omega), a) = \exp(-ia \cdot P) \exp(-i\zeta \hat{n}_r \cdot \mathbf{J}) \exp(i\eta \hat{n}_b \cdot \mathbf{K}). \quad (1.9)$$

Comprova-se que a representação de \mathcal{P}_+^\dagger em \mathcal{H}_c assim estabelecida possui as propriedades constantes nas alíneas (a)-(d). As regras de transformação expressas pelas eqs. (1.6), (1.7) são agora válidas qualquer que seja (Λ, a) . A representação é projectiva ou não consoante \mathcal{H}_c é decomponível em subespaços de momento angular semi-inteiro ou inteiro. Se é projectiva, $U((\Lambda', a')(\Lambda, a)) = \pm U(\Lambda', a')U(\Lambda, a)$ e o sinal depende de (Λ', a') e (Λ, a) [7].

A álgebra de Lie de \mathcal{P}_+^\dagger em \mathcal{H}_c , as regras de transformação de J^i , K^i , P^μ sob as transformações de \mathcal{P}_+^\dagger e o significado físico de ω são consistentes com a seguinte identificação dos geradores da representação de \mathcal{P}_+^\dagger em \mathcal{H}_c : (a) P^0 é o hamiltoniano, denotado também por H ; (b) P^1 , P^2 , P^3 são as componentes cartesianas do 3-momento; (c) J^1 , J^2 , J^3 são as componentes cartesianas do momento angular; (d) K^1 , K^2 , K^3 são os geradores das transformações de Lorentz puras sobre os eixos cartesianos.

A aplicação do teorema de Noether [4] na densidade lagrangeana clássica do modelo de \mathcal{S} poderá fornecer J^i, K^i, P^μ : as dez quantidades constantes no tempo fornecidas pelo teorema, cuja conservação é uma consequência da invariância da densidade lagrangeana sob as transformações de \mathcal{P}_+^\dagger , são quantificadas substituindo nas respectivas expressões os campos clássicos pelos equivalentes quânticos e procedendo ao ordenamento normal das expressões resultantes; se os dez operadores assim construídos cumprirem a álgebra de Lie de \mathcal{P}_+^\dagger em \mathcal{H}_c , terão sido encontrados J^i, K^i, P^μ .

Admitamos que \mathcal{S} é invariante sob a inversão espacial, \mathcal{P} , e a inversão temporal, \mathcal{T} . Assim, há um subgrupo de G_s isomorfo ao grupo de Poincaré ou grupo de Lorentz não homogéneo, \mathcal{D} . Qualquer transformação de \mathcal{D} é uma transformação de \mathcal{P}_+^\dagger ou a composição de uma transformação de \mathcal{P}_+^\dagger com \mathcal{P}, \mathcal{T} ou $\mathcal{T}\mathcal{P}$. Dizer que há invariância de \mathcal{S} com respeito a \mathcal{P}, \mathcal{T} significa que essas transformações são representadas em \mathcal{H}_c , respectivamente, pelos operadores $U(\mathcal{P}), U(\mathcal{T})$, sendo cada um desses operadores linear unitário ou antilinear antiunitário e existindo uma bola aberta de centro no elemento nulo de \mathbb{R}^{10} tal que

$$U(\mathcal{P})U(\Lambda(\omega), a)U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}\Lambda(\omega)\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \quad (1.10)$$

$$U(\mathcal{T})U(\Lambda(\omega), a)U^{-1}(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T}\Lambda(\omega)\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a), \quad (1.11)$$

qualquer que seja (ω, a) pertencente a essa bola aberta [7]. As eqs. (1.10), (1.11) implicam

$$[U(\mathcal{P}), iH] = \{U(\mathcal{P}), iP^i\} = \{U(\mathcal{T}), iH\} = [U(\mathcal{T}), iP^i] = 0. \quad (1.12)$$

O espectro de H é limitado inferiormente e ilimitado superiormente. Se $U(\mathcal{P})$ fosse antilinear, concluiríamos que $\{H, U(\mathcal{P})\} = 0$, porque $[U(\mathcal{P}), iH] = -i\{H, U(\mathcal{P})\}$ e $[U(\mathcal{P}), iH] = 0$; de modo análogo, se $U(\mathcal{T})$ fosse linear, encontrariam $\{H, U(\mathcal{T})\} = 0$; tanto $\{H, U(\mathcal{P})\} = 0$ como $\{H, U(\mathcal{T})\} = 0$ implicariam que $-E$ seria um valor próprio de H se E também fosse e, por isso, o espectro de H seria ilimitado inferiormente. Portanto, $U(\mathcal{P})$ é linear unitário e $U(\mathcal{T})$ é antilinear antiunitário [7]. As eqs. (1.10), (1.11) acarretam também condições envolvendo $U(\mathcal{P}), U(\mathcal{T}), J^i, K^i$, as quais juntamente com as da eq. (1.12) são [7]

$$\begin{aligned} [J^i, U(\mathcal{P})] &= 0, \{K^i, U(\mathcal{P})\} = 0, \{P^i, U(\mathcal{P})\} = 0, [H, U(\mathcal{P})] = 0, \\ \{J^i, U(\mathcal{T})\} &= 0, [K^i, U(\mathcal{T})] = 0, \{P^i, U(\mathcal{T})\} = 0, [H, U(\mathcal{T})] = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

A construção de $U(\mathcal{P})$ e $U(\mathcal{T})$ está sujeita à condição natural $[U(\mathcal{P}), U(\mathcal{T})] = 0$ e às eqs. (1.13). Por causa do teorema PCT a conjugação de carga é também uma transformação de simetria de \mathcal{S} .

A escolha habitual para os operadores de Casimir é $\sqrt{P^2}$ e W^2 , em que $\sqrt{P^2}$ é a massa e W^μ é o vector de Pauli-Lubanski definido por $W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$. O spin intrínseco e a helicidade podem ser expressos num subespaço de \mathcal{H}_c de massa positiva em termos da massa e do vector de Pauli-Lubanski, visto que se k^μ , \tilde{k}^μ são momentos tais que $k^2 = M^2 > 0$, $|k| \neq 0$, $\tilde{k} = (M, 0)$ e se $|k\rangle$, $|\tilde{k}\rangle$ são vectores tais que $P^\mu|k\rangle = k^\mu|k\rangle$, $P^\mu|\tilde{k}\rangle = \tilde{k}^\mu|\tilde{k}\rangle$, então,

$$J^2|\tilde{k}\rangle = -\frac{W^2}{M^2}|\tilde{k}\rangle, \quad J \cdot \frac{\mathbf{k}}{|k|}|k\rangle = -\frac{W \cdot n(k)}{M}|k\rangle, \quad (1.14)$$

em que $n(k)$ é o vector $(|k|, k^0\mathbf{k}/|k|)/M$. A helicidade é invariante sob as rotações.

Admitamos que há um grupo de simetria interna de \mathcal{S} isomorfo ao grupo $SU(2)$. A representação em \mathcal{H}_c de $SU(2)$ é unitária. Quanto aos geradores, são denotados por I^1 , I^2 , I^3 , sendo $[I^i, I^j] = i\varepsilon_{ijk}I^k$. O operador de Casimir é \vec{I}^2 . Sendo R^{iso} uma transformação de $SU(2)$, o operador que a representa em \mathcal{H}_c é $U(R^{iso})$. Se $R^{iso} = 1$, $U(R^{iso}) = 1$.

Os campos elementares do modelo de \mathcal{S} representam partículas. O nucleão e o anti-nucleão são duas dessas partículas. A massa, spin intrínseco e isospin do nucleão são M_n , J_n , I_n respectivamente, sendo $J_n = I_n = 1/2$. Os estados do nucleão são determinados pela medição de P^μ , da helicidade e de I^3 . Em vez de estado do nucleão de momento P_n , helicidade λ_n e valor próprio τ_n de I^3 escreveremos somente estado $(P_n\lambda_n\tau_n)$ do nucleão. O vector $|P_n\lambda_n\tau_n\rangle$ representa o estado $(P_n\lambda_n\tau_n)$ do nucleão. Vectores distintos do conjunto $\{|P_n\lambda_n\tau_n\rangle\}$ não pertencem necessariamente ao mesmo subespaço coerente.

Suponhamos que as interacções de \mathcal{S} produzem estados ligados de dois (três) nucleões correspondentes ao deuterão e antideuterão (trinucleão e antitrinucleão). A massa, spin intrínseco e isospin do deuterão (trinucleão) são M_d (M_t), J_d (J_t) e I_d (I_t) respectivamente, sendo $J_d = 1$ ($J_t = 1/2$), $I_d = 0$ ($I_t = 1/2$). O vector $|P_d\lambda_d\tau_d\rangle$ ($|P_t\lambda_t\tau_t\rangle$) representa o estado $(P_d\lambda_d\tau_d)$ ($(P_t\lambda_t\tau_t)$) do deuterão (trinucleão). Sejam N_n o operador do número de nucleões, $N_{\bar{n}}$ o operador do número de antinucleões e $N_{n\bar{n}}$ tal que $N_{n\bar{n}} = N_n - N_{\bar{n}}$. Então, $N_{n\bar{n}}|P_d\lambda_d\tau_d\rangle = 2|P_d\lambda_d\tau_d\rangle$ e $N_{n\bar{n}}|P_t\lambda_t\tau_t\rangle = 3|P_t\lambda_t\tau_t\rangle$.

Quanto à normalização dos vectores introduzidos nos dois parágrafos precedentes, escolhemos

$$\langle P'_l \lambda'_l \tau'_l | P_l \lambda_l \tau_l \rangle = 2P_l^0 (2\pi)^3 \delta_{\lambda'_l \lambda_l} \delta_{\tau'_l \tau_l} \delta^3(\mathbf{P}'_l - \mathbf{P}_l), \quad (1.15)$$

sendo $l = n, d, t$. Esses vectores serão construídos na subsecção (1.4). O subespaço gerado por $\{|P_l\lambda_l\tau_l\rangle\}$ com l fixo, $\langle\{|P_l\lambda_l\tau_l\rangle\}\rangle$, é especial: $\langle\{|P_l\lambda_l\tau_l\rangle\}\rangle$ é invariante em relação à acção de qualquer operador representativo de uma transformação do subgrupo

de G_s que se obtém retirando de G_s as transformações que incluem a conjugação de carga.

Os estados ligados e de partícula elementar de \mathcal{S} são estados de massa discreta. Portanto, M_n , M_d , M_t são massas discretas. Admitamos que essas massas não são degeneradas. Isso significa que os subespaços de \mathcal{H} de massas M_n , M_d , M_t são gerados pelos vectores representativos dos estados, respectivamente, do nucleão e do antinucleão, do deuterão e do antideuterão, do trinucleão e do antitrinucleão.

Passemos à apresentação das três funções de Green no espaço dos momentos que nos interessam. Denotemos por $\psi_\alpha(x)$ o campo do nucleão e do antinucleão no espaço-tempo e na representação de Heisenberg e por $\bar{\psi}_\alpha(x)$ o respectivo campo conjugado de Dirac. O símbolo α representa uma sequência de dois índices: o primeiro é um índice de Dirac e o segundo é p ou n consoante o campo é do protão e antiprotão ou do neutrão e antineutrão. As funções de Green que importam, d , D e G , são definidas por

$$(2\pi)^4 \delta^4(P' - P) G_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n, \alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(p'_1 \dots p'_n, p_1 \dots p_n) = \int \prod_{k=1}^n d^4x'_k \prod_{j=1}^n d^4x_j \\ \times e^{i(p'_1 x'_1 + \dots + p'_n x'_n - p_1 x_1 - \dots - p_n x_n)} \langle 0 | T \psi_{\alpha'_1}(x'_1) \dots \psi_{\alpha'_n}(x'_n) \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_n}(x_n) | 0 \rangle, \quad (1.16)$$

sendo $n = 1, 2, 3$, $d = G^{(1)}$, $D = G^{(2)}$, $G = G^{(3)}$, P' e P os momentos totais $p'_1 + \dots + p'_n$ e $p_1 + \dots + p_n$ respectivamente, T o produto cronológico e $|0\rangle$ o vector unitário representativo do vácuo de \mathcal{S} . Por causa da conservação do momento importa apenas $G^{(n)}$ na região definida por $p'_1 + \dots + p'_n = p_1 + \dots + p_n = P$; pelo mesmo motivo em vez de $d(p', p)$ também escreveremos $d(p)$. O vácuo tem as seguintes propriedades: (a) é o estado de menor energia de \mathcal{S} ; (b) não é degenerado; (c) sendo N_a o operador do número de partículas a , $N_a|0\rangle = 0$; (d) é invariante com respeito a quaisquer transformações de Poincaré e $SU(2)$:

$$U(\Lambda, a)|0\rangle = |0\rangle, \quad (1.17)$$

$$U(\mathcal{T})|0\rangle = |0\rangle, \quad (1.18)$$

$$U(\mathcal{P})|0\rangle = |0\rangle, \quad (1.19)$$

$$U(R^{iso})|0\rangle = |0\rangle. \quad (1.20)$$

As eqs. (1.17) e (1.20) são equivalentes a $P^\mu|0\rangle = J^i|0\rangle = K^i|0\rangle = 0$ e $I^i|0\rangle = 0$ respectivamente. Na eq. (1.16) é evidente a simetria de troca: se $n > 1$, $G^{(n)}$ é anti-simétrico relativamente à permutação de p'_i (p_i) por p'_j (p_j) juntamente com a permutação de α'_i (α_i) por α'_j (α_j).

A função de Green d tem um pólo na energia do nucleão:

$$d(p) \sim \frac{i \sum_{\lambda_n \tau_n} u(P_n \lambda_n \tau_n) \bar{u}(P_n \lambda_n \tau_n)}{2 P_n^0 (p^0 - P_n^0 + i\epsilon)} \quad (1.21)$$

na vizinhança de $p^0 = P_n^0 - i\epsilon$, sendo $\mathbf{P}_n = \mathbf{p}$,

$$u(P_n \lambda_n \tau_n) = \langle 0 | \psi(0) | P_n \lambda_n \tau_n \rangle, \quad \bar{u}(P_n \lambda_n \tau_n) = \langle P_n \lambda_n \tau_n | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle \quad (1.22)$$

e estando subentendido o limite $\epsilon \rightarrow 0^+$. A dedução da eq. (1.21) utiliza: (a) o carácter discreto e a não degenerescência de M_n ; (b) a identidade $\langle 0 | \psi(x) | P_{\bar{n}} \lambda_{\bar{n}} \tau_{\bar{n}} \rangle = 0$ resultante de $N_{n\bar{n}} | P_{\bar{n}} \lambda_{\bar{n}} \tau_{\bar{n}} \rangle = - | P_{\bar{n}} \lambda_{\bar{n}} \tau_{\bar{n}} \rangle$ e $\langle 0 | \psi(x) N_{n\bar{n}} \rangle = \langle 0 | \psi(x)$, em que $| P_{\bar{n}} \lambda_{\bar{n}} \tau_{\bar{n}} \rangle$ é o vector representativo do estado $(P_{\bar{n}} \lambda_{\bar{n}} \tau_{\bar{n}})$ do antinucleão. A última identidade é um caso particular de $\langle 0 | \psi(x_1) \cdots \psi(x_n) N_{n\bar{n}} \rangle = n \langle 0 | \psi(x_1) \cdots \psi(x_n)$, sendo esta uma consequência de $[\psi(x), N_{n\bar{n}}] = \psi(x)$ e $N_{n\bar{n}} | 0 \rangle = 0$. Admitimos que $[N_{n\bar{n}}, H] = 0$. Os objectos $u(P_n \lambda_n \tau_n)$ e $\bar{u}(P_n \lambda_n \tau_n)$ descrevem o estado $(P_n \lambda_n \tau_n)$ do nucleão. Por conseguinte, $u(P_n \lambda_n \tau_n)$ e $\bar{u}(P_n \lambda_n \tau_n)$ são designados por funções de onda conjugadas do estado $(P_n \lambda_n \tau_n)$ do nucleão.

As funções de Green D e G têm um pólo na energia do deuterão e trinucleão respectivamente [9]:

$$G^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \sim \frac{i \sum_{\lambda_l \tau_l} \Psi(q'_1 \dots q'_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \bar{\Psi}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l)}{2P_l^0 (P^0 - P_l^0 + i\epsilon)} \quad (1.23)$$

na vizinhança de $P^0 = P_l^0 - i\epsilon$, sendo: $l = d, t$; $n_d = 2, n_t = 3$; P os momentos totais $p'_1 + \dots + p'_{n_l}$ e $p_1 + \dots + p_{n_l}$; q'_i, q_i os momentos relativos $p'_i - P/n_l, p_i - P/n_l$ respectivamente; $\mathbf{P}_l = \mathbf{P}$; $\Psi(P_l \lambda_l \tau_l), \bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l)$ as funções de onda relativas conjugadas no espaço dos momentos relativos do estado $(P_l \lambda_l \tau_l)$ do deuterão ou trinucleão conforme $l = d$ ou $l = t$, definidas por

$$\begin{aligned} \Psi(q'_1 \dots q'_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= n_l^4 \int d^4 r'_1 \dots d^4 r'_{n_l} \delta^4(r'_1 + \dots + r'_{n_l}) e^{i(q'_1 r'_1 + \dots + q'_{n_l} r'_{n_l})} \\ &\times \langle 0 | T \psi(r'_1) \dots \psi(r'_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= n_l^4 \int d^4 r_1 \dots d^4 r_{n_l} \delta^4(r_1 + \dots + r_{n_l}) e^{-i(q_1 r_1 + \dots + q_{n_l} r_{n_l})} \\ &\times \langle P_l \lambda_l \tau_l | T \bar{\psi}(r_1) \dots \bar{\psi}(r_{n_l}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

É manifesto que as funções de onda têm a simetria de troca. A dedução da eq. (1.23) é similar à da eq. (1.21).

A função de Green $G^{(n_l)}$ tem mais um pólo relativamente à energia total. Está em $-P_l^0 + i\epsilon$ e o respectivo resíduo contém apenas as funções de onda conjugadas do antinucleão, antideuterão ou antitrinucleão conforme $l = n, d$ ou t .

A descrição teórica de uma colisão que envolve, antes e após a interacção, nucleões, deuterões e trinucleões recorre aos estados *in* (*out*) dessas partículas gerados pela acção sobre $|0\rangle$ dos operadores de criação $a^{in(out)\dagger}(P_l \lambda_l \tau_l)$, $l = n, d, t$. A construção de

$a^{in(out)\dagger}(P_l \lambda_l \tau_l)$, $l = d$, t [9], é inspirada na de $a^{in(out)\dagger}(P_n \lambda_n \tau_n)$ [10, 11, 12]. Começa pela definição dos operadores $\mathcal{O}_l^{in(out)}$, $l = d$, t :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_l^{in(out)}(X r_1 \dots r_{n_l}) &= T\psi(X + r_1) \dots \psi(X + r_{n_l}) \\ &- \int d^4 X' \Delta_l^{ret(adv)}(X - X') (\square_{X'} + M_l^2) T\psi(X' + r_1) \dots \psi(X' + r_{n_l}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

sendo $r_1 + \dots + r_{n_l} = 0$ e $\Delta_l^{ret(adv)}(X - X')$ a função de Green retardada (avançada) do operador de Klein-Gordon $\square_X + M_l^2$, ou seja, a solução de

$$(\square_X + M_l^2) \Delta_l^{ret(adv)}(X - X') = \delta^4(X - X') \quad (1.27)$$

sujeita à condição $\Delta_l^{ret(adv)}(X - X') = 0$ se $X^0 - X'^0 < 0 (> 0)$.

A seguir, são introduzidas as funções $U(P_l \lambda_l \tau_l)$, $\bar{U}(P_l \lambda_l \tau_l)$, $l = d$, t :

$$U(X r_1 \dots r_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = f(X P_l) g(r_1 P_l) \dots g(r_{n_l} P_l) \langle 0 | T\psi(r_1) \dots \psi(r_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle, \quad (1.28)$$

$$\bar{U}(X r_1 \dots r_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = f^*(X P_l) g(r_1 P_l) \dots g(r_{n_l} P_l) \langle P_l \lambda_l \tau_l | T\bar{\psi}(r_1) \dots \bar{\psi}(r_{n_l}) | 0 \rangle, \quad (1.29)$$

em que $f(X P_l)$ satisfaz $(\square_X + M_l^2) f(X P_l) = 0$, tem o momento central P_l e tende para $e^{-i P_l X}$ no limite de onda plana; $g(r P_l)$ é definido por

$$g(r P_l) = \exp[-c_{1l}(r \cdot P_l)^2 - c_{2l}(r \cdot r)^2] \quad (1.30)$$

com c_{1l} , c_{2l} tais que

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda'_l \lambda_l} \delta_{\tau'_l \tau_l} &= n_{n_l}^4 \int d^4 r_1 \dots d^4 r_{n_l} \delta^4(r_1 + \dots + r_{n_l}) g(r_1 P_l) \dots g(r_{n_l} P_l) \\ &\times \langle P_l \lambda'_l \tau'_l | T\bar{\psi}(r_1) \dots \bar{\psi}(r_{n_l}) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi(r_1) \dots \psi(r_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\lim_{r_i^0 \rightarrow \pm\infty} U(X r_1 \dots r_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = \lim_{r_i^0 \rightarrow \pm\infty} \bar{U}(X r_1 \dots r_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = 0. \quad (1.32)$$

O facto do integral na eq. (1.31) se anular quando $\lambda'_l \neq \lambda_l$ e/ou $\tau'_l \neq \tau_l$ é uma consequência do lema de Schur [9, 13].

Agora, definem-se os operadores $a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l)$, $a(P_l \lambda_l \tau_l)$ por

$$\begin{aligned} a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l) &= \int d^3 X \int n_{n_l}^4 d^4 r_1 \dots d^4 r_{n_l} \delta^4(r_1 + \dots + r_{n_l}) \\ &\times \bar{U}(X r_1 \dots r_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) i \overleftrightarrow{\partial}_{X_0} \mathcal{O}_l^{in(out)}(X r_1 \dots r_{n_l}), \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} a(X^0 P_l \lambda_l \tau_l) &= \int d^3 X \int n_{n_l}^4 d^4 r_1 \dots d^4 r_{n_l} \delta^4(r_1 + \dots + r_{n_l}) \\ &\times \bar{U}(X r_1 \dots r_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) i \overleftrightarrow{\partial}_{X_0} T\psi(X + r_1) \dots \psi(X + r_{n_l}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

O operador $a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l)$ é independente de X^0 . No limite de onda plana satisfaz

$$[P^\mu, a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l)] = -P_l^\mu a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l). \quad (1.35)$$

Por último, postula-se a condição assimptótica

$$\lim_{X^0 \rightarrow -\infty(+\infty)} \langle v_1 | a(X^0 P_l \lambda_l \tau_l) | v_2 \rangle = \langle v_1 | a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l) | v_2 \rangle, \quad (1.36)$$

em que v_1, v_2 são vectores normalizáveis arbitrários. A propriedade de convergência, eq. (1.32), e a eq. (1.36) acarretam, no limite de onda plana, as relações de anticomutação e comutação

$$\{a^{in(out)}(P_t \lambda_t \tau_t), a^{in(out)\dagger}(P_t \lambda_t \tau_t)\} = 2P_t^0 (2\pi)^3 \delta_{\lambda'_t \lambda_t} \delta_{\tau'_t \tau_t} \delta^3(\mathbf{P}'_t - \mathbf{P}_t), \quad (1.37)$$

$$[a^{in(out)}(P_d \lambda_d \tau_d), a^{in(out)\dagger}(P_d \lambda_d \tau_d)] = 2P_d^0 (2\pi)^3 \delta_{\lambda'_d \lambda_d} \delta_{\tau'_d \tau_d} \delta^3(\mathbf{P}'_d - \mathbf{P}_d). \quad (1.38)$$

A eq. (1.35) e o facto de $|0\rangle$ ser o estado de menor energia de \mathcal{S} implicam que $a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l)|0\rangle = 0$. Disto e das eqs. (1.37), (1.38) extrai-se que $a^{in(out)}(P_l \lambda_l \tau_l)$, $a^{in(out)\dagger}(P_l \lambda_l \tau_l)$ são operadores de destruição e criação respectivamente. Demonstra-se que $a^{in(out)\dagger}(P_l \lambda_l \tau_l)|0\rangle$ tem momento P_l , helicidade λ_l e projecção do isospin τ_l ; portanto, esse vector *in* (*out*) e $|P_l \lambda_l \tau_l\rangle$ são iguais ou diferem num factor constante unitário.

Quanto aos operadores $a^{in(out)}(P_n \lambda_n \tau_n)$ e $a(P_n \lambda_n \tau_n)$ são definidos por

$$a^{in(out)}(P_n \lambda_n \tau_n) = \int d^3x \bar{U}(x P_n \lambda_n \tau_n) \gamma^0 \psi^{in(out)}(x), \quad (1.39)$$

$$a(P_n \lambda_n \tau_n) = \int d^3x \bar{U}(x P_n \lambda_n \tau_n) \gamma^0 \psi(x), \quad (1.40)$$

em que

$$U(x P_n \lambda_n \tau_n) = f(x P_n) u(P_n \lambda_n \tau_n), \quad \bar{U}(x P_n \lambda_n \tau_n) = f^*(x P_n) \bar{u}(P_n \lambda_n \tau_n), \quad (1.41)$$

$$\psi^{in(out)}(x) = \psi(x) - \int d^4x' S^{ret(adv)}(x - x')(i\partial_{x'} - M_n) \psi(x') \quad (1.42)$$

e $S^{ret(adv)}(x - x')$ é a função de Green retardada (avançada) de $i\partial_x - M_n$. A eq. (1.36) é análoga à condição assimptótica que liga $a^{in(out)}(P_n \lambda_n \tau_n)$ e $a(P_n \lambda_n \tau_n)$

Actuando no vácuo com os operadores de criação $a^{in(out)\dagger}(P_l \lambda_l \tau_l)$, $l = n, d, t$, produzem-se estados *in* (*out*) de nucleões, deuterões e trinucleões, isto é, objectos do género

$$\prod_{i=1}^{m_n} a^{in(out)\dagger}(P_{ni} \lambda_{ni} \tau_{ni}) \prod_{j=1}^{m_d} [a^{in(out)\dagger}(P_{d_j} \lambda_{d_j} \tau_{d_j})]^{n_j} \prod_{k=1}^{m_t} a^{in(out)\dagger}(P_{tk} \lambda_{tk} \tau_{tk}) |0\rangle, \quad (1.43)$$

em que $(P_{d1} \lambda_{d1} \tau_{d1}), \dots, (P_{dm_d} \lambda_{dm_d} \tau_{dm_d})$ são distintos entre si. Admite-se que o vácuo e os estados *in* (*out*) de todas as partículas elementares e estados ligados de \mathcal{S} formam um conjunto completo de estados de \mathcal{H} .

Antes e apóis uma colisão, as partículas intervenientes estão localizadas em regiões do espaço afastadas entre si muito mais do que o alcance da interacção entre

as partículas. As partículas incidentes (emergentes) são descritas por uma sobreposição de estados *in* (*out*). A quantidade essencial na análise teórica de uma colisão é a amplitude de probabilidade $\langle b \text{ out} | a \text{ in} \rangle$, em que $|a \text{ in}\rangle$ ($|b \text{ out}\rangle$) é um estado *in* (*out*) e a (b) é a sequência de números quânticos que o caracterizam. O operador S é definido como $\langle b \text{ in} | S | a \text{ in} \rangle = \langle b \text{ out} | a \text{ in} \rangle$. Consequentemente, S é unitário e $\langle b \text{ in} | S | a \text{ in} \rangle = \langle b \text{ out} | S | a \text{ out} \rangle$. Para além disso, S é invariante sob as transformações de \mathcal{P} , isto é,

$$U^{-1}(\Lambda, a)SU(\Lambda, a) = U^{-1}(\mathcal{P})SU(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{T})SU(\mathcal{T}) = S \quad (1.44)$$

bem como relativamente à conjugação de carga e às transformações internas de simetria. A parte de S que depende das interacções, R , é definida por $R = S - 1$. A unitariedade de S implica que

$$\begin{aligned} \langle b \text{ in} | R | a \text{ in} \rangle + \langle a \text{ in} | R | b \text{ in} \rangle^* &= - \sum_c \langle b \text{ in} | R | c \text{ in} \rangle \langle a \text{ in} | R | c \text{ in} \rangle^* \\ &= - \sum_c \langle c \text{ in} | R | b \text{ in} \rangle^* \langle c \text{ in} | R | a \text{ in} \rangle. \end{aligned} \quad (1.45)$$

A eq. (1.45) origina o teorema óptico [7]. Observemos que se a energia total das partículas incidentes é menor do que a energia mínima necessária para a ocorrência de reacções inelásticas, no segundo membro da eq. (1.45) estão unicamente amplitudes de dispersão elástica.

A técnica de redução de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) exprime o elemento de matriz de S entre estados *in* (*out*) de partículas elementares em termos de uma função de Green [10, 14]. Por meio da propriedade de convergência, eq. (1.32), e das condições assumptóticas, o elemento de matriz de S entre estados *in* (*out*) ligados ou mistos (num estado *in* (*out*) misto há pelo menos uma partícula elementar e um estado ligado) também se relaciona com uma função de Green [9]. Vejamos o resultado da redução de LSZ quando uma colisão envolve apenas nucleões, deuterões e trinucleões. Entre as l' (l) partículas emergentes (incidentes) há l'_n (l_n) nucleões l'_d (l_d) deuterões e l'_t (l_t) trinucleões. Se qualquer partícula incidente é afectada pela colisão, a fórmula de redução é

$$\begin{aligned} \langle a'_1 \dots a'_{l'} \text{ in} | S | a_1 \dots a_l \text{ in} \rangle &= \frac{(-i)^{+l'_n + l'_d + l'_t + l_n + l_d + l_t}}{\sqrt{Z^{l'_n + 2l'_d + 3l'_t + l_n + 2l_d + 3l_t}}} \\ &\times \int dy'_1 \dots dy'_{l'} dy_1 \dots dy_l \bar{U}(y'_1 a'_1) \dots \bar{U}(y'_{l'} a'_{l'}) \overrightarrow{\mathcal{D}}_1 \dots \overrightarrow{\mathcal{D}}_{l'} \\ &\times \langle 0 | T \mathcal{F}(y'_1) \dots \mathcal{F}(y'_{l'}) \bar{\mathcal{F}}(y_1) \dots \bar{\mathcal{F}}(y_l) | 0 \rangle \overleftarrow{\mathcal{D}}_1 \dots \overleftarrow{\mathcal{D}}_l U(y_1 a_1) \dots U(y_l a_l), \end{aligned} \quad (1.46)$$

sendo $a'_{i'}$ (a_i) a sucessão dos números quânticos que caracterizam o estado da i' -ésima (i -ésima) partícula emergente (incidente) e Z a constante de renormalização de ψ . Consoante a i' -ésima (i -ésima) partícula emergente (incidente) é ou não um nucleão, o significado dos restantes elementos da fórmula é: $y'_{i'} = x'_{i'}$ ($y_i = x_i$) ou $y'_{i'} = (X'r'_1 \dots r'_{m'_{i'}})$ ($y_i = (Xr_1 \dots r_{m_i})$); $dy'_{i'} = d^4x'_{i'}$ ($dy_i = d^4x_i$) ou $dy'_{i'} = m'^4_{i'} d^4 X' d^4 r'_1 \dots d^4 r'_{m'_{i'}} \delta^4(r'_1 + \dots + r'_{m'_{i'}})$ ($dy_i = m^4_i d^4 X d^4 r_1 \dots d^4 r_{m_i} \delta^4(r_1 + \dots + r_{m_i})$); $\overrightarrow{D}_{i'} = i \overrightarrow{\partial}_{x'_{i'}} - M_n$ ($\overleftarrow{D}_i = -i \overleftarrow{\partial}_{x_i} - M_n$) ou $\overrightarrow{D}_{i'} = \square_{x'_{i'}} + M^2_{i'}$ ($\overleftarrow{D}_i = \square_{x_i} + M^2_i$); $\mathcal{F}(y'_{i'}) = \psi(x'_{i'})$ ($\bar{\mathcal{F}}(y_i) = \bar{\psi}(x_i)$) ou $\mathcal{F}(y'_{i'}) = T\psi(X' + r'_1) \dots \psi(X' + r'_{m'_{i'}})$ ($\bar{\mathcal{F}}(y_i) = T\bar{\psi}(X + r_1) \dots \bar{\psi}(X + r_{m_i})$).

O cálculo perturbativo de qualquer função de Green assenta na representação de interacção (RI) [15]. Sejam $H_0(t)$ e $H_I(t)$, respectivamente, os termos livre e de interacção de H na representação de Heisenberg (RH). Fixemos o instante zero como o momento em que RH e RI coincidem. Se $O(t)$ é um operador na RH, então, $O(t)$ na RI, $O^{ip}(t)$, é definido por $O^{ip}(t) = e^{iH_0(0)t} O(0) e^{-iH_0(0)t}$. Sendo $|v\rangle$ o vector representativo de um estado de \mathcal{S} na RH, o vector correspondente na RI, $|v\rangle^{ip}$, é dado por $|v\rangle^{ip} = U(t, 0)|v\rangle$, em que $U(t, 0) = e^{iH_0(0)t} e^{-iHt}$. O operador de evolução temporal na RI, $U(t, t')$, é definido por $U(t, t') = U(t, 0)U^{-1}(t', 0)$; satisfaz a equação

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt'' H_I^{ip}(t'') U(t'', t'), \quad (1.47)$$

cuja iteração ilimitada fornece a representação de $U(t, t')$ em série de potências do termo de interacção da densidade hamiltoniana na RI, $\mathcal{H}_I^{ip}(x)$:

$$U(t, t') = T \exp \left[-i \int_{t'}^t dx^0 \int d^3x \mathcal{H}_I^{ip}(x) \right]. \quad (1.48)$$

A relação entre o vácuo de H_0^{ip} , $|0\rangle$, e $|0\rangle$ é $c|0\rangle = U^{-1}(\pm\infty, 0)|0\rangle / (0|U^{-1}(\pm\infty, 0)|0)$, em que $|c|$ é determinado por $\langle 0|0\rangle = 1$ [15]. Uma fórmula apropriada ao cálculo perturbativo de $G^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$, é [15]

$$(2\pi)^4 \delta^4(P' - P) G^{(n)}(p'_1 \dots p'_n, p_1 \dots p_n) = \int \prod_{k=1}^3 d^4x'_k \prod_{j=1}^3 d^4x'_j e^{i(p'_1 x'_1 + \dots + p'_n x'_n - p_1 x_1 - \dots - p_n x_n)} \times \frac{(0|TU(\infty, -\infty)\psi^{ip}(x'_1) \dots \psi^{ip}(x'_n)\bar{\psi}^{ip}(x_1) \dots \bar{\psi}^{ip}(x_n)|0)}{(0|U(\infty, -\infty)|0)}. \quad (1.49)$$

Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ os campos de \mathcal{S} na RH. A evolução temporal de φ_i^{ip} é dada por

$$\varphi_i^{ip}(x) = e^{iH_0(0)t} \varphi_i^{ip}((0, x)) e^{-iH_0(0)t}. \quad (1.50)$$

Como $H_0(\varphi_1(0) \dots \varphi_n(0)) = H_0(\varphi_1^{ip}(0) \dots \varphi_n^{ip}(0))$, os campos $\varphi_1^{ip}, \dots, \varphi_n^{ip}$ são livres e portanto a respectiva dependência temporal é trivial. As regras de Feynman para o

cálculo expedito de d , D e G emergem da eq. (1.49) pela aplicação do teorema de Wick [14]. Os propagadores de um corpo e os vértices de interacção, ambos completos, são os elementos dos diagramas de Feynman de D e G . Esses diagramas têm a simetria de troca.

Por causa da indistinguibilidade dos nucleões há quantidades que são relacionadas pela troca dos momentos e índices. Existem também quantidades anti-simétricas. Introduzem-se, por isso, os operadores de permutação P_{12} , P_{13} , P_{23} assim como os operadores de anti-simetrização de dois e três corpos, respectivamente, \mathcal{A}_2 e \mathcal{A}_3 . Estes últimos são definidos por

$$\mathcal{A}_2 = 1 - P_{12}, \quad \mathcal{A}_3 = 1 - P_{12} - P_{13} - P_{23} + P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23}. \quad (1.51)$$

As componentes mais simples dos desenvolvimentos pertubativos de G , D são $\mathcal{A}_3 G_0$, $\mathcal{A}_2 D_0$ respectivamente, sendo G_0 , D_0 as funções de Green desconexas determinadas por

$$G_0^{(n)}(p'_1 \dots p'_n, p_1 \dots p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p_1) \dots (2\pi)^4 \delta^4(p'_{n-1} - p_{n-1}) d(p_1) \dots d(p_n), \quad (1.52)$$

em que $n = 2, 3$, $D_0 = G_0^{(2)}$, $G_0 = G_0^{(3)}$.

Em virtude dos operadores diferenciais na eq. (1.46) o elemento da matriz de S respeitante à dispersão elástica de dois (três) nucleões é expresso em termos da amplitude de dispersão elástica de dois (três) corpos, $T(t)$; T e t são definidos como

$$T^{(n)} = G_0^{(n)-1} (G^{(n)} - \mathcal{A}_n G_0^{(n)}) G_0^{(n)-1}, \quad (1.53)$$

em que $n = 2, 3$, $t = T^{(2)}$, $T = T^{(3)}$. T e t possuem naturalmente a simetria de troca.

1.2 Equações de BS, Faddeev e AGS

Com o propósito de dispor em classes os diagramas de T e t de maneira a encontrar, para cada uma dessas amplitudes, uma equação integral cuja solução é, por hipótese, a amplitude de dispersão, principiemos por definir alguns géneros de diagramas que serão utilizados nessa classificação. Um diagrama de T é desconexo se tem uma linha externa separada do resto do diagrama e é conexo no caso oposto. Um diagrama de T é redutível se são cumpridas as seguintes condições: (a) existe uma curva contínua que intersecta exactamente três linhas do diagrama separando os estados final e inicial; (b) essas linhas são intersectadas uma única vez; (c) as três linhas são internas ou duas dessas linhas são internas e a outra é externa; (d) as linhas internas representam os propagadores

completos dos nucleões num estado intermédio. A definição de redutibilidade de um diagrama conexo de T é quase decalcada da de um diagrama de t [15, 16]: a diferença é a intersecção de três linhas pela curva contínua em vez de duas. Um diagrama de T ou t é irreduzível se não é redutível.

Devido à regra de Feynman de anti-simetriação relativamente aos momentos e índices do estado final, se \mathcal{D} é um diagrama de T , então, existe \mathcal{D}' tal que $\mathcal{D} = \mathcal{A}_3 \mathcal{D}'$; por causa da identidade dos nucleões $\mathcal{D}' = P_{ij} \mathcal{D}' P_{ij}$. Segue-se uma caracterização dos diagramas redutíveis de T : um diagrama \mathcal{D} de T é redutível se, e somente se, existem $n \geq 2$ e $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ tais que $\mathcal{D} = \mathcal{A}_3 \mathcal{D}_1 G_0 \mathcal{D}_2 \cdots G_0 \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_1 = P_{ij} \mathcal{D}_1 P_{ij}, \dots, \mathcal{D}_n = P_{ij} \mathcal{D}_n P_{ij}$ e $\mathcal{A}_3 \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{A}_3 \mathcal{D}_n$ são diagramas irreduzíveis de T ; nesse caso dizemos que \mathcal{D} contém n subdiagramas irreduzíveis e $\mathcal{D} = (1/6)^{n-1} (\mathcal{A}_3 \mathcal{D}_1) G_0 (\mathcal{A}_3 \mathcal{D}_2) \cdots G_0 (\mathcal{A}_3 \mathcal{D}_n)$. Há obviamente uma caracterização parecida dos diagramas redutíveis de t . Os diagramas de T (t) são distribuídos pela classe dos diagramas irreduzíveis e para cada $n \geq 2$ pela classe dos diagramas redutíveis com n subdiagramas irreduzíveis. Os diagramas irreduzíveis de T são separados nas subclasses de diagramas conexos e desconexos. Há três tipos de diagrama irreduzível e desconexo de T : para cada $i = 1, 2, 3$ os diagramas do género $\mathcal{A}_3 a_i d_i^{-1}$, sendo $(a_i d_i^{-1})(p'_1 p'_2 p'_3, p_1 p_2 p_3) = a(p'_j p'_k, p_j p_k) d^{-1}(p_i) (2\pi)^4 \delta^4(p'_i - p_i)$, $a = P_{ij} a P_{ij}$, $(1 - P_{ij})a$ um diagrama irreduzível de t , (ijk) uma permutação cíclica de (123) ; reparemos que $\mathcal{A}_3 a_i d_i^{-1} = (1/2) \mathcal{A}_3 (1 - P_{jk}) a_i d_i^{-1}$.

Por definição o potencial desconexo de três corpos, K_d , é a soma dos diagramas irreduzíveis e desconexos de T e o potencial de dois corpos, v , é soma dos diagramas irreduzíveis de t . Pelo que dissemos K_d e v possuem a simetria de troca, K_d exprime-se em termos de v como [17, 18]

$$K_d = (1/2) \mathcal{A}_3 (V_1 + V_2 + V_3), \quad (1.54)$$

em que

$$V_i = v_i d_i^{-1}, \quad (1.55)$$

e V_1, V_2, V_3 têm as propriedades de simetria

$$P_{jk} V_i = V_i P_{jk} = -V_i, \quad P_{ij} V_i P_{ij} = V_j, \quad (1.56)$$

sendo i, j, k distintos. O potencial conexo de três corpos, K_c , é a soma dos diagramas irreduzíveis e conexos de T . K_c tem a simetria de troca. O potencial de três corpos, isto é, a soma dos diagramas irreduzíveis de T , K , é $K_c + K_d$. Da caracterização dos diagramas redutíveis de T resulta que a soma dos que têm $n \geq 2$ subdiagramas irreduzíveis é $(1/6)^{n-1} (KG_0)^{n-1} K$. Finalmente, a soma de todos os diagramas de T é

$$K + (1/6) KG_0 K + (1/6)^2 KG_0 KG_0 K + \dots \quad (1.57)$$

Na região de convergência da série dos diagramas irredutíveis, conjectura-se que T é uma solução das equações [17]

$$T = K + (1/6)KG_0T, \quad T = K + (1/6)TG_0K, \quad (1.58)$$

porque a série de Born (1.57) é produzida pela iteração ilimitada de qualquer dessas equações. A simetria de troca da solução é uma consequência da mesma propriedade de K .

Definindo V por [17, 18]

$$V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2 + V_3) + \frac{1}{6}K_c \quad (1.59)$$

e partindo das eqs. (1.58), mostra-se que T é uma solução de [17]

$$T = \mathcal{A}_3V + VG_0T, \quad T = \mathcal{A}_3V + TG_0V; \quad (1.60)$$

depois, pela eq. (1.53), conclui-se que G é uma solução de [17, 18]

$$G = \mathcal{A}_3G_0 + G_0VG, \quad G = \mathcal{A}_3G_0 + GVG_0. \quad (1.61)$$

A eq. (1.60) ((1.61)) é designada por equação não homogénea de BS (NHBS) de T (G). Estabelecem-se de modo análogo as equações NHBS de t e D [17, 18]:

$$t = v + \frac{1}{2}vD_0t, \quad t = v + \frac{1}{2}tD_0v, \quad (1.62)$$

$$D = \mathcal{A}_2D_0 + \frac{1}{2}D_0vD, \quad D = \mathcal{A}_2D_0 + \frac{1}{2}DvD_0. \quad (1.63)$$

Doravante as forças de três corpos serão desprezadas, ou seja, $K_c = 0$.

No que respeita ao cálculo numérico de T , em vez da eq. (1.60) é preferível utilizar-se a equação quadridimensional de Faddeev [17] ou a de Alt-Grassberger-Sandhas (AGS) [18]. As equações de Faddeev e AGS são expressas em termos de t ao passo que a eq. (1.60) é expressa em termos de v . t tem a vantagem de ser uma função de variação mais suave do que a de v .

Em primeiro lugar é apresentada a equação quadridimensional de Faddeev [17]. As três componentes de Faddeev de T são denotadas por $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ e definidas, por exemplo, por

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{A}_3\frac{1}{2}V_i + TG_0\frac{1}{2}V_i. \quad (1.64)$$

T decompõe-se como $T = \sum_i \mathcal{T}_i$. Da simetria de troca de T e das eqs. (1.56), (1.64) resultam as propriedades de simetria

$$\mathcal{T}_i = -P_{jk}\mathcal{T}_i = -\mathcal{T}_i P_{jk}, \quad \mathcal{T}_j = -\mathcal{T}_i P_{ij}, \quad \mathcal{T}_i = -P_{ij}\mathcal{T}_i, \quad (1.65)$$

sendo i, j, k distintos. A fim de compactar a notação são definidas as quantidades T_1, T_2, T_3 por

$$T_i = t_i d_i^{-1}. \quad (1.66)$$

É claro que

$$T_i = V_i + \frac{1}{2} V_i G_0 T_i, \quad T_i = V_i + \frac{1}{2} T_i G_0 V_i, \quad (1.67)$$

$$P_{jk} T_i = T_i P_{jk} = -T_i, \quad P_{ij} T_i P_{ij} = T_j, \quad (1.68)$$

sendo i, j, k novamente distintos. Como $(1 - G_0 \frac{1}{2} V_i)^{-1} = 1 + \frac{1}{2} G_0 T_i$, da eq. (1.64) tira-se que

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{A}_3 \frac{1}{2} T_i + \frac{1}{2} \sum_j \mathcal{T}_j \bar{\delta}_{ij} G_0 T_i, \quad (1.69)$$

em que $\bar{\delta}_{ij} = 1 - \delta_{ij}$. Empregando as propriedades (1.65) na eq. (1.69), esta última é reduzida à equação de Faddeev

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{A}_3 \frac{1}{2} T_i - \mathcal{T}_i P_{ij} G_0 T_i. \quad (1.70)$$

Em virtude da segunda das eqs. (1.65) pode-se exprimir T em termos de \mathcal{T}_1 como

$$T = \mathcal{T}_1 (1 - P_{12} - P_{13}). \quad (1.71)$$

Resolvem-se numericamente apenas, por exemplo, as equações

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{A}_3 \frac{1}{2} T_1 - \mathcal{T}_1 P_{12} G_0 T_1, \quad (1.72)$$

$$\frac{1}{6} \mathcal{A}_3 \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1. \quad (1.73)$$

É desnecessário impor-se a condição $\mathcal{T}_1 P_{23} = -\mathcal{T}_1$ às eqs. (1.72), (1.73) dado que é satisfeita por qualquer solução dessas equações.

A seguir, é exposta a variante quadridimensional para fermões indistinguíveis [18] das equações tridimensionais de AGS [19, 20] que descrevem a colisão de três partículas no âmbito da mecânica quântica e foram resolvidas no espaço dos momentos para o sistema de três nucleões [21, 22]. A equação quadridimensional de AGS baseia-se na observação de que o termo não anti-simetrizado de ordem n da série de Born das eqs. (1.60) pode ser escrito como

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i_1 \dots i_n} V_{i_1} G_0 \dots V_{i_{n-1}} G_0 V_{i_n} = \frac{1}{2} \sum_{i_1} T_{i_1}^{(n)} + \frac{1}{2^2} \sum_{i_1 i_2} \sum_{\substack{l_1 l_2 \\ l_1 + l_2 = n}} T_{i_1}^{(l_1)} \bar{\delta}_{i_1 i_2} G_0 T_{i_2}^{(l_2)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^n} \sum_{i_1 \dots i_n} T_{i_1}^{(1)} \bar{\delta}_{i_1 i_2} G_0 \cdots T_{i_{n-1}}^{(1)} \bar{\delta}_{i_{n-1} i_n} G_0 T_{i_n}^{(1)}, \quad (1.74)$$

sendo $T_i^{(j)}$ o termo de ordem j da série de Born de qualquer das eqs. (1.67). Assim, os termos da série de Born das eqs. (1.60) são rearranjados como

$$\mathcal{A}_3 \left[\frac{1}{2} \sum_i T_i + \frac{1}{2^2} \sum_{ij} T_i \bar{\delta}_{ij} G_0 T_j + \frac{1}{2^3} \sum_{ijk} T_i \bar{\delta}_{ij} G_0 T_j \bar{\delta}_{jk} G_0 T_k + \cdots \right]. \quad (1.75)$$

A parte da série (1.75) constituída pelos termos conexos (o segundo e os seguintes) fica

$$P_c T_1 (G_0 - G_0 P_{12} T_1 G_0 + G_0 P_{12} T_1 G_0 P_{12} T_1 G_0 - \cdots) T_2 P_c, \quad (1.76)$$

em que P_c é o operador que soma as permutações cíclicas:

$$P_c = 1 + P_{12} P_{13} + P_{13} P_{12}. \quad (1.77)$$

Entre os parêntesis da eq. (1.76) está a série de Born das equações de AGS

$$\tilde{Z} = G_0 - G_0 P_{12} T_1 \tilde{Z}, \quad \tilde{Z} = G_0 - \tilde{Z} P_{12} T_1 G_0. \quad (1.78)$$

Uma vez determinada a amplitude de AGS, \tilde{Z} , obtém-se T por

$$T = P_c T_1 P_c + P_c T_1 \tilde{Z} P_{12} T_1 (P_{12} + P_{13} + P_{23}). \quad (1.79)$$

Lançando mão do equivalente de $G^{(n_l)}$ na vizinhança de $P^0 = P_l^0 - i\epsilon$, eq. (1.23), das equações NHBS (1.61), (1.63) e da propriedade de ortogonalidade

$$\int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 q_{n_l}}{(2\pi)^4} \delta^4(q_1 + \cdots + q_{n_l}) \bar{\Psi}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \Psi(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda'_l \tau'_l) = 0, \quad (1.80)$$

em que $l = d, t$, $\lambda'_l \neq \lambda_l$ e/ou $\tau'_l \neq \tau_l$, mostra-se que as funções de onda satisfazem as equações homogéneas de BS (HBS) [18]

$$\Psi(P_l \lambda_l \tau_l) = c^{(n_l)} G_0^{(n_l)} V^{(n_l)} \Psi(P_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.81)$$

$$\bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l) = c^{(n_l)} \bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l) V^{(n_l)} G_0^{(n_l)}, \quad (1.82)$$

em que $c^{(2)} = 1/2$, $c^{(3)} = 1$, $V^{(2)} = v$, $V^{(3)} = V$. Qualquer solução da equação HBS do deuterão é anti-simétrica visto que v tem a simetria de troca. Em vez das funções de onda $\Psi(P_l \lambda_l \tau_l)$, $\bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l)$ podem-se utilizar as funções de vértice $\Phi(P_l \lambda_l \tau_l)$, $\bar{\Phi}(P_l \lambda_l \tau_l)$. A relação entre esses objectos é $\Psi(P_l \lambda_l \tau_l) = G_0^{(n_l)} \Phi(P_l \lambda_l \tau_l)$, $\bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l) = \bar{\Phi}(P_l \lambda_l \tau_l) G_0^{(n_l)}$ [18]. As equações HBS que determinam $\Phi(P_l \lambda_l \tau_l)$, $\bar{\Phi}(P_l \lambda_l \tau_l)$ são óbvias.

Cada equação HBS é complementada por uma condição de normalização [18]. Recorrendo à identidade $G^{(n_l)}(G_0^{(n_l)-1} - c^{(n_l)}V^{(n_l)})G^{(n_l)} = n_l!G^{(n_l)}$ [18] e à eq. (1.23), encontra-se

$$\lim_{P^0 \rightarrow P_l^0} \frac{i\bar{\Psi}(P_l\lambda_l\tau_l)(G_0^{(n_l)-1} - c^{(n_l)}V^{(n_l)})\Psi(P_l\lambda_l\tau_l)}{(P^0 - P_l^0)2P_l^0} = n_l!. \quad (1.83)$$

O numerador é uma função de P^2 porque é invariante com respeito às transformações homogéneas de Lorentz. Segue-se disso e das eqs. (1.81), (1.82) a condição de normalização

$$i\frac{d}{dP^2}[\bar{\Psi}(P_l\lambda_l\tau_l)(G_0^{(n_l)-1} - c^{(n_l)}V^{(n_l)})\Psi(P_l\lambda_l\tau_l)]_{P^2=M_l^2} = n_l!. \quad (1.84)$$

A condição de normalização prática decorre das eqs. (1.81), (1.82), (1.84) e

$$\left(\frac{\partial G_0^{(n_l)-1}}{\partial P^\mu}\right)_{P=P_l} = -G_0^{(n_l)-1} \left(\frac{\partial G_0^{(n_l)}}{\partial P^\mu}\right)_{P=P_l} G_0^{(n_l)-1}, \quad (1.85)$$

sendo

$$i\bar{\Psi}(P_l\lambda_l\tau_l) \left[-G_0^{(n_l)-1} \left(\frac{\partial G_0^{(n_l)}}{\partial P^\mu}\right)_{P=P_l} G_0^{(n_l)-1} - c^{(n_l)} \left(\frac{\partial V^{(n_l)}}{\partial P^\mu}\right)_{P=P_l} \right] \Psi(P_l\lambda_l\tau_l) = n_l!2P_{l\mu}. \quad (1.86)$$

Tal como se fez com a amplitude de dispersão T introduzem-se as componentes de Faddeev de $\Psi(P_t\lambda_t\tau_t)$ denotadas por $\Psi_i(P_t\lambda_t\tau_t)$, $i = 1, 2, 3$, e definidas como [18]

$$\Psi_i(P_t\lambda_t\tau_t) = \frac{1}{2}G_0V_i\Psi(P_t\lambda_t\tau_t). \quad (1.87)$$

Têm lugar as propriedades de simetria

$$P_{ij}\Psi_k(P_t\lambda_t\tau_t) = -\Psi_k(P_t\lambda_t\tau_t), \quad P_{ij}\Psi_j(P_t\lambda_t\tau_t) = -\Psi_i(P_t\lambda_t\tau_t), \quad (1.88)$$

em que i, j, k são distintos entre si. A função de onda é decomposta como

$$\Psi(P_t\lambda_t\tau_t) = \Psi_1(P_t\lambda_t\tau_t) + \Psi_2(P_t\lambda_t\tau_t) + \Psi_3(P_t\lambda_t\tau_t). \quad (1.89)$$

Utilizando a identidade $(1 - 1/2G_0V_i)^{-1} = 1 + 1/2G_0T_i$ na eq. (1.87) com $\Psi(P_t\lambda_t\tau_t)$ expresso nas componentes de Faddeev, obtém-se a equação

$$\Psi_i(P_t\lambda_t\tau_t) = \frac{1}{2}G_0T_i \sum_{j \neq i} \Psi_j(P_t\lambda_t\tau_t), \quad (1.90)$$

a qual após o emprego das propriedades (1.88) se reduz à equação de Faddeev

$$\Psi_i(P_t\lambda_t\tau_t) = -G_0T_iP_{ij}\Psi_j(P_t\lambda_t\tau_t). \quad (1.91)$$



Devido às eqs. (1.88) a função de onda é dada em termos de $\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$ por

$$\Psi(P_t \lambda_t \tau_t) = (1 - P_{12} - P_{13})\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t). \quad (1.92)$$

Resolve-se numericamente somente, por exemplo, a equação de Faddeev

$$\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t) = -G_0 T_1 P_{12} \Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t). \quad (1.93)$$

É dispensável impor-se a condição $P_{23}\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t) = -\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$ à eq. (1.93), visto que é cumprida por qualquer solução dessa equação. Para a função de onda conjugada, $\bar{\Psi}(P_t \lambda_t \tau_t)$, e as respectivas componentes de Faddeev, $\bar{\Psi}_i(P_t \lambda_t \tau_t)$, $i = 1, 2, 3$, obtém-se analogamente

$$\bar{\Psi}_k(P_t \lambda_t \tau_t) P_{ij} = -\bar{\Psi}_k(P_t \lambda_t \tau_t), \quad \bar{\Psi}_j(P_t \lambda_t \tau_t) P_{ij} = -\bar{\Psi}_i(P_t \lambda_t \tau_t), \quad (1.94)$$

$$\bar{\Psi}_i(P_t \lambda_t \tau_t) = -\bar{\Psi}_i(P_t \lambda_t \tau_t) P_{ij} T_i G_0, \quad (1.95)$$

$$\bar{\Psi}(P_t \lambda_t \tau_t) = \bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t)(1 - P_{12} - P_{13}). \quad (1.96)$$

É dispensável a resolução numérica da eq. (1.82) com $l = d$ e de qualquer das eqs. (1.95). Uma vez determinados $\Psi(P_d \lambda_d \tau_d)$ e $\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$, $\bar{\Psi}(P_d \lambda_d \tau_d)$ é dado pela relação (1.237) com $l = d$ e $\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t)$ é dado pela relação (1.237) com $l = t$ e $\bar{\Psi}(P_t \lambda_t \tau_t)$, $\Psi(P_t \lambda_t \tau_t)$ substituídos, respectivamente, por $\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t)$, $\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$.

Há uma condição de normalização das funções de onda conjugadas do trinúcleo expressa em termos de t , $\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$, $\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t)$ [18]. Analisando o lado direito da eq. (1.79) e sabendo que T tem um pôlo em $P^0 = P_t^0 - i\epsilon$, conclui-se que \tilde{Z} tem também a mesma singularidade. Demonstra-se que na vizinhança de $P^0 = P_t^0 - i\epsilon$ [18]

$$\tilde{Z}(p'_1 p'_2 p'_3, p_1 p_2 p_3) \sim \frac{i \sum_{\lambda_t \tau_t} \Psi_2(q'_1 q'_2 q'_3 P_t \lambda_t \tau_t) \bar{\Psi}_1(q_1 q_2 q_3 P_t \lambda_t \tau_t)}{2P_t^0(P^0 - P_t^0 + i\epsilon)}. \quad (1.97)$$

Empregando a identidade $\tilde{Z}(G_0^{-1} + T_2 P_{12}) \tilde{Z} = \tilde{Z}$ resultante de $\tilde{Z}^{-1} = G_0^{-1} + T_2 P_{12}$ [18] e a eq. (1.97), encontra-se a condição de normalização pretendida

$$i\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t) \left[-G_0^{-1} \left(\frac{\partial G_0}{\partial P^\mu} \right)_{P=P_t} P_{12} G_0^{-1} + P_{12} \left(\frac{\partial T_1}{\partial P^\mu} \right)_{P=P_t} P_{12} \right] \Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t) = -2P_{t\mu}. \quad (1.98)$$

Partindo da eq. (1.98) e recorrendo às eqs. (1.67), (1.93), (1.95) com $i = 1$ e $j = 2$, obtém-se a condição de normalização expressa em termos de v , $\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$, $\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t)$:

$$i\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t) \left[G_0^{-1} \left(\frac{\partial G_0}{\partial P^\mu} \right)_{P=P_t} \left(\frac{1}{2} - P_{12} \right) G_0^{-1} + \left(\frac{1}{2} - P_{12} \right) \left(\frac{\partial V_1}{\partial P^\mu} \right)_{P=P_t} \left(\frac{1}{2} - P_{12} \right) \right] \\ \times \Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t) = -2P_{t\mu}. \quad (1.99)$$

O *kernel* v é composto por infinitos diagramas irreduzíveis. Em geral não é possível somar-se a totalidade desses diagramas. O *kernel* é pois calculado perturbativamente. No cálculo de ordem mais baixa mantém-se em v somente os diagramas de troca de um bosão designados também por diagramas *one-boson-exchange* (OBE); essa aproximação chama-se aproximação OBE; os diagramas das séries de Born das equações NHBS de t e T correspondentes designam-se por diagramas *ladder*.

Na ref. [17] obtém-se equações relativistas acopladas que determinam as amplitudes de dispersão das reacções elásticas entre dois e três bosões e da reacção $2 \rightarrow 3$ quando os bosões são descritos por um campo escalar real sujeito a uma auto-interacção cúbica. Se as forças de três corpos são desprezadas, essas equações fornecem um método de cálculo do *kernel* completo da equação NHBS de dois corpos. Pode-se aplicar a estratégia utilizada em [17] a outros tipos de interacção. Porém, mesmo na ausência de forças de três corpos esse método não fornece uma alternativa mais simples ao cálculo perturbativo do *kernel* de dois corpos, visto que exige a resolução de um sistema de equações integrais mais complicado.

Nas aplicações do formalismo de BS é frequente: (a) a introdução de factores de forma fenomenológicos nos vértices de interacção; (b) a não inclusão das auto-energias e correcções aos vértices; (c) a substituição dos propagadores de um corpo pelos respectivos propagadores livres com as massas físicas. Os factores de forma têm de ser invariantes sob as transformações de simetria. Para além disso são sujeitos à condição de convergência dos integrais nas equações de BS e das técnicas de resolução numérica dessas equações como, por exemplo, a iteração da equação NHBS de dois corpos e soma da série correspondente pelo método de Padé [23, 24, 25, 26, 27]. Os factores de forma devem, para isso, decair para zero com uma taxa de variação suficientemente grande quando o momento tende para infinito. Se a interacção não é renormalizável, ou seja, se é necessário adicionar infinitos contra-termos à densidade lagrangeana a fim de eliminar as singularidades, a presença dos factores de forma é imprescindível para a convergência dos integrais. Se a densidade lagrangeana é renormalizável, a introdução dos factores de forma evita a remoção das singularidades por renormalização e, assim, o modelo das interacções é mais simples.

Um exemplo de aplicação do formalismo de BS encontra-se na física nuclear de poucos corpos. No intervalo de energias pequenas a intensidade elevada da interacção forte impede o tratamento perturbativo mais simples segundo o qual a amplitude de dispersão elástica de dois nucleões é representada por um número finito de diagramas. Esta dificuldade pode ser superada pelo emprego da equação NHBS de dois corpos na concepção de modelos OBE relativistas da interacção NN naquele intervalo. Até energias

pequenas a componente de longo alcance da interacção nuclear é a mais efectiva. A interacção nuclear é descrita satisfatoriamente na região de longo alcance pela troca de um pião entre os nucleões [28]. Incluem-se as trocas de outros mesões leves para descrever as componentes de alcance curto e intermédio da força nuclear. Os valores dos parâmetros do modelo são ajustados a dados experimentais da dispersão elástica NN a energias inferiores à energia mínima para a produção de um pião (a energia cinética mínima no referencial do laboratório para a produção de um pião é de 290 MeV aproximadamente). O formalismo de BS na aproximação OBE foi aplicado na construção de modelos OBE da interacção NN e do deuterão [25, 26, 27, 29].

A resolução das equações de BS é dificultada pelas singularidades do *kernel* e dos propagadores de um corpo. As singularidades situam-se no plano complexo da variável de energia relativa e têm uma parte imaginária infinitesimal. A rotação de Wick [30] origina uma equação integral para a restrição ao eixo imaginário do prolongamento analítico com respeito à energia relativa da amplitude de dispersão ou da função de vértice [25, 26, 27, 29]. Os elementos da equação não têm nenhuma singularidade no eixo imaginário. As observáveis são também objecto de uma rotação de Wick [29].

Uma dificuldade adicional na resolução numérica de uma equação de BS é o número considerável de integrações: nas equações de BS de dois e três corpos há quatro integrações. A baixas energias uma maneira de ultrapassar esse obstáculo é exprimir as equações numa base de estados de momento angular e helicidade [31]. Desse modo o número de integrações é reduzido e bastam poucas ondas parciais para se atingir a estabilidade da solução da equação.

Uma insuficiência do formalismo de BS na aproximação OBE é a falta da propriedade de *one-body limit* [32, 33]: dadas duas partículas que interagem entre si, quando a massa de uma delas tende para infinito essa partícula não é influenciada pela partícula com massa finita e esta é descrita pela solução de uma equação de um corpo com um potencial. Essa equação depende da natureza da partícula com massa finita: por exemplo, a partícula é descrita pela equação de Dirac se tem spin 1/2. Pode-se confirmar a inexistência da propriedade de *one-body limit* na aproximação OBE, por exemplo, no modelo de Wick-Cutkosky do estado ligado de duas partículas escalares que interagem através da troca de um bosão escalar com massa nula [34]. A equação HBS com o *kernel* igual à série completa dos diagramas OBE e *crossed ladder* irreductíveis tem o limite correcto de um corpo [33].

O formalismo de BS na aproximação OBE foi empregado no cálculo da função de onda e da energia de ligação do trinúcleo utilizando um *kernel* separável [35, 36].

1.3 Demonstração de que na TQRC as funções de onda conjugadas do deuterão e trinucleão não são relacionadas pela conjugação de Dirac

Há quantidades cujo cálculo requer o par de funções de onda conjugadas de um estado ligado. Um exemplo de tal quantidade é a corrente electromagnética de um estado ligado.

Nas refs. [37, 38, 39, 40, 41] são calculadas observáveis electromagnéticas do deuterão. Nessas referências as funções de onda relativas conjugadas no espaço dos momentos relativos do deuterão são sem demonstração relacionadas pela conjugação de Dirac. Supondo que na TQRC as funções de onda relativas conjugadas no espaço dos momentos relativos do deuterão e trinucleão são ligadas pela conjugação de Dirac, passaremos a mostrar que as funções de onda conjugadas no espaço das coordenadas são também relacionadas pela conjugação de Dirac, isto é,

$$\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = \Psi_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}^*(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}}^0, \quad (1.100)$$

sendo $l = d, t$ e as funções de onda conjugadas no espaço das coordenadas definidas por

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_{n_l}}(x_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle, \quad (1.101)$$

$$\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = \langle P_l \lambda_l \tau_l | T \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_{n_l}}(x_{n_l}) | 0 \rangle. \quad (1.102)$$

Sejam X, r_1, \dots, r_{n_l} tais que $X = (x_1 + \dots + x_{n_l})/n_l$, $r_i = x_i - X$, $i = 1, \dots, n_l$; recorrendo às leis de transformação de $\psi, \bar{\psi}$ com respeito às translações no espaço-tempo, ou seja,

$$\psi_\alpha(x + a) = e^{iP_x} \psi_\alpha(a) e^{-iP_x}, \quad (1.103)$$

$$\bar{\psi}_\alpha(x + a) = e^{iP_x} \bar{\psi}_\alpha(a) e^{-iP_x}, \quad (1.104)$$

podemos escrever

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = e^{-iP_l X} \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(r_1) \dots \psi_{\alpha_{n_l}}(r_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle, \quad (1.105)$$

$$\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = e^{iP_l X} \langle P_l \lambda_l \tau_l | T \bar{\psi}_{\alpha_1}(r_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_{n_l}}(r_{n_l}) | 0 \rangle. \quad (1.106)$$

Os elementos de matriz nos segundos membros das eqs. (1.105), (1.106) são as funções de onda relativas conjugadas no espaço das coordenadas relativas. Relacionam-se com as suas homólogas no espaço dos momentos relativos segundo

$$\langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(r_1) \dots \psi_{\alpha_{n_l}}(r_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{4(n_l-1)}} \int d^4 q_1 \dots d^4 q_{n_l-1} e^{-i(q_1 r_1 + \dots + q_{n_l} r_{n_l})}$$

$$\times \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.107)$$

$$\langle P_l \lambda_l \tau_l | T \bar{\psi}_{\alpha_1}(r_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_{n_l}}(r_{n_l}) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{4(n_l-1)}} \int d^4 q_1 \dots d^4 q_{n_l-1} e^{i(q_1 r_1 + \dots + q_{n_l} r_{n_l})} \\ \times \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l). \quad (1.108)$$

Por hipótese

$$\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = \bar{\Psi}_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}^*(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}}^0. \quad (1.109)$$

Assim,

$$\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = e^{i P_l X} \frac{1}{(2\pi)^{4(n_l-1)}} \int d^4 q_1 \dots d^4 q_{n_l-1} e^{i(q_1 r_1 + \dots + q_{n_l} r_{n_l})} \\ \times \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \\ = e^{i P_l X} \frac{1}{(2\pi)^{4(n_l-1)}} \int d^4 q_1 \dots d^4 q_{n_l-1} e^{i(q_1 r_1 + \dots + q_{n_l} r_{n_l})} \\ \times \bar{\Psi}_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}^*(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}}^0 \\ = \left[e^{-i P_l X} \frac{1}{(2\pi)^{4(n_l-1)}} \int d^4 q_1 \dots d^4 q_{n_l-1} e^{-i(q_1 r_1 + \dots + q_{n_l} r_{n_l})} \right]^* \\ \times \bar{\Psi}_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}}^0 \\ = \bar{\Psi}_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}^*(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}}^0, \quad (1.110)$$

como queríamos demostrar. Poderíamos deduzir também a relação (1.109) conjecturando (1.100).

Pode-se tentar sustentar a relação (1.109) com os seguintes dois argumentos (possivelmente habituais): (a) implementada a conjugação de Dirac, qualquer quantidade dependente de $\bar{\Psi}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l)$, $\Psi(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l)$, $l = d, t$, transforma-se correctamente sob as transformações de simetria do sistema; (b) as funções de onda conjugadas do nucleão obtêm-se correctamente uma da outra pela conjugação de Dirac, sendo, por isso, admissível que a conjugação de Dirac ligue também as funções de onda conjugadas do deuterão e do trinucleão. Contudo, a relação (1.100), a qual, como vimos, é uma consequência da relação (1.109), implica, conforme mostraremos nesta secção, que as funções de onda relativas conjugadas no espaço das coordenadas relativas do deuterão e do trinucleão são identicamente nulas, do que se conclui juntamente com as eqs. (1.105), (1.106) que as funções de onda conjugadas no espaço das coordenadas são identicamente nulas. Este último facto e as eqs. (1.24), (1.25) acarretam que as funções de onda relativas conjugadas no espaço dos momentos relativos são identicamente nulas. Uma hipótese da TQRC é que o deuterão e o trinucleão são descritos pelas respectivas funções

de onda conjugadas. Uma implicação dessa hipótese é que as funções de onda conjugadas desses núcleos não são identicamente nulas. Consequentemente, as relações (1.100) e (1.109) são rejeitadas.

A função de onda $\bar{\Psi}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l)$, $l = d, t$, pode ser expressa como [15, 42, 43]

$$\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = \langle 0 | \bar{T} \psi_{\beta_1}(x_1) \dots \psi_{\beta_{n_l}}(x_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle^* \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}}^0, \quad (1.111)$$

em que o produto anticronológico, \bar{T} , é definido por

$$\bar{T} \psi_{\beta_1}(x_1) \psi_{\beta_2}(x_2) = \theta(x_1^0 - x_2^0) \psi_{\beta_2}(x_2) \psi_{\beta_1}(x_1) - \theta(x_2^0 - x_1^0) \psi_{\beta_1}(x_1) \psi_{\beta_2}(x_2), \quad (1.112)$$

$$\begin{aligned} \bar{T} \psi_{\beta_1}(x_1) \psi_{\beta_2}(x_2) \psi_{\beta_3}(x_3) &= \theta(x_1^0 - x_2^0) \theta(x_2^0 - x_3^0) \psi_{\beta_3}(x_3) \psi_{\beta_2}(x_2) \psi_{\beta_1}(x_1) \\ &\quad - \theta(x_1^0 - x_3^0) \theta(x_3^0 - x_2^0) \psi_{\beta_2}(x_2) \psi_{\beta_3}(x_3) \psi_{\beta_1}(x_1) \\ &\quad - \theta(x_2^0 - x_1^0) \theta(x_1^0 - x_3^0) \psi_{\beta_3}(x_3) \psi_{\beta_1}(x_1) \psi_{\beta_2}(x_2) \\ &\quad - \theta(x_3^0 - x_2^0) \theta(x_2^0 - x_1^0) \psi_{\beta_1}(x_1) \psi_{\beta_2}(x_2) \psi_{\beta_3}(x_3) \\ &\quad + \theta(x_2^0 - x_3^0) \theta(x_3^0 - x_1^0) \psi_{\beta_1}(x_1) \psi_{\beta_3}(x_3) \psi_{\beta_2}(x_2) \\ &\quad + \theta(x_3^0 - x_1^0) \theta(x_1^0 - x_2^0) \psi_{\beta_2}(x_2) \psi_{\beta_1}(x_1) \psi_{\beta_3}(x_3). \end{aligned} \quad (1.113)$$

Aceitando como verdadeira a relação

$$\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) = \langle 0 | T \psi_{\beta_1}(x_1) \dots \psi_{\beta_{n_l}}(x_{n_l}) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle^* \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}}^0 \quad (1.114)$$

e subtraindo-a membro a membro à eq. (1.111), inferimos que

$$\langle 0 | -2\psi_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2) + \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} | P_d \lambda_d \tau_d \rangle = 0, \quad (1.115)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | -2\psi_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2) \psi_{\alpha_3}(x_3) + \theta(x_1^0 - x_2^0) \theta(x_2^0 - x_3^0) [\{\psi_{\alpha_2}(x_2), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} \psi_{\alpha_1}(x_1) \\ - \psi_{\alpha_2}(x_2) \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} + \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} \psi_{\alpha_3}(x_3)] + \theta(x_1^0 - x_3^0) \theta(x_3^0 - x_2^0) \\ \times [\psi_{\alpha_1}(x_1) \{\psi_{\alpha_2}(x_2), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} - \psi_{\alpha_2}(x_2) \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} + \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} \\ \times \psi_{\alpha_3}(x_3)] + \theta(x_2^0 - x_1^0) \theta(x_1^0 - x_3^0) [\psi_{\alpha_1}(x_1) \{\psi_{\alpha_2}(x_2), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} - \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} \\ \times \psi_{\alpha_2}(x_2) + \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} \psi_{\alpha_3}(x_3)] + \theta(x_3^0 - x_2^0) \theta(x_2^0 - x_1^0) [\{\psi_{\alpha_2}(x_2), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} \\ \times \psi_{\alpha_1}(x_1) - \psi_{\alpha_2}(x_2) \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} + \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} \psi_{\alpha_3}(x_3)] + \theta(x_2^0 - x_3^0) \\ \times \theta(x_3^0 - x_1^0) [\psi_{\alpha_1}(x_1) \{\psi_{\alpha_2}(x_2), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} - \psi_{\alpha_2}(x_2) \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_3}(x_3)\}] \\ + \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} \psi_{\alpha_3}(x_3)] + \theta(x_3^0 - x_1^0) \theta(x_1^0 - x_2^0) [\psi_{\alpha_1}(x_1) \{\psi_{\alpha_2}(x_2), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} \\ - \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_3}(x_3)\} \psi_{\alpha_2}(x_2) + \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} \psi_{\alpha_3}(x_3)] | P_t \lambda_t \tau_t \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Nas eqs. (1.115), (1.116) há diversos anticomutadores. Mesmo interagindo com outros campos, como é o caso, ψ satisfaz a relação de anticomutação a tempos iguais

$$\{\psi_{\alpha_1}(t x_1), \psi_{\alpha_2}(t x_2)\} = 0. \quad (1.117)$$

A relação de anticomutação é ainda verdadeira se os instantes são distintos e o intervalo entre os pontos do espaço-tempo é do tipo espacial. Para provar isso começemos por enunciar a regra de transformação de ψ , $\bar{\psi}$ com respeito às transformações de L_+^\dagger :

$$U^{-1}(\Lambda)\psi_\alpha(x)U(\Lambda) = S_{\alpha\beta}(\Lambda)\psi_\beta(\Lambda^{-1}x), \quad (1.118)$$

$$U^{-1}(\Lambda)\bar{\psi}_\alpha(x)U(\Lambda) = S_{\beta\alpha}^{-1}(\Lambda)\bar{\psi}_\beta(\Lambda^{-1}x), \quad (1.119)$$

em que $S(\Lambda)$ é a matriz que representa Λ no espaço de Dirac; se $\Lambda = R(\zeta\hat{n}_r)B(\eta\hat{n}_b)$, então,

$$S(R(\zeta\hat{n}_r)B(\eta\hat{n}_b)) = S(R(\zeta\hat{n}_r))S(B(\eta\hat{n}_b)), \quad (1.120)$$

em que

$$S(R(\zeta\hat{n}_r)) = \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) \hat{n}_r \cdot \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (1.121)$$

$$S(B(\eta\hat{n}_b)) = \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \hat{n}_b \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (1.122)$$

e $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ são as matrizes de Pauli. Em seguida, sejam x_1, x_2 pontos do espaço-tempo separados por um intervalo do tipo espacial, isto é, pontos tais que $(x_1 - x_2)^2 < 0$. Existe, por isso, uma transformação de L_+^\dagger , Λ' , tal que $(\Lambda'x_1)^0 = (\Lambda'x_2)^0$. Recorrendo às eqs. (1.117), (1.118), terminamos a prova:

$$\begin{aligned} \{\psi_{\alpha_1}(x_1), \psi_{\alpha_2}(x_2)\} &= \{S_{\alpha_1\beta_1}^{-1}(\Lambda')U^{-1}(\Lambda')\psi_{\beta_1}(\Lambda'x_1)U(\Lambda'), \\ &\quad S_{\alpha_2\beta_2}^{-1}(\Lambda')U^{-1}(\Lambda')\psi_{\beta_2}(\Lambda'x_2)U(\Lambda')\} \\ &= S_{\alpha_1\beta_1}^{-1}(\Lambda')S_{\alpha_2\beta_2}^{-1}(\Lambda')U^{-1}(\Lambda')\{\psi_{\beta_1}(\Lambda'x_1), \psi_{\beta_2}(\Lambda'x_2)\}U(\Lambda') \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.123)$$

As eqs. (1.115), (1.116) tornam-se consideravelmente mais simples se os pontos do espaço-tempo nos anticomutadores estiverem separados entre si por intervalos do género espacial.

Vamos demonstrar que as funções de onda relativas conjugadas no espaço das coordenadas relativas do deuterão são nulas. Sejam t um número real e C o subconjunto de \mathbb{R}^3 tal que o ponto (x_1, x_2, x_3) de \mathbb{R}^3 pertence a C se, e somente se, $t^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. C é um conjunto não vazio. Seja f a função real de domínio \mathbb{R}^3 tal que a imagem de (x_1, x_2, x_3) é $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sendo (x_1, x_2, x_3) um ponto qualquer de \mathbb{R}^3 . f é uma função contínua em \mathbb{R}^3 . Sejam (y_1, y_2, y_3) um ponto de C e ε definido por $\varepsilon = f(y_1, y_2, y_3) - t^2$. Reparemos que $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em (y_1, y_2, y_3) , existe um número real positivo δ tal que $f(x_1, x_2, x_3) > -\varepsilon + f(y_1, y_2, y_3) = t^2$ se (x_1, x_2, x_3) é um ponto de \mathbb{R}^3

que satisfaz $|(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3)| < \delta$. Assim, (y_1, y_2, y_3) é um ponto interior de C . Em virtude de qualquer ponto de C ser ponto interior de C , C é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 . Dado um ponto (t, x^1, x^2, x^3) do espaço-tempo, (x^1, x^2, x^3) pertence ou não a C . Seja (t, x^1, x^2, x^3) um ponto do espaço-tempo tal que (x^1, x^2, x^3) pertence a C . Consequentemente, (t, x^1, x^2, x^3) e $(-t, -x^1, -x^2, -x^3)$ estão separados por um intervalo do género espacial. Empregando as eqs. (1.115), (1.123) com x_1 e x_2 substituídos, respectivamente, por (t, x^1, x^2, x^3) e $(-t, -x^1, -x^2, -x^3)$, concluímos que

$$\langle 0 | \psi_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3) | P_d \lambda_d \tau_d \rangle = 0. \quad (1.124)$$

A eq. (1.124) e a relação

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3) | P_d \lambda_d \tau_d \rangle \\ &= \langle 0 | \psi_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3) | P_d \lambda_d \tau_d \rangle, \end{aligned} \quad (1.125)$$

a qual é uma consequência do intervalo entre (t, x^1, x^2, x^3) e $(-t, -x^1, -x^2, -x^3)$ ser do género espacial, implicam que

$$\langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3) | P_d \lambda_d \tau_d \rangle = 0. \quad (1.126)$$

Agora, sejam (t, x^1, x^2, x^3) um ponto do espaço-tempo tal que (x^1, x^2, x^3) não pertence a C , (y^1, y^2, y^3) um ponto de C , f e g funções reais de domínio \mathbb{R} , sendo

$$\begin{aligned} f(s) &= Re \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(t, (1-s)y^1 + sx^1, (1-s)y^2 + sx^2, (1-s)y^3 + sx^3) \\ &\quad \times \psi_{\alpha_2}(-t, -(1-s)y^1 - sx^1, -(1-s)y^2 - sx^2, -(1-s)y^3 - sx^3) | P_d \lambda_d \tau_d \rangle, \end{aligned} \quad (1.127)$$

$$\begin{aligned} g(s) &= Im \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(t, (1-s)y^1 + sx^1, (1-s)y^2 + sx^2, (1-s)y^3 + sx^3) \\ &\quad \times \psi_{\alpha_2}(-t, -(1-s)y^1 - sx^1, -(1-s)y^2 - sx^2, -(1-s)y^3 - sx^3) | P_d \lambda_d \tau_d \rangle \end{aligned} \quad (1.128)$$

e s um número real qualquer. f e g são funções analíticas em \mathbb{R} por hipótese. Como C é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 e (y^1, y^2, y^3) é um ponto de C , existe um número real positivo δ tal que o ponto (z^1, z^2, z^3) de \mathbb{R}^3 pertence a C se $|(z^1, z^2, z^3) - (y^1, y^2, y^3)| < \delta$. Seja ε definido por $\varepsilon = \delta / |(x^1, x^2, x^3) - (y^1, y^2, y^3)|$. Se $|s| < \varepsilon$, então, $|(1-s)(y^1, y^2, y^3) + s(x^1, x^2, x^3) - (y^1, y^2, y^3)| < \delta$ e, portanto, $(1-s)(y^1, y^2, y^3) + s(x^1, x^2, x^3)$ pertence a C . Então, a eq. (1.126) é satisfeita com (t, x^1, x^2, x^3) , $(-t, -x^1, -x^2, -x^3)$ substituídos, respectivamente, por $(t, (1-s)y^1 + sx^1, (1-s)y^2 + sx^2, (1-s)y^3 + sx^3)$, $(-t, -(1-s)y^1 - sx^1, -(1-s)y^2 - sx^2, -(1-s)y^3 - sx^3)$, sendo $|s| < \varepsilon$. Por conseguinte, $f(s) = g(s) = 0$ se $|s| < \varepsilon$, donde resulta que todas as derivadas de f , g são nulas no intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Observemos que f e g satisfazem as condições da hipótese do seguinte teorema: sejam I um intervalo aberto de \mathbb{R} , h uma função real de domínio I analítica em I que se anula juntamente com as suas derivadas num ponto de I ; então, h anula-se em todos os pontos de I [44]. Portanto, $f(s) = g(s) = 0$ qualquer que seja o número real s . Para $s = 1$ obtemos

$$Re\langle 0|T\psi_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3)\psi_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3)|P_d\lambda_d\tau_d\rangle = 0, \quad (1.129)$$

$$Im\langle 0|T\psi_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3)\psi_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3)|P_d\lambda_d\tau_d\rangle = 0. \quad (1.130)$$

Demonstrámos neste parágrafo que

$$\langle 0|T\psi_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3)\psi_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3)|P_d\lambda_d\tau_d\rangle = 0, \quad (1.131)$$

sendo (t, x^1, x^2, x^3) um ponto arbitrário do espaço-tempo. Das eqs. (1.100), (1.105), (1.106) com $l = d$ e (1.131) concluímos que

$$\langle P_d\lambda_d\tau_d|T\bar{\psi}_{\alpha_1}(t, x^1, x^2, x^3)\bar{\psi}_{\alpha_2}(-t, -x^1, -x^2, -x^3)|0\rangle = 0, \quad (1.132)$$

qualquer que seja o ponto (t, x^1, x^2, x^3) do espaço-tempo.

Passemos à prova de que as funções de onda relativas conjugadas no espaço das coordenadas relativas do trinucleão são nulas. Sejam t_1, t_2 números reais. Seja C_1 o subconjunto de \mathbb{R}^6 tal que o ponto $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^6 pertence a C_1 se, e somente se, $(t_1 - t_2)^2 < (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$. C_1 é um conjunto não vazio. Seja f_1 a função real de domínio \mathbb{R}^6 tal que a imagem de $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ é $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$, sendo $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ um ponto qualquer de \mathbb{R}^6 . f_1 é uma função contínua em \mathbb{R}^6 . Sejam $(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)$ um ponto de C_1 e ε o número real positivo definido por $\varepsilon = f_1(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3) - (t_1 - t_2)^2$. Em virtude de f_1 ser contínua em $(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)$, existe um número real positivo δ tal que $f_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) > -\varepsilon + f_1(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3) = (t_1 - t_2)^2$ se $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ é um ponto de \mathbb{R}^6 que satisfaz $|(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) - (w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)| < \delta$. Portanto, $(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)$ é um ponto interior de C_1 . Como qualquer ponto de C_1 é um ponto interior de C_1 , C_1 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^6 . Seja C_2 o subconjunto de \mathbb{R}^6 tal que o ponto $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^6 pertence a C_2 se, e somente se, $(2t_1 + t_2)^2 < (2x_1 + y_1)^2 + (2x_2 + y_2)^2 + (2x_3 + y_3)^2$. C_2 é um conjunto não vazio. C_2 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^6 . A prova de que C_2 é aberto é semelhante à de que C_1 é aberto: recorremos à continuidade da função f_2 real de domínio \mathbb{R}^6 tal que a imagem de $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ é $(2x_1 + y_1)^2 + (2x_2 + y_2)^2 + (2x_3 + y_3)^2$, sendo $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ um ponto qualquer de \mathbb{R}^6 . Seja C_3 o subconjunto de \mathbb{R}^6 tal que o ponto $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^6 pertence a C_3 se, e somente se, $(t_1 + 2t_2)^2 < (x_1 + 2y_1)^2 + (x_2 + 2y_2)^2 + (x_3 + 2y_3)^2$.

C_3 é um conjunto não vazio. C_3 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^6 . Demonstra-se que C_3 é aberto utilizando a continuidade da função f_3 real de domínio \mathbb{R}^6 tal que a imagem de $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ é $(x_1 + 2y_1)^2 + (x_2 + 2y_2)^2 + (x_3 + 2y_3)^2$, sendo $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ um ponto qualquer de \mathbb{R}^6 . A intersecção de C_1 , C_2 , C_3 é não vazia, porque o ponto $(1 + \max(|t_1 - t_2|, |2t_1 + t_2|/2, |t_1 + 2t_2|), 0, 0, 0, 0, 0)$ pertence a esses três conjuntos. Seja $(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)$ um ponto de C_1 , C_2 , C_3 . Como C_1 , C_2 , C_3 são subconjuntos abertos de \mathbb{R}^6 , existem números reais positivos δ_1 , δ_2 , δ_3 para os quais o ponto $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^6 pertence a C_1 , C_2 , C_3 , respectivamente, se $|(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) - (w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)|$ é menor do que δ_1 , δ_2 , δ_3 . Seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Então, o ponto $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^6 pertence a C_1 , C_2 , C_3 se $|(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) - (w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)| < \delta$. Assim, qualquer ponto de C_1 , C_2 , C_3 é um ponto interior da intersecção desses conjuntos, o que significa que a intersecção de C_1 , C_2 , C_3 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^6 . Sejam (t_1, x^1, x^2, x^3) , (t_2, y^1, y^2, y^3) pontos do espaço-tempo tais que $(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3)$ pertence à intersecção de C_1 , C_2 , C_3 . Portanto, (t_1, x^1, x^2, x^3) , (t_2, y^1, y^2, y^3) , $(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3)$ estão separados entre si por intervalos do género espacial. Notando que

$$\begin{aligned} & \{\psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3), \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3)\} \\ &= \{\psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3), \psi_{\alpha_2}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3)\} \\ &= \{\psi_{\alpha_1}(t_2, y^1, y^2, y^3), \psi_{\alpha_2}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3)\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.133}$$

e utilizando a eq. (1.116) com x_1 , x_2 , x_3 substituídos por (t_1, x^1, x^2, x^3) , (t_2, y^1, y^2, y^3) , $(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3)$ respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \\ & \times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle = 0, \end{aligned} \tag{1.134}$$

onde

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \\ & \times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle = 0, \end{aligned} \tag{1.135}$$

por causa da eq. (1.134) e da relação

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \\ & \times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle \\ &= \langle 0 | \psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \end{aligned}$$

$$\times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) |P_t \lambda_t \tau_t\rangle, \quad (1.136)$$

a qual é uma consequência dos intervalos entre (t_1, x^1, x^2, x^3) , (t_2, y^1, y^2, y^3) , $(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3)$ serem do género espacial. Sejam (t_1, x^1, x^2, x^3) e (t_2, y^1, y^2, y^3) pontos do espaço-tempo tais que $(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3)$ não pertence à intersecção de C_1, C_2, C_3 , $(w^1, w^2, w^3, z^1, z^2, z^3)$ um ponto de C_1, C_2, C_3 , f e g funções reais de domínio \mathbb{R} , sendo

$$\begin{aligned} f(s) = & Re\langle 0 | T\psi_{\alpha_1}(t_1, (1-s)w^1 + sx^1, (1-s)w^2 + sx^2, (1-s)w^3 + sx^3) \\ & \times \psi_{\alpha_2}(t_2, (1-s)z^1 + sy^1, (1-s)z^2 + sy^2, (1-s)z^3 + sy^3) \\ & \times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -(1-s)(w^1 + z^1) - s(x^1 + y^1), -(1-s)(w^2 + z^2) - s(x^2 + y^2), \\ & -(1-s)(w^3 + z^3) - s(x^3 + y^3)) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle, \end{aligned} \quad (1.137)$$

$$\begin{aligned} g(s) = & Im\langle 0 | T\psi_{\alpha_1}(t_1, (1-s)w^1 + sx^1, (1-s)w^2 + sx^2, (1-s)w^3 + sx^3) \\ & \times \psi_{\alpha_2}(t_2, (1-s)z^1 + sy^1, (1-s)z^2 + sy^2, (1-s)z^3 + sy^3) \\ & \times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -(1-s)(w^1 + z^1) - s(x^1 + y^1), -(1-s)(w^2 + z^2) - s(x^2 + y^2), \\ & -(1-s)(w^3 + z^3) - s(x^3 + y^3)) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle \end{aligned} \quad (1.138)$$

e s um número real qualquer. Admitamos que f e g são funções analíticas em \mathbb{R} . Como a intersecção de C_1, C_2, C_3 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^6 e $(w^1, w^2, w^3, z^1, z^2, z^3)$ é um ponto de C_1, C_2, C_3 , existe um número real positivo δ tal que o ponto $(r^1, r^2, r^3, s^1, s^2, s^3)$ de \mathbb{R}^6 pertence a C_1, C_2, C_3 se $|(r^1, r^2, r^3, s^1, s^2, s^3) - (w^1, w^2, w^3, z^1, z^2, z^3)| < \delta$. Seja ε definido por $\varepsilon = \delta / |(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3) - (w^1, w^2, w^3, z^1, z^2, z^3)|$. Se $|s| < \varepsilon$, então, $|(1-s)(w^1, w^2, w^3, z^1, z^2, z^3) + s(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3) - (w^1, w^2, w^3, z^1, z^2, z^3)| < \delta$ e, por conseguinte, $(1-s)(w^1, w^2, w^3, z^1, z^2, z^3) + s(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3)$ é um ponto de C_1, C_2, C_3 . Então, a eq. (1.135) é satisfeita com (t_1, x^1, x^2, x^3) , (t_2, y^1, y^2, y^3) , $(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3)$, substituídos, respectivamente, por $(t_1, (1-s)w^1 + sx^1, (1-s)w^2 + sx^2, (1-s)w^3 + sx^3)$, $(t_2, (1-s)z^1 + sy^1, (1-s)z^2 + sy^2, (1-s)z^3 + sy^3)$, $(-t_1 - t_2, -(1-s)(w^1 + z^1) - s(x^1 + y^1), -(1-s)(w^2 + z^2) - s(x^2 + y^2), -(1-s)(w^3 + z^3) - s(x^3 + y^3))$, sendo $|s| < \varepsilon$. Portanto, $f(s) = g(s) = 0$ se $|s| < \varepsilon$, donde resulta que todas as derivadas de f , g são nulas no intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$. f e g satisfazem as condições da hipótese do teorema da ref. [44] já mencionado. Por conseguinte, $f(s) = g(s) = 0$ qualquer que seja o número real s . Para $s = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} & Re\langle 0 | T\psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \\ & \times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle = 0, \\ & Im\langle 0 | T\psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \end{aligned} \quad (1.139)$$

$$\times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) |P_t \lambda_t \tau_t\rangle = 0. \quad (1.140)$$

Neste parágrafo demonstrámos que

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T\psi_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \psi_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \\ & \times \psi_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) |P_t \lambda_t \tau_t\rangle = 0, \end{aligned} \quad (1.141)$$

sendo $(t_1, x^1, x^2, x^3), (t_2, y^1, y^2, y^3)$ pontos arbitrários do espaço-tempo. Das eqs. (1.100), (1.105), (1.106) com $l = t$ e (1.141) concluímos que

$$\begin{aligned} & \langle P_t \lambda_t \tau_t | T\bar{\psi}_{\alpha_1}(t_1, x^1, x^2, x^3) \bar{\psi}_{\alpha_2}(t_2, y^1, y^2, y^3) \\ & \times \bar{\psi}_{\alpha_3}(-t_1 - t_2, -x^1 - y^1, -x^2 - y^2, -x^3 - y^3) |0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (1.142)$$

quaisquer que sejam os pontos $(t_1, x^1, x^2, x^3), (t_2, y^1, y^2, y^3)$ do espaço-tempo.

1.4 Dedução na TQRC de duas relações entre as funções de onda conjugadas para o deuterão e trinucleão

Sob a condição de invariância das interacções com respeito às transformações próprias ortocronas de Lorentz e à invariância temporal, deduziremos, no âmbito da TQRC, a relação (1.173) entre as funções de onda conjugadas. Depois, juntando a invariância das interacções relativamente à inversão espacial, obteremos a relação (1.174).

Comecemos pela construção do vector $|P_l \lambda_l \tau_l\rangle$ em termos de $|\tilde{P}_l - J_l \tau_l\rangle$, sendo $\tilde{P}_l = (M_l, \mathbf{0})$. O vector $|\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l\rangle$ de helicidade $\lambda_l > -J_l$ obtém-se de $|\tilde{P}_l - J_l \tau_l\rangle$ segundo

$$|\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l\rangle = \prod_{k=-J_l+1}^{\lambda_l} \frac{1}{\sqrt{J_l(J_l+1)-(k-1)k}} (J^1 + iJ^2)^{\lambda_l+k} |\tilde{P}_l - J_l \tau_l\rangle. \quad (1.143)$$

O vector $|\tilde{P}_l - J_l \tau_l\rangle$ com $\tau_l > -I_l$ obtém-se de $|\tilde{P}_l - J_l - I_l\rangle$ de acordo com

$$|\tilde{P}_l - J_l \tau_l\rangle = \prod_{k=-I_l+1}^{I_l} \frac{1}{\sqrt{I_l(I_l+1)-(k-1)k}} (I^1 + iI^2)^{I_l+k} |\tilde{P}_l - J_l - I_l\rangle. \quad (1.144)$$

Falta-nos relacionar os vectores $|P_l \lambda_l \tau_l\rangle$ de momento $P_l \neq \tilde{P}_l$ e $|\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l\rangle$. A composição $R(\phi \hat{e}^3)R(\theta \hat{e}^2)$ é denotada por $R_{\phi,\theta,0}$ e representada no espaço de Hilbert por $U(R_{\phi,\theta,0})$. Dado P_l , existem ϕ, θ e η tais que $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\eta > 0$ e $P_l = R_{\phi,\theta,0}B(\eta \hat{e}^3)\tilde{P}_l$. Definimos $|P_l \lambda_l \tau_l\rangle$ por

$$|P_l \lambda_l \tau_l\rangle = U(R_{\phi,\theta,0})U(B(\eta \hat{e}^3))|\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l\rangle. \quad (1.145)$$

O operador $U(\mathcal{T})$ é sujeito, entre outras, à condição de $\psi, \bar{\psi}$ transformarem-se como

$$U(\mathcal{T})\psi_\alpha(x)U^\dagger(\mathcal{T}) = \eta^T(C\gamma^5)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\bar{x}), \quad (1.146)$$

$$U(\mathcal{T})\bar{\psi}_\alpha(x)U^\dagger(\mathcal{T}) = \eta^{T*}(C\gamma^5)_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta(\bar{x}), \quad (1.147)$$

sendo η^T um número complexo unitário, $C = -i\gamma^0\gamma^2$ (C é a matriz de conjugação de carga), $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, em que $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ são as matrizes de Dirac na representação de Dirac, e $\bar{x} = \mathcal{T}x = (-x^0, \mathbf{x})$. Interessa-nos determinar a acção de $U(\mathcal{T})$ sobre $|P_l\lambda_l\eta\rangle$. Consideremos primeiro o caso de repouso. A inversão temporal não afecta η_l , mas inverte a helicidade λ_l :

$$U(\mathcal{T})|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle = t(\lambda_l\eta_l)|\tilde{P}_l - \lambda_l\eta_l\rangle. \quad (1.148)$$

O número complexo $t(\lambda_l\eta_l)$ é obtido de $t(-J_l - I_l)$ como

$$t(\lambda_l\eta_l) = (-1)^{J_l + \lambda_l}t(-J_l - I_l). \quad (1.149)$$

Para provar a eq. (1.149) começemos por observar que

$$(J^1 \pm iJ^2)|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle = \sqrt{J_l(J_l + 1) - \lambda_l(\lambda_l \pm 1)}|\tilde{P}_l\lambda_l \pm 1\eta_l\rangle \quad (1.150)$$

se $|\lambda_l \pm 1| \leq J_l$. Em seguida actuemos com $U(\mathcal{T})(J^1 + iJ^2)$ no vector $|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle$ tal que $\lambda_l < J_l$:

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})(J^1 + iJ^2)|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle &= \sqrt{J_l(J_l + 1) - \lambda_l(\lambda_l + 1)}U(\mathcal{T})|\tilde{P}_l\lambda_l + 1\eta_l\rangle \\ &= \sqrt{J_l(J_l + 1) - \lambda_l(\lambda_l + 1)}t(\lambda_l + 1\eta_l)|\tilde{P}_l - \lambda_l - 1\eta_l\rangle, \end{aligned} \quad (1.151)$$

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})(J^1 + iJ^2)|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle &= -(J^1 - iJ^2)U(\mathcal{T})|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle \\ &= -t(\lambda_l\eta_l)(J^1 - iJ^2)|\tilde{P}_l - \lambda_l\eta_l\rangle \\ &= -t(\lambda_l\eta_l)\sqrt{J_l(J_l + 1) - \lambda_l(\lambda_l + 1)}|\tilde{P}_l - \lambda_l - 1\eta_l\rangle; \end{aligned} \quad (1.152)$$

assim, $t(\lambda_l + 1\eta_l) = -t(\lambda_l\eta_l)$, donde $t(\lambda_l\eta_l) = (-1)^{J_l + \lambda_l}t(-J_l\eta_l)$. Se $\eta_l < I_l$, então,

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})(I^1 + iI^2)|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle &= \sqrt{I_l(I_l + 1) - \eta_l(\eta_l + 1)}U(\mathcal{T})|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l + 1\rangle \\ &= \sqrt{I_l(I_l + 1) - \eta_l(\eta_l + 1)}t(\lambda_l\eta_l + 1)|\tilde{P}_l - \lambda_l\eta_l + 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.153)$$

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})(I^1 + iI^2)|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle &= (I^1 + iI^2)U(\mathcal{T})|\tilde{P}_l\lambda_l\eta_l\rangle \\ &= t(\lambda_l\eta_l)(I^1 + iI^2)|\tilde{P}_l - \lambda_l\eta_l\rangle \\ &= t(\lambda_l\eta_l)\sqrt{I_l(I_l + 1) - \eta_l(\eta_l + 1)}|\tilde{P}_l - \lambda_l\eta_l + 1\rangle \end{aligned} \quad (1.154)$$

e, portanto, $t(\lambda_l\eta_l + 1) = t(\lambda_l\eta_l)$, donde $t(\lambda_l\eta_l) = t(\lambda_l - I_l)$. Substituindo $t(-J_l\eta_l)$ por $t(-J_l - I_l)$ em $t(\lambda_l\eta_l) = (-1)^{J_l + \lambda_l}t(-J_l\eta_l)$, obtemos a eq. (1.149). Seguidamente

passemos ao caso de movimento, ou seja, $P_l \neq \tilde{P}_l$. A inversão temporal não altera a helicidade, mas inverte o 3-momento:

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{T})|P_l\lambda_l\tau_l\rangle &= U(\mathcal{T})U(R_{\phi,\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= (-1)^{J_l+\lambda_l}t(-J_l-I_l)U(R_{\phi,\theta,0})U^{-1}(B(\eta\hat{e}^3))|\tilde{P}_l-\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= (-1)^{J_l+\lambda_l}t(-J_l-I_l)U(R_{\phi,-\pi+\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))U(R_{0,\pi,0})|\tilde{P}_l-\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= t(-J_l-I_l)U(R_{\phi,-\pi+\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= t(-J_l-I_l)U(R_{\phi\pm\pi,\pi-\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))U(R_{\mp\pi,0,0})|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= t(-J_l-I_l)e^{\pm i\pi\lambda_l}U(R_{\phi\pm\pi,\pi-\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= t(-J_l-I_l)e^{\pm i\pi\lambda_l}|\bar{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle,
\end{aligned} \tag{1.155}$$

sendo o sinal $+$ ($-$) para $0 \leq \phi < \pi$ ($\pi \leq \phi < 2\pi$) e $\bar{P}_l = (P_l^0, -\mathbf{P}_l)$. Podemos utilizar a normalização (1.15) e a transformação (1.155) para mostrar que $|t(-J_l-I_l)| = 1$: sejam P'_l , $P_l \neq \tilde{P}_l$; então,

$$\begin{aligned}
\langle P'_l\lambda'_l\tau'_l|P_l\lambda_l\tau_l\rangle &= \langle P'_l\lambda'_l\tau'_l|U^\dagger(\mathcal{T})U(\mathcal{T})|P_l\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= t^*(-J_l-I_l)e^{\mp i\pi\lambda_l}\langle P'_l\lambda'_l\tau'_l|U^\dagger(\mathcal{T})|\bar{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\
&= t^*(-J_l-I_l)e^{\mp i\pi\lambda_l}\langle \bar{P}_l\lambda_l\tau_l|U(\mathcal{T})|P'_l\lambda'_l\tau'_l\rangle \\
&= |t(-J_l-I_l)|^2e^{\mp i\pi\lambda_l}e^{\pm i\pi\lambda'_l}\langle \bar{P}_l\lambda_l\tau_l|\bar{P}'_l\lambda'_l\tau'_l\rangle \\
&= |t(-J_l-I_l)|^2\langle P'_l\lambda'_l\tau'_l|P_l\lambda_l\tau_l\rangle,
\end{aligned} \tag{1.156}$$

onde $|t(-J_l-I_l)| = 1$.

Agora, é simples encontrarmos uma relação entre as funções de onda conjugadas quando as interacções são invariantes sob a inversão temporal. Sejam σ uma permutação dos n primeiros números naturais, $\sigma(i)$ a imagem de i por σ e $\text{sgn}(\sigma)$ o sinal de σ . A função de onda $\bar{\Psi}(x_1 \dots x_{n_l} P_l\lambda_l\tau_l)$, $l = d, t$, pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
&\langle P_l\lambda_l\tau_l|T\bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_{n_l}}(x_{n_l})|0\rangle \\
&= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \theta(x_{\sigma(1)}^0 - x_{\sigma(2)}^0) \dots \theta(x_{\sigma(n_l-1)}^0 - x_{\sigma(n_l)}^0) \\
&\quad \times \langle P_l\lambda_l\tau_l|U^\dagger(\mathcal{T})[U(\mathcal{T})\bar{\psi}_{\alpha_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})U^\dagger(\mathcal{T})] \dots [U(\mathcal{T})\bar{\psi}_{\alpha_{\sigma(n_l)}}(x_{\sigma(n_l)})U^\dagger(\mathcal{T})]U(\mathcal{T})|0\rangle \\
&= (\eta^T)^{n_l} (C\gamma^5\gamma^0)_{\alpha_1\beta_1} \dots (C\gamma^5\gamma^0)_{\alpha_{n_l}\beta_{n_l}} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \theta(\bar{x}_{\sigma(1)}^0 - \bar{x}_{\sigma(2)}^0) \dots \theta(\bar{x}_{\sigma(n_l-1)}^0 - \bar{x}_{\sigma(n_l)}^0) \\
&\quad \times \langle P_l\lambda_l\tau_l|U^\dagger(\mathcal{T})\psi_{\beta_{\sigma(1)}}^\dagger(\bar{x}_{\sigma(1)}) \dots \psi_{\beta_{\sigma(n_l)}}^\dagger(\bar{x}_{\sigma(n_l)})U(\mathcal{T})|0\rangle,
\end{aligned} \tag{1.157}$$

em que utilizámos a propriedade $U^\dagger(\mathcal{T})U(\mathcal{T}) = 1$ e a eq. (1.147). Tendo em conta a antilinearidade de $U(\mathcal{T})$ e a invariância de $|0\rangle$ relativamente à inversão temporal, eq.

(1.18), passamos da eq. (1.157) para

$$\begin{aligned} & \langle P_l \lambda_l \tau_l | T \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \cdots \bar{\psi}_{\alpha_{n_l}}(x_{n_l}) | 0 \rangle \\ &= (\eta^T)^{n_l} (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \beta_1} \cdots (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \theta(\bar{x}_{\sigma(n_l)}^0 - \bar{x}_{\sigma(n_l-1)}^0) \cdots \theta(\bar{x}_{\sigma(2)}^0 - \bar{x}_{\sigma(1)}^0) \\ & \quad \times \langle 0 | \psi_{\beta_{\sigma(n_l)}}(\bar{x}_{\sigma(n_l)}) \cdots \psi_{\beta_{\sigma(1)}}(\bar{x}_{\sigma(1)}) U(T) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle. \end{aligned} \quad (1.158)$$

O sinal da permutação σ' definida por $\sigma'(i) = \sigma(n_l - i + 1)$ é $(-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} \text{sgn}(\sigma)$ ($(-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} = -1$); por isso, a eq. (1.158) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \langle P_l \lambda_l \tau_l | T \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \cdots \bar{\psi}_{\alpha_{n_l}}(x_{n_l}) | 0 \rangle = (-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} (\eta^T)^{n_l} (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \beta_1} \cdots (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \\ & \quad \times \langle 0 | T \psi_{\beta_1}(\bar{x}_1) \cdots \psi_{\beta_{n_l}}(\bar{x}_{n_l}) U(T) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Recorrendo às transformações (1.148), (1.155), obtemos uma relação entre as funções de onda conjugadas no espaço das coordenadas: seja $l = d, t$; se $P_l = \tilde{P}_l$,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) &= (-1)^{J_l + \lambda_l} t(-J_l - I_l) (-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} (\eta^T)^{n_l} \\ & \quad \times (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \beta_1} \cdots (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \Psi_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l); \end{aligned} \quad (1.160)$$

se $P_l \neq \tilde{P}_l$,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(x_1 \dots x_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= t(-J_l - I_l) e^{\pm i \pi \lambda_l} (-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} (\eta^T)^{n_l} \\ & \quad \times (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \beta_1} \cdots (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \Psi_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l). \end{aligned} \quad (1.161)$$

A relação entre as funções de onda relativas conjugadas no espaço dos momentos relativos é: se $P_l = \tilde{P}_l$,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) &= (-1)^{J_l + \lambda_l} t(-J_l - I_l) (-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} (\eta^T)^{n_l} \\ & \quad \times (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \beta_1} \cdots (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \Psi_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l); \end{aligned} \quad (1.162)$$

se $P_l \neq \tilde{P}_l$,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= t(-J_l - I_l) e^{\pm i \pi \lambda_l} (-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} (\eta^T)^{n_l} \\ & \quad \times (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \beta_1} \cdots (C \gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \Psi_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l), \end{aligned} \quad (1.163)$$

sendo $\bar{q} = (q^0, -\mathbf{q})$.

A invariância das interacções relativamente à inversão espacial origina outra relação entre as funções de onda conjugadas. O operador $U(\mathcal{P})$ é condicionado, em parte, pela regra de transformação de $\psi, \bar{\psi}$ relativamente à inversão espacial:

$$U(\mathcal{P}) \psi_{\alpha}(x) U^{\dagger}(\mathcal{P}) = \eta^P \gamma_{\alpha \beta}^0 \psi_{\beta}(\tilde{x}), \quad (1.164)$$

$$U(\mathcal{P})\bar{\psi}_\alpha(x)U^\dagger(\mathcal{P}) = \eta^P \gamma_{\alpha\beta}^0 \bar{\psi}_\beta(\check{x}), \quad (1.165)$$

em que $\eta^P = \pm 1$ e $\check{x} = \mathcal{P}x = (x^0, -\boldsymbol{x})$. Sejam r_n , r_d , r_t as paridades intrínsecas do nucleão, deuterão e trinucleão respectivamente. Então,

$$U(\mathcal{P})|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle = r_l|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle. \quad (1.166)$$

Actuando com $U(\mathcal{P})$ no vector $|P_l\lambda_l\tau_l\rangle$ com o momento $P_l \neq \tilde{P}_l$, resulta que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P})|P_l\lambda_l\tau_l\rangle &= U(\mathcal{P})U(R_{\phi,\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\ &= r_lU(R_{\phi,\theta,0})U^{-1}(B(\eta\hat{e}^3))|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\ &= r_lU(R_{\phi,\theta-\pi,0})U(B(\eta\hat{e}^3))U(R_{0,\pi,0})|\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l\rangle \\ &= r_l(-1)^{J_l-\lambda_l}U(R_{\phi\pm\pi,\pi-\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))U(R_{\mp\pi,0,0})|\tilde{P}_l - \lambda_l\tau_l\rangle \\ &= r_l(-1)^{J_l-\lambda_l}e^{\mp i\pi\lambda_l}U(R_{\phi\pm\pi,\pi-\theta,0})U(B(\eta\hat{e}^3))|\tilde{P}_l - \lambda_l\tau_l\rangle \\ &= r_l(-1)^{J_l-\lambda_l}e^{\mp i\pi\lambda_l}|\tilde{P}_l - \lambda_l\tau_l\rangle, \end{aligned} \quad (1.167)$$

sendo o sinal $- (+)$ para $0 \leq \phi < \pi$ ($\pi \leq \phi < 2\pi$). Recordando que r_l é real por $U(\mathcal{P})$ ser hermítico, poderíamos provar que $r_l = \pm 1$ de uma maneira semelhante à da demonstração de que $|t(-J_l - I_l)| = 1$, eq. (1.156). Utilizando a invariância do vácuo sob a inversão espacial, eq. (1.19), e as regras de transformação (1.164), (1.166), (1.167), deduzimos as propriedades

$$\Psi_{\alpha_1\dots\alpha_{n_l}}(x_1\dots x_{n_l}\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l) = r_l(\eta^P)^{n_l}\gamma_{\alpha_1\beta_1}^0\dots\gamma_{\alpha_{n_l}\beta_{n_l}}^0\Psi_{\beta_1\dots\beta_{n_l}}(\check{x}_1\dots\check{x}_{n_l}\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l), \quad (1.168)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha_1\dots\alpha_{n_l}}(x_1\dots x_{n_l}P_l\lambda_l\tau_l) &= r_l(-1)^{J_l-\lambda_l}e^{\mp i\pi\lambda_l}(\eta^P)^{n_l}\gamma_{\alpha_1\beta_1}^0\dots\gamma_{\alpha_{n_l}\beta_{n_l}}^0 \\ &\times\Psi_{\beta_1\dots\beta_{n_l}}(\check{x}_1\dots\check{x}_{n_l}\bar{P}_l - \lambda_l\tau_l), \end{aligned} \quad (1.169)$$

em que $P_l \neq \tilde{P}_l$, as quais aplicadas às eqs. (1.160), (1.161) levam à seguinte relação entre as funções de onda conjugadas no espaço das coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha_1\dots\alpha_{n_l}}(x_1\dots x_{n_l}P_l\lambda_l\tau_l) &= r_l(-1)^{J_l+\lambda_l}t(-J_l - I_l)(-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}}(\eta^T\eta^P)^{n_l} \\ &\times(C\gamma^5)_{\alpha_1\beta_1}\dots(C\gamma^5)_{\alpha_{n_l}\beta_{n_l}}\Psi_{\beta_1\dots\beta_{n_l}}(-x_1\dots-x_{n_l}P_l - \lambda_l\tau_l), \end{aligned} \quad (1.170)$$

sendo $l = d, t$. A relação correspondente entre as funções de onda relativas conjugadas no espaço dos momentos relativos é

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha_1\dots\alpha_{n_l}}(q_1\dots q_{n_l}P_l\lambda_l\tau_l) &= r_l(-1)^{J_l+\lambda_l}t(-J_l - I_l)(-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}}(\eta^T\eta^P)^{n_l} \\ &\times(C\gamma^5)_{\alpha_1\beta_1}\dots(C\gamma^5)_{\alpha_{n_l}\beta_{n_l}}\Psi_{\beta_1\dots\beta_{n_l}}(q_1\dots q_{n_l}P_l - \lambda_l\tau_l). \end{aligned} \quad (1.171)$$

Finalizamos esta secção demonstrando que $\bar{\Psi}(P_l\lambda_l\tau_l)$ é gerado por $\Psi(\tilde{P}_l - \lambda_l\tau_l)$, em que $l = d, t$. Primeiro, ligamos $\bar{\Psi}(P_l\lambda_l\tau_l)$, $\bar{\Psi}(\tilde{P}_l\lambda_l\tau_l)$ empregando a transformação (1.119)

e a invariância do vácuo sob $U(\Lambda)$, eq. (1.17). Desse modo, no espaço dos momentos relativos, por exemplo, obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_1 \alpha_1} \dots \\ &\quad [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}} \bar{\Psi}_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(\check{q}_1 \dots \check{q}_{n_l} \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l),\end{aligned}\quad (1.172)$$

sendo $\check{q}_i = B^{-1}(\eta \hat{e}^3) R_{\phi, \theta, 0}^{-1} q_i$. A seguir, substituindo a função de onda no segundo membro da eq. (1.172) pela respectiva função de onda conjugada, lançando mão da relação (1.162), encontramos a relação adicional

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= (-1)^{J_l + \lambda_l} t(-J_l - I_l) (-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} (\eta^T)^{n_l} \\ &\quad \times [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_1 \alpha_1} \dots [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}} \\ &\quad \times (C\gamma^5 \gamma^0)_{\beta_1 \xi_1} \dots (C\gamma^5 \gamma^0)_{\beta_{n_l} \xi_{n_l}} \Psi_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}}(\check{q}_1 \dots \check{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l).\end{aligned}\quad (1.173)$$

Como há invariância das interacções com respeito à inversão espacial, em vez da relação (1.162) podemos utilizar a (1.171), obtendo

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= (-1)^{J_l + \lambda_l} r_l t(-J_l - I_l) (-1)^{\frac{n_l(n_l-1)}{2}} (\eta^T \eta^P)^{n_l} \\ &\quad \times [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_1 \alpha_1} \dots [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}} \\ &\quad \times (C\gamma^5)_{\beta_1 \xi_1} \dots (C\gamma^5)_{\beta_{n_l} \xi_{n_l}} \Psi_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}}(\check{q}_1 \dots \check{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l).\end{aligned}\quad (1.174)$$

1.4.1 Condições de aplicabilidade no formalismo de BS da relação (1.174)

Como veremos sucintamente nesta subsecção, se o propagador de um corpo e o potencial de dois corpos são construídos de forma que tenham as mesmas regras de transformação de, respectivamente, $G^{(1)}$ e $G^{(2)}$, eq. (1.16), com respeito às inversões temporal e espacial assim como às transformações de L_+^\uparrow e $SU(2)$, então, podemos relacionar as funções de onda conjugadas de modo similar ao da eq. (1.174).

Consideremos as equações

$$\Theta = (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} G_0^{(n_l)} O^{(n_l)} P_{12}^{n_l-2} \Theta, \quad (1.175)$$

$$\bar{\Theta} = (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} \bar{\Theta} P_{12}^{n_l-2} O^{(n_l)} G_0^{(n_l)}, \quad (1.176)$$

sendo $l = d, t, O^{(2)} = v, O^{(3)} = T_1$. Consoante $l = d$ ou $l = t$ as eqs. (1.175), (1.176) são as equações HBS (1.81), (1.82) com $l = d$ ou as equações de Faddeev (1.93), (1.95) com $i = 1, j = 2$. Sob as condições descritas no parágrafo anterior, o elemento $O^{(3)}$

das eqs. (1.175), (1.176) com $l = t$ tem as mesmas regras de transformação de $G^{(n_l)}$. As regras de transformação de $G^{(n_l)}$ relativamente às inversões temporal e espacial e às transformações de L_+^\uparrow e $SU(2)$ são, respectivamente,

$$G_{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}, \beta_1 b_1 \dots \beta_{n_l} b_{n_l}}^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) = (C\gamma^5 \gamma^0)_{\beta_1 \rho_1} \dots (C\gamma^5 \gamma^0)_{\beta_{n_l} \rho_{n_l}} \\ \times (C\gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \xi_1} \dots (C\gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \xi_{n_l}} G_{\rho_1 b_1 \dots \rho_{n_l} b_{n_l}, \xi_1 a_1 \dots \xi_{n_l} a_{n_l}}^{(n_l)}(\bar{p}_1 \dots \bar{p}_{n_l}, \bar{p}'_1 \dots \bar{p}'_{n_l}), \quad (1.177)$$

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}, \beta_1 \dots \beta_{n_l}}^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) = \gamma_{\alpha_1 \xi_1}^0 \dots \gamma_{\alpha_{n_l} \xi_{n_l}}^0 \gamma_{\rho_1 \beta_1}^0 \dots \gamma_{\rho_{n_l} \beta_{n_l}}^0 \\ \times G_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}; \rho_1 \dots \rho_{n_l}}^{(n_l)}(\bar{p}_1 \dots \bar{p}_{n_l}, \bar{p}_1 \dots \bar{p}_{n_l}), \quad (1.178)$$

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}, \beta_1 \dots \beta_{n_l}}^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) = S_{\alpha_1 \xi_1}^{-1}(\Lambda) \dots S_{\alpha_{n_l} \xi_{n_l}}^{-1}(\Lambda) S_{\rho_1 \beta_1}(\Lambda) \dots S_{\rho_{n_l} \beta_{n_l}}(\Lambda) \\ \times G_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}, \rho_1 \dots \rho_{n_l}}^{(n_l)}(\Lambda p'_1 \dots \Lambda p'_{n_l}, \Lambda p_1 \dots \Lambda p_{n_l}), \quad (1.179)$$

$$G_{a_1 \dots a_{n_l}, b_1 \dots b_{n_l}}^{(n_l)} = (R^{iso})_{a_1 c_1}^{-1} \dots (R^{iso})_{a_{n_l} c_{n_l}}^{-1} R_{d_1 b_1}^{iso} \dots R_{d_{n_l} b_{n_l}}^{iso} G_{c_1 \dots c_{n_l}, d_1 \dots d_{n_l}}^{(n_l)}. \quad (1.180)$$

Das eqs. (1.177), (1.178) resulta a regra de transformação de $G^{(n_l)}$ sob \mathcal{T} e \mathcal{P} :

$$G_{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}, \beta_1 b_1 \dots \beta_{n_l} b_{n_l}}^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) = (C\gamma^5)_{\beta_1 \rho_1} \dots (C\gamma^5)_{\beta_{n_l} \rho_{n_l}} \\ \times (C\gamma^5)_{\alpha_1 \xi_1} \dots (C\gamma^5)_{\alpha_{n_l} \xi_{n_l}} G_{\rho_1 b_1 \dots \rho_{n_l} b_{n_l}, \xi_1 a_1 \dots \xi_{n_l} a_{n_l}}^{(n_l)}(p_1 \dots p_{n_l}, p'_1 \dots p'_{n_l}). \quad (1.181)$$

As demonstrações das identidades (1.177)-(1.180) utilizam a invariância do vácuo e a transformação de ψ , $\bar{\psi}$ sob, respectivamente, \mathcal{T} , \mathcal{P} e as transformações de L_+^\uparrow e $SU(2)$. Referimos, a propósito, que a regra de transformação de ψ , $\bar{\psi}$ com respeito a R^{iso} é

$$U^{-1}(R^{iso})\psi_a(x)U(R^{iso}) = R_{ab}^{iso}\psi_b(x), \quad (1.182)$$

$$U^{-1}(R^{iso})\bar{\psi}_a(x)U(R^{iso}) = (R^{iso})_{ba}^{-1}\bar{\psi}_b(x). \quad (1.183)$$

Apresentemos a prova da eq. (1.177) para $l = d, t$, visto que é a mais trabalhosa. Escrevamos $G^{(n_l)}$ como

$$(2\pi)^4 \delta^4(P' - P) G_{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}, \beta_1 b_1 \dots \beta_{n_l} b_{n_l}}^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_{2n_l} \\ \times e^{i(\sum_{i=1}^{n_l} p'_i x_i - \sum_{i=n_l+1}^{2n_l} p'_i x_i)} \langle 0 | T \psi_{\alpha_1 a_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_{2n_l} a_{2n_l}}(x_{2n_l}) | 0 \rangle, \quad (1.184)$$

em que $p'_{i+n_l} = p_i$, $\alpha_{i+n_l} = \beta_i$, $a_{i+n_l} = b_i$, $\psi_{\alpha_{i+n_l} a_{i+n_l}}(x_{i+n_l}) = \bar{\psi}_{\beta_i b_i}(x_{i+n_l})$, $i = 1, \dots, n_l$. Aplicando a propriedade $U^\dagger(\mathcal{T})U(\mathcal{T}) = 1$ e as eqs. (1.146), (1.147), obtemos

$$(2\pi)^4 \delta^4(P' - P) G_{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}, \beta_1 b_1 \dots \beta_{n_l} b_{n_l}}^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \\ = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_{2n_l} e^{i(\sum_{i=1}^{n_l} p'_i x_i - \sum_{i=n_l+1}^{2n_l} p'_i x_i)} \sum_{\sigma} sgn(\sigma)$$

$$\begin{aligned}
& \times \theta(x_{\sigma(1)}^0 - x_{\sigma(2)}^0) \cdots \theta(x_{\sigma(2n_l-1)}^0 - x_{\sigma(2n_l)}^0) \langle 0 | U^\dagger(\mathcal{T}) [U(\mathcal{T}) \psi_{\alpha_{\sigma(1)} a_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) U^\dagger(\mathcal{T})] \\
& \cdots [U(\mathcal{T}) \psi_{\alpha_{\sigma(2n_l)} a_{\sigma(2n_l)}}(x_{\sigma(2n_l)}) U^\dagger(\mathcal{T})] U(\mathcal{T}) | 0 \rangle \\
= & (C\gamma^5)_{\alpha_1 \rho_1} \cdots (C\gamma^5)_{\alpha_{2n_l} \rho_{2n_l}} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_{2n_l} e^{i(\sum_{i=n_l+1}^{2n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i - \sum_{i=1}^{n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i)} \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \\
& \times \theta(\bar{x}_{\sigma(2n_l)}^0 - \bar{x}_{\sigma(2n_l-1)}^0) \cdots \theta(\bar{x}_{\sigma(2)}^0 - \bar{x}_{\sigma(1)}^0) \langle 0 | U^\dagger(\mathcal{T}) \psi_{\rho_{\sigma(1)} a_{\sigma(1)}}(\bar{x}_{\sigma(1)}) \\
& \cdots \psi_{\rho_{\sigma(2n_l)} a_{\sigma(2n_l)}}(\bar{x}_{\sigma(2n_l)}) U(\mathcal{T}) | 0 \rangle. \tag{1.185}
\end{aligned}$$

Utilizando a antiunitariedade de $U(\mathcal{T})$ e a eq. (1.18), encontramos

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^4 \delta^4(P' - P) G_{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}, \beta_1 b_1 \dots \beta_{n_l} b_{n_l}}^{(n_l)}(p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \\
= & (C\gamma^5)_{\alpha_1 \rho_1} \cdots (C\gamma^5)_{\alpha_{2n_l} \rho_{2n_l}} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_{2n_l} e^{i(\sum_{i=n_l+1}^{2n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i - \sum_{i=1}^{n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i)} \\
& \times \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \theta(\bar{x}_{\sigma(2n_l)}^0 - \bar{x}_{\sigma(2n_l-1)}^0) \cdots \theta(\bar{x}_{\sigma(2)}^0 - \bar{x}_{\sigma(1)}^0) \langle 0 | \psi_{\rho_{\sigma(2n_l)} a_{\sigma(2n_l)}}^\dagger(\bar{x}_{\sigma(2n_l)}) \cdots \\
& \times \psi_{\rho_{\sigma(1)} a_{\sigma(1)}}^\dagger(\bar{x}_{\sigma(1)}) | 0 \rangle \\
= & (-1)^{\frac{2n_l(2n_l-1)}{2}} (C\gamma^5)_{\alpha_1 \rho_1} \cdots (C\gamma^5)_{\alpha_{2n_l} \rho_{2n_l}} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_{2n_l} e^{i(\sum_{i=n_l+1}^{2n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i - \sum_{i=1}^{n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i)} \\
& \times \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \theta(\bar{x}_{\sigma(1)}^0 - \bar{x}_{\sigma(2)}^0) \cdots \theta(\bar{x}_{\sigma(2n_l-1)}^0 - \bar{x}_{\sigma(2n_l)}^0) \langle 0 | \psi_{\rho_{\sigma(1)} a_{\sigma(1)}}^\dagger(\bar{x}_{\sigma(1)}) \cdots \\
& \times \psi_{\rho_{\sigma(2n_l)} a_{\sigma(2n_l)}}^\dagger(\bar{x}_{\sigma(2n_l)}) | 0 \rangle \\
= & (-1)^{\frac{2n_l(2n_l-1)}{2}} (-)^{n_l^2} (C\gamma^5)_{\alpha_1 \rho_1} \cdots (C\gamma^5)_{\alpha_{2n_l} \rho_{2n_l}} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_{2n_l} e^{i(\sum_{i=n_l+1}^{2n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i - \sum_{i=1}^{n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i)} \\
& \times \langle 0 | T \psi_{\rho_{n_l+1} a_{n_l+1}}^\dagger(\bar{x}_{n_l+1}) \cdots \psi_{\rho_{2n_l} a_{2n_l}}^\dagger(\bar{x}_{2n_l}) \psi_{\rho_1 a_1}^\dagger(\bar{x}_1) \cdots \psi_{\rho_{n_l} a_{n_l}}^\dagger(\bar{x}_{n_l}) | 0 \rangle \\
= & (C\gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \rho_1} \cdots (C\gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{2n_l} \rho_{2n_l}} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_{2n_l} e^{i(\sum_{i=n_l+1}^{2n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i - \sum_{i=1}^{n_l} \bar{p}'_i \bar{x}_i)} \\
& \times \langle 0 | T \psi_{\rho_{n_l+1} a_{n_l+1}}^\dagger(\bar{x}_{n_l+1}) \cdots \psi_{\rho_{2n_l} a_{2n_l}}^\dagger(\bar{x}_{2n_l}) \bar{\psi}_{\rho_1 a_1}(\bar{x}_1) \cdots \bar{\psi}_{\rho_{n_l} a_{n_l}}(\bar{x}_{n_l}) | 0 \rangle \\
= & (C\gamma^5 \gamma^0)_{\beta_1 \rho_1} \cdots (C\gamma^5 \gamma^0)_{\beta_{n_l} \rho_{n_l}} (C\gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_1 \xi_1} \cdots (C\gamma^5 \gamma^0)_{\alpha_{n_l} \xi_{n_l}} \\
& \times (2\pi)^4 \delta^4(P' - P) G_{\rho_1 b_1 \dots \rho_{n_l} b_{n_l}; \xi_1 a_1 \dots \xi_{n_l} a_{n_l}}^{(n_l)}(\bar{p}_1 \dots \bar{p}_{n_l}, \bar{p}'_1 \dots \bar{p}'_{n_l}). \tag{1.186}
\end{aligned}$$

Construiremos soluções das eqs. (1.175), (1.176) com os números quânticos P_l , J_l , I_l , r_l , λ_l , τ_l . Para isso é necessário definirmos os operadores da helicidade, das componentes do isospin, da paridade intrínseca e das componentes cartesianas do momento angular intrínseco. Escolhamos q_{n_l} como a variável dependente de momento relativo. Sejam $\mathfrak{h}(P_l)$ o operador da helicidade, \mathcal{J}^u o operador da componente do momento angular intrínseco segundo o eixo X^u , \mathcal{J}^1 , \mathcal{J}^2 , \mathcal{J}^3 os operadores das componentes do isospin, sendo $[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] = i\varepsilon_{ijk} \mathcal{J}^k$, \mathfrak{P} o operador da paridade intrínseca e $\Omega(q_1 \dots q_{n_l})$ uma

função diferenciável. Então:

$$(\mathfrak{h}(P_l)\Omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\gamma^5 \gamma^0 \gamma)_{\alpha_i \beta_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\alpha_j \beta_j} \Omega_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}) \right. \\ \left. - i \sum_{i=1}^{n_l-1} \mathbf{q}_i \times \nabla_{\mathbf{q}_i} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}) \right\} \cdot \frac{\mathbf{P}_l}{|\mathbf{P}_l|}, \quad (1.187)$$

$$(\mathcal{J}^u \Omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\gamma^5 \gamma^0 \gamma^u)_{\alpha_i \beta_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\alpha_j \beta_j} \Omega_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}) \\ - i \sum_{i=1}^{n_l-1} (\mathbf{q}_i \times \nabla_{\mathbf{q}_i})^u \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}), \quad (1.188)$$

$$(\mathcal{I}^u \Omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\sigma^u)_{a_i b_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{a_j b_j} \Omega_{b_1 \dots b_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}), \quad (1.189)$$

$$(\mathfrak{P} \Omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l}) = \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^0 \dots \gamma_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}}^0 \Omega_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}}(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_{n_l}); \quad (1.190)$$

$(\Omega \mathfrak{h}(P_l))_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l})$ é o segundo membro da eq. (1.187) após as substituições de $(\gamma^5 \gamma^0 \gamma)_{\alpha_i \beta_i}$ por $(\gamma^5 \gamma^0 \gamma)_{\beta_i \alpha_i}$ e $-i$ por i ; $(\Omega \mathcal{J}^u)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l})$ é o segundo membro da eq. (1.188) após as substituições de $(\gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu)_{\alpha_i \beta_i}$ por $(\gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu)_{\beta_i \alpha_i}$ e $-i$ por i ; $(\Omega \mathcal{I}^u)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l})$ é o segundo membro da eq. (1.189) após a substituição de $(\sigma^u)_{a_i b_i}$ por $(\sigma^u)_{b_i a_i}$; $(\Omega \mathfrak{P})_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l})$ é o segundo membro da eq. (1.190).

Comecemos por construir soluções da eq. (1.175). Seja $\Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l)$ uma solução da eq. (1.175) com o momento \tilde{P}_l tal que

$$\tilde{\mathcal{J}}^2 \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) = J_l(J_l + 1) \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l), \quad (1.191)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}^2 \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) = I_l(I_l + 1) \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l), \quad (1.192)$$

$$\mathfrak{P} \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) = r_l \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l), \quad (1.193)$$

$$\mathcal{J}^3 \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) = -\lambda_l \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l), \quad (1.194)$$

$$\mathcal{I}^3 \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) = -\tau_l \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) \quad (1.195)$$

e seja $\Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l)$ definido por

$$\Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = a(\lambda_l) b(\tau_l) (\mathcal{J}^1 + i \mathcal{J}^2)^{J_l + \lambda_l} (\mathcal{I}^1 + i \mathcal{I}^2)^{I_l + \tau_l} \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l), \quad (1.196)$$

em que $a(-J_l) = b(-I_l) = 1$, se $\lambda_l > -J_l$

$$a(\lambda_l) = \prod_{k=-J_l+1}^{\lambda_l} \frac{1}{\sqrt{J_l(J_l+1) - (k-1)k}}, \quad (1.197)$$

se $\tau_l > -I_l$

$$b(\tau_l) = \prod_{k=-I_l+1}^n \frac{1}{\sqrt{I_l(I_l+1)-(k-1)k}}. \quad (1.198)$$

Utilizando as relações

$$[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] = i\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}^k, \quad [\mathcal{J}^i, \mathcal{I}^j] = i\varepsilon_{ijk}\mathcal{I}^k, \quad [\mathcal{J}^i, \mathcal{I}^j] = [\mathfrak{P}, \mathcal{J}^i] = [\mathfrak{P}, \mathcal{I}^i] = 0, \quad (1.199)$$

concluímos que

$$[\tilde{\mathcal{J}}^2, (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{J_l+\lambda_l} (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{I_l+\tau_l}] = 0, \quad (1.200)$$

$$[\tilde{\mathcal{J}}^2, (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{J_l+\lambda_l} (\mathcal{I}^1 + i\mathcal{I}^2)^{I_l+\tau_l}] = 0, \quad (1.201)$$

$$[\mathfrak{P}, (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{J_l+\lambda_l} (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{I_l+\tau_l}] = 0, \quad (1.202)$$

$$[\mathcal{J}^3, (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{J_l+\lambda_l} (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{I_l+\tau_l}] = (J_l + \lambda_l)(\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{J_l+\lambda_l} (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{I_l+\tau_l}, \quad (1.203)$$

$$[\mathcal{I}^3, (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{J_l+\lambda_l} (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{I_l+\tau_l}] = (I_l + \tau_l)(\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{J_l+\lambda_l} (\mathcal{J}^1 + i\mathcal{J}^2)^{I_l+\tau_l}. \quad (1.204)$$

Assim,

$$\tilde{\mathcal{J}}^2 \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = J_l(J_l+1) \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.205)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}^2 \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = I_l(I_l+1) \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.206)$$

$$\mathfrak{P} \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = r_l \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.207)$$

$$\mathcal{J}^3 \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = \lambda_l \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.208)$$

$$\mathcal{I}^3 \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = \tau_l \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l). \quad (1.209)$$

Das regras de transformação de $G_0^{(n_l)}$ e $O^{(n_l)}$ sob as transformações de L_+^\uparrow segue-se a regra de transformação de $G_0^{(n_l)} O^{(n_l)}$:

$$(G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}, \rho_1 \dots \rho_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) = S_{\alpha_1 \xi_1}^{-1}(\Lambda) \dots S_{\alpha_{n_l} \xi_{n_l}}^{-1}(\Lambda) \\ \times S_{\tau_1 \rho_1}(\Lambda) \dots S_{\tau_{n_l} \rho_{n_l}}(\Lambda) (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}, \tau_1 \dots \tau_{n_l}} (\Lambda p'_1 \dots \Lambda p'_{n_l}, \Lambda p_1 \dots \Lambda p_{n_l}). \quad (1.210)$$

Substituindo Λ por $R(\phi \hat{e}^u)$ e P_l por \tilde{P}_l na eq. (1.210) e calculando a derivada do segundo membro em $\phi = 0$, deduzimos a identidade

$$(G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}, \rho_1 \dots \rho_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\gamma^5 \gamma^0 \gamma^u)_{\rho_i \beta_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\rho_j \beta_j}$$

$$\begin{aligned}
& + i \sum_{i=1}^{n_l-1} (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}, \beta_1 \dots \beta_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) (\mathbf{q}_i \times \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{q}_i})^u = \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\gamma^5 \gamma^0 \gamma^u)_{\alpha_i \xi_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\alpha_j \xi_j} (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}, \beta_1 \dots \beta_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \\
& - i \sum_{i=1}^{n_l-1} (\mathbf{q}'_i \times \nabla_{\mathbf{q}'_i})^u (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}, \beta_1 \dots \beta_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}), \quad (1.211)
\end{aligned}$$

em que $p'_i = \tilde{P}_l/n_l + q'_i$, $p_i = \tilde{P}_l/n_l + q_i$. De modo análogo a identidade

$$\begin{aligned}
& (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{a_1 \dots a_{n_l}, b_1 \dots b_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\sigma^u)_{b_i c_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{b_j c_j} = \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\sigma^u)_{a_i b_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{a_j b_j} (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{b_1 \dots b_{n_l}, c_1 \dots c_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \quad (1.212)
\end{aligned}$$

resulta da regra de transformação de $G_0^{(n_l)} O^{(n_l)}$ sob as transformações $SU(2)$. As eqs. (1.211), (1.212) podem ser escritas alternativamente como $[G_0^{(n_l)} O^{(n_l)}, \mathcal{J}^u] = [G_0^{(n_l)} O^{(n_l)}, \mathcal{I}^u] = 0$. Agora, das eqs. (1.196), (1.211), (1.212) e de $[P_{12}, \mathcal{J}^u] = [P_{12}, \mathcal{I}^u] = 0$ decorre que

$$\begin{aligned}
(-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} G_0^{(n_l)} O^{(n_l)} P_{12}^{n_l-2} \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) &= a(\lambda_l) b(\tau_l) (\mathcal{J}^1 + i \mathcal{J}^2)^{J_l + \lambda_l} (\mathcal{I}^1 + i \mathcal{I}^2)^{I_l + \tau_l} \\
&\times (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} G_0^{(n_l)} O^{(n_l)} P_{12}^{n_l-2} \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l). \quad (1.213)
\end{aligned}$$

Em virtude de

$$\Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) = (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} G_0^{(n_l)} O^{(n_l)} P_{12}^{n_l-2} \Theta(\tilde{P}_l - J_l - I_l) \quad (1.214)$$

a eq. (1.213) reduz-se a

$$\Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} G_0^{(n_l)} O^{(n_l)} P_{12}^{n_l-2} \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l). \quad (1.215)$$

Definamos $\Theta(P_l \lambda_l \tau_l)$ por

$$\begin{aligned}
\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= [S(R_{\phi, \theta, 0}) S(B(\eta \hat{e}^3))]_{\alpha_1 \beta_1} \dots [S(R_{\phi, \theta, 0}) S(B(\eta \hat{e}^3))]_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \\
&\times \Theta_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}} (\check{q}_1 \dots \check{q}_{n_l} \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l). \quad (1.216)
\end{aligned}$$

Prova-se que:

1.

$$\tilde{\mathcal{J}}^2 \Theta(P_l \lambda_l \tau_l) = I_l(I_l + 1) \Theta(P_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.217)$$

$$\mathcal{I}^3 \Theta(P_l \lambda_l \tau_l) = \tau_l \Theta(P_l \lambda_l \tau_l). \quad (1.218)$$

2.

$$\Theta(P_l \lambda_l \tau_l) = (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} G_0^{(n_l)} O^{(n_l)} P_{12}^{n_l-2} \Theta(P_l \lambda_l \tau_l) \quad (1.219)$$

recorrendo à propriedade (1.210) e à eq. (1.215);

3.

$$h(P_l) \Theta(P_l \lambda_l \tau_l) = \lambda_l \Theta(P_l \lambda_l \tau_l) \quad (1.220)$$

lançando mão de $\mathcal{J}^3 \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = \lambda_l \Theta(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l)$ e da expressão do operador da helicidade

$$\begin{aligned} (h(P_l) \Omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} [S(R_{\phi, \theta, 0}) \gamma^5 \gamma^0 \gamma^3 S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\alpha_i \beta_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\alpha_j \beta_j} \\ &\times \Omega_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}) - i \sum_{i=1}^{n_l-1} (\check{q}_i \times \nabla_{\check{q}_i})^3 \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}). \end{aligned} \quad (1.221)$$

A seguir, produziremos soluções da eq. (1.176). Seja $\bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l)$ definido por

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_1 \alpha_1} \dots \\ &\times [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}} (C \gamma^5)_{\beta_1 \xi_1} \dots (C \gamma^5)_{\beta_{n_l} \xi_{n_l}} \\ &\times \Theta_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}} (\check{q}_1 \dots \check{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l). \end{aligned} \quad (1.222)$$

Então,

$$\bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) \mathfrak{P} = r_l \bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.223)$$

porque

$$\begin{aligned} (\bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) \mathfrak{P})_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}) &= \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^0 \dots \gamma_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}}^0 (C \gamma^5)_{\beta_1 \xi_1} \dots (C \gamma^5)_{\beta_{n_l} \xi_{n_l}} \Theta_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}} (\bar{q}_1 \dots \bar{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \\ &= (C \gamma^5)_{\alpha_1 \beta_1} \dots (C \gamma^5)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \gamma_{\beta_1 \xi_1}^0 \dots \gamma_{\beta_{n_l} \xi_{n_l}}^0 \Theta_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}} (\bar{q}_1 \dots \bar{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \\ &= r_l (C \gamma^5)_{\alpha_1 \beta_1} \dots (C \gamma^5)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \Theta_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \\ &= r_l \bar{\Theta}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \end{aligned} \quad (1.224)$$

e

$$\bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) \mathcal{J}^3 = \lambda_l \bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.225)$$

visto que

$$\begin{aligned}
& (\bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) \mathcal{J}^3)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\gamma^5 \gamma^0 \gamma^3)_{\beta_i \alpha_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\alpha_j \beta_j} (C \gamma^5)_{\beta_1 \xi_1} \dots (C \gamma^5)_{\beta_{n_l} \xi_{n_l}} \Theta_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \\
&\quad + i \sum_{i=1}^{n_l-1} (\mathbf{q}_i \times \nabla_{\mathbf{q}_i})^3 (C \gamma^5)_{\alpha_1 \beta_1} \dots (C \gamma^5)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \Theta_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \\
&= -(C \gamma^5)_{\alpha_1 \beta_1} \dots (C \gamma^5)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} (\gamma^5 \gamma^0 \gamma^3)_{\beta_i \xi_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\beta_j \xi_j} \Theta_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \right. \\
&\quad \left. - i \sum_{i=1}^{n_l-1} (\mathbf{q}_i \times \nabla_{\mathbf{q}_i})^3 \Theta_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \right] \\
&= \lambda_l (C \gamma^5)_{\alpha_1 \beta_1} \dots (C \gamma^5)_{\alpha_{n_l} \beta_{n_l}} \Theta_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l) \\
&= \lambda_l \bar{\Theta}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l). \tag{1.226}
\end{aligned}$$

Para provar que

$$\bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) = (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} \bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) P_{12}^{n_l-2} O^{(n_l)} G_0^{(n_l)} \tag{1.227}$$

necessitamos da identidade

$$\begin{aligned}
& (O^{(n_l)} G_0^{(n_l)})_{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}, \beta_1 b_1 \dots \beta_{n_l} b_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) = (C \gamma^5)_{\beta_1 \rho_1} \dots (C \gamma^5)_{\beta_{n_l} \rho_{n_l}} \\
&\quad \times (C \gamma^5)_{\alpha_1 \sigma_1} \dots (C \gamma^5)_{\alpha_{n_l} \sigma_{n_l}} (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\rho_1 b_1 \dots \rho_{n_l} b_{n_l}, \sigma_1 a_1 \dots \sigma_{n_l} a_{n_l}} (p_1 \dots p_{n_l}, p'_1 \dots p'_{n_l}),
\end{aligned} \tag{1.228}$$

que é uma consequência das regras de transformação de $G_0^{(n_l)}$ e $O^{(n_l)}$ relativamente a \mathcal{T} e \mathcal{P} homólogas da eq. (1.181). A demonstração parte do segundo membro da eq. (1.227) e utiliza a eq. (1.215):

$$\begin{aligned}
& (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} (C \gamma^5)_{\beta_1 \tau_1} \dots (C \gamma^5)_{\beta_{n_l} \tau_{n_l}} (2\pi)^4 \int \frac{d^4 q'_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 q'_{n_l}}{(2\pi)^4} \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{n_l} q'_i \right) \\
&\quad \times (P_{12}^{n_l-2} \Theta(\tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l))_{\tau_1 b_1 \dots \tau_{n_l} b_{n_l}} (q'_1 \dots q'_{n_l}) \\
&\quad \times (O^{(n_l)} G_0^{(n_l)})_{\beta_1 b_1 \dots \beta_{n_l} b_{n_l}, \alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}} (k'_1 \dots k'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) \\
&= (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} (C \gamma^5)_{\beta_1 \tau_1} \dots (C \gamma^5)_{\beta_{n_l} \tau_{n_l}} (C \gamma^5)_{\beta_1 \rho_1} \dots (C \gamma^5)_{\beta_{n_l} \rho_{n_l}} \\
&\quad \times (C \gamma^5)_{\alpha_1 \sigma_1} \dots (C \gamma^5)_{\alpha_{n_l} \sigma_{n_l}} (2\pi)^4 \int \frac{d^4 q'_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 q'_{n_l}}{(2\pi)^4} \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{n_l} q'_i \right) \\
&\quad \times (P_{12}^{n_l-2} \Theta(\tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l))_{\tau_1 b_1 \dots \tau_{n_l} b_{n_l}} (q'_1 \dots q'_{n_l})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\sigma_1 a_1 \dots \sigma_{n_l} a_{n_l}, \rho_1 b_1 \dots \rho_{n_l} b_{n_l}} (p_1 \dots p_{n_l}, k'_1 \dots k'_{n_l}) \\
& = (C\gamma^5)_{\alpha_1 \sigma_1} \dots (C\gamma^5)_{\alpha_{n_l} \sigma_{n_l}} (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} (2\pi)^4 \int \frac{d^4 q'_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 q'_{n_l}}{(2\pi)^4} \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{n_l} q'_i \right) \\
& \quad \times (G_0^{(n_l)} O^{(n_l)})_{\sigma_1 a_1 \dots \sigma_{n_l} a_{n_l}, \rho_1 b_1 \dots \rho_{n_l} b_{n_l}} (p_1 \dots p_{n_l}, k'_1 \dots k'_{n_l}) \\
& \quad \times (P_{12}^{n_l-2} \Theta(\tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l))_{\rho_1 b_1 \dots \rho_{n_l} b_{n_l}} (q'_1 \dots q'_{n_l}) \\
& = \bar{\Theta}_{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_{n_l} a_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l} \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \tag{1.229}
\end{aligned}$$

sendo $k'_i = \tilde{P}/n_l + q'_i$. Demonstra-se ainda que:

1.

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) \tilde{\mathcal{J}}^2 &= J_l(J_l+1) \bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l), \\
\bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l) \tilde{\mathcal{J}}^2 &= I_l(I_l+1) \bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l), \\
\bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l) \mathcal{J}^3 &= \tau_l \bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l); \tag{1.230}
\end{aligned}$$

2.

$$\bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l) = (-1)^{n_l-2} c^{(n_l)} \bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l) P_{12}^{n_l-2} O^{(n_l)} G_0^{(n_l)} \tag{1.231}$$

utilizando a regra de transformação

$$\begin{aligned}
(O^{(n_l)} G_0^{(n_l)})_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}, \rho_1 \dots \rho_{n_l}} (p'_1 \dots p'_{n_l}, p_1 \dots p_{n_l}) &= S_{\alpha_1 \xi_1}^{-1}(\Lambda) \dots S_{\alpha_{n_l} \xi_{n_l}}^{-1}(\Lambda) \\
&\times S_{\tau_1 \rho_1}(\Lambda) \dots S_{\tau_{n_l} \rho_{n_l}}(\Lambda) (O^{(n_l)} G_0^{(n_l)})_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}, \tau_1 \dots \tau_{n_l}} (\Lambda p'_1 \dots \Lambda p'_{n_l}, \Lambda p_1 \dots \Lambda p_{n_l}). \tag{1.232}
\end{aligned}$$

e as eqs. (1.222), (1.227);

3.

$$\bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l) \mathfrak{h}(P_l) = \lambda_l \bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l) \tag{1.233}$$

recorrendo a $\bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l) \mathcal{J}^3 = \lambda_l \bar{\Theta}(\tilde{P}_l \lambda_l \tau_l)$, à eq. (1.222) e à expressão do operador da helicidade

$$\begin{aligned}
(\Omega \mathfrak{h}(P_l))_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_l} [S(R_{\phi, \theta, 0}) \gamma^5 \gamma^0 \gamma^3 S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_i \alpha_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n_l \\ j \neq i}} \delta_{\alpha_j \beta_j} \\
&\times \Omega_{\beta_1 \dots \beta_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}) + i \sum_{i=1}^{n_l-1} (\check{q}_i \times \nabla_{\check{q}_i})^3 \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}} (q_1 \dots q_{n_l}). \tag{1.234}
\end{aligned}$$

Definamos $\Psi(P_l \lambda_l \tau_l)$, $\bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l)$ por

$$\Psi(P_l \lambda_l \tau_l) = c_l \Theta(P_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.235)$$

$$\bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l) = (-1)^{J_l + \lambda_l} c_l e^{i\theta_l} \bar{\Theta}(P_l \lambda_l \tau_l), \quad (1.236)$$

sendo c_l , θ_l tais que $c_l > 0$, $0 \leq \theta_l < 2\pi$ e são satisfeitas as eqs. (1.86) com $l = d$ ou (1.99) com $\Psi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$, $\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t)$ substituídos por $\Psi(P_t \lambda_t \tau_t)$, $\bar{\Psi}(P_t \lambda_t \tau_t)$ respectivamente conforme $l = d$ ou $l = t$. As funções $\Psi(P_l \lambda_l \tau_l)$, $\bar{\Psi}(P_l \lambda_l \tau_l)$ que construímos, eqs. (1.235) e (1.236), descrevem o respectivo estado ligado no formalismo de BS. A relação entre essas funções é

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_l}}(q_1 \dots q_{n_l} P_l \lambda_l \tau_l) &= (-1)^{J_l + \lambda_l} e^{i\theta_l} \\ &\times [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_1 \alpha_1} \dots [S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\phi, \theta, 0})]_{\beta_{n_l} \alpha_{n_l}} \\ &\times (C\gamma^5)_{\beta_1 \xi_1} \dots (C\gamma^5)_{\beta_{n_l} \xi_{n_l}} \Psi_{\xi_1 \dots \xi_{n_l}}(\check{q}_1 \dots \check{q}_{n_l} \tilde{P}_l - \lambda_l \tau_l), \end{aligned} \quad (1.237)$$

ou seja, é similar à deduzida no âmbito da TQRC, eq. (1.174).

1.5 Inclusão da interacção electromagnética

A interacção do campo electromagnético e do sistema \mathcal{S} de bosões e fermiões é introduzida pela prescrição de acoplamento mínimo: suponhamos que há m partículas carregadas; dado $i = 1, \dots, m$, sejam $\varphi_{\alpha_i}^{(i)}(x)$ e $\varphi_{\alpha_i}^{(i)c}(x)$ os campos conjugados não quantificados da partícula carregada i e da respectiva antipartícula, e_i a carga electromagnética da partícula i ; seja $A^\mu(x)$ o potencial electromagnético não quantificado; então, na densidade lagrangeana não quantificada de \mathcal{S} , \mathcal{L} , para cada $i = 1, \dots, m$ substituem-se $\partial^\mu \varphi^{(i)}$, $\partial^\mu \varphi^{(i)c}$ por $(\partial^\mu + ie_i A^\mu)\varphi^{(i)}$, $(\partial^\mu - ie_i A^\mu)\varphi^{(i)c}$ respectivamente. Essas substituições transformam \mathcal{L} em $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}^\gamma$. A densidade lagrangeana do campo electromagnético, \mathcal{L}_0^γ , é definida por

$$\mathcal{L}_0^\gamma = -1/4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \quad (1.238)$$

As densidades lagrangeanas $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}^\gamma$ e \mathcal{L}_0^γ são invariantes com respeito a qualquer transformação $U(1)$ local de gauge dos campos $\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)c}, \dots, \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)c}$ e A^μ , ou seja, dada uma função real de x, ϑ , tal que existem as derivadas parciais de primeira ordem, $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}^\gamma$ e \mathcal{L}_0^γ não são modificadas pelas transformações $U(1)$ locais de gauge

$$\varphi'^{(1)} = e^{-ie_1\vartheta} \varphi^{(1)}, \dots, \varphi'^{(m)} = e^{-ie_m\vartheta} \varphi^{(m)},$$

$$\varphi'^{(1)c} = e^{ie_1\vartheta} \varphi^{(1)c}, \dots, \varphi'^{(m)c} = e^{ie_m\vartheta} \varphi^{(m)c},$$

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \vartheta. \quad (1.239)$$

A invariância de $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}^\gamma + \mathcal{L}_0^\gamma$ relativamente a qualquer transformação $U(1)$ global de *gauge* - em que, por definição, a respectiva função ϑ é constante - tem como consequência, pelo teorema de Noether [32], que a densidade de corrente electromagnética, $J^\mu(x)$, é definida por

$$J^\mu = -ie_i \left[\frac{\partial(\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}^\gamma)}{\partial(\partial_\mu \varphi_{\alpha_i}^{(i)})} \varphi_{\alpha_i}^{(i)} - \varphi_{\alpha_i}^{(i)c} \frac{\partial(\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}^\gamma)}{\partial(\partial_\mu \varphi_{\alpha_i}^{(i)c})} \right] \quad (1.240)$$

e é conservada.

Feita a quantificação canónica de todos os campos ($\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)c}, \dots, \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)c}, A^\mu$ e os campos das partículas neutras) e desenvolvendo-os em termos de operadores de criação e destruição, o segundo membro da eq. (1.240), agora um operador, é, após o seu ordenamento normal, o operador da densidade de corrente electromagnética, $J^\mu(x)$. O termo da densidade lagrangeana linear no potencial é $-J^{(1)\mu}(x)A_\mu(x)$, sendo $J^{(1)\mu}(x)$ o termo da densidade de corrente linear nas cargas electromagnéticas:

$$J^{(1)\mu} = -ie_i : \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_{\alpha_i}^{(i)})} \varphi_{\alpha_i}^{(i)} - \varphi_{\alpha_i}^{(i)c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_{\alpha_i}^{(i)c})} \right] : \quad (1.241)$$

Para a definição em ordem mais baixa nas cargas do elemento da matriz S correspondente a uma reacção electromagnética importa apenas $J^{(1)\mu}(x)$.

Consideremos o campo electromagnético ausente. O operador da carga, Q , é definido como

$$Q = \int d^3x J^{(1)0}(x). \quad (1.242)$$

A densidade de corrente e a carga são conservadas. Isso significa respectivamente que

$$\partial_\mu J^{(1)\mu} = 0, \quad (1.243)$$

$$[Q, H] = 0. \quad (1.244)$$

A lei de transformação de $J^{(1)\mu}(x)$ com respeito às translações no espaço-tempo é

$$J^{(1)\mu}(x+a) = e^{iPx} J^{(1)\mu}(a) e^{-iPx}. \quad (1.245)$$

Empregando essa regra de transformação constata-se que a equação de continuidade, eq. (1.243), é equivalente a

$$[P_\mu, J^{(1)\mu}(0)] = 0. \quad (1.246)$$

Da eq. (1.246) obtém-se a condição de conservação da corrente:

$$(P'_l - P_l)_\mu \langle P'_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)\mu}(0) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle = 0. \quad (1.247)$$

Seja $e_l(\tau_l)$ a carga do estado $|P_l \lambda_l \tau_l\rangle$. É claro que

$$\langle P'_l \lambda'_l \tau'_l | Q | P_l \lambda_l \tau_l \rangle = e_l(\tau_l) 2P_l^0 (2\pi)^3 \delta_{\lambda'_l \lambda_l} \delta_{\tau'_l \tau_l} \delta^3(\mathbf{P}'_l - \mathbf{P}_l). \quad (1.248)$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} \langle P'_l \lambda'_l \tau'_l | Q | P_l \lambda_l \tau_l \rangle &= \int d^3x \langle P'_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)0}(x) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle \\ &= \int d^3x e^{i(P'_l - P_l)x} \langle P'_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)0}(0) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{P}'_l - \mathbf{P}_l) \langle P'_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)0}(0) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle. \end{aligned} \quad (1.249)$$

Consequentemente,

$$\langle P_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)0}(0) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle = e_l(\tau_l) 2P_l^0 \delta_{\lambda'_l \lambda_l} \delta_{\tau'_l \tau_l}. \quad (1.250)$$

Lançando mão da lei de transformação de $J^{(1)\mu}(0)$ sob a inversão espacial, ou seja,

$$U^{-1}(\mathcal{P}) J^{(1)\mu}(0) U(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu_\nu J^{(1)\nu}(0), \quad (1.251)$$

e da igualdade

$$\langle \tilde{P}_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)\mu}(0) | \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l \rangle = \langle \tilde{P}_l \lambda'_l \tau'_l | U^{-1}(\mathcal{P}) J^{(1)\mu}(0) U(\mathcal{P}) | \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l \rangle, \quad (1.252)$$

a qual é uma consequência da eq. (1.166), encontramos

$$\langle \tilde{P}_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)}(0) | \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l \rangle = 0. \quad (1.253)$$

As eqs. (1.250), (1.253) implicam

$$\langle \tilde{P}_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)\mu}(0) | \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l \rangle = e_l(\tau_l) 2\tilde{P}_l^\mu \delta_{\lambda'_l \lambda_l} \delta_{\tau'_l \tau_l}. \quad (1.254)$$

Utilizando a eq. (1.254) e

$$\begin{aligned} &\langle P_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)\mu}(0) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle \\ &= \langle \tilde{P}_l \lambda'_l \tau'_l | U^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) U^{-1}(R_{\phi,\theta,0}) J^{(1)\mu}(0) U(R_{\phi,\theta,0}) U(B(\eta \hat{e}^3)) | \tilde{P}_l \lambda_l \tau_l \rangle, \end{aligned} \quad (1.255)$$

$$U^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) U^{-1}(R_{\phi,\theta,0}) J^{(1)\mu}(0) U(R_{\phi,\theta,0}) U(B(\eta \hat{e}^3)) = (R_{\phi,\theta,0} B(\eta \hat{e}^3))^{\mu}_\nu J^{(1)\nu}(0), \quad (1.256)$$

obtém-se a condição de conservação da carga:

$$\langle P_l \lambda'_l \tau'_l | J^{(1)\mu}(0) | P_l \lambda_l \tau_l \rangle = e_l(\tau_l) 2P_l^\mu \delta_{\lambda'_l \lambda_l} \delta_{\tau'_l \tau_l}. \quad (1.257)$$

Mantendo a condição de campo electromagnético inexistente, a função de Green G^μ é definida como

$$G_{\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^\mu(p'_1 p'_2 p'_3, p_1 p_2 p_3) = \int \prod_{k=1}^3 d^4 x'_k \prod_{j=1}^3 d^4 x_j e^{i(p'_1 x'_1 + p'_2 x'_2 + p'_3 x'_3 - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3)} \\ \times \langle 0 | T \psi_{\alpha'_1}(x'_1) \psi_{\alpha'_2}(x'_2) \psi_{\alpha'_3}(x'_3) \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \bar{\psi}_{\alpha_3}(x_3) J^{(1)\mu}(0) | 0 \rangle. \quad (1.258)$$

Os diagramas de Feynman de G^μ dividem-se em dois grupos [45]: (a) os resultantes da ligação de um fotão externo sem propagador a todos os sítios possíveis de cada diagrama de G , ou seja, a cada linha de partícula carregada e a cada vértice de um termo de interacção de \mathcal{L} que contém o 4-gradiente do campo de uma partícula carregada; (b) os restantes, tendo cada um deles a particularidade de conservar a corrente electromagnética. Admitamos que as interacções intervenientes são tais que os diagramas de G^μ são os descritos na alínea (a). Nesse caso, encontra-se uma equação integral para G^μ . Antes de exibi-la, convém explicitarmos o significado de ligar um fotão a uma quantidade que é representada pela soma de diagramas: une-se uma linha externa de fotão sem propagador a todos os sítios possíveis (na acepção mencionada atrás) de cada diagrama dessa quantidade e somam-se as contribuições dos diagramas assim gerados. Se um fotão é unido a todos os sítios possíveis exceptuando as linhas externas, diz-se que é ligado internamente. No que respeita à notação, representamos por X^μ a componente μ do resultado da ligação de um fotão a uma quantidade X . Terminado o aparte, escrevemos a primeira eq. (1.61) como

$$G = \mathcal{A}_3 G_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 D_{0i} v_i G, \quad (1.259)$$

sendo $D_{0i} = d_j d_k$ e i, j, k distintos entre si. Ligando um fotão à eq. (1.259), ou seja, a ambos os membros, obtém-se imediatamente a seguinte equação integral cuja incógnita é G^μ :

$$G^\mu = \mathcal{A}_3 G_0^\mu + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (D_{0i}^\mu v_i G + D_{0i} v_i^\mu G + D_{0i} v_i G^\mu). \quad (1.260)$$

Nessa equação, o fotão é ligado internamente a v_i produzindo v_i^μ . Na mesma equação, os termos entre os parêntesis resultaram da decomposição

$$(D_{0i} v_i G)^\mu = D_{0i}^\mu v_i G + D_{0i} v_i^\mu G + D_{0i} v_i G^\mu, \quad (1.261)$$

cuja parecência com a regra de derivação do produto de funções é manifesta. A semelhança não é casual, porque o processo de construção dos diagramas de G^μ está relacionado com uma derivação funcional [18]: sejam A_μ^{ext} um potencial externo não quantificado, G_A a função definida por

$$G_A(p'_1 p'_2 p'_3, p_1 p_2 p_3) = \int \prod_{k=1}^3 d^4 x'_k \prod_{j=1}^3 d^4 x_j e^{i(p'_1 x'_1 + p'_2 x'_2 + p'_3 x'_3 - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3)} \\ \times \langle 0 | T\psi(x'_1)\psi(x'_2)\psi(x'_3)\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\bar{\psi}(x_3) \exp\left(-i \int d^4 x J^{(1)\mu}(x) A_\mu^{ext}(x)\right) | 0 \rangle; \quad (1.262)$$

então,

$$G^\mu = i \left(\frac{\delta G_A}{\delta A_\mu^{ext}(0)} \right)_{A=0}. \quad (1.263)$$

Estabelecendo uma equação integral para G_A e derivando-a funcionalmente, retira-se a regra (1.261).

Antes de escrevermos a solução da eq. (1.260), analisemos a ligação de um fotão ao propagador completo do nucleão, d . O vértice do acoplamento NN- γ , $\tilde{\Gamma}^\mu$, é definido por $\tilde{\Gamma}_{\alpha'\alpha',\alpha\alpha}^\mu(p', p) = e_{\alpha'\alpha}\gamma_{\alpha'\alpha}^\mu$, em que $e_{pn} = e_{np} = e_{nn} = 0$, $e_{pp} = e_p$ e e_p é a carga eléctrica do protão. Sejam d_0 e $-i\Sigma$, respectivamente, o propagador livre e a auto-energia do nucleão. O propagador d satisfaz a equação

$$d = d_0 + d_0(-i\Sigma)d. \quad (1.264)$$

Ligando um fotão à eq. (1.264), notando que $d_0^\mu = d_0 \tilde{\Gamma}^\mu d_0$ e resolvendo a equação linear resultante dessa operação, encontra-se

$$d^\mu = d\Gamma^\mu d, \quad \Gamma^\mu = \tilde{\Gamma}^\mu + (-i\Sigma)^\mu. \quad (1.265)$$

Agora, pode-se escrever a solução da equação linear (1.260) [18]:

$$G^\mu = G \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left(\Gamma_i^\mu D_{0i}^{-1} - \frac{1}{2} v_i \Gamma_i^\mu + \frac{1}{2} v_i^\mu d_i^{-1} \right) G. \quad (1.266)$$

Demonstra-se, partindo da definição de G^μ , eq. (1.258), que na vizinhança de $(P'^0, P^0) = (P_t'^0 - i\eta', P_t^0 - i\eta)$ [18]

$$G^\mu(p'_1 p'_2 p'_3, p_1 p_2 p_3) \sim \sum_{\lambda'_t \tau'_t \lambda_t \tau_t} i \frac{\Psi(q'_1 q'_2 q'_3 P'_t \lambda'_t \tau'_t)}{2P_t'^0(P'^0 - P_t'^0 + i\eta')} \langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle \\ \times i \frac{\bar{\Psi}(q_1 q_2 q_3 P_t \lambda_t \tau_t)}{2P_t^0(P^0 - P_t^0 + i\eta)}. \quad (1.267)$$

A forma particular da expressão (1.266) de G^μ , caracterizada pelos dois factores G nos extremos, é útil para a dedução da fórmula da corrente electromagnética do trinucleão em termos do potencial v e de v^μ . Com efeito, comparando a eq. (1.267) com o equivalente do segundo membro da eq. (1.266) na vizinhança de $(P^0, P^0) = (P_t^{t0} - i\eta', P_t^0 - i\eta)$ emergente da eq. (1.23), deduz-se que [18]

$$\langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle = \bar{\Psi}(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left(\Gamma_i^\mu D_{0i}^{-1} - \frac{1}{2} v_i \Gamma_i^\mu + \frac{1}{2} v_i^\mu d_i^{-1} \right) \Psi(P_t \lambda_t \tau_t). \quad (1.268)$$

O primeiro cálculo no âmbito do formalismo de BS dos factores de forma de carga dos núcleos do hélio-3 e trítio é o das refs. [35, 36]. Nesse cálculo foi desprezada a contribuição da componente de dois corpos da corrente electromagnética nuclear e, por analogia com a forma da componente de um corpo da corrente nuclear não relativista, a corrente nuclear foi definida como o primeiro termo do segundo membro da eq. (1.268). Por conseguinte, não foi incluída a outra contribuição de um corpo - o segundo termo do segundo membro da eq. (1.268). Apesar desse facto e das diversas aproximações feitas nesse cálculo, os factores de forma de carga do trinucleão foram descritos qualitativamente.

A corrente electromagnética do trinucleão pode, como convém, ser expressa em termos da amplitude de dispersão de dois corpos t e de t^μ no lugar de v e v^μ . Uma maneira de se conseguir isso é começar por ligar um fotão à equação

$$G = A_3 G_0 + P_c G_0 T_1 G_0 P_c + P_c G_0 T_1 \tilde{Z} T_2 G_0 P_c \quad (1.269)$$

- resultante da eq. (1.79) - após eliminar d_1^{-1} , d_2^{-1} no segundo membro:

$$G^\mu = A_3 G_0^\mu + P_c (d_1 D_{01} t_1 D_{01})^\mu P_c + P_c (D_{01} t_1 \tilde{Z} t_2 D_{02})^\mu P_c. \quad (1.270)$$

Depara-se, assim, com a ligação do fotão a \tilde{Z} e internamente a t . Para obter t^μ liga-se internamente um fotão à primeira equação NHBS (1.62):

$$t^\mu = v^\mu + \frac{1}{2} v^\mu D_0 t + \frac{1}{2} v D_0^\mu t + \frac{1}{2} v D_0 t^\mu; \quad (1.271)$$

depois, determina-se facilmente a solução da equação linear (1.271) [18]:

$$t^\mu = \frac{1}{2} t D_0^\mu t + \left(1 + \frac{1}{2} t D_0 \right) v^\mu \left(1 + \frac{1}{2} D_0 t \right). \quad (1.272)$$

Quanto a \tilde{Z}^μ , cancela-se o factor d_2^{-1} no segundo membro da primeira eq. (1.78) e, depois disso, liga-se um fotão à equação resultante, obtendo-se

$$\tilde{Z}^\mu = G_0^\mu - D_{02}^\mu t_2 P_{12} \tilde{Z} - D_{02} t_2^\mu P_{12} \tilde{Z} - D_{02} t_2 P_{12} \tilde{Z}^\mu; \quad (1.273)$$

resolvida essa equação - o que é fácil porque é linear -, encontra-se a solução [18]

$$\tilde{Z}^\mu = \tilde{Z} d_2^{-1} d_2^\mu + \tilde{Z} (D_{02}^{-1} D_{02}^\mu D_{02}^{-1} d_2^{-1} - d_2^{-1} t_2^\mu P_{12}) \tilde{Z}. \quad (1.274)$$

Após examinarem-se os vários termos do segundo membro da eq. (1.270), é evidente que apenas o termo

$$P_c D_{01} t_1 \tilde{Z} (D_{02}^{-1} D_{02}^\mu D_{02}^{-1} d_2^{-1} - d_2^{-1} t_2^\mu P_{12}) \tilde{Z} t_2 D_{02} P_c, \quad (1.275)$$

originário de \tilde{Z}^μ , eq. (1.274), contribui para a corrente do trinucleão, porquanto é o único que tem pólos em $P'^0 = P_t'^0 - i\eta'$ e $P^0 = P_t^0 - i\eta$, eq. (1.97). Tendo presente as eqs (1.88), (1.94), (1.267), uma expressão da corrente do trinucleão é [18]:

$$\langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle = \bar{\Psi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) (D_{02}^{-1} D_{02}^\mu D_{02}^{-1} d_2^{-1} - d_2^{-1} t_2^\mu P_{12}) \Psi_2(P_t \lambda_t \tau_t). \quad (1.276)$$

Reparemos que na vizinhança de $(P'^0, P^0) = (P_t'^0 - i\eta', P_t^0 - i\eta)$

$$\tilde{Z}^\mu \sim \sum_{\lambda'_t \tau'_t \lambda_t \tau_t} \frac{i\Psi_2(P'_t \lambda'_t \tau'_t)}{2P_t'^0(P'^0 - P_t'^0 + i\eta')} \langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle \frac{i\bar{\Psi}_1(P_t \lambda_t \tau_t)}{2P_t^0(P^0 - P_t^0 + i\eta)}, \quad (1.277)$$

em que $\langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle$ é dado pela eq. (1.276).

A condição de conservação da corrente do trinucleão, eq. (1.247), é verificada pela fórmula (1.276). De facto, prova-se a identidade

$$q_\mu \tilde{Z}^\mu(p'_1 p'_2 p'_3, p_1 p_2 p_3) = i \sum_{i=1}^3 [e_i \tilde{Z}(p'_i - q, p_1 p_2 p_3) - \tilde{Z}(p'_1 p'_2 p'_3, p_i + q) e_i], \quad (1.278)$$

em que $q = p'_1 + p'_2 + p'_3 - p_1 - p_2 - p_3$, $p'_i - q$ ($p_i + q$) na função $\tilde{Z}(p'_i - q, p_1 p_2 p_3)$ ($\tilde{Z}(p'_1 p'_2 p'_3, p_i + q)$) representa a sequência de momentos resultante da substituição de p'_i (p_i) por $p'_i - q$ ($p_i + q$) na sequência $p'_1 p'_2 p'_3$ ($p_1 p_2 p_3$) [18]; as eqs. (1.97), (1.277), (1.278) acarretam a eq. (1.247). A dedução da relação (1.278) utiliza as identidades de Ward-Takahashi (WT) de d^μ [46, 47] e v^μ [48, 49]. As identidades de WT das funções de Green aparecem na TQRC como uma consequência da conservação da corrente electromagnética e do facto dessas funções serem expressas em termos de produtos cronológicos de campos [42]. A identidade de WT da função de Green d^μ é [18]

$$q_\mu d^\mu(p', p) = i[ed(p) - d(p')e], \quad (1.279)$$

sendo $q = p' - p$. Para obter a identidade de WT de v^μ começa-se por invocar o facto de que, na TQRC, dado um diagrama \mathcal{X} de uma função de Green \mathcal{G} , \mathcal{X} e \mathcal{X}^μ satisfazem a mesma identidade de WT que \mathcal{G} e \mathcal{G}^μ ; por conseguinte, dados quaisquer diagramas

$\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ de \mathcal{G} , $\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n$ e $\mathcal{X}_1^\mu + \dots + \mathcal{X}_n^\mu$ obedecem à mesma identidade que \mathcal{G} e \mathcal{G}^μ . Por isso, $D_0 v D_0$ e $(D_0 v D_0)^\mu$ satisfazem a mesma identidade de WT que D e D^μ :

$$q_\mu (D_0 v D_0)^\mu (p'_1 p'_2, p_1 p_2) = i \sum_{i=1}^2 [e_i (D_0 v D_0)(p'_i - q, p_1 p_2) - (D_0 v D_0)(p'_1 p'_2, p_i + q) e_i], \quad (1.280)$$

em que $q = p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2$. Comprova-se sem dificuldade que as identidades de WT de $D_0 v D_0$ e d^μ implicam a identidade de WT de v^μ [18, 48]

$$q_\mu v^\mu (p'_1 p'_2, p_1 p_2) = i \sum_{i=1}^2 [e_i v(p'_i - q, p_1 p_2) - v(p'_1 p'_2, p_i + q) e_i]. \quad (1.281)$$

A condição de conservação da carga do trinucleão, eq. (1.257), é também satisfeita pela expressão (1.276). Constatata-se isso partindo da eq. (1.276) e utilizando as identidades de Ward de d^μ e v^μ [18, 50]. Tomemos $v(p'_1 p'_2, p_1 p_2)$ como uma função de p'_1 , p_1 e P , sendo $p'_1 + p'_2 = p_1 + p_2 = P$. Admitindo que as componentes de d^μ e v^μ transversais a q são nulas quando $q = 0$, derivando ambos os membros das eqs. (1.279), (1.281) relativamente a q_μ e depois pondo $q = 0$, obtém-se as identidades de Ward de d^μ e v^μ

$$d^\mu(p, p) = -ie \frac{\partial d(p)}{\partial p_\mu}, \quad (1.282)$$

$$v^\mu(p'_1 p'_2, p_1 p_2) = -i \left[e_1 \frac{\partial v(p'_1, p_1, P)}{\partial p'_{1\mu}} + \frac{\partial v(p'_1, p_1, P)}{\partial p_{1\mu}} e_1 + \frac{\partial v(p'_1, p_1, P)}{\partial P_\mu} (e_1 + e_2) \right]. \quad (1.283)$$

Como já se disse, os modelos usuais de interacções baseados nas equações de BS não se enquadram na TQRC. Se não fosse assim, a introdução da interacção electromagnética pela prescrição do acoplamento mínimo asseguraria a conservação de qualquer corrente de transição electromagnética. Admitamos que: (a) o *kernel* v resulta de vértices do tipo NN-mesão que contêm factores de forma fortes: sendo h e f_i , respectivamente, os factores de forma fortes do nucleão e do mesão i , o vértice relativo ao mesão i depende desses factores de forma por meio de $h(p'^2) f_i((p' - p)^2) h(p^2)$, em que p' , p são os momentos do nucleão nos estados final e inicial; (b) os vértices electromagnéticos do nucleão e dos mesões contêm factores de forma electromagnéticos; (c) os propagadores do nucleão e dos mesões são os respectivos propagadores livres; (d) os sistemas inicial e final de nucleões satisfazem a mesma equação relativista com o *kernel* v . Então, há um método de modificação dos vértices electromagnéticos do nucleão e dos mesões que garante a conservação de qualquer corrente de transição electromagnética [51]. Segundo esse método os vértices electromagnéticos são condicionados por identidades de WT

apropriadas. Para o nucleão a identidade de WT de d^μ é

$$q_\mu d^\mu(p', p) = i \left[\frac{h(p^2)}{h(p'^2)} e d(p) - \frac{h(p'^2)}{h(p^2)} d(p') e \right]. \quad (1.284)$$

A identidade de WT de v^μ decorrente das identidades de WT dos vértices electro-magnéticos dos mesões é

$$q_\mu v^\mu(p'_1 p'_2, p_1 p_2) = i \sum_{i=1}^2 \left[\frac{h(p_i'^2)}{h((p_i' - q)^2)} e_i v(p_i' - q, p_1 p_2) - \frac{h(p_i^2)}{h((p_i + q)^2)} v(p'_1 p'_2, p_i + q) e_i \right]. \quad (1.285)$$

Sob a condição das componentes de d^μ e v^μ transversais a q serem nulas quando $q = 0$, deduzem-se as identidades de Ward de d^μ e v^μ :

$$d^\mu(p, p) = -ie \left[\frac{\partial d(p)}{\partial p_\mu} + \frac{2}{h(p^2)} \frac{\partial h(p^2)}{\partial p_\mu} d(p) \right], \quad (1.286)$$

$$\begin{aligned} v^\mu(p'_1 p'_2, p_1 p_2) &= -i \left[e_1 \frac{\partial v(p'_1, p_1, P)}{\partial p'_{1\mu}} + \frac{\partial v(p'_1, p_1, P)}{\partial p_{1\mu}} e_1 + \frac{\partial v(p'_1, p_1, P)}{\partial P_\mu} (e_1 + e_2) \right. \\ &\quad - e_1 \frac{1}{h(p_1'^2)} \frac{\partial h(p_1'^2)}{\partial p'_{1\mu}} v(p'_1, p_1, P) + e_2 \frac{1}{h((P - p'_1)^2)} \frac{\partial h((P - p'_1)^2)}{\partial p'_{1\mu}} v(p'_1, p_1, P) \\ &\quad \left. - \frac{1}{h(p_1^2)} \frac{\partial h(p_1^2)}{\partial p_{1\mu}} v(p'_1, p_1, P) e_1 + \frac{1}{h((P - p_1)^2)} \frac{\partial h((P - p_1)^2)}{\partial p_{1\mu}} v(p'_1, p_1, P) e_2 \right]. \end{aligned} \quad (1.287)$$

Capítulo 2

Teoria de Gross

2.1 Equações quasi-potenciais de dois corpos

A equação NHBS de dois corpos é uma equação integral quadridimensional, sendo, por isso, mais difícil de resolver numericamente do que a equação integral tridimensional não relativista de Lippmann-Schwinger [20]. Uma equação quasi-potencial da amplitude de dispersão elástica de dois corpos, t , é uma equação integral tridimensional que é obtida da equação NHBS pela substituição da função de Green desconexa com os propagadores de um corpo livres, D_0 , por uma quantidade designada por propagador quasi-potencial, D_{qp} , e do *kernel*, v , por uma quantidade denominada por quasi-potencial, u_{qp} ; u_{qp} é determinado pela exigência da equivalência da respectiva equação quasi-potencial e da equação NHBS; D_{qp} tem de possuir as mesmas leis de transformação de D_0 relativamente às transformações homogéneas de Lorentz e internas, produzir a redução tridimensional do integral sobre o momento interno no termo homogéneo da respectiva equação quasi-potencial e garantir a unitariedade elástica da solução dessa equação [52]. Uma equação quasi-potencial não homogénea é, portanto, uma equação do género

$$t = u_{qp} + c_s u_{qp} D_{qp} t, \quad (2.1)$$

em que u_{qp} é a solução da equação

$$u_{qp} = v + c_s v (D_0 - D_{qp}) u_{qp} \quad (2.2)$$

e c_s é um factor de simetria: $c_s = 1$ se as duas partículas em interacção são distinguíveis (então, t , u_{qp} e v não gozam da simetria de troca); $c_s = 1/2$ no caso contrário (então, t , u_{qp} e v têm a simetria de troca). Devido à presença de D_0 na eq. (2.2), esta é uma equação integral quadridimensional e, por isso, o grau de dificuldade da resolução das eqs. (2.1) e (2.2) é comparável ao da resolução da equação NHBS equivalente.

Portanto, não interessa resolver a eq. (2.2). Consideremos a série cujos termos são gerados pela iteração ilimitada da eq. (2.2) e reordenados segundo as potências das constantes de acoplamento. O termo de ordem n da sucessão das somas parciais dessa série é designado por termo de ordem n de u_{qp} e denotado por $u_{qp}^{(n)}$. Importa resolver a eq. (2.1) e a equação quasi-potencial da função de vértice do estado ligado de dois corpos,

$$\Phi = c_s u_{qp} D_{qp} \Phi, \quad (2.3)$$

caso o estado ligado exista, com u_{qp} substituído em ambas por um seu termo, geralmente o primeiro, sendo este normalmente um potencial OBE. Se existe um número inteiro positivo p tal que $|u_{qp}^{(p+1)} - u_{qp}^{(p)}| \ll |u_{qp}^{(p)}|$, conjectura-se que as soluções das eqs. (2.1) e (2.3) com u_{qp} substituído em ambas por $u_{qp}^{(p)}$ são boas aproximações, respectivamente, das soluções das equações NHBS e HBS com o *kernel* v . Há infinitas equações quasi-potenciais [52]. As equações de Blankenbecler-Sugar-Logunov-Tavkhelidze (BSLT) [53, 54], Wallace-Mandelzweig (WM) [55, 56] e Gross [57] são equações quasi-potenciais encontradas frequentemente na literatura. Após abordar os propagadores de BSLT e WM, passaremos, na secção seguinte, a uma exposição mais detalhada do propagador de Gross.

Consideremos duas partículas em interacção de massas m_1 e m_2 . Nas prescrições das equações de BSLT e WM utiliza-se o momento relativo de Jacobi, cuja definição é [58]: sejam p_1 e p_2 os momentos das partículas 1 e 2 respectivamente; então, o momento relativo de Jacobi, p , é dado por $p = c_2(P^2)p_1 - c_1(P^2)p_2$, em que $P = p_1 + p_2$ e

$$c_1(P^2) = \frac{P^2 + m_1^2 - m_2^2}{2P^2}, \quad c_2(P^2) = \frac{P^2 - m_1^2 + m_2^2}{2P^2}. \quad (2.4)$$

A função de Green desconexa é aproximada pelo propagador de BSLT, D_{bslt} , definido por

$$D_{bslt}(p, P) = \Lambda_1(c_1(P^2)P + p)\Lambda_2(c_2(P^2)P - p) \\ \times i \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} ds' \frac{f(s', s)}{s' - P^2} \delta_+(m_1^2 - (c_1(s')P' + p)^2) \delta_+(m_2^2 - (c_2(s')P' - p)^2), \quad (2.5)$$

em que $\Lambda_i(p_i) = 1$ ou $\not{p}_i + m_i$ consoante a partícula i tem o spin 0 ou $1/2$, $\delta^+(m_i^2 - p_i^2) = \theta(p_i^0)\delta(m_i^2 - p_i^2)$, $P' = \sqrt{s'/P^2}P$ e a escolha de $f(s', s)$ é restringida pela imposição da relação de unitariedade elástica e do limite correcto de um corpo da equação [58]. É clara a simetria de troca de D_{bslt} . O propagador D_{bslt} constrange p à superfície de equação $p \cdot P = 0$ [58]. No referencial de repouso das duas partículas e no caso especial

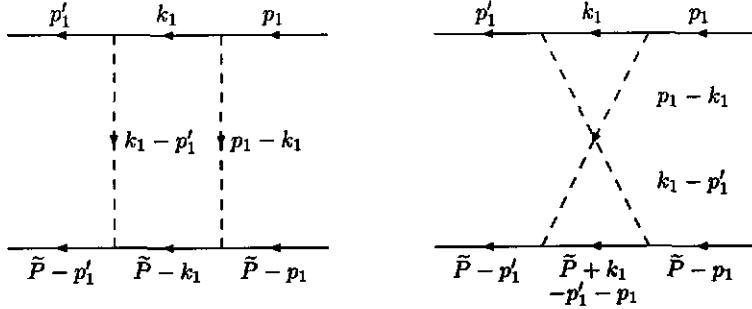


Figura 2.1: Diagramas *box* e *crossed box*.

de partículas escalares de igual massa, sendo $m_1 = m_2 = m$, a escolha de $f(s', s)$ na ref. [58] conduz a

$$D_{bslt}(p, \tilde{P}) = i \frac{2\pi\delta(p^0)}{E(p)(4E^2(p) - W^2)}, \quad (2.6)$$

em que $\tilde{P} = (W, 0)$ e $E(p) = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$. A condição $p^0 = 0$ implica que as partículas ficam equidistantes da respectiva camada de massa. O retardamento do quasi-potencial não tem efeito sobre a amplitude de dispersão, $t(p', p, \tilde{P})$, se $p'^0 = p = 0$ e, em particular, na amplitude de dispersão com as duas partículas na respectiva camada de massa. O propagador de BSLT foi aplicado ao cálculo das observáveis electromagnéticas do deuterão com um modelo OBE da interacção NN [59, 60, 61].

O propagador de WM, D_{wm} , é definido no referencial de repouso das partículas que colidem de modo que os diagramas *box* e *crossed box* na fig. 2.1 são incluídos aproximadamente no termo $v_{obe} D_{wm} v_{obe}$ da amplitude de dispersão, em que v_{obe} é um potencial OBE [55, 56]. Vejamos quais são as aproximações. Sejam d_1 e d_2 , respectivamente, os propagadores livres das partículas 1 e 2, $v_{obe}(\mathbf{p}', \mathbf{p}, \tilde{P})$ o potencial $v_{obe}(\mathbf{p}', \mathbf{p}, \tilde{P})$ com $p'^0 = p^0 = 0$. Substituindo $v_{obe}(\mathbf{p}', \mathbf{p}, \tilde{P})$ por $v_{obe}(\mathbf{p}', \mathbf{p}, \tilde{P})$ nesses diagramas, o que significa que o efeito do retardamento da interacção é desprezado, obtém-se as seguintes expressões aproximadas dos diagramas *box*, t_{box} , e *crossed box*, t_{cbox} :

$$\begin{aligned} t_{box}(\mathbf{p}', \mathbf{p}, \tilde{P}) &\approx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v_{obe}(\mathbf{p}', \mathbf{k}, \tilde{P}) \left[\int \frac{dk^0}{2\pi} d_1(c_1(W^2)\tilde{P} + k) d_2(c_2(W^2)\tilde{P} - k) \right] \\ &\times v_{obe}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \tilde{P}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} t_{cbox}(\mathbf{p}', \mathbf{p}, \tilde{P}) &\approx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v_{obe}(\mathbf{p}', \mathbf{k}, \tilde{P}) \\ &\times \left[\int \frac{dk^0}{2\pi} d_1(c_1(W^2)\tilde{P} + k) d_2(c_2(W^2)\tilde{P} + k - p' - p) \right] v_{obe}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \tilde{P}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

A seguir, procede-se à aproximação *eikonal* [55]: substituindo $\mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ por $-\mathbf{k}$ em consequência da aproximação $\mathbf{p}' \approx \mathbf{p} \approx \mathbf{k}$ (dispersão frontal) e lembrando que $p'^0 =$

$p^0 = 0$ por as partículas 1 e 2 estarem nas respectivas camadas de massa, o argumento de d_2 na eq. (2.8) é trocado por $q_2 = (c_2(W^2)W + k^0, -\mathbf{k})$, eliminando a dependência relativamente aos momentos externos. Por conseguinte,

$$t_{box}(p', p, \tilde{P}) + t_{cbox}(p', p, \tilde{P}) \approx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} v_{obe}(p', k, \tilde{P}) D_{wm}(k, \tilde{P}) v_{obe}(k, p, \tilde{P}), \quad (2.9)$$

em que $v_{obe}(p', k, \tilde{P})$, $v_{obe}(k, p, \tilde{P})$ são, respectivamente, $v_{obe}(p', k, \tilde{P})$ com $p'^0 = 0$ e $v_{obe}(k, p, \tilde{P})$ com $p^0 = 0$, o propagador de WM, D_{wm} , é definido como

$$D_{wm}(k, \tilde{P}) = \delta(k^0) \int dk^0 d_1(c_1(W^2)\tilde{P} + k)[d_2(c_2(W^2)\tilde{P} - k) + d_2(q_2)]. \quad (2.10)$$

A integração no segundo membro da eq. (2.10) é feita recorrendo ao teorema dos resíduos. Se as partículas são escalares e $m_1 = m_2 = m$, obtém-se

$$D_{wm}(p, \tilde{P}) = i \frac{2\pi\delta(p^0)}{E(p)(4E^2(p) - W^2)} \left(2 - \frac{W^2}{4E^2(p)} \right). \quad (2.11)$$

Na eq. (2.11) é óbvia a simetria de troca de D_{wm} . Podemos confirmar que D_{wm} , eq. (2.11), é um invariante de Lorentz. Notemos primeiro que um momento, k , pode ser decomposto na soma das suas componentes paralela e perpendicular ao momento total: a componente paralela a P é $k_{||}\hat{P}$, em que $\hat{P} = P/\sqrt{P^2}$ e $k_{||} = k \cdot \hat{P}$; a componente perpendicular a P , k_{\perp} , é $k_{\perp} = k - k_{||}\hat{P}$. $k_{||}$ é um invariante de Lorentz e k_{\perp} é um vector. No referencial de repouso das duas partículas têm lugar as relações $k_{\perp} = \mathbf{k}$ e, se $\tilde{P}^0 > 0$, $k_{||} = k^0$ e $k_{\perp}^0 = 0$. Assim, D_{wm} , eq. (2.11), pode ser expresso como

$$D_{wm}(p_{||}p_{\perp}, \tilde{P}) = i \frac{2\pi\delta(p_{||})}{\sqrt{m^2 - p_{\perp}^2}[4(m^2 - p_{\perp}^2) - \tilde{P}^2]} \left[2 - \frac{\tilde{P}^2}{4(m^2 - p_{\perp}^2)} \right], \quad (2.12)$$

onde é imediato que é um invariante de Lorentz. Os factores de forma electromagnéticos do deuterão foram calculados empregando o propagador de WM [39, 40, 41].

2.2 Propagador de Gross

A origem do propagador de Gross encontra-se na estimativa dos diagramas *ladder* e *crossed ladder* sob as seguintes condições [57]: (a) as partículas em interacção, cuja massa é m e são designadas por partículas 1 e 2, e a partícula intermediária da interacção, cuja massa é σ , são escalares; (b) o propagador de uma partícula é o respectivo propagador livre; (c) o vértice é $-i\lambda(m\sigma)^{1/2}$, sendo λ a constante de acoplamento adimensional; (d) $\sigma \ll m$; (e) σ e os valores absolutos dos 3-momentos relativos das partículas 1 e 2 no respectivo referencial de repouso antes e após a colisão são da mesma ordem de

grandeza; (f) as partículas em interacção estão nas respectivas camadas de massa antes e após a colisão; (g) a colisão é frontal. Esta última condição é pouco limitativa a baixas energias, ou seja, quando $\tilde{P}^0 - 2m \ll m$.

Antes de prosseguir, introduzamos duas designações. O propagador livre de uma partícula tem dois pólos simples relativamente à energia da partícula. A um desses pólos corresponde uma energia positiva e ao outro a respectiva energia simétrica. Os pólos chamam-se, respectivamente, pólos de energia positiva e negativa da partícula. No pôlo de energia positiva a partícula está na respectiva camada de massa.

Os diagramas *ladder* e *crossed ladder* de quarta ordem com respeito à constante de acoplamento estão na fig. 2.1. Exprimindo os momentos p'_1 , p_1 e k_1 em termos de \tilde{P} e dos respectivos momentos relativos, isto é, $p'_1, p_1 = \tilde{P}/2 + p$ e $k_1 = \tilde{P}/2 + k$, o diagrama *box*, t_{box} , é

$$t_{box} = \frac{\lambda^4(m\sigma)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [E^2(k) - (E(p) + k_0)^2 - i\epsilon]^{-1} [E^2(k) - (E(p) - k_0)^2 - i\epsilon]^{-1} \times (\omega^2(p - k) - k_0^2 - i\epsilon)^{-2}, \quad (2.13)$$

em que $\omega(k) = (\sigma^2 + k^2)^{1/2}$. O integral sobre k_0 é calculado utilizando o teorema dos resíduos. O contorno da integração é fechado na metade inferior do plano complexo. Nessa parte do plano complexo a função integranda tem três singularidades: o pôlo de energia positiva da partícula 1 em $k_0 = E(k) - E(p) - i\epsilon$, o pôlo de energia negativa da partícula 2 em $k_0 = E(k) + E(p) - i\epsilon$ e o pôlo de energia positiva da partícula de massa σ e momento $k - p$ em $k_0 = \omega(p - k) - i\epsilon$. As contribuições desses pólos para t_{box} são denotadas por $t_{box}^{(+)}$, $t_{box}^{(-)}$ e $t_{box}^{(0)}$ respectivamente. Observemos que na metade superior do plano complexo há um pôlo em $k_0 = -E(k) + E(p) + i\epsilon$. Se $|k| = |p|$, esse pôlo e o pôlo de energia positiva da partícula 1 na metade inferior do plano complexo estão em $k_0 = i\epsilon$ e $k_0 = -i\epsilon$ respectivamente e, por isso, espera-se que a maior contribuição para t_{box} seja $t_{box}^{(+)}$. De facto, quando $m \rightarrow \infty$ prova-se que [57]

$$t_{box}^{(+)} \sim \frac{\lambda^4 m (-2\delta + i\sigma)}{32\pi(\sigma^2 + 4\delta^2)}, \quad t_{box}^{(-)} \sim \frac{-i\lambda^4 \sigma^2}{192\pi^2 m^2}, \quad t_{box}^{(0)} \sim \frac{-i\lambda^4}{32\pi^2} \quad (2.14)$$

e, por conseguinte,

$$\left| \frac{Im t_{box}^{(+)}}{Im t_{box}^{(0)}} \right| \sim \frac{\pi m \sigma}{\sigma^2 + 4\delta^2} \gg 1, \quad \frac{t_{box}^{(0)}}{t_{box}^{(-)}} \sim \frac{6m^2}{\sigma^2} \gg 1, \quad (2.15)$$

sendo $\delta^2 = m(\tilde{P}^0 - 2m)$. Assim, quando $m \rightarrow \infty$ o diagrama *box* é bem aproximado pela contribuição do pôlo de energia positiva da partícula 1.

Passemos à análise do diagrama *crossed box*, t_{cbox} . Aplicando as regras de Feynman, obtém-se

$$t_{cbox} = \frac{\lambda^4(m\sigma)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [E^2(k) - (E(p) + k_0)^2 - i\epsilon]^{-1} [E^2(k - 2p) - (E(p) + k_0)^2 - i\epsilon]^{-1} \times (\omega^2(p - k) - k_0^2 - i\epsilon)^{-2}. \quad (2.16)$$

A função integranda tem as seguintes singularidades na metade superior do plano complexo da energia relativa: o pólo de energia negativa da partícula 1 em $k_0 = -E(k) - E(p) + i\epsilon$, o pólo de energia negativa da partícula 2 em $k_0 = -E(k - 2p) - E(p) + i\epsilon$ e o pólo de energia positiva da partícula de massa σ e momento $p - k$ em $k_0 = -\omega(p - k) + i\epsilon$. Sejam $t_{cbox}^{(-)}$ a soma das contribuições para t_{cbox} dos dois primeiros pólos e $t_{cbox}^{(0)}$ a contribuição do terceiro. Quando $m \rightarrow \infty$ [57],

$$t_{cbox}^{(0)} \sim \frac{i\lambda^4}{32\pi^2}, \quad t_{cbox}^{(-)} \sim \frac{i\lambda^4\sigma^2}{32\pi^2m^2}. \quad (2.17)$$

Do exame de t_{box} e t_{cbox} conclui-se que, quando $m \rightarrow \infty$, $t_{box}^{(0)} + t_{cbox}^{(0)} \rightarrow 0$, $(t_{box} + t_{cbox}) - t_{box}^{(+)} \rightarrow 0$ e $(t_{box} + t_{cbox}) - t_{box} \sim i\lambda^4/(32\pi^2)$. O cancelamento mútuo de $t_{box}^{(0)}$ e $t_{cbox}^{(0)}$ faz com que a soma dos diagramas *box* e *crossed box* seja melhor aproximada pela contribuição para o diagrama *box* do pólo de energia positiva da partícula 1 do que pelo diagrama *box* completo. Repare-se que não haveria cancelamento se o produto dos vértices dependesse do diagrama. Por exemplo, se as partículas 1 e 2 tivessem isospin $1/2$ e fosse introduzido no vértice o factor de isospin τ_i , os produtos dos vértices nos diagramas *box* e *crossed box* teriam, respectivamente, os factores adicionais $9 - 4I(I+1)$ e $-3 + 4I(I+1)$, em que I é o número quântico do isospin total [32].

Na ref. [57] são estimados grosseiramente todos os diagramas *ladder* e *crossed ladder*, dada a incapacidade de calcular todos exactamente. A função integranda referente ao diagrama *ladder* de ordem $2n$ com respeito à constante de acoplamento, denotado por $t_{ladder}^{(2n)}$, é uma função dos $n - 1$ momentos internos k_1, \dots, k_{n-1} . Dado $i = 1, \dots, n - 1$, essa função tem em relação a k_i^0 e numa metade do plano complexo dois pólos de energia positiva, sendo um deles da partícula de massa σ e o outro da partícula 1, este denotado por $a_i^{(1+)}$, e dois pólos de energia negativa, sendo um deles da partícula de massa σ e o outro da partícula 2. Seja $t_{ladder}^{(2n1+)}$ a contribuição para $t_{ladder}^{(2n)}$ de $a_1^{(1+)}, \dots, a_{n-1}^{(1+)}$. Então, segundo a estimativa da ref. [57], quando $m \rightarrow \infty$ a contribuição principal para a soma dos diagramas *ladder* e *crossed ladder* de ordem $2n$ é $t_{ladder}^{(2n1+)}$, sendo $t_{ladder}^{(2n1+)} = \mathcal{O}(m/\sigma)$ e as restantes contribuições desprezáveis face a $t_{ladder}^{(2n1+)}$. Assim, a série dos principais termos da amplitude de dispersão de dois corpos é $v_{obe} + \sum t_{ladder}^{(2n1+)}$, sendo gerada pela iteração da equação $t = v_{obe} + v_{obe}\delta_1 d_2 t$, em que $\delta_1(p_1) = 2\pi\delta^+(m^2 - p_1^2)$.

Importa referir um teorema, designado por teorema do cancelamento, que reforça a importância da contribuição dos pólos de energia positiva de uma das duas partículas em interacção, pólos esses referentes a um diagrama *ladder*, quando a massa da partícula tende para infinito [33]. Sendo m_1 a massa da partícula, as condições desse teorema são: (a) as partículas em interacção e a partícula intermediária da interacção são escalares; (b) o propagador de uma partícula é o respectivo propagador livre; (c) os diagramas *ladder* e *crossed ladder* da mesma ordem têm os factores de vértice iguais; (d) $\tilde{P}^0 \sim m_1 + \mathcal{E}$, $p_2'{}^0 \sim \mathcal{E}$ e $p_2^0 \sim \mathcal{E}$ quando $m_1 \rightarrow \infty$, em que \mathcal{E} é constante. Então, demonstra-se que, no referencial de repouso das partículas em interacção, quando $m_1 \rightarrow \infty$, a soma dos diagramas *ladder* e *crossed ladder* da mesma ordem é equivalente à contribuição para o diagrama *ladder* dessa ordem dos pólos de energia positiva da partícula de massa m_1 . O nome do teorema é devido à soma dos diagramas *crossed ladder* da mesma ordem ser cancelada quando $m_1 \rightarrow \infty$ pela soma de todas as contribuições para o diagrama *ladder* dessa ordem exceptuando a contribuição dos pólos de energia positiva da partícula de massa m_1 .

O que foi dito sugere o propagador quasi-potencial D_g definido por

$$D_g(p_1 p_2) = 2\pi\delta^+(m_1^2 - p_1^2)\Lambda_1(p_1)d_2(p_2), \quad (2.18)$$

sendo $m_1 \geq m_2$. D_g é o propagador de Gross. A iteração ilimitada da equação não homogénea de Gross com o respectivo quasi-potencial de Gross, u_g , substituído por um potencial OBE produz a série dos diagramas *ladder* com a partícula de massa m_1 na respectiva camada de massa em qualquer estado intermédio. D_g e D_0 têm as mesmas regras de transformação sob as transformações homogéneas de Lorentz e internas. Quando as partículas são idênticas, D_g não goza de simetria de troca ao contrário da função de Green desconexa e dos propagadores de BSLT e WM; porém, u_g e as soluções das equações não homogénea e homogénea de Gross possuem a simetria de troca, porque o *kernel* v tem essa propriedade. Pelo mesmo motivo a equação não homogénea (homogénea) de Gross e a equação quasi-potencial não homogénea (homogénea) com o propagador quasi-potencial $P_{12}D_gP_{12}$ são equivalentes ($P_{12}D_gP_{12}$ restringe a partícula 2 à respectiva camada de massa em vez da partícula 1). A equação não homogénea de Gross não tem a simetria cruzada [57].

A equação de Gross da função de vértice do estado ligado de dois corpos tem o limite correcto de um corpo [32]. Verifiquemos isso no caso da partícula de maior massa ser escalar. A respectiva equação fechada no referencial de repouso das duas partículas em interacção é

$$\Gamma(p_2, \tilde{P}) = -i \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2E_1(k_2)} \frac{u_g(p_2, k_2, \tilde{P})\Lambda_2(k_2)}{m_2^2 - k_2^2 - i\epsilon} \Gamma(k_2, \tilde{P}), \quad (2.19)$$

em que $p_2^0 = \tilde{P}^0 - E_1(p_2)$ e $k_2^0 = \tilde{P}^0 - E_1(k_2)$. Supondo que $\tilde{P}^0 \sim m_1 + \mathcal{E}$ quando $m_1 \rightarrow \infty$, sendo \mathcal{E} constante, obtém-se $p_2^0 \sim \mathcal{E}$ e $k_2^0 \sim \mathcal{E}$. Quando $m_1 \rightarrow \infty$, a eq. (2.19) é aproximada por

$$\begin{aligned}\Gamma((\mathcal{E}, \mathbf{p}_2), (m_1, 0)) &= -i \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2m_1} u_g((\mathcal{E}, \mathbf{p}_2), (\mathcal{E}, \mathbf{k}_2), (m_1, 0)) \\ &\times \frac{\Lambda_2((\mathcal{E}, \mathbf{k}_2)) \Gamma((\mathcal{E}, \mathbf{k}_2), (m_1, 0))}{E_2^2(k_2) - \mathcal{E}^2}.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Sejam $\check{\Psi}((\mathcal{E}, \mathbf{k}_2))$, $\check{u}_g(\mathcal{E}, \mathbf{p}_2, \mathbf{k}_2)$ definidos por

$$\check{\Psi}((\mathcal{E}, \mathbf{k}_2)) = \frac{\Lambda_2((\mathcal{E}, \mathbf{k}_2)) \Gamma((\mathcal{E}, \mathbf{k}_2), (m_1, 0))}{E_2^2(k_2) - \mathcal{E}^2}, \quad (2.21)$$

$$\check{u}_g(\mathcal{E}, \mathbf{p}_2, \mathbf{k}_2) = i \frac{u_g((\mathcal{E}, \mathbf{p}_2), (\mathcal{E}, \mathbf{k}_2), (m_1, 0))}{2m_1}. \quad (2.22)$$

Então, a eq. (2.20) pode ser escrita como

$$(E_2^2(p_2) - \mathcal{E}^2) \Lambda_2^{-1}((\mathcal{E}, \mathbf{p}_2)) \check{\Psi}((\mathcal{E}, \mathbf{p}_2)) = - \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \check{u}_g(\mathcal{E}, \mathbf{p}_2, \mathbf{k}_2) \check{\Psi}((\mathcal{E}, \mathbf{k}_2)), \quad (2.23)$$

a qual é a equação de Klein-Gordon ou Dirac no espaço dos 3-momentos com a massa m_2 , a energia \mathcal{E} e o potencial instantâneo \check{u}_g consoante a partícula de massa m_2 tem spin 0 ou 1/2.

A solução da equação não homogénea de Gross satisfaz a relação de unitariedade elástica: partindo da propriedade de anti-hermiticidade de u_g , ou seja, $\bar{u}_g = -u_g$, sendo \bar{u}_g obtido de u_g pela conjugação de Dirac, e das equações $t = u_g + c_s u_g D_g t$ e $\bar{t} = \bar{u}_g + c_s \bar{t} \bar{D}_g \bar{u}_g$, encontra-se a relação de unitariedade elástica

$$t + \bar{t} = -c_s \bar{t} (\bar{D}_g + D_g) t, \quad (2.24)$$

reduzindo-se, no referencial de repouso das duas partículas em interacção e quando estas estão nas respectivas camadas de massa nos estados inicial e final, a

$$t(p', p, \tilde{P}) + \bar{t}(p', p, \tilde{P}) = \frac{-c_s |\mathbf{k}|}{(2\pi)^3 2\tilde{P}_0} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \bar{t}(p', k, \tilde{P}) \Lambda_1(k_1) \Lambda_2(k_2) t(k, p, \tilde{P}), \quad (2.25)$$

em que $k = (k_1 - k_2)/2$, $|\mathbf{k}| = \{[(m_1^2 - m_2^2 + \tilde{P}_0^2)/(2\tilde{P}_0)]^2 - m_1^2\}^{1/2}$, $k_1^0 = E_1(k_1)$ e $k_2^0 = E_2(k_2)$.

Finalizamos esta secção reportando um resultado da ref. [62]. Há três métodos de cálculo não perturbativo: a resolução de equações integrais como, por exemplo, as equações de BS, BSLT, WM e Gross, a *lattice gauge theory* [63] e a representação de Feynman-Schwinger [64]. A TQRC pode ser formulada com base no integral de caminho

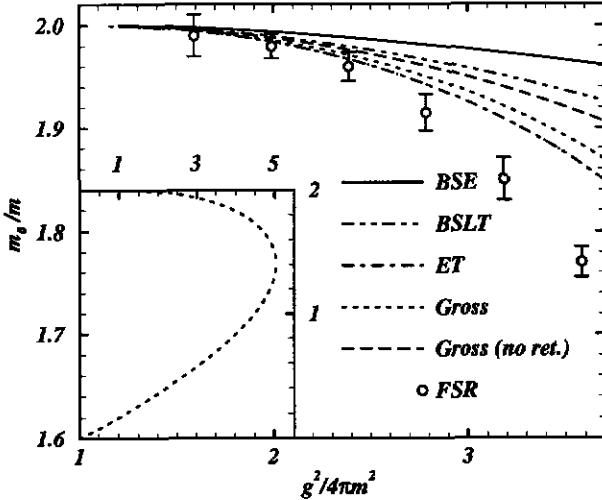


Figura 2.2: Massa adimensional do estado ligado de duas partículas em função da constante de acoplamento adimensional e do método de cálculo. No canto inferior esquerdo estão as energias das duas soluções da equação de Gross, tendo uma dessas soluções significado físico e a outra não. A fig. 2.2 foi copiada da ref. [62].

sobre campos não quantificados [32]. A *lattice gauge theory* [63] e a representação de Feynman-Schwinger são firmadas nessa formulação. Contudo, neste segundo método o espaço-tempo não é discretizado e o integral de caminho sobre campos é transformado num integral de caminho sobre trajectórias de partículas, evitando anomalias causadas pela discretização do espaço-tempo e reduzindo consideravelmente o tempo computacional. Na ref. [62], a representação de Feynman-Schwinger é aplicada à determinação do estado ligado de duas partículas escalares reais de massa m interagindo pela troca de uma terceira partícula escalar real de massa μ , sendo $g\varphi^2\chi$ o termo de interacção da densidade lagrangeana do sistema dos campos φ e χ , em que g é a constante de acoplamento e φ e χ são, respectivamente, os campos escalares reais das partículas de massas m e μ , estado ligado esse que é produzido pela série dos diagramas *ladder* e *crossed ladder* não simetrizados. Na fig. 2.2, mostra-se, para $\mu/m = 0.15$ e seis maneiras de calcular a massa do estado ligado das duas partículas de massa m , o gráfico de m_0/m em função de $g^2/(4\pi m^2)$, em que m_0 é a massa do estado ligado dessas partículas [62]. A massa do estado ligado é determinada pela representação de Feynman-Schwinger (denotada por FSR na fig. 2.2) e pela resolução das seguintes equações homogéneas não simetrizadas: a equação HBS (BSE) com o potencial OBE, as equações BSLT, WM (ET) e Gross com o quasi-potencial OBE e a equação de Gross com o quasi-potencial OBE sem retardamento (Gross (no ret.)). Conclui-se que: (a) o estado ligado gerado pelos diagramas *ladder* e *crossed ladder* tem a menor massa; (b) o estado ligado da equação HBS tem a maior

massa, a qual é satisfatória apenas num intervalo de pequenos valores de $g^2/(4\pi m^2)$;
(c) a equação homogénea de WM é a melhor no que concerne à previsão da massa do estado ligado.

2.3 Equações de Gross da amplitude de dispersão elástica NN e das funções de vértice conjugadas do trinucleão

A equação da amplitude de dispersão elástica NN na aproximação de ordem mais baixa da teoria de Gross é obtida trocando v e a integração sobre a energia interna na equação NHBS

$$t = v + \frac{1}{2}vd_1d_2t, \quad (2.26)$$

respectivamente, por v_{obe} e pela contribuição do pólo de d_1 de energia positiva, resultando

$$t = v_{obe} + \frac{1}{2}v_{obe}\delta_1d_2t, \quad (2.27)$$

em que

$$\delta_{\alpha'\alpha',\alpha\alpha}(p) = 2\pi\delta^+(M_n^2 - p^2)\Lambda_{\alpha'\alpha',\alpha\alpha}(p), \quad (2.28)$$

$$\Lambda_{\alpha'\alpha',\alpha\alpha}(p) = (\not{p} + M_n)_{\alpha'\alpha}\delta_{\alpha'\alpha}. \quad (2.29)$$

As componentes de Faddeev essenciais das funções de vértice conjugadas de BS do trinucleão são determinadas pelas seguintes equações HBS originárias das eqs. (1.93) e (1.95) com $i = 1$

$$\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t) = -t_1d_2d_3P_{12}\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t), \quad (2.30)$$

$$\bar{\Phi}_1(P_t\lambda_t\tau_t) = -\bar{\Phi}_1(P_t\lambda_t\tau_t)P_{12}d_2d_3t_1 \quad (2.31)$$

e pela condição de normalização (1.99) expressa em termos de $\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t)$, $\bar{\Phi}_1(P_t\lambda_t\tau_t)$

$$\begin{aligned} & i \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}_1(q_1q_2q_3P_t\lambda_t\tau_t) d_1(p_1) d_2(p_2) \left(\frac{\partial d_3(P - p_1 - p_2)}{\partial P^\mu} \right)_{P=P_t} \\ & \times \left(\frac{1}{2} \Phi_1(q_1q_2q_3P_t\lambda_t\tau_t) - (P_{12}\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t))(q_1q_2q_3) \right) + i \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \\ & \left(\frac{1}{2} \bar{\Phi}_1(q_1q'_2q'_3P_t\lambda_t\tau_t) - (\bar{\Phi}_1(P_t\lambda_t\tau_t)P_{12})(q_1q'_2q'_3) \right) d_1(p_1) d_2(p'_2) d_3(p'_3) \\ & \times \left(\frac{\partial v_1(p'_2, p_2, P - p_1)}{\partial P^\mu} \right)_{P=P_t} d_2(p_2) d_3(p_3) \left(\frac{1}{2} \bar{\Phi}_1(q_1q_2q_3P_t\lambda_t\tau_t) \right. \end{aligned}$$

$$- (P_{12}\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t))(q_1q_2q_3) \Big) = -2P_{t\mu}. \quad (2.32)$$

Substituindo nas eqs. (2.30), (2.31) t_1 pela solução da eq. (2.27) e d_2 por δ_2 , encontramos as equações das funções de vértice conjugadas do trinucleão na aproximação de ordem mais baixa da teoria de Gross

$$\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t) = -t_1\delta_2d_3P_{12}\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t), \quad (2.33)$$

$$\bar{\Phi}_1(P_t\lambda_t\tau_t) = -\bar{\Phi}_1(P_t\lambda_t\tau_t)P_{12}\delta_2d_3t_1. \quad (2.34)$$

Antes de prosseguirmos, introduzamos a seguinte notação: \hat{p} representa um momento p tal que $p^0 = E(p)$. Determina-se a solução da eq. (2.33) resolvendo as seguintes três equações pela ordem indicada: primeiro, a equação integral

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\hat{p}'_1)\Lambda_2(\hat{p}'_2)\Phi_1(q'_1q'_2q'_3P_t\lambda_t\tau_t) &= -\Lambda_2(\hat{p}'_2) \int \frac{d^3\hat{p}_2}{(2\pi)^3 2E(\hat{p}_2)} t_1(\hat{p}'_2p'_3, \hat{p}_2p_3)d_3(p_3) \\ &\times \Lambda_2(\hat{p}_2)\Lambda_1(\hat{p}'_1)(P_{12}\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t))(q'_1q_2q_3); \end{aligned} \quad (2.35)$$

depois,

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\hat{p}'_1)\Phi_1(q'_1q'_2q'_3P_t\lambda_t\tau_t) &= - \int \frac{d^3\hat{p}_2}{(2\pi)^3 2E(\hat{p}_2)} t_1(p'_2p'_3, \hat{p}_2p_3)d_3(p_3) \\ &\times \Lambda_2(\hat{p}_2)\Lambda_1(\hat{p}'_1)(P_{12}\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t))(q'_1q_2q_3); \end{aligned} \quad (2.36)$$

por último,

$$\Phi_1(q'_1q'_2q'_3P_t\lambda_t\tau_t) = - \int \frac{d^3\hat{p}_2}{(2\pi)^3 2E(\hat{p}_2)} t_1(p'_2p'_3, \hat{p}_2p_3)d_3(p_3)\Lambda_2(\hat{p}_2)(P_{12}\Phi_1(P_t\lambda_t\tau_t))(q'_1q_2q_3). \quad (2.37)$$

Uma vez resolvida a eq. (2.35), é trivial resolverem-se as eqs. (2.36), (2.37). O objecto $\Lambda_1(\hat{p}'_1)\Lambda_2(\hat{p}'_2)\Phi_1(q'_1q'_2q'_3P_t\lambda_t\tau_t)/(2M_n)^2$ designa-se por função de vértice do trinucleão com os nucleões 1 e 2 nas respectivas camadas de massa; $\Lambda_1(\hat{p}'_1)\Phi_1(q'_1q'_2q'_3P_t\lambda_t\tau_t)/(2M_n)$ com p'^0_2 arbitrário chama-se função de vértice do trinucleão com o nucleão 1 na respectiva camada de massa. Trocando na eq. (2.32) as funções de vértice conjugadas de BS pelas funções de vértice conjugadas de Gross determinadas pelas eqs. (2.33) e (2.34), $d_1(p_1)$, $d_2(p_2)$ no primeiro termo do primeiro membro da eq. (2.32) por, respectivamente, $\delta_1(p_1)$, $\delta_2(p_2)$ e $d_1(p_1)$, $d_2(p'_2)$, $d_2(p_2)$ no segundo termo do primeiro membro da eq. (2.32) por, respectivamente, $\delta_1(p_1)$, $\delta_2(p'_2)$, $\delta_2(p_2)$, obtém-se a condição de normalização das funções de vértice conjugadas de Gross.

Sejam p_1, p_2, p_3 momentos tais que $p_1 + p_2 + p_3 = \tilde{P}_t$ e $p_1^0 = E(p_1)$. $(p_2 + p_3)^2 > 0$, isto é, $p_2 + p_3$ é do género temporal se, e somente se, $|p_1| < q_s$, sendo $q_s = (M_t^2 - M_n^2)/(2M_t)$.

Se $|p_1| < q_s$, $p_2^0 + p_3^0 > 0$. Isto vem a propósito do seguinte. Na prática, em vez da eq. (2.35) com $P_t = \tilde{P}_t$ resolve-se a equação

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\hat{p}'_1)\Lambda_2(\hat{p}'_2)\Phi_1(q'_1q'_2q'_3\tilde{P}_t\lambda_t\tau_t) &= -\Lambda_2(\hat{p}'_2)\int_{|\hat{p}_2| < q_s} \frac{d^3\hat{p}_2}{(2\pi)^3 2E(\hat{p}_2)} t_1(\hat{p}'_2p'_3, \hat{p}_2p_3)d_3(p_3) \\ &\times \Lambda_2(\hat{p}_2)\Lambda_1(\hat{p}'_1)(P_{12}\Phi_1(\tilde{P}_t\lambda_t\tau_t))(q'_1q_2q_3), \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que $|\hat{p}'_1| < q_s$ [65]. Portanto, $(\hat{p}'_2 + p'_3)^2 > 0$, $\hat{p}'_2^0 + p'_3^0 > 0$, $(\hat{p}'_1 + p_3)^2 > 0$ e $\hat{p}'_1^0 + p_3^0 > 0$. Mostra-se que $\lim_{|\hat{p}'_1| \rightarrow q_s} \Phi_1(q'_1q'_2q'_3\tilde{P}_t\lambda_t\tau_t) = 0$ [65].

A eq. (2.27) referente à amplitude de dispersão elástica de dois nucleões com momento total do género temporal e energia total positiva foi resolvida numericamente desenvolvendo a amplitude de dispersão em ondas parciais [66]. Posteriormente foi construída uma família de modelos da interacção NN [67, 68]. O quasi-potencial de cada um desses modelos tem a simetria de isospin e é a soma de seis termos de troca de um bosão correspondentes a dois mesões escalares (σ, δ), a dois mesões pseudo-escalares (π, η) e a dois mesões vectoriais (ρ, ω). Em cada um desses pares de mesões há um mesão isoescalar e um isovectorial. O vértice NN-mesão escalar é $-ig_s[1 - \nu_s(M_n - \not{p}' + M_n - \not{p})/(2M_n)]$ ou $-i\tau^i g_s[1 - \nu_s(M_n - \not{p}' + M_n - \not{p})/(2M_n)]$ consoante o mesão é isoescalar ou isovectorial, sendo \not{p}', \not{p} os momentos do nucleão nos estados final e inicial respectivamente, τ^1, τ^2, τ^3 os geradores do grupo $SU(2)$, $[\tau^i, \tau^j] = i2\epsilon_{ijk}\tau^k$ e g_s, ν_s parâmetros. O termo do vértice proporcional a ν_s designa-se por acoplamento escalar *off-mass-shell*, visto que é nulo se os estados final e inicial do nucleão são soluções de energia positiva da equação de Dirac livre. Para os mesões σ, δ as constantes de acoplamento escalar *off-mass-shell* são definidas, respectivamente, por $\nu_s = -0.75\nu$, $\nu_s = 2.60\nu$, em que ν é um parâmetro. O acoplamento NN-pião é $g_p\gamma^5(\not{p}' - \not{p})/(2M_n)$, sendo g_p um parâmetro - trata-se, portanto, de um acoplamento pseudovectorial. Os valores dos parâmetros de cada modelo da interacção NN resultaram do seu ajustamento a dados experimentais do deuterão e da dispersão elástica NN a energias cinéticas no referencial do laboratório do nucleão incidente inferiores a 350 MeV. Para cada modelo a eq. (2.38) foi resolvida numericamente desenvolvendo a função de vértice e a amplitude de dispersão elástica em ondas parciais [65, 67]. Na tabela 2.1 encontram-se, para cinco modelos da interacção NN, designados por W00, W10, W16, W19, W26, os valores da energia de ligação do trinucleão, χ^2/N_{data} e ν [67, 68]. É manifesta a importância do acoplamento escalar *off-mass-shell*: $\nu \neq 0$ para o modelo W16, o qual tem a energia de ligação do núcleo do tritio mais próxima do respectivo valor experimental e o valor mais pequeno de χ^2/N_{data} ; $\nu = 0$ para o modelo W00, o qual tem os piores valores da energia de ligação do núcleo do tritio e de χ^2/N_{data} .

	B_t	χ^2/N_{data}	ν
W00	6.217	3.00	0.0
W10	7.411	2.45	1.0
W16	8.489	2.25	1.6
W19	9.072	2.27	1.9
W26	10.533	2.56	2.6

Tabela 2.1: Valores da energia de ligação do trinucleão, χ^2/N_{data} e ν para os modelos W00, W10, W16, W19, W26 da interacção NN. As energias de ligação são expressas em MeV e ν é adimensional [67, 68]. Os valores experimentais das energias de ligação dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ são de 7.72 e 8.48 MeV respectivamente.

2.4 Corrente electromagnética de Gross do trinucleão

Partindo da eq. (1.276) e usando as eqs. (2.30), (2.31) mostra-se que [50]

$$\begin{aligned} \langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle &= \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) d_1 (d_2 d_3^\mu + d_2^\mu d_3) \left(\frac{1}{2} - P_{12} \right) \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) \\ &+ \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \left(P_{12} - \frac{1}{2} \right) d_2 d_3 v_1^\mu d_1 d_2 d_3 \left(P_{12} - \frac{1}{2} \right) \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Substituindo no segundo membro da eq. (2.39) as integrações sobre as energias internas pelas contribuições dos pólos de energia positiva de d_1 , d_2 e as funções de vértice conjugadas de BS pelas funções de vértice conjugadas de Gross, encontra-se a corrente electromagnética do trinucleão na aproximação de ordem mais baixa da teoria de Gross [50]

$$\begin{aligned} \langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle &= \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 [\delta_2 d_3^\mu + (\delta_2 \Gamma_2^\mu \check{d}_2 + \check{d}_2 \Gamma_2^\mu \delta_2) d_3] \left(\frac{1}{2} - P_{12} \right) \\ &\times \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) + \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \left(P_{12} - \frac{1}{2} \right) \delta_2 d_3 v_1^\mu \delta_1 \delta_2 d_3 \left(P_{12} - \frac{1}{2} \right) \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t), \end{aligned} \quad (2.40)$$

em que \check{d} é definido por

$$\check{d}_{\alpha' \alpha', \alpha \alpha}(p) = -i \frac{\Lambda_{\alpha' \alpha' \alpha \alpha}(p)}{M_n^2 - p^2}, \quad (2.41)$$

ou seja, remove-se o imaginário puro $-i\epsilon$ do denominador de d [69, 70].

Podemos exprimir o termo $-\bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \delta_2 \Gamma_2^\mu \check{d}_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t)$ do segundo membro da eq. (2.40) em termos de uma função de vértice com os nucleões 1 e 2 nas respectivas

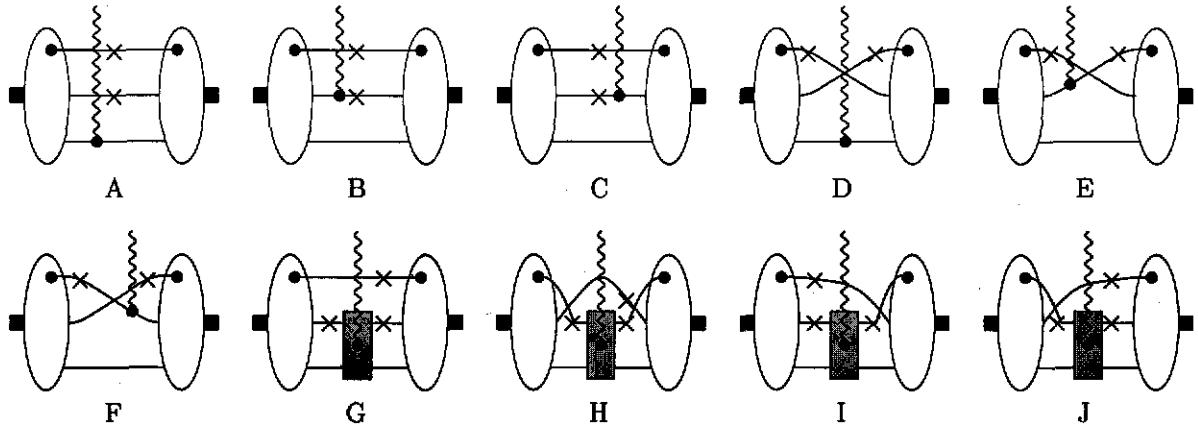


Figura 2.3: Diagramas da corrente electromagnética de Gross do trinucleão.

camadas de massa e de uma função de vértice com o nucleão 1 na sua camada de massa, recorrendo às eqs. (2.33), (2.34):

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \delta_2 \Gamma_2^\mu \check{d}_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) &= -\bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \delta_2 \Gamma_2^\mu \check{d}_2 d_3 P_{12} t_1 \delta_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) \\
 &= -\bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) P_{12} \delta_2 d_3 t_1 \delta_1 \Gamma_1^\mu \check{d}_1 \delta_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) \\
 &= \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \Gamma_1^\mu \check{d}_1 \delta_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) \\
 &= \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) P_{12} \delta_2 \Gamma_2^\mu \check{d}_2 \delta_1 d_3 \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t).
 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim, a eq. (2.40) é substituída equivalentemente por

$$\begin{aligned}
 \langle P'_t \lambda'_t \tau'_t | J^{(1)\mu}(0) | P_t \lambda_t \tau_t \rangle &= \frac{1}{2} \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \delta_2 d_3^\mu \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) + \frac{1}{2} \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \check{d}_2 \Gamma_2^\mu \delta_2 d_3 \\
 &\times \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) + \frac{1}{2} \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \delta_2 \Gamma_2^\mu \check{d}_2 d_3 \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) - \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \delta_2 d_3^\mu P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) \\
 &- \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_1 \check{d}_2 \Gamma_2^\mu \delta_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) - \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) P_{12} \delta_1 \delta_2 \Gamma_2^\mu \check{d}_2 d_3 \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) \\
 &+ \frac{1}{4} \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_2 d_3 v_1^\mu \delta_1 \delta_2 d_3 \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) + \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) P_{12} \delta_2 d_3 v_1^\mu \delta_1 \delta_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) \\
 &- \frac{1}{2} \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) \delta_2 d_3 v_1^\mu \delta_1 \delta_2 d_3 P_{12} \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t) - \frac{1}{2} \bar{\Phi}_1(P'_t \lambda'_t \tau'_t) P_{12} \delta_2 d_3 v_1^\mu \delta_1 \delta_2 d_3 \Phi_1(P_t \lambda_t \tau_t).
 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Cada um dos dez termos do segundo membro da eq. (2.43) sem o respectivo factor de $-1, \pm 1/2$ ou $1/4$ é representado por um diagrama da fig. 2.3: o primeiro é representado pelo diagrama A, o segundo pelo B e assim sucessivamente. Nas refs. [71, 72] encontram-se deduções da eq. (2.43) mais complicadas do que a apresentada aqui. A corrente electromagnética de Gross do trinucleão: (a) é conservada se são satisfeitas as identidades de WT (1.279), (1.281) [50]; (b) cumpre a condição de conservação da carga, eq. (1.257) com $l = t$, se são satisfeitas as identidades de Ward (1.282), (1.283) [50]. Na prática há factores de forma fortes nos vértices do tipo NN-mesão e factores

de forma electromagnéticos nos vértices electromagnéticos. Na presença de tais factores de forma demonstrámos que a condição (1.257) com $l = t$ é cumprida se são satisfeitas as identidades de Ward (1.286), (1.287) e a condição de normalização das funções de vértice conjugadas de Gross do trinucleão [73].

Capítulo 3

Cálculo dos factores de forma electromagnéticos elásticos do trinucleão na aproximação CIA

3.1 Factores de forma electromagnéticos elásticos do trinucleão

A dispersão elástica do electrão pelo trinucleão é descrita pela secção eficaz diferencial não polarizada, $\frac{d\sigma}{d\Omega'}$, quando as polarizações das partículas participantes na reacção não são observadas. Sob as condições a serem enunciadas neste parágrafo deduz-se a seguinte fórmula de $\frac{d\sigma}{d\Omega'}$ no referencial do laboratório [74]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega'} = & \frac{e_p^4 Z^2}{4(4\pi)^2} \frac{1}{k_0^2 \sin^4(\vartheta/2)} \frac{1}{1 + (2k_0/M_t) \sin^2(\vartheta/2)} \\ & \times \left[F_C^2 - \frac{Q^2}{4M_t^2} F_M^2 (1 + \kappa)^2 \left(1 + 2 \left(1 - \frac{Q^2}{4M_t^2} \right) \tan^2(\vartheta/2) \right) \right] \\ & \times \frac{1}{1 - \frac{Q^2}{4M_t^2}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo $d\Omega'$ o ângulo sólido em torno do 3-momento do electrão emergente, \mathbf{k}' , Z o número de protões do núcleo, \mathbf{k} o momento do electrão incidente, ϑ o ângulo entre \mathbf{k}' e \mathbf{k} , Q o momento transferido para o núcleo, $1 + \kappa$ o momento magnético nuclear expresso em unidades de $e_p/(2M_n)$ (magnetão nuclear), $F_C(Q^2)$ e $F_M(Q^2)$ os factores de forma de carga e magnético respectivamente, $F_C(0) = F_M(0) = 1$. F_C e F_M relacionam-se com a

corrente electromagnética do trinucleão segundo

$$Z^2 F_C^2 = \frac{1}{2} \frac{\sum_{\lambda'_t \lambda_t} |(N_0)_{\lambda'_t \lambda_t}|^2}{1 - \frac{Q^2}{4M_t^2}}, \quad (3.2)$$

$$Z^2 (1 + \kappa)^2 F_M^2 = -\frac{M_t^2}{Q^2} \sum_{\lambda'_t \lambda_t} (|(N_+)_{\lambda'_t \lambda_t}|^2 + |(N_-)_{\lambda'_t \lambda_t}|^2), \quad (3.3)$$

em que

$$(N^\mu)_{\lambda'_t \lambda_t} = \frac{1}{2e_p M_t} \langle P'_t \lambda'_t \tau_t | J^{(1)\mu}(0) | \tilde{P}_t \lambda_t \tau_t \rangle, \quad (3.4)$$

$$(N_\pm)_{\lambda'_t \lambda_t} = \frac{\mp 1}{2\sqrt{2} e_p M_t} \langle P'_t \lambda'_t \tau_t | (J^{(1)1}(0) \pm i J^{(1)2}(0)) | \tilde{P}_t \lambda_t \tau_t \rangle. \quad (3.5)$$

A dedução das eqs. (3.1)-(3.5) é efectuada sob as seguintes condições [74]: a lei de transformação (1.245), a troca de apenas um fotão virtual entre o electrão e o núcleo, o limite ultra-relativista da magnitude do 3-momento do electrão, a conservação da corrente electromagnética do trinucleão e

$$(N_0)_{\lambda'_t \lambda_t} (N_\pm)_{\lambda'_t \lambda_t} = (N_+)_{\lambda'_t \lambda_t} (N_-)_{\lambda'_t \lambda_t} = 0. \quad (3.6)$$

Os raios de carga, r_C , e magnético, r_M , são definidos por [75]

$$r_C = \sqrt{-6 \left(\frac{dF_C(Q^2)}{dQ^2} \right)_{Q^2=0}}, \quad r_M = \sqrt{-6 \left(\frac{dF_M(Q^2)}{dQ^2} \right)_{Q^2=0}}. \quad (3.7)$$

O raio magnético não se relaciona com as dimensões lineares da distribuição espacial do momento magnético nuclear [75].

É comum calcularem-se as componentes isoescalar (S) e isovectorial (V) dos factores de forma de carga e magnético dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ [76], as quais são definidas por

$$F_C^S = \frac{1}{2} [2F_C({}^3\text{He}) + F_C({}^3\text{H})], \quad (3.8)$$

$$F_C^V = \frac{1}{2} [2F_C({}^3\text{He}) - F_C({}^3\text{H})], \quad (3.9)$$

$$F_M^S = \frac{1}{2} [\mu({}^3\text{He}) F_M({}^3\text{He}) + \mu({}^3\text{H}) F_M({}^3\text{H})], \quad (3.10)$$

$$F_M^V = \frac{1}{2} [\mu({}^3\text{He}) F_M({}^3\text{He}) - \mu({}^3\text{H}) F_M({}^3\text{H})], \quad (3.11)$$

sendo $\mu = Z(1+\kappa)/3$. Descrevendo o núcleo pela solução de uma equação de Schrödinger e aproximando a corrente nuclear pela respectiva componente de um corpo, sem incluir nenhuma correção relativista, $|\mu|$ é o valor absoluto da soma dos momentos magnéticos dos três nucleões [74]. As componentes isoescalar e isovectorial de μ são definidas como [76]

$$\mu^S = \frac{1}{2} [\mu({}^3\text{He}) + \mu({}^3\text{H})], \quad \mu^V = \frac{1}{2} [\mu({}^3\text{He}) - \mu({}^3\text{H})]. \quad (3.12)$$

Se as interacções têm a simetria de isospin, os factores de forma isoescalares e isovectoriais são influenciados pelas componentes isoescalar e isovectorial da corrente do trinucleão respectivamente [76].

3.2 Propriedades da corrente electromagnética de Gross do trinucleão

Nesta secção enunciaremos e demonstraremos diversas propriedades da corrente electromagnética de Gross do trinucleão. Provaremos em particular que, sob a condição de invariância das interacções relativamente às transformações homogéneas de Lorentz, essa corrente é conservada, quer completa quer truncada na aproximação CIA, quaisquer que sejam as correntes de um e dois corpos (propriedade 18). Destacamos também as propriedades 8, 11, 19 e 20. Para além disso apresentaremos proposições e outras propriedades que serão utilizadas na demonstração das propriedades 8, 11, 18, 19 e 20.

Para simplificarmos a exposição definiremos o espaço dos estados de três nucleões, \mathcal{H} , em que representaremos as funções de vértice conjugadas de Gross - relacionadas pela conjugação de Dirac -, as transformações homogéneas de Lorentz, as correntes electromagnéticas de um e dois corpos, assim como outros objectos.

Comecemos por definir o espaço dos estados de um nucleão, \mathcal{H}_n . \mathcal{H}_n é o produto tensorial $\mathcal{H}_o \otimes \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_{iso}$ do espaço dos momentos, \mathcal{H}_o , do espaço das matrizes complexas 4×1 , \mathcal{H}_s , e do espaço de isospin, \mathcal{H}_{iso} . Sejam p um momento e $|p\rangle$ o respectivo vector de \mathcal{H}_o . Uma base de \mathcal{H}_o é $\{|p\rangle : p \in \mathbb{R}^4\}$. O produto escalar de $|p\rangle$ e $|p'\rangle$ é $(2\pi)^4 \delta^4(p' - p)$. Uma base de \mathcal{H}_s é $\{u^{(\rho)} : \rho = 1, \dots, 4\}$, em que $u_\alpha^{(\rho)} = \delta_{\rho\alpha}$. O produto escalar de $u^{(\rho)}$ e $u^{(\rho')}$ é $\delta_{\rho'\rho}$. A base que seleccionamos para \mathcal{H}_{iso} é $\{|1/2t_z\rangle : t_z = \pm 1/2\}$, sendo $|1/2t_z\rangle$ um vector de isospin 1/2 e componente t_z do isospin segundo o eixo de isospin z . O produto escalar de $|1/2t_z\rangle$ e $|1/2t'_z\rangle$ é $\delta_{t'_z t_z}$. \mathcal{H} é o produto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ dos espaços dos estados dos nucleões 1, 2 e 3 são espaços vectoriais isomorfos¹. Escolhemos a base de \mathcal{H}

$$\begin{aligned} \{|p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \otimes |[(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle : \\ p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^4; \rho_1, \rho_2, \rho_3 = 1, \dots, 4; t_1, t_2, t_3 = 1/2; T = 0, 1; \mathcal{T} = 1/2, 3/2; \\ \mathcal{T}_z = -\mathcal{T}, -\mathcal{T} + 1, \dots, \mathcal{T}\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

¹Sejam U e V espaços vectoriais sobre o mesmo corpo e $L : U \rightarrow V$ uma transformação linear. L é um isomorfismo de U em V se é injectiva e sobrejectiva. U e V são isomorfos se existe um isomorfismo de U em V .

em que $|(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle$ é um vector de isospin total \mathcal{T} , componente \mathcal{T}_z do isospin total segundo o eixo de isospin z , isospin total T dos nucleões 2 e 3 e norma unitária, sendo $|(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle$ construído adicionando primeiro os isospins t_2 e t_3 , cuja soma é T , e a seguir t_1 e T [77]. O produto escalar dos vectores da base é

$$\begin{aligned} \langle p'_1 p'_2 p'_3 \rho'_1 \rho'_2 \rho'_3 T' \mathcal{T}' \mathcal{T}'_z | p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p_1) (2\pi)^4 \delta^4(p'_2 - p_2) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p'_3 - p_3) \delta_{\rho'_1 \rho_1} \delta_{\rho'_2 \rho_2} \delta_{\rho'_3 \rho_3} \delta_{T' T} \delta_{\mathcal{T}' \mathcal{T}} \delta_{\mathcal{T}'_z \mathcal{T}_z}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Passamos a referir os operadores relevantes. Seja Λ_h a matriz de uma transformação homogénea de Lorentz. O operador que representa Λ_h em \mathcal{H} , $L(\Lambda_h)$, é antilinear se $\Lambda_h = \mathcal{T}$ e linear no caso contrário, sendo a sua definição completada por

$$\begin{aligned} L(\Lambda_h) |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle &= |\Lambda_h p_1\rangle \otimes S(\Lambda_h) u^{(\rho_1)} \otimes |\Lambda_h p_2\rangle \otimes S(\Lambda_h) u^{(\rho_2)} \\ &\otimes |\Lambda_h p_3\rangle \otimes S(\Lambda_h) u^{(\rho_3)} \otimes |(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que $\mathcal{T} p_i$ na eq. (3.15) com $\Lambda_h = \mathcal{T}$ significa $(p_i^0, -\mathbf{p}_i)$, $S(\Lambda_h)$ é a matriz que representa Λ_h no espaço de Dirac, isto é, $S(\Lambda_h)$ está na eq. (1.120) se $\Lambda_h = R(\zeta \hat{n}_r) B(\eta \hat{n}_b)$,

$$S(\mathcal{P}) = \gamma^0, \quad (3.16)$$

$$S(\mathcal{T}) = S(R_{0,\pi,0}) K, \quad (3.17)$$

sendo K o operador de conjugação complexa². A seguir, definimos diversos operadores lineares. Os propagadores G_2 , G_3 , \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 :

$$\begin{aligned} G_2 |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle &= |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes -i \frac{\not{p}_2 + M_n}{M_n^2 - p_2^2} u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \\ &\otimes |(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} G_3 |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle &= |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes -i \frac{\not{p}_3 + M_n}{M_n^2 - p_3^2} u^{(\rho_3)} \\ &\otimes |(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle &= 2\pi \delta^+(M_n^2 - p_1^2) |p_1\rangle \otimes (\not{p}_1 + M_n) u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \\ &\otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \otimes |(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2 |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle &= |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes 2\pi \delta^+(M_n^2 - p_2^2) |p_2\rangle \otimes (\not{p}_2 + M_n) u^{(\rho_2)} \\ &\otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \otimes |(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

O operador $\tilde{\gamma}^0$:

$$\tilde{\gamma}^0 |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = |p_1\rangle \otimes \gamma^0 u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes \gamma^0 u^{(\rho_2)}$$

²Sejam $A^\mu(x)$ um 4-potencial e $\psi(x)$ uma solução da equação de Dirac $(i\not{\partial}_x - e' \not{A}(x) - m)\psi(x) = 0$. Se $x' = (x^0, -\mathbf{x})$, $A'^\mu(x') = (A^0(x), -\mathbf{A}(x))$ e $\psi'(x') = S(\mathcal{P})\psi(x)$, então, $(i\not{\partial}_{x'} - e' \not{A}'(x') - m)\psi'(x') = 0$; se $x' = (-x^0, \mathbf{x})$, $A'^\mu(x') = (A^0(x), -\mathbf{A}(x))$ e $\psi'(x') = S(\mathcal{T})\psi(x)$, então, $(i\not{\partial}_{x'} - e' \not{A}'(x') - m)\psi'(x') = 0$.

$$\otimes |p_3\rangle \otimes \gamma^0 u^{(\rho_3)} \otimes |[(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle . \quad (3.22)$$

O operador da amplitude de dispersão elástica dos nucleões 2 e 3, M_1 :

$$M_1 |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = \int \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4} t_{\rho'_2 \rho'_3, \rho_2 \rho_3}(p'_2 p_2 + p_3 - p'_2, p_2 p_3, T) \\ \times |p_1 p'_2 p_2 + p_3 - p'_2 \rho_1 \rho'_2 \rho'_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle , \quad (3.23)$$

em que $t(T)$ é a amplitude de dispersão elástica NN quando o isospin total dos dois nucleões é T . Os operadores de permutação P_{12} e P_{23} :

$$P_{12} |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \\ \otimes \sum_{T'=0,1} \left[\frac{1}{2} (-1)^T \delta_{TT'} - \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\delta}_{TT'} \right] |[(t_2 t_3) T' t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle , \quad (3.24)$$

$$P_{23} |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \\ \otimes (-1)^{T+1} |[(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle . \quad (3.25)$$

O operador da componente μ do momento total, P^μ :

$$P^\mu |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = (p_1 + p_2 + p_3)^\mu |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \\ \otimes |[(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle . \quad (3.26)$$

O operador da componente do momento angular total segundo o eixo X^i , J^i , que, por definição, satisfaz

$$\exp(-i\zeta J^i) = L(R(\zeta \hat{e}^i)) , \quad (3.27)$$

onde

$$J^i |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = \left\{ \left[(\mathbf{p}_1 \times \vec{i} \nabla_{\mathbf{p}_1})^i |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} + |p_1\rangle \otimes \frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^i u^{(\rho_1)} \right] \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} + \dots + |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes \left[(\mathbf{p}_3 \times \vec{i} \nabla_{\mathbf{p}_3})^i |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} + |p_3\rangle \otimes \frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^i u^{(\rho_3)} \right] \right\} \otimes |[(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle . \quad (3.28)$$

Os operadores das componentes do isospin total I^1, I^2, I^3 :

$$I^1 |p_1 p_2 p_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T} \mathcal{T}_z\rangle = |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \\ \otimes \frac{1}{2} \left(\sqrt{\mathcal{T}(\mathcal{T}+1) - \mathcal{T}_z(\mathcal{T}_z+1)} |[(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z + 1\rangle + \sqrt{\mathcal{T}(\mathcal{T}+1) - \mathcal{T}_z(\mathcal{T}_z-1)} \right. \\ \left. |[(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z - 1\rangle \right) , \quad (3.29)$$

$$I^2|p_1p_2p_3\rho_1\rho_2\rho_3T\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle = |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \\ \otimes \frac{1}{2i} \left(\sqrt{\mathcal{T}(\mathcal{T}+1) - \mathcal{T}_z(\mathcal{T}_z+1)} |[(t_2t_3)Tt_1]\mathcal{T}\mathcal{T}_z + 1\rangle - \sqrt{\mathcal{T}(\mathcal{T}+1) - \mathcal{T}_z(\mathcal{T}_z-1)} \right. \\ \left. |[(t_2t_3)Tt_1]\mathcal{T}\mathcal{T}_z - 1\rangle \right), \quad (3.30)$$

$$I^3|p_1p_2p_3\rho_1\rho_2\rho_3T\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle = |p_1\rangle \otimes u^{(\rho_1)} \otimes |p_2\rangle \otimes u^{(\rho_2)} \otimes |p_3\rangle \otimes u^{(\rho_3)} \otimes \mathcal{T}_z |[(t_2t_3)Tt_1]\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle, \quad (3.31)$$

em que $|[(t_2t_3)Tt_1]\mathcal{T}\mathcal{T}_z + 1\rangle = \mathbf{0}$ se $\mathcal{T}_z = \mathcal{T}$, $|[(t_2t_3)Tt_1]\mathcal{T}\mathcal{T}_z - 1\rangle = \mathbf{0}$ se $\mathcal{T}_z = -\mathcal{T}$. O operador de projecção sobre o subespaço gerado pelos estados de três nucleões tais que o momento total dos nucleões 2 e 3 é do género temporal e a energia total desse par de nucleões é positiva, P_p :

$$P_p|p_1p_2p_3\rho_1\rho_2\rho_3T\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle = \begin{cases} |p_1p_2p_3\rho_1\rho_2\rho_3T\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle & \text{se } (p_2 + p_3)^2 > 0 \text{ e } p_2^0 + p_3^0 > 0, \\ 0 & \text{no caso contrário.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Os operadores das correntes electromagnéticas dos nucleões 2 e 3, respectivamente, \mathcal{J}_2^μ e \mathcal{J}_3^μ :

$$\mathcal{J}_2^\mu|p_1p_2p_3\rho_1\rho_2\rho_3T\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle = \sum_{\rho'_2 T' \mathcal{T}'} \int \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4} \langle [(t_2t_3)T't_1]\mathcal{T}'\mathcal{T}_z | j_{2\rho'_2\rho_2}^\mu(p'_2, p_2) | [(t_2t_3)Tt_1]\mathcal{T}\mathcal{T}_z \rangle \\ |p_1p'_2p_3\rho_1\rho'_2\rho_3T'\mathcal{T}'\mathcal{T}_z\rangle, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{J}_3^\mu|p_1p_2p_3\rho_1\rho_2\rho_3T\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle = \sum_{\rho'_3 T' \mathcal{T}'} \int \frac{d^4 p'_3}{(2\pi)^4} \langle [(t_2t_3)T't_1]\mathcal{T}'\mathcal{T}_z | j_{3\rho'_3\rho_3}^\mu(p'_3, p_3) | [(t_2t_3)Tt_1]\mathcal{T}\mathcal{T}_z \rangle \\ |p_1p_2p'_3\rho_1\rho_2\rho'_3T'\mathcal{T}'\mathcal{T}_z\rangle, \quad (3.34)$$

sendo

$$j_{2\alpha'\alpha}^\mu(p', p)|1/2t_{1z}\rangle \otimes |1/2t_{2z}\rangle \otimes |1/2t_{3z}\rangle = |1/2t_{1z}\rangle \\ \otimes \sum_{t'_{2z}=\pm 1/2} \langle 1/2t'_{2z} | j_{\alpha'\alpha}^\mu(p', p) | 1/2t_{2z} \rangle |1/2t'_{2z}\rangle \otimes |1/2t_{3z}\rangle, \quad (3.35)$$

$$j_{3\alpha'\alpha}^\mu(p', p)|1/2t_{1z}\rangle \otimes |1/2t_{2z}\rangle \otimes |1/2t_{3z}\rangle = |1/2t_{1z}\rangle \\ \otimes |1/2t_{2z}\rangle \otimes \sum_{t'_{3z}=\pm 1/2} \langle 1/2t'_{3z} | j_{\alpha'\alpha}^\mu(p', p) | 1/2t_{3z} \rangle |1/2t'_{3z}\rangle \quad (3.36)$$

e j^μ definido na secção 3.4. O operador da corrente electromagnética dos nucleões 2 e 3, \mathcal{J}_{23}^μ :

$$\mathcal{J}_{23}^\mu|p_1p_2p_3\rho_1\rho_2\rho_3T\mathcal{T}\mathcal{T}_z\rangle = \sum_{\rho'_2 \rho'_3 T' \mathcal{T}'} \int \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_3}{(2\pi)^4}$$

$$\langle [(t_2 t_3) T' t_1] \mathcal{T}' \mathcal{T}_z | j_{23\rho'_2\rho'_3,\rho_2\rho_3}^\mu(p'_2 p'_3, p_2 p_3) | [(t_2 t_3) T t_1] \mathcal{T} \mathcal{T}_z \rangle | p_1 p'_2 p'_3 \rho_1 \rho'_2 \rho'_3 T' \mathcal{T}' \mathcal{T}_z \rangle. \quad (3.37)$$

Não precisamos de definir j_{23}^μ porque não calcularemos a contribuição das correntes de interacção para os factores de forma electromagnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$.

Utilizaremos as seguintes propriedades de \mathcal{J}_i^μ , $i = 2, 3, 23$:

$$L^{-1}(\Lambda) \mathcal{J}_i^\mu L(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \mathcal{J}_i^\nu, \quad (3.38)$$

$$L^{-1}(\mathcal{T}) \mathcal{J}_i^\mu L(\mathcal{T}) = -\mathcal{T}^\mu_\nu \mathcal{J}_i^\nu, \quad (3.39)$$

$$L^{-1}(\mathcal{P}) \mathcal{J}_i^\mu L(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu_\nu \mathcal{J}_i^\nu, \quad (3.40)$$

$$\mathcal{J}_i^{\mu\dagger} \tilde{\gamma}^0 = \tilde{\gamma}^0 \mathcal{J}_i^\mu. \quad (3.41)$$

O vector de vértice de Gross do trinucleão é determinado em parte pela resolução da equação

$$|\Gamma\rangle = -M_1 Q_2 G_3 P_p P_{12} |\Gamma\rangle. \quad (3.42)$$

As soluções da eq. (3.42) podem ser determinadas resolvendo sucessivamente as equações

$$Q_1 Q_2 |\Gamma\rangle = -Q_2 M_1 G_3 P_p P_{12} Q_1 Q_2 |\Gamma\rangle, \quad (3.43)$$

$$Q_1 |\Gamma\rangle = -M_1 G_3 P_p P_{12} Q_1 Q_2 |\Gamma\rangle, \quad (3.44)$$

$$|\Gamma\rangle = -M_1 G_3 P_p P_{12} Q_1 |\Gamma\rangle. \quad (3.45)$$

As soluções da eq. (3.42) são classificadas parcialmente pelo momento total, visto que P^μ e $M_1 Q_2 G_3 P_p P_{12}$ comutam. $M_1 Q_2 G_3 P_p P_{12}$ comuta também com $L(\mathcal{P})$, J^i e I^i . Por conseguinte, a acção de cada um dos operadores $L(\mathcal{P})$, J^i e I^i sobre uma solução da eq. (3.42) de momento total \tilde{P}_t produz uma solução da mesma equação. As soluções assim geradas têm também o momento total \tilde{P}_t porque $\tilde{P}_t^i = 0$, $[L(\mathcal{P}), P^0] = 0$, $\{L(\mathcal{P}), P^i\} = 0$, $[J^i, P^0] = 0$, $[J^i, P^j] = i\epsilon_{ijk}P^k$ e $[I^i, P^\mu] = 0$. Portanto, o espaço das soluções da eq. (3.42) de momento total \tilde{P}_t é invariante sob a acção de $L(\mathcal{P})$, J^i e I^i . Assim, as soluções da eq. (3.42) de momento total \tilde{P}_t são classificadas de acordo com a paridade, o momento angular total, o isospin total, a componente do momento angular total segundo o eixo X^3 e a componente do isospin total segundo o eixo de isospin z . Seja \mathcal{S} o espaço das soluções da eq. (3.42) de momento total \tilde{P}_t , paridade positiva, momento angular total $J = 1/2$ e isospin total $\mathcal{T} = 1/2$. Seja $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M = -1/2, \mathcal{T}_z = -1/2)\rangle$ um elemento de \mathcal{S} que é um vector próprio de J^3 e I^3 associado aos valores próprios $M = -1/2$ e $\mathcal{T}_z = -1/2$ respectivamente. Consideremos o subespaço \mathcal{S}' de \mathcal{S} com a base

$$\left\{ |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = (-1)^{\frac{2M+1}{2}} (-1)^{\frac{2\mathcal{T}_z+1}{2}} [L(R_{0,\pi,0})]^{\frac{2M+1}{2}} [e^{-i\pi I^2}]^{\frac{2\mathcal{T}_z+1}{2}} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -1/2, -1/2)\rangle \right.$$

$$: M = \pm 1/2, T_z = \pm 1/2 \} . \quad (3.46)$$

É claro que

$$J^3 |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle = M |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle, \quad I^3 |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle = T_z |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle. \quad (3.47)$$

O efeito de $L(R_{0,\pi,0})$ sobre $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle$ é

$$L(R_{0,\pi,0}) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle = (-1)^{J-M} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -M, T_z)\rangle. \quad (3.48)$$

O operador $L(T)$ comuta com $M_1 Q_2 G_3 P_p P_{12}$, P^0 , I^i e $L(P)$; anticomuta com J^i e P^i . S' é, por isso, invariante com respeito a $L(T)$. Admitamos que S' também é³. Assim,

$$\begin{aligned} J^3 L(T) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle &= -L(T) J^3 |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle \\ &= -ML(T) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$L(T) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle = c_M |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -M, T_z)\rangle. \quad (3.50)$$

Prosseguindo encontramos

$$\begin{aligned} L(T) L(R_{0,\pi,0}) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle &= L(R_{0,\pi,0}) L(T) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle \\ &= c_M L(R_{0,\pi,0}) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -M, T_z)\rangle \\ &= c_M (-)^{J+M} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} L(T) L(R_{0,\pi,0}) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle &= (-)^{J-M} L(T) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -M, T_z)\rangle \\ &= c_{-M} (-)^{J-M} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle. \end{aligned} \quad (3.52)$$

As eqs. (3.51) e (3.52) implicam que

$$c_M = -c_{-M}. \quad (3.53)$$

Segue-se que

$$L^2(T) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle = c_M^* L(T) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -M, T_z)\rangle$$

³Suponhamos que S' não é invariante relativamente a $L(T)$. Então, substituímos no texto S' e $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle$, respectivamente, pelo subespaço S'' e o vector $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle$ definidos a seguir. Sejam a , b números complexos unitários e $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle$ tal que $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle = a|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle - 2MbL(T)|\Gamma^1(\tilde{P}_t, -M, T_z)\rangle$. O vector $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle$ é uma solução da eq. (3.42) de momento total \tilde{P}_t , paridade positiva, momento angular total 1/2, isospin total 1/2, componente do momento angular total segundo o eixo X^3 igual a M e componente do isospin total segundo o eixo de isospin z igual a T_z . É satisfeita a igualdade $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle = (-1)^{\frac{2M+1}{2}} (-1)^{\frac{2T_z+1}{2}} [L(R_{0,\pi,0})]^{\frac{2M+1}{2}} [e^{-i\pi I^2}]^{\frac{2T_z+1}{2}} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -1/2, -1/2)\rangle$. O subespaço de S gerado por $\{|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, T_z)\rangle : M = \pm 1/2, T_z = \pm 1/2\}$, S'' , é invariante com respeito a $L(T)$.

$$= c_M^* c_{-M} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle, \quad (3.54)$$

$$L^2(\mathcal{T}) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = -|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle. \quad (3.55)$$

Logo,

$$c_M^* c_{-M} = -1. \quad (3.56)$$

Das eqs. (3.53) e (3.56) obtém-se a transformação dos vectores da base (3.46) com respeito à inversão temporal:

$$L(\mathcal{T}) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = c_M |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -M, \mathcal{T}_z)\rangle, \quad (3.57)$$

$$|c_M| = 1, \quad (3.58)$$

$$c_M = -c_{-M}. \quad (3.59)$$

Como $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ é uma solução da eq. (3.42) e $M_1 Q_2 G_3 P_p P_{12}$ e $L(R_{\phi,\theta,0}) L(B(\eta \hat{e}^3))$ comutam, o vector $|\Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ definido por

$$|\Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = L(R_{\phi,\theta,0}) L(B(\eta \hat{e}^3)) |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle \quad (3.60)$$

é também uma solução da eq. (3.42). $|\Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ designa-se por vector de vértice de Gross do trinucleão e representa o estado do trinucleão de momento P_t , helicidade M e componente \mathcal{T}_z do isospin segundo o eixo de isospin z .

Sejam $\mathcal{G} = Q_1 Q_2 G_3$, $\mathcal{G}_{23} = Q_2 G_3$, $\mathcal{G}_i = G_i$, $i = 2, 3$. Dado um diagrama da fig. 2.3, existem $m, n = 0, 1$ e $i = 2, 3, 23$ para os quais esse diagrama representa o elemento de matriz

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{G} \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{G}_i P_{12}^n | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \quad (3.61)$$

ou

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{G}_i \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{G} P_{12}^m | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \quad (3.62)$$

ou ambos. Vejamos: o diagrama A representa os elementos de matriz

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G} \mathcal{J}_3^\mu \mathcal{G}_3 | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle, \quad (3.63)$$

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G}_3 \mathcal{J}_3^\mu \mathcal{G} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle; \quad (3.64)$$

os diagramas B e C representam respectivamente

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G}_2 \mathcal{J}_2^\mu \mathcal{G} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle, \quad (3.65)$$

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G} \mathcal{J}_2^\mu \mathcal{G}_2 | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle; \quad (3.66)$$

o diagrama D representa

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G} \mathcal{J}_3^\mu \mathcal{G}_3 P_{12} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle , \quad (3.67)$$

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12} \mathcal{G}_3 \mathcal{J}_3^\mu \mathcal{G} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle ; \quad (3.68)$$

os diagramas E e F representam respectivamente

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G}_2 \mathcal{J}_2^\mu \mathcal{G} P_{12} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle , \quad (3.69)$$

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12} \mathcal{G} \mathcal{J}_2^\mu \mathcal{G}_2 | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle ; \quad (3.70)$$

o diagrama G representa

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G} \mathcal{J}_{23}^\mu \mathcal{G}_{23} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle , \quad (3.71)$$

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G}_{23} \mathcal{J}_{23}^\mu \mathcal{G} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle ; \quad (3.72)$$

o diagrama H representa

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12} \mathcal{G} \mathcal{J}_{23}^\mu \mathcal{G}_{23} P_{12} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle , \quad (3.73)$$

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12} \mathcal{G}_{23} \mathcal{J}_{23}^\mu \mathcal{G} P_{12} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle ; \quad (3.74)$$

os diagramas I e J representam respectivamente

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 \mathcal{G} \mathcal{J}_{23}^\mu \mathcal{G}_{23} P_{12} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle , \quad (3.75)$$

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12} \mathcal{G}_{23} \mathcal{J}_{23}^\mu \mathcal{G} | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle . \quad (3.76)$$

Vamos enunciar e demonstrar diversas proposições e propriedades relativas à corrente electromagnética de Gross do trinúcleo. Utilizaremos frequentemente a proposição seguinte.

Proposição 3.2.1

$$L^\dagger(R(\theta \hat{e}^j)) = L^{-1}(R(\theta \hat{e}^j)) , \quad (3.77)$$

$$L^\dagger(\mathcal{P}) = L^{-1}(\mathcal{P}) , \quad (3.78)$$

$$L^\dagger(\mathcal{T}) = L^{-1}(\mathcal{T}) , \quad (3.79)$$

$$L^2(\mathcal{T}) = -1 , \quad (3.80)$$

$$[L(\Lambda), G_i] = [L(\mathcal{P}), G_i] = \{L(\mathcal{T}), G_i\} = 0 , \quad (3.81)$$

$$[L(\Lambda_h), Q_i] = 0 , \quad (3.82)$$

$$[L(\Lambda_h), P_{12}] = 0 , \quad (3.83)$$

$$L^{-1}(R(\theta \hat{e}^j)) = L(R(-\theta \hat{e}^j)) , \quad (3.84)$$

$$L^{-1}(B(\eta\hat{e}^j)) = L(B(-\eta\hat{e}^j)), \quad (3.85)$$

$$[L(B(\eta\hat{e}^j)), L(R(\theta\hat{e}^j))] = 0, \quad (3.86)$$

$$[L(R(\theta\hat{e}^j)), \tilde{\gamma}^0] = 0, \quad (3.87)$$

$$[L(\mathcal{P}), \tilde{\gamma}^0] = 0, \quad (3.88)$$

$$\tilde{\gamma}^0 L^{-1}(B(\eta\hat{e}^j)) = L^\dagger(B(\eta\hat{e}^j))\tilde{\gamma}^0, \quad (3.89)$$

$$[L(\mathcal{T}), \tilde{\gamma}^0] = 0, \quad (3.90)$$

$$L^{-1}(R(\pi\hat{e}^j))L(B(\eta\hat{e}^{j'}))L(R(\pi\hat{e}^j)) = L^{-1}(B(\eta\hat{e}^{j'})), \quad j \neq j', \quad (3.91)$$

$$L^{-1}(\mathcal{T})L^\dagger(B(\eta\hat{e}^j))L(\mathcal{T}) = L^\dagger((B(\eta\hat{e}^j))^{-1}), \quad (3.92)$$

$$L^{-1}(\mathcal{P})L(B(\eta\hat{e}^j))L(\mathcal{P}) = L^{-1}(B(\eta\hat{e}^j)), \quad (3.93)$$

$$\tilde{\gamma}^{0\dagger} = \tilde{\gamma}^0, \quad (3.94)$$

$$P_{12}^\dagger = P_{12}, \quad (3.95)$$

$$[P_{12}, \tilde{\gamma}^0] = 0, \quad (3.96)$$

$$Q_i^\dagger \tilde{\gamma}^0 = \tilde{\gamma}^0 Q_i, \quad (3.97)$$

$$G_i^\dagger \tilde{\gamma}^0 = -\tilde{\gamma}^0 G_i. \quad (3.98)$$

Demonstração. Basta recorrermos à definição de cada operador.

Antes de avançarmos, observemos que qualquer elemento de matriz representado por um diagrama da fig. 2.3 pode ser escrito como

$$\langle \Gamma^1(P'_t, M', \mathcal{T}_z) | \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(P_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle, \quad (3.99)$$

sendo $\mathcal{O}_a = \mathcal{G}$, $\mathcal{O}_b = \mathcal{G}_i$ ou $\mathcal{O}_a = \mathcal{G}_i$, $\mathcal{O}_b = \mathcal{G}$. Introduzamos os vectores $|\Phi(M)\rangle$, $|\Psi(M)\rangle$, $M = \pm 1/2$, de momento \tilde{P}_t , paridade positiva, momento angular $J = 1/2$ e componente M do momento angular segundo o eixo X^3 que têm as propriedades de transformação (3.48), (3.57)-(3.59) dos elementos da base (3.46).

Propriedade 1 Seja $\mu = 0, 3$.

$$\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle = 0. \quad (3.100)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle \\ &= \langle \Phi(M) | L^{-1}(R_{\pi,0,0}) L(R_{\pi,0,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle \\ &= \langle \Phi(M) | L^{-1}(R_{\pi,0,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{\pi,0,0}) | \Psi(-M) \rangle \\ &= e^{i2\pi M} \langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle \\ &= -\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Propriedade 2 Seja $\mu = 0, 3$.

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= \langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b \\ &\quad \times P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle . \end{aligned} \quad (3.102)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= \langle \Phi(-M) | L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}) | \Psi(-M) \rangle \\ &= \langle \Phi(-M) | L^{-1}(\mathcal{P}) L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}) L(\mathcal{P}) | \Psi(-M) \rangle \\ &= \langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a L^{-1}(\mathcal{P}) L^{-1}(R_{0,\pi,0}) \mathcal{J}_i^\mu L(R_{0,\pi,0}) L(\mathcal{P}) \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle \\ &= \langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle . \end{aligned} \quad (3.103)$$

Propriedade 3

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= -e^{i(M'-M)\frac{\pi}{2}} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \\ &\quad \times \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle . \end{aligned} \quad (3.104)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a [-L^{-1}(R_{\pi/2,0,0}) \mathcal{J}_i^1 L(R_{\pi/2,0,0})] \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= -\langle \Phi(M') | L^{-1}(R_{\pi/2,0,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{\pi/2,0,0}) | \Psi(M) \rangle \\ &= -e^{i(M'-M)\frac{\pi}{2}} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle . \end{aligned} \quad (3.105)$$

Propriedade 4 Seja $\mu = 1, 2$.

$$\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle = 0 . \quad (3.106)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= \langle \Phi(M) | L^{-1}(R_{\pi,0,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{\pi,0,0}) | \Psi(M) \rangle \\ &= \langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a [L^{-1}(R_{\pi,0,0}) \mathcal{J}_i^\mu L(R_{\pi,0,0})] \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= -\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle . \end{aligned} \quad (3.107)$$

Propriedade 5

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle &= -\langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b \\ &\quad \times P_{12}^n | \Psi(M) \rangle , \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle &= \langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b \\ &\quad \times P_{12}^n | \Psi(M) \rangle . \end{aligned} \quad (3.109)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-M) \rangle \\ &= -\langle \Phi(-M) | L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}) | \Psi(M) \rangle \\ &= -\langle \Phi(-M) | L^{-1}(\mathcal{P}) L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}) L(\mathcal{P}) | \Psi(M) \rangle \\ &= -\langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a [L^{-1}(\mathcal{P}) L^{-1}(R_{0,\pi,0}) \mathcal{J}_i^1 L(R_{0,\pi,0}) L(\mathcal{P})] \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= -\langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle . \end{aligned} \quad (3.110)$$

Provamos a eq. (3.109) pela aplicação da eq. (3.108) e da propriedade 3.

Propriedade 6 Sejam $M' = -1/2$ ou $M' = M = 1/2$.

$$\langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a (\mathcal{J}_j^1 + i\mathcal{J}_j^2) \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle = 0 , \quad (3.111)$$

$$\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a (\mathcal{J}_j^1 - i\mathcal{J}_j^2) \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M') \rangle = 0 . \quad (3.112)$$

Demonstração. Utilizamos as propriedades 3 e 4.

Propriedade 7

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(1/2) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a (\mathcal{J}_j^1 + i\mathcal{J}_j^2) \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-1/2) \rangle \\ &= -\langle \Phi(-1/2) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a (\mathcal{J}_j^1 - i\mathcal{J}_j^2) \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(1/2) \rangle \\ &= 2\langle \Phi(1/2) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_j^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(-1/2) \rangle . \end{aligned} \quad (3.113)$$

Demonstração. Aplicamos as propriedades 3 e 5.

Propriedade 8 As condições (3.6) e

$$(N_0)_{1/2,-1/2} = (N_0)_{-1/2,1/2} = 0 , \quad (3.114)$$

$$(N_0)_{1/2,1/2} = (N_0)_{-1/2,-1/2} , \quad (3.115)$$

$$(N_+)_{1/2,1/2} = (N_+)_{-1/2,-1/2} = (N_+)_{-1/2,1/2} = 0 , \quad (3.116)$$

$$(N_-)_{1/2,1/2} = (N_-)_{-1/2,-1/2} = (N_-)_{1/2,-1/2} = 0 , \quad (3.117)$$

$$(N_+)_{1/2,-1/2} = (N_-)_{-1/2,1/2} = -\sqrt{2} (N^1)_{1/2,-1/2} \quad (3.118)$$

são cumpridas pela soma de quaisquer diagramas da fig. 2.3 no referencial do laboratório.

Demonstração. Aplicamos as propriedades 1, 2, 6 e 7 com $|\Phi(\pm 1/2)\rangle$, $|\Psi(\pm 1/2)\rangle$ definidos como

$$|\Phi(\pm 1/2)\rangle = |\Psi(\pm 1/2)\rangle = |\Gamma^1(\tilde{P}_t, \pm 1/2, T_z)\rangle. \quad (3.119)$$

Por causa da propriedade 8 basta calcularmos $(N_0)_{-1/2, -1/2}$ e $(N^1)_{1/2, -1/2}$ para obtermos os factores de forma electromagnéticos do trinucleão; para além disso, as eqs. (3.2), (3.3) simplificam-se dando lugar a

$$|F_C| = \frac{|(N_0)_{-1/2, -1/2}|}{Z \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4M_t^2}}}, \quad (3.120)$$

$$|(1 + \kappa)F_M| = \frac{2M_t|(N^1)_{1/2, -1/2}|}{Z \sqrt{-Q^2}}. \quad (3.121)$$

Proposição 3.2.2

$$(L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n)^\dagger = L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b [(B(\eta\hat{e}^3))^0{}_0 \mathcal{J}_i^0 \\ - (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_3 \mathcal{J}_i^3] \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{0,\pi,0}), \quad (3.122)$$

$$(L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n)^\dagger = -L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{0,\pi,0}), \quad (3.123)$$

$$(L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n)^\dagger = L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{0,\pi,0}), \quad (3.124)$$

$$(L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n)^\dagger = L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b [(B(\eta\hat{e}^3))^3{}_0 \mathcal{J}_i^0 \\ - (B(\eta\hat{e}^3))^3{}_3 \mathcal{J}_i^3] \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{0,\pi,0}). \quad (3.125)$$

Demonstração.

$$(L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n)^\dagger \\ = P_{12}^{n\dagger} \mathcal{O}_b^\dagger \mathcal{J}_i^{\mu\dagger} \mathcal{O}_a^\dagger P_{12}^{m\dagger} \tilde{\gamma}^{0\dagger} L(B(\eta\hat{e}^3)) \\ = \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_a P_{12}^m L(B(\eta\hat{e}^3)) \\ = (L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)))^\dagger ((L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)))^\dagger)^{-1} \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_a P_{12}^m L(B(\eta\hat{e}^3)) \\ = (L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)))^\dagger L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_a P_{12}^m L(B(\eta\hat{e}^3)) \\ = (L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)))^\dagger \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^\mu L(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{O}_a P_{12}^m \\ = L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0}) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^\mu L(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{O}_a P_{12}^m \\ = L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b L(R_{0,\pi,0}) L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^\mu L(B(\eta\hat{e}^3)) L^{-1}(R_{0,\pi,0}) \\ \times \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{0,\pi,0}) \\ = L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b [L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^\mu L(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0})]$$

$$\times \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{0,\pi,0}) . \quad (3.126)$$

$$L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^0 L(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0}) = (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_0 \mathcal{J}_i^0 - (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_3 \mathcal{J}_i^3 , \quad (3.127)$$

$$L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^1 L(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0}) = -\mathcal{J}_i^1 , \quad (3.128)$$

$$L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^2 L(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0}) = \mathcal{J}_i^2 , \quad (3.129)$$

$$L^{-1}(R_{0,\pi,0}) L^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \mathcal{J}_i^3 L(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0}) = (B(\eta\hat{e}^3))^3{}_0 \mathcal{J}_i^0 - (B(\eta\hat{e}^3))^3{}_3 \mathcal{J}_i^3 . \quad (3.130)$$

Propriedade 9

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_0 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \\ &\times \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* - (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_3 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* , \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_a \\ &\times P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* , \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= -\langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_a \\ &\times P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* , \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= (B(\eta\hat{e}^3))^3{}_0 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \\ &\times \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* - (B(\eta\hat{e}^3))^3{}_3 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* . \end{aligned} \quad (3.134)$$

Demonstração. Na eq. (3.131) com $M' = -M$ utilizamos a propriedade 1; com $M' = M$ aplicamos a propriedade 2 e a proposição 3.2.2:

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= \langle \Psi(M) | (L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n)^\dagger | \Phi(M) \rangle^* \\ &= (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_0 \langle \Psi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(-M) \rangle^* \\ &\quad - (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_3 \langle \Psi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(-M) \rangle^* \\ &= (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_0 \langle \Psi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* \\ &\quad - (B(\eta\hat{e}^3))^0{}_3 \langle \Psi(M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^* . \end{aligned} \quad (3.135)$$

Na eq. (3.132) com $M' = M$ utilizamos a propriedade 4; com $M' = -M$ recorremos à proposição 3.2.2:

$$\langle \Phi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \Psi(M) | (L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n)^\dagger | \Phi(-M) \rangle^* \\
&= \langle \Psi(-M) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle^*. \tag{3.136}
\end{aligned}$$

O procedimento para as componentes \mathcal{J}_i^2 , \mathcal{J}_i^3 é análogo.

Proposição 3.2.3 Sejam $J_i^0 = \mathcal{J}_i^0$, $J_i^1 = \mathcal{J}_i^1$, $J_i^2 = -\mathcal{J}_i^2$, $J_i^3 = \mathcal{J}_i^3$.

$$\begin{aligned}
L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(\mathcal{T}) &= -L^\dagger(\mathcal{T}) L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b \\
&\quad \times P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}). \tag{3.137}
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(\mathcal{T}) \\
&= \mathcal{T}_\nu^\mu L^\dagger(\mathcal{T}) L^\dagger((B(\eta\hat{e}^3))^{-1})\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n \\
&= \mathcal{T}_\nu^\mu L^\dagger(\mathcal{T}) L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0})\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n \\
&= -L^\dagger(\mathcal{T}) L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}). \tag{3.138}
\end{aligned}$$

Propriedade 10 Sejam $J_i^0 = \mathcal{J}_i^0$, $J_i^1 = \mathcal{J}_i^1$, $J_i^2 = -\mathcal{J}_i^2$, $J_i^3 = \mathcal{J}_i^3$.

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b \\
&\quad \times P_{12}^n | \Psi(M) \rangle^*. \tag{3.139}
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\
&= c_{-M}^* \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(\mathcal{T}) | \Psi(-M) \rangle \\
&= -c_{-M}^* \langle \Phi(M') | L^\dagger(\mathcal{T}) L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}) | \Psi(-M) \rangle \\
&= -c_{-M}^* \langle \Psi(-M) | L^\dagger(R_{0,\pi,0}) P_{12}^{n\dagger} \mathcal{O}_b^\dagger J_i^{\mu\dagger} \mathcal{O}_a^\dagger P_{12}^{m\dagger} \tilde{\gamma}^{0\dagger} L(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0}) L(\mathcal{T}) | \Phi(M') \rangle \\
&= -c_{-M}^* c_{M'} \langle \Phi(-M') | L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}) | \Psi(-M) \rangle^* \\
&= -c_{-M}^* c_{M'} (-)^{2J+M+M'} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle^* \\
&= \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle^*. \tag{3.140}
\end{aligned}$$

Observemos que passámos: (a) da primeira igualdade para a segunda utilizando a proposição 3.2.3; (b) da segunda igualdade para a terceira recorrendo à propriedade

$$\langle \Phi(M') | L^\dagger(\mathcal{T}) | v \rangle = \langle v | L(\mathcal{T}) | \Phi(M') \rangle, \tag{3.141}$$

em que $|v\rangle = L^\dagger(R_{0,\pi,0}) L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a J_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{0,\pi,0}) | \Psi(-M) \rangle$; (c) da terceira igualdade para a quarta lançando mão da relação

$$\langle \Psi(-M) | L^\dagger(R_{0,\pi,0}) | v \rangle = \langle v | L(R_{0,\pi,0}) | \Psi(-M) \rangle^*, \tag{3.142}$$

sendo $|v\rangle = P_{12}^{n\dagger} \mathcal{O}_b^\dagger J_i^{\mu\dagger} \mathcal{O}_a^\dagger P_{12}^{m\dagger} \tilde{\gamma}^{0\dagger} L(B(\eta\hat{e}^3)) L(R_{0,\pi,0}) | \Phi(-M') \rangle$.

Propriedade 11 Todo o diagrama da fig. 2.3 no referencial do laboratório tem as componentes 0, 1, 3 reais e a componente 2 imaginária pura.

Demonstração. Empregamos a propriedade 10 com $|\Phi(\pm 1/2)\rangle$ e $|\Psi(\pm 1/2)\rangle$ definidos como na eq. (3.119).

Propriedade 12 Seja $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= (B(\eta \hat{e}^3))^0_0 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \\ &\times \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle - (B(\eta \hat{e}^3))^0_3 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle, \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^j \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^j \mathcal{O}_a \\ &\times P_{12}^m | \Phi(M) \rangle, \end{aligned} \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle &= (B(\eta \hat{e}^3))^3_0 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \\ &\times \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle - (B(\eta \hat{e}^3))^3_3 \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Phi(M) \rangle. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Demonstração. Aplicamos as propriedades 9 e 10.

Propriedade 13 Seja $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle + \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_a \\ \times P_{12}^m | \Phi(M) \rangle = [1 + (B(\eta \hat{e}^3))^0_0] \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ - (B(\eta \hat{e}^3))^0_3 \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle, \end{aligned} \quad (3.146)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^j \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle + \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^j \mathcal{O}_a \\ \times P_{12}^m | \Phi(M) \rangle = 2 \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^j \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle, \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle + \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a \\ \times P_{12}^m | \Phi(M) \rangle = [1 - (B(\eta \hat{e}^3))^3_3] \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ + (B(\eta \hat{e}^3))^3_0 \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Demonstração. Recorremos à propriedade 12.

Propriedade 14 Seja $Q = B(\eta \hat{e}^3) \tilde{P}_t - \tilde{P}_t$.

$$Q_\mu [\langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle + \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_a \\ \times P_{12}^m | \Phi(M) \rangle] = 0. \quad (3.149)$$

Demonstração. Utilizamos a propriedade 13.

Propriedade 15 Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ e $\eta'' \geq 0$ tais que

$$L^\dagger(R_{\varphi_1, \vartheta_1, \varphi_2}) = L^\dagger(R_{\varphi', \vartheta', 0})L(R_{\phi, \theta, 0}), \quad (3.150)$$

$$L^\dagger(R_{0, \vartheta_3, 0})L^\dagger(B(\eta''\hat{e}^3))L^\dagger(R_{0, \vartheta_2, 0}) = L^\dagger(B(\eta'\hat{e}^3))L^\dagger(R_{0, \vartheta_1, 0})L^\dagger(B^{-1}(\eta\hat{e}^3)). \quad (3.151)$$

Então,

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta'\hat{e}^3))L^\dagger(R_{\varphi', \vartheta', 0})\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{\phi, \theta, 0})L(B(\eta\hat{e}^3)) | \Psi(M) \rangle \\ &= e^{i(\varphi_2 M' + \varphi_1 M)} (R_{\phi, \theta, 0} B(\eta\hat{e}^3) R_{\varphi_1, \vartheta_2, 0})^\mu_\nu \sum_{M'' M'''} d_{M'', M'}^{(1/2)}(\vartheta_3) d_{M''', M}^{(1/2)}(-\vartheta_2) \\ & \quad \times \langle \Phi(M'') | L^\dagger(B(\eta''\hat{e}^3))\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M''') \rangle, \end{aligned} \quad (3.152)$$

em que $d^{(1/2)}$ é uma função de Wigner [77].

Demonstração. De

$$|\Psi(1/2)\rangle = -L(R_{0, \pi, 0})|\Psi(-1/2)\rangle, \quad |\Phi(1/2)\rangle = -L(R_{0, \pi, 0})|\Phi(-1/2)\rangle \quad (3.153)$$

resulta que

$$|\Psi(1/2)\rangle = (J^1 + iJ^2)|\Psi(-1/2)\rangle, \quad |\Phi(1/2)\rangle = (J^1 + iJ^2)|\Phi(-1/2)\rangle. \quad (3.154)$$

Consequentemente, sendo φ um ângulo arbitrário,

$$L(R_{0, \varphi, 0})|\Psi(M)\rangle = \sum_{M'} d_{M', M}^{(1/2)}(\varphi)|\Psi(M')\rangle, \quad \langle \Phi(M) | L^\dagger(R_{0, \varphi, 0}) = \sum_{M'} d_{M', M}^{(1/2)}(\varphi)\langle \Phi(M')|. \quad (3.155)$$

Continuando obtemos

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta'\hat{e}^3))L^\dagger(R_{\varphi', \vartheta', 0})\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{\phi, \theta, 0})L(B(\eta\hat{e}^3)) | \Psi(M) \rangle \\ &= (R_{\phi, \theta, 0} B(\eta\hat{e}^3))^\mu_\nu \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta'\hat{e}^3))L^\dagger(R_{\varphi', \vartheta', 0})L(R_{\phi, \theta, 0})L^\dagger(B^{-1}(\eta\hat{e}^3)) \\ & \quad \times \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= (R_{\phi, \theta, 0} B(\eta\hat{e}^3))^\mu_\nu \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta'\hat{e}^3))L^\dagger(R_{\varphi_1, \vartheta_1, \varphi_2})L^\dagger(B^{-1}(\eta\hat{e}^3)) \\ & \quad \times \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= e^{i\varphi_2 M'} (R_{\phi, \theta, 0} B(\eta\hat{e}^3))^\mu_\nu \langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta'\hat{e}^3))L^\dagger(R_{0, \vartheta_1, 0})L^\dagger(B^{-1}(\eta\hat{e}^3)) \\ & \quad \times L^\dagger(R_{\varphi_1, 0, 0})\tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\ &= e^{i\varphi_2 M'} (R_{\phi, \theta, 0} B(\eta\hat{e}^3))^\mu_\nu \langle \Phi(M') | L^\dagger(R_{0, \vartheta_3, 0})L^\dagger(B(\eta''\hat{e}^3))L^\dagger(R_{\varphi_1, \vartheta_2, 0}) \\ & \quad \times \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i\varphi_2 M'} (R_{\phi,\theta,0} B(\eta \hat{e}^3))^{\mu}_{\nu} \sum_{M''} d_{M'', M'}^{(1/2)}(\vartheta_3) \langle \Phi(M'') | L^\dagger(B(\eta'' \hat{e}^3)) L^\dagger(R_{\varphi_1, \vartheta_2, 0}) \\
&\quad \times \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M) \rangle \\
&= e^{i\varphi_2 M'} (R_{\phi,\theta,0} B(\eta \hat{e}^3) R_{\varphi_1, \vartheta_2, 0})^{\mu}_{\nu} \sum_{M''} d_{M'', M'}^{(1/2)}(\vartheta_3) \langle \Phi(M'') | L^\dagger(B(\eta'' \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \\
&\quad \times \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n L^{-1}(R_{\varphi_1, \vartheta_2, 0}) | \Psi(M) \rangle \\
&= e^{i(\varphi_2 M' + \varphi_1 M)} (R_{\phi,\theta,0} B(\eta \hat{e}^3) R_{\varphi_1, \vartheta_2, 0})^{\mu}_{\nu} \sum_{M'' M'''} d_{M'', M'}^{(1/2)}(\vartheta_3) d_{M''', M}^{(1/2)}(-\vartheta_2) \\
&\quad \times \langle \Phi(M'') | L^\dagger(B(\eta'' \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\nu \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi(M''') \rangle. \tag{3.156}
\end{aligned}$$

Propriedade 16 Seja $Q = R_{\phi', \theta', 0} B(\eta' \hat{e}^3) \tilde{P}_t - R_{\phi, \theta, 0} B(\eta \hat{e}^3) \tilde{P}_t$.

$$\begin{aligned}
&Q_\mu [\langle \Phi(M') | L^\dagger(B(\eta' \hat{e}^3)) L^\dagger(R_{\phi', \theta', 0}) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{\phi, \theta, 0}) L(B(\eta \hat{e}^3)) | \Psi(M) \rangle \\
&+ \langle \Psi(M') | L^\dagger(B(\eta' \hat{e}^3)) L^\dagger(R_{\phi', \theta', 0}) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{\phi, \theta, 0}) L(B(\eta \hat{e}^3)) | \Phi(M) \rangle] = 0. \tag{3.157}
\end{aligned}$$

Demonstração. Aplicamos as propriedades 14, 15 e

$$Q_\mu [R_{\phi, \theta, 0} B(\eta \hat{e}^3) R_{\varphi_1, \vartheta_2, 0}]^{\mu}_{\nu} = [B(\eta'' \hat{e}^3) \tilde{P}_t - \tilde{P}_t]_{\nu}, \tag{3.158}$$

em que $\eta'' \geq 0$ e $\varphi_1, \vartheta_2, \eta''$ cumprem as eqs. (3.150), (3.151).

Propriedade 17 Consideremos a fig. 2.3. A condição de conservação da corrente electromagnética de Gross do trinucleão é satisfeita pelos diagramas A, D, G, H, a soma de B e C, a soma de E e F, a soma de I e J.

Demonstração. Qualquer um dos diagramas A, D, G, H, a soma de B e C, a soma de E e F, a soma de I e J podem-se escrever como

$$\begin{aligned}
&c[\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta' \hat{e}^3)) L^\dagger(R_{\phi', \theta', 0}) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_b P_{12}^n L(R_{\phi, \theta, 0}) L(B(\eta \hat{e}^3)) \\
&| \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle + \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta' \hat{e}^3)) L^\dagger(R_{\phi', \theta', 0}) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^\mu \mathcal{O}_a P_{12}^m L(R_{\phi, \theta, 0}) \\
&\times L(B(\eta \hat{e}^3)) | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle], \tag{3.159}
\end{aligned}$$

em que $c = 1/2$ para A, D, G, H, $c = 1$ para a soma de B e C, soma de E e F, soma de I e J. Em seguida utilizamos a propriedade 16 com $|\Phi(\pm 1/2)\rangle$ e $|\Psi(\pm 1/2)\rangle$ definidos como na eq. (3.119).

Propriedade 18 A corrente electromagnética de Gross do trinucleão é conservada quer completa quer truncada na aproximação CIA.

Demonstração. É uma consequência imediata da propriedade 17.

Propriedade 19 Seja $\nu = 1, \dots, N$, $N \leq \infty$. Sejam $|\Psi_1(M)\rangle, \dots, |\Psi_N(M)\rangle$, $M = \pm 1/2$, tais que

$$|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = \sum_{\nu} |\Psi_{\nu}(M)\rangle \quad (3.160)$$

e $|\Psi_{\nu}(M)\rangle$ é um vector de momento \tilde{P}_t , paridade positiva, momento angular $J = 1/2$, componente M do momento angular segundo o eixo X^3 , isospin $\mathcal{T} = 1/2$, componente \mathcal{T}_z do isospin segundo o eixo de isospin z que tem as propriedades de transformação (3.48), (3.57)-(3.59) dos elementos da base (3.46). Consideremos qualquer um dos diagramas A, D, G, H da fig. 2.3 no referencial do laboratório. Então,

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\nu' \geq \nu} \{ [1 + \bar{\delta}_{\nu'\nu}(B(\eta \hat{e}^3))^0] \langle \Psi_{\nu'}(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi_{\nu}(M) \rangle \\ &\quad - \bar{\delta}_{\nu'\nu}(B(\eta \hat{e}^3))^0 {}_3 \langle \Psi_{\nu'}(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi_{\nu}(M) \rangle \}, \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\nu' \geq \nu} (2 - \delta_{\nu'\nu}) \langle \Psi_{\nu'}(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi_{\nu}(M) \rangle, \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\nu' \geq \nu} (2 - \delta_{\nu'\nu}) \langle \Psi_{\nu'}(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi_{\nu}(M) \rangle, \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\nu' \geq \nu} \{ \bar{\delta}_{\nu'\nu}(B(\eta \hat{e}^3))^3 {}_0 \langle \Psi_{\nu'}(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi_{\nu}(M) \rangle \\ &\quad + [1 - \bar{\delta}_{\nu'\nu}(B(\eta \hat{e}^3))^3] \langle \Psi_{\nu'}(M') | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Psi_{\nu}(M) \rangle \}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Demonstração. Empregamos a propriedade 12 e a identidade

$$P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^{\mu} \mathcal{O}_b P_{12}^n = P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^{\mu} \mathcal{O}_a P_{12}^m, \quad (3.165)$$

a qual é válida para os diagramas mencionados.

A inserção das fórmulas (3.161), (3.162), (3.163), (3.164) num programa informático de cálculo dos diagramas A, D, G, H da fig. 2.3 no referencial do laboratório melhora a sua eficiência, visto que para cada diagrama há uma soma sobre $N(N+1)/2$ componentes do vector de vértice em vez de N^2 componentes.

Propriedade 20 Atendamos a qualquer um dos pares dos diagramas B e C , E e F , I e J da fig. 2.3 no referencial do laboratório. Então,

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ & + \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ = & [1 + (B(\eta\hat{e}^3))^0_0] \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ & - (B(\eta\hat{e}^3))^0_3 \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle, \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ & + \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ = & 2 \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^1 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle, \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ & + \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ = & 2 \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^2 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle, \\ & \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ & + \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^n \mathcal{O}_b \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_a P_{12}^m | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ = & [1 - (B(\eta\hat{e}^3))^3_3] \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ & + (B(\eta\hat{e}^3))^3_0 \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle. \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$= [1 - (B(\eta\hat{e}^3))^3_3] \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^3 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle \\ + (B(\eta\hat{e}^3))^3_0 \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) \tilde{\gamma}^0 P_{12}^m \mathcal{O}_a \mathcal{J}_i^0 \mathcal{O}_b P_{12}^n | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle. \quad (3.169)$$

Demonstração. Aplicamos a propriedade 13 com $|\Phi(\pm 1/2)\rangle$ e $|\Psi(\pm 1/2)\rangle$ definidos como na eq. (3.119).

Em virtude da propriedade 20 é suficiente calcularmos os diagramas C, F, J da fig. 2.3 no referencial do laboratório em vez das somas dos diagramas B e C, E e F, I e J respectivamente.

3.3 Vectores de momento angular

Mostra-se que se os momentos p_1, p_2, p_3 satisfazem $p_1 + p_2 + p_3 = \tilde{P}_t$, $(p_2 + p_3)^2 > 0$ e $p_2^0 + p_3^0 > 0$, então,

$$p_1 = R_{\Phi, \Theta, 0} R_{\pi, \pi, 0} \begin{pmatrix} q^0 \\ 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (3.170)$$

$$p_2 = R_{\Phi,\Theta,0} Z(q^0, q) R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0} \begin{pmatrix} \tilde{p}^0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad (3.171)$$

$$p_3 = R_{\Phi,\Theta,0} Z(q^0, q) R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0} R_{\pi,\pi,0} \begin{pmatrix} W(q^0, q) - \tilde{p}^0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad (3.172)$$

em que $0 \leq \Phi, \tilde{\phi} < 2\pi$, $0 \leq \Theta, \tilde{\theta} \leq \pi$, $q_0 < M_t$, $0 \leq q < M_t - q_0$, $0 \leq \tilde{p}$, $Z(q^0, q)$ é a transformação de Lorentz pura $B(\chi(q^0, q)\hat{e}^3)$ tal que $\sinh(\chi(q^0, q)) = q/W(q^0, q)$ e $W(q^0, q)$ é a massa total dos nucleões 2 e 3 definida por $W(q^0, q) = \sqrt{(M_t - q_0)^2 - q^2}$. Tendo como ponto de partida os estados de momento angular das refs. [65, 78, 79], definimos o vector de momento angular $|q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle$ por

$$\begin{aligned} |q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle &= \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi^2}} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\Theta \sin\Theta \int_0^{2\pi} d\tilde{\phi} \int_0^\pi d\tilde{\theta} \sin\tilde{\theta} \\ &\times D_{M,m-\lambda_1}^{(1/2)*}(\Phi, \Theta, 0) D_{m,\lambda_2-\lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) |p_1\rangle \otimes S(R_{\Phi,\Theta,0}) S(R_{\pi,\pi,0}) u^{\rho_1}(q, \lambda_1) \otimes |p_2\rangle \\ &\otimes S(R_{\Phi,\Theta,0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}) u^{\rho_2}(\tilde{p}, \lambda_2) \otimes |p_3\rangle \otimes S(R_{\Phi,\Theta,0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}) \\ &\times S(R_{\pi,\pi,0}) u^{\rho_3}(\tilde{p}, \lambda_3) \otimes [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z, \end{aligned} \quad (3.173)$$

em que $j = 0, 1, \dots$, $D^{(1/2)}$, $D^{(j)}$ são funções de Wigner [77], $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \pm 1/2$, $M = \pm 1/2$, $|m - \lambda_1| \leq 1/2$, $|\lambda_2 - \lambda_3| \leq j$, $m = -j, -j+1, \dots, j$, p_1, p_2, p_3 são definidos nas eqs. (3.170)-(3.172), $\rho_1, \rho_2, \rho_3 = \pm$,

$$u^+(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E(p)+M_n}{2M_n}} \\ 2\lambda \sqrt{\frac{E(p)-M_n}{2M_n}} \end{pmatrix} \otimes \chi(\lambda), \quad u^-(p, \lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda \sqrt{\frac{E(p)-M_n}{2M_n}} \\ \sqrt{\frac{E(p)+M_n}{2M_n}} \end{pmatrix} \otimes \chi(\lambda), \quad (3.174)$$

$$\chi(1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi(-1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.175)$$

m é a helicidade do par dos nucleões 2 e 3, λ_1 é a helicidade do nucleão 1. Se $q = 0$, então: (a) j é o momento angular do par dos nucleões 2 e 3, (b) λ_2 e λ_3 são as helicidades dos nucleões 2 e 3 respectivamente. Qualquer vector de três nucleões de momento total \tilde{P}_t , momento angular total $1/2$, isospin total $1/2$, componente M do momento angular total segundo o eixo X^3 , componente \mathcal{T}_z do isospin total segundo o eixo de isospin z , momento total dos nucleões 2 e 3 do género temporal e energia total dos nucleões 2 e 3 positiva é uma combinação linear de vectores do género (3.173).

Os efeitos de $L(R_{0,\pi,0})$, $L(\mathcal{T})$, $e^{-i\pi I^2}$, $L(\mathcal{P})$ e P_{23} sobre o vector (3.173) são:

$$L(R_{0,\pi,0})|q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-M} |q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} - M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle, \quad (3.176)$$

$$L(\mathcal{T})|q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-M} |q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} - M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle, \quad (3.177)$$

$$e^{-i\pi I^2}|q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-\mathcal{T}_z} |q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T - \mathcal{T}_z\rangle, \quad (3.178)$$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P})|q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle &= -\rho_1 \rho_2 \rho_3 \\ &\times |q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j - m - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle, \end{aligned} \quad (3.179)$$

$$\begin{aligned} P_{23}|q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle &= (-1)^{j+T} \\ &\times |q^0 q W(q^0, q) - \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \rho_1 \rho_3 \rho_2 T \mathcal{T}_z\rangle. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Desenvolvemos o vector $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ como

$$\begin{aligned} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle &= \sum_{\substack{j m T \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \sum_{\substack{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \\ \rho'_1 \rho'_2 \rho'_3}} \int_{-\infty}^{M_t} \frac{dq^0}{2\pi} \int_0^{M_t-q_0} \frac{dqq^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{M_n}{E(q)} \right)^2 \int \frac{d\tilde{p}^0}{2\pi} \int \frac{d\tilde{p}\tilde{p}^2}{(2\pi)^3} \\ &\times \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^4 C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho'_1 \rho'_2 \rho'_3 T \mathcal{T}_z) O_{\rho_1 \rho'_1}(q, \lambda_1) O_{\rho_2 \rho'_2}(\tilde{p}, \lambda_2) O_{\rho_3 \rho'_3}(\tilde{p}, \lambda_3) \\ &\times |q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z\rangle, \end{aligned} \quad (3.181)$$

sendo

$$O_{\rho' \rho}(p, \lambda) = \bar{u}^{\rho'}(p, \lambda) u^{\rho}(p, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda \frac{p}{M_n} \\ -2\lambda \frac{p}{M_n} & -1 \end{pmatrix}_{\rho' \rho}, \quad (3.182)$$

$$C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho'_1 \rho'_2 \rho'_3 T \mathcal{T}_z) = C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} - 1/2 j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho'_1 \rho'_2 \rho'_3 T - 1/2). \quad (3.183)$$

São equivalentes as condições (3.183) e

$$|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = (-1)^{\frac{2M+1}{2}} (-1)^{\frac{2\mathcal{T}_z+1}{2}} [L(R_{0,\pi,0})]^{\frac{2M+1}{2}} [e^{-i\pi I^2}]^{\frac{2\mathcal{T}_z+1}{2}} |\Gamma^1(\tilde{P}_t, -1/2, -1/2)\rangle. \quad (3.184)$$

Como o espaço de base (3.46) é invariante com respeito a $L(\mathcal{T})$, existe um número complexo unitário ϱ tal que

$$C^*(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} - 1/2 j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T - 1/2) = \varrho C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} - 1/2 j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T - 1/2). \quad (3.185)$$

O vector $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ tem a propriedade de transformação (3.57)-(3.59) com $c_M = \varrho(-1)^{1/2-M}$. De $L(\mathcal{P})|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = |\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ e da propriedade (3.179) resulta

$$\begin{aligned} C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z) &= -\rho_1 \rho_2 \rho_3 \\ &\times C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j - m - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z). \end{aligned} \quad (3.186)$$

Da eq. (3.180) e de $P_{23}|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle = -|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ obtemos

$$\begin{aligned} C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \rho_1 \rho_3 \rho_2 T \mathcal{T}_z) &= (-1)^{j+T+1} \\ &\times C(q^0 q W(q^0, q) - \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z). \end{aligned} \quad (3.187)$$

3.4 Corrente electromagnética do nucleão

Restringimos a escolha de j^μ , eqs. (3.35) e (3.36), às correntes NCI, NCII, NCIII, NCIV e NCV definidas a seguir. Sejam F_{1p} e F_{1n} os factores de forma de Dirac do nucleão, F_{2p} e F_{2n} os factores de forma de Pauli do nucleão, G_{Ep} e G_{En} os factores de forma de Sachs do nucleão, f_0 e g_0 as funções definidas por [38]

$$f_0(p'^2, p^2) = \frac{h(p^2)}{h(p'^2)} \frac{M_n^2 - p'^2}{p^2 - p'^2} + \frac{h(p'^2)}{h(p^2)} \frac{M_n^2 - p^2}{p'^2 - p^2}, \quad (3.188)$$

$$g_0(p'^2, p^2) = \left(\frac{h(p^2)}{h(p'^2)} - \frac{h(p'^2)}{h(p^2)} \right) \frac{4M_n^2}{p'^2 - p^2}, \quad (3.189)$$

h o factor de forma do nucleão nos vértices NN-mesão determinado por [80]

$$h(p^2) = \left(\frac{(\Lambda_n^2 - M_n^2)^2}{(\Lambda_n^2 - M_n^2)^2 + (M_n^2 - p^2)^2} \right)^2, \quad (3.190)$$

Λ_n um parâmetro dependente do modelo da interacção NN, Q e $\sigma^{\mu\nu}$ definidos por

$$Q = p' - p, \quad (3.191)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.192)$$

e τ^3 o operador da componente do isospin do nucleão segundo o eixo de isospin z . Então, a corrente NCI é definida por

$$\begin{aligned} j^\mu(p', p) &= e_p \left[F_{1p}(Q^2) \frac{1 + \tau^3}{2} + F_{1n}(Q^2) \frac{1 - \tau^3}{2} \right] \gamma^\mu \\ &+ e_p \left[\frac{F_{2p}(Q^2)}{2M_n} \frac{1 + \tau^3}{2} + \frac{F_{2n}(Q^2)}{2M_n} \frac{1 - \tau^3}{2} \right] i\sigma^{\mu\nu} Q_\nu, \end{aligned} \quad (3.193)$$

a corrente NCII é definida por

$$\begin{aligned}
j^\mu(p', p) = & e_p \frac{1 + \tau^3}{2} f_0(p'^2, p^2) \gamma^\mu \\
& + e_p \left[(F_{1p}(Q^2) - 1) \frac{1 + \tau^3}{2} + F_{1n}(Q^2) \frac{1 - \tau^3}{2} \right] f_0(p'^2, p^2) \left(\gamma^\mu - \frac{\not{Q} Q^\mu}{Q^2} \right) \\
& + e_p \left[\frac{F_{2p}(Q^2)}{2M_n} \frac{1 + \tau^3}{2} + \frac{F_{2n}(Q^2)}{2M_n} \frac{1 - \tau^3}{2} \right] f_0(p'^2, p^2) i\sigma^{\mu\nu} Q_\nu \\
& + e_p \frac{1 + \tau^3}{2} g_0(p'^2, p^2) \frac{\not{p}' - M_n}{2M_n} \gamma^\mu \frac{\not{p} - M_n}{2M_n} \\
& + e_p \left[(G_{Ep}(Q^2) - 1) \frac{1 + \tau^3}{2} + G_{En}(Q^2) \frac{1 - \tau^3}{2} \right] \\
& \times g_0(p'^2, p^2) \frac{\not{p}' - M_n}{2M_n} \left(\gamma^\mu - \frac{\not{Q} Q^\mu}{Q^2} \right) \frac{\not{p} - M_n}{2M_n}, \tag{3.194}
\end{aligned}$$

a corrente NCIII é obtida substituindo G_{Ep} , G_{En} na eq. (3.194) por F_{1p} , F_{1n} respetivamente, a corrente NCIV é obtida substituindo f_0 no terceiro termo da eq. (3.194) por 1, a corrente NCV é obtida substituindo G_{Ep} , G_{En} na expressão da corrente NCIV por F_{1p} , F_{1n} respectivamente. Sejam p' e p momentos tais que $p'^0 = E(p')$ e $p^0 = E(p)$, $\bar{u}(p')$ e $u(p)$ soluções das equações de Dirac $\bar{u}(p')(i\not{p}' - M_n) = 0$ e $(i\not{p} - M_n)u(p) = 0$, $i = \text{NCI-NCV}$ e j_i^μ a corrente i ; então, $\bar{u}(p')j_i^\mu u(p) = \bar{u}(p')j_{NCI}^\mu u(p)$. As correntes NCII-NCV satisfazem a identidade de Ward-Takahashi (1.284) e a identidade de Ward (1.286). Em cada uma das correntes NCII-NCV os termos que contêm $\not{Q} Q^\mu / Q^2$ não contribuem para os factores de forma do trinúcleo porque a contracção de qualquer um desses termos com a corrente conservada do elétron é nula. Serão por isso removidos daqui em diante.

3.5 Cálculo dos diagramas A-F no referencial do laboratório

Utilizaremos as proposições 3.5.1-3.5.5 a seguir expostas no cálculo da corrente electromagnética de Gross do trinúcleo na aproximação CIA (diagramas A-F da fig. 2.3) no referencial do laboratório.

Proposição 3.5.1 *Sejam η_1 , η_2 , θ_1 números reais e η_3 tal que*

$$\sinh \eta_3 = \sqrt{(\cosh \eta_1 \cosh \eta_2 + \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \cos \theta_1)^2 - 1}. \tag{3.195}$$

Se $\eta_3 > 0$, sejam θ_2 , θ_3 tais que $0 \leq \theta_2, \theta_3 < 2\pi$ e

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1 \sinh \eta_2}{\sinh \eta_3}, \tag{3.196}$$



$$\cos \theta_2 = \frac{\sinh \eta_1 \cosh \eta_2 + \cosh \eta_1 \sinh \eta_2 \cos \theta_1}{\sinh \eta_3}, \quad (3.197)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{\sin \theta_1 \sinh \eta_1}{\sinh \eta_3}, \quad (3.198)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\cosh \eta_1 \sinh \eta_2 + \sinh \eta_1 \cosh \eta_2 \cos \theta_1}{\sinh \eta_3}. \quad (3.199)$$

Se $\eta_3 = 0$, sejam θ_2, θ_3 tais que $\theta_3 = 0, 0 \leq \theta_2 < 2\pi$ e

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_1, \quad (3.200)$$

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_1. \quad (3.201)$$

Então,

$$B(\eta_1 \hat{e}^3) R(\theta_1 \hat{e}^2) B(\eta_2 \hat{e}^3) = R(\theta_2 \hat{e}^2) B(\eta_3 \hat{e}^3) R(\theta_3 \hat{e}^2). \quad (3.202)$$

Proposição 3.5.2 Se as condições da hipótese da proposição 3.5.1 são satisfeitas, então,

$$S(B(\eta_1 \hat{e}^3)) S(R(\theta_1 \hat{e}^2)) S(B(\eta_2 \hat{e}^3)) = \varsigma_1(\eta_1, \theta_1, \eta_2) S(R(\theta_2 \hat{e}^2)) S(B(\eta_3 \hat{e}^3)) S(R(\theta_3 \hat{e}^2)), \quad (3.203)$$

em que

$$\varsigma_1(\eta_1, \theta_1, \eta_2) = \frac{\cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\eta_3}{2}\right)}, \quad (3.204)$$

$$|\varsigma_1(\eta_1, \theta_1, \eta_2)| = 1. \quad (3.205)$$

Demonstração. A representação no espaço de Dirac do grupo das transformações homogéneas de Lorentz é projectiva. Existe, portanto, $\varsigma_1(\eta_1, \theta_1, \eta_2)$ tal que $|\varsigma_1(\eta_1, \theta_1, \eta_2)| = 1$ e a condição (3.203) é cumprida. De $|\varsigma_1(\eta_1, \theta_1, \eta_2)| = 1$ e

$$v^\dagger S(B(\eta_1 \hat{e}^3)) S(R(\theta_1 \hat{e}^2)) S(B(\eta_2 \hat{e}^3)) v = \varsigma_1(\eta_1, \theta_1, \eta_2) v^\dagger S(R(\theta_2 \hat{e}^2)) S(B(\eta_3 \hat{e}^3)) S(R(\theta_3 \hat{e}^2)) v \quad (3.206)$$

com

$$v = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.207)$$

obtemos a fórmula (3.204).

Proposição 3.5.3 Sejam $\theta_1, \theta_2, \phi_1$ números reais e θ_3 tal que

$$\theta_3 = \arccos(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi_1). \quad (3.208)$$

Se $\theta_3 \neq 0$ e $\theta_3 \neq \pi$, sejam ϕ_2, ϕ_3 tais que $0 \leq \phi_2, \phi_3 < 2\pi$ e

$$\sin \phi_2 = \frac{\sin \theta_2 \sin \phi_1}{\sin \theta_3}, \quad (3.209)$$

$$\cos \phi_2 = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi_1}{\sin \theta_3}, \quad (3.210)$$

$$\sin \phi_3 = \frac{\sin \theta_1 \sin \phi_1}{\sin \theta_3}, \quad (3.211)$$

$$\cos \phi_3 = \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \phi_1}{\sin \theta_3}. \quad (3.212)$$

Se $\cos \theta_3 = \pm 1$, sejam ϕ_2, ϕ_3 tais que $\phi_3 = 0, 0 \leq \phi_2 < 2\pi$ e

$$\sin \phi_2 = \frac{1}{2} \sin \phi_1 (\cos \theta_1 \pm \cos \theta_2), \quad (3.213)$$

$$\cos \phi_2 = \frac{1}{2} [\cos \phi_1 (1 \pm \cos \theta_1 \cos \theta_2) \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2]. \quad (3.214)$$

Então,

$$R(\theta_1 \hat{e}^2) R(\phi_1 \hat{e}^3) R(\theta_2 \hat{e}^2) = R(\phi_2 \hat{e}^3) R(\theta_3 \hat{e}^2) R(\phi_3 \hat{e}^3). \quad (3.215)$$

Proposição 3.5.4 Suponhamos que as condições da hipótese da proposição 3.5.3 são satisfeitas. Seja θ tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e

$$\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi_1}{2} \right). \quad (3.216)$$

Se $\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) > 0$, sejam a e b tais que

$$a = \cos \left(\frac{\theta_3}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right), \quad (3.217)$$

$$b = \frac{\sin \left(\frac{\theta_3}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left[\sin \left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} \right) + \cos \left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right. \\ \times \left. \cos \left(\frac{\phi_1}{2} \right) \right] + \frac{\cos \left(\frac{\theta_3}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (3.218)$$

Se $\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0$, a e b são tais que

$$a = \cos \left(\frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right), \quad (3.219)$$

$$b = \sin\left(\frac{\phi_2 + \phi_3}{2}\right). \quad (3.220)$$

Então,

$$S(R(\theta_1 \hat{e}^2))S(R(\phi_1 \hat{e}^3))S(R(\theta_2 \hat{e}^2)) = \varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_2)S(R(\phi_2 \hat{e}^3))S(R(\theta_3 \hat{e}^2))S(R(\phi_3 \hat{e}^3)), \quad (3.221)$$

em que

$$\varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_2) = \frac{a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{a^2 + b^2}, \quad (3.222)$$

$$|\varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_2)| = 1. \quad (3.223)$$

Demonstração. Como já dissemos a representação no espaço de Dirac do grupo das transformações homogéneas de Lorentz é projectiva. Por isso, existe $\varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_2)$ tal que $|\varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_2)| = 1$ e a condição (3.221) é satisfeita. Se $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, sejam \hat{n} o vector cujas componentes cartesianas são

$$\hat{n}^1 = -\frac{\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (3.224)$$

$$\hat{n}^2 = \frac{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (3.225)$$

$$\hat{n}^3 = \frac{\cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (3.226)$$

α o ângulo tal que $\arccos \alpha = \hat{n}^3$ e v o vector definido por

$$v = S(R(\alpha \hat{u})) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.227)$$

em que $\hat{u} = (\hat{e}^3 \times \hat{n})/|\hat{e}^3 \times \hat{n}|$ ou $\hat{u} = \hat{e}^2$ consoante $|\hat{n}^3| \neq 1$ ou $|\hat{n}^3| = 1$. Se $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, seja v definido por

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.228)$$

Seja $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ seja $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ verifica-se que

$$v^\dagger S(R(\theta_1 \hat{e}^2))S(R(\phi_1 \hat{e}^3))S(R(\theta_2 \hat{e}^2))v = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (3.229)$$

$$v^\dagger S(R(\phi_2 \hat{e}^3)) S(R(\theta_3 \hat{e}^2)) S(R(\phi_3 \hat{e}^3)) v = a - ib. \quad (3.230)$$

Das eqs. (3.229), (3.230), $|\varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_2)| = 1$ e

$$\begin{aligned} v^\dagger S(R(\theta_1 \hat{e}^2)) S(R(\phi_1 \hat{e}^3)) S(R(\theta_2 \hat{e}^2)) v &= \varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_2) \\ &\times v^\dagger S(R(\phi_2 \hat{e}^3)) S(R(\theta_3 \hat{e}^2)) S(R(\phi_3 \hat{e}^3)) v \end{aligned} \quad (3.231)$$

obtemos a fórmula (3.222).

Proposição 3.5.5 *Dados dois momentos p' , p não negativos, ρ' tal que $\rho' = +$ ou $\rho' = -, \rho$ tal que $\rho = +$ ou $\rho = -, \text{ dois produtos } P_1, P_2 \text{ de matrizes representativas no espaço de Dirac de rotações em torno dos eixos } X^2, X^3 \text{ e de transformações de Lorentz puras na direcção do eixo } X^3, \text{ existem: (a) números reais } \varsigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \varepsilon \text{ tais que } |\varsigma| = 1 \text{ e}$*

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\rho'}(p', \lambda') P_1 \gamma^0 P_2 u^\rho(p, \lambda) &= \varsigma e^{-i(\lambda' \alpha_1 + \lambda \alpha_3)} u^{\rho' \dagger}(0, \lambda') S(R_{0, \beta_1, \alpha_2}) S(B(\varepsilon \hat{e}^3)) S(R_{0, \beta_2, 0}) \\ &\times u^\rho(0, \lambda); \end{aligned} \quad (3.232)$$

(b) *números reais $\varsigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \varepsilon$ tais que $|\varsigma| = 1$ e*

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\rho'}(p', \lambda') P_1 \gamma^i P_2 u^\rho(p, \lambda) &= i\varsigma e^{-i(\lambda' \alpha_1 + \lambda \alpha_3)} u^{\rho' \dagger}(0, \lambda') \gamma^5 S(R_{0, \beta_1, \alpha_2}) S(B(\varepsilon \hat{e}^3)) S(R_{0, \beta_2, 0}) \\ &\times u^\rho(0, \lambda); \end{aligned} \quad (3.233)$$

(c) *números reais $\varsigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \varepsilon$ tais que $|\varsigma| = 1$ e*

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\rho'}(p', \lambda') P_1 i\sigma^{0i} P_2 u^\rho(p, \lambda) &= i\varsigma e^{-i(\lambda' \alpha_1 + \lambda \alpha_3)} u^{\rho' \dagger}(0, \lambda') \gamma^0 \gamma^5 S(R_{0, \beta_1, \alpha_2}) S(B(\varepsilon \hat{e}^3)) S(R_{0, \beta_2, 0}) \\ &\times u^\rho(0, \lambda); \end{aligned} \quad (3.234)$$

(d) *números reais $\varsigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \varepsilon$ tais que $|\varsigma| = 1$ e*

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\rho'}(p', \lambda') P_1 i\sigma^{ij} P_2 u^\rho(p, \lambda) &= \varsigma e^{-i(\lambda' \alpha_1 + \lambda \alpha_3)} u^{\rho' \dagger}(0, \lambda') \gamma^0 S(R_{0, \beta_1, \alpha_2}) S(B(\varepsilon \hat{e}^3)) S(R_{0, \beta_2, 0}) \\ &\times u^\rho(0, \lambda); \end{aligned} \quad (3.235)$$

(e) *números reais $\varsigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \varepsilon$ tais que $|\varsigma| = 1$ e*

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\rho'}(p', \lambda') P_1 u^\rho(p, \lambda) &= \varsigma e^{-i(\lambda' \alpha_1 + \lambda \alpha_3)} u^{\rho' \dagger}(0, \lambda') \gamma^0 S(R_{0, \beta_1, \alpha_2}) S(B(\varepsilon \hat{e}^3)) S(R_{0, \beta_2, 0}) \\ &\times u^\rho(0, \lambda). \end{aligned} \quad (3.236)$$

Demonstração. Lançamos mão das proposições 3.5.2, 3.5.4 e das igualdades

$$[S(R_{\alpha, 0, 0}), \gamma^5] = [S(R_{0, \alpha, 0}), \gamma^5] = [S(B(\varepsilon \hat{e}^3)), \gamma^5] = 0, \quad (3.237)$$

$$[S(R_{\alpha,0,0}), \gamma^0] = [S(R_{0,\alpha,0}), \gamma^0] = 0, \quad S(B(\varepsilon \hat{e}^3))\gamma^0 = \gamma^0 S(B(-\varepsilon \hat{e}^3)), \quad (3.238)$$

$$\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^5 S(R_{\pi,\pi,0}), \quad \gamma^2 = i\gamma^0\gamma^5 S(R_{0,\pi,0}), \quad \gamma^3 = i\gamma^0\gamma^5 S(R_{\pi,0,0}), \quad (3.239)$$

$$i\sigma^{01} = i\gamma^5 S(R_{\pi,\pi,0}), \quad i\sigma^{02} = -i\gamma^5 S(R_{0,\pi,0}), \quad i\sigma^{03} = -i\gamma^5 S(R_{\pi,0,0}), \quad (3.240)$$

$$i\sigma^{13} = S(R_{0,\pi,0}), \quad i\sigma^{23} = S(R_{\pi,\pi,0}), \quad i\sigma^{12} = -S(R_{\pi,0,0}), \quad (3.241)$$

$$u^\rho(p, \lambda) = S(B(\xi(\rho p)\hat{e}^3))u^\rho(0, \lambda), \quad \bar{u}^\rho(p, \lambda) = u^{\rho\dagger}(0, \lambda)\gamma^0 S(B(\xi(-\rho p)\hat{e}^3)), \quad (3.242)$$

sendo $\xi(x)$ definido por $\sinh \xi(x) = x/M_n$.

3.5.1 Cálculo do diagrama A

O diagrama A no referencial do laboratório representa o elemento de matriz

$$\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \mathcal{Q}_2^\dagger \tilde{\gamma}^0 G_3 \mathcal{J}_3^\mu G_3 \mathcal{Q}_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle. \quad (3.243)$$

Como vimos na eq. (3.181), $|\Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z)\rangle$ é um integral sobre os momentos q^0 , q , \tilde{p}^0 e \tilde{p} . O vector de momento angular na eq. (3.181) é um integral sobre os ângulos Φ , Θ , $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\theta}$ de acordo com a eq. (3.173). No que concerne a $\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) |$, os momentos são q'^0 , q' , \tilde{p}'^0 , \tilde{p}' e os ângulos são Φ' , Θ' , $\tilde{\phi}'$, $\tilde{\theta}'$. O produto das funções delta de Dirac contidas no elemento de matriz (3.243) é

$$\begin{aligned} & \delta(q^0 - E(q))\delta^4(B(\eta \hat{e}^3)R_{\Phi',\Theta',0}R_{\pi,\pi,0}v(q'^0, q') - R_{\Phi,\Theta,0}R_{\pi,\pi,0}B(\xi(q)\hat{e}^3)v(M_n, 0)) \\ & \times \delta(\tilde{p}'^0 - E(\tilde{p}'))\delta^4(B(\eta \hat{e}^3)R_{\Phi',\Theta',0}Z(q'^0, q')R_{\tilde{\Phi}',\tilde{\Theta}',0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) \\ & - R_{\Phi,\Theta,0}Z(E(q), q)R_{\tilde{\Phi},\tilde{\Theta},0}v(\tilde{p}^0, \tilde{p})), \end{aligned} \quad (3.244)$$

em que

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.245)$$

Da primeira e terceira funções delta de Dirac do produto (3.244) resulta que $q^0 = E(q)$, $\tilde{p}'^0 = E(\tilde{p}')$. As condições $q^0 = E(q)$, $0 \leq q < M_t - q^0$ implicam que $0 \leq q < q_s$. Passemos à segunda função delta de Dirac do produto (3.244). Utilizando a proposição 3.5.1 obtemos:

$$\begin{aligned} & \delta^4(B(\eta \hat{e}^3)R_{\Phi',\Theta',0}R_{\pi,\pi,0}v(q'^0, q') - R_{\Phi,\Theta,0}R_{\pi,\pi,0}B(\xi(q)\hat{e}^3)v(M_n, 0)) \\ & = \delta^4(R_{\Phi',\Theta',0}R_{\pi,\pi,0}v(q'^0, q') - B(-\eta \hat{e}^3)R_{\Phi,\Theta,0}R_{\pi,\pi,0}B(\xi(q)\hat{e}^3)v(M_n, 0)) \\ & = \delta^4(R_{\Phi',\Theta',0}R_{\pi,\pi,0}v(q'^0, q') - R_{\Phi+\pi,0,0}B(-\eta \hat{e}^3)R_{0,\pi-\Theta,0}B(\xi(q)\hat{e}^3)v(M_n, 0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^4(R_{\Phi',\Theta',0}R_{\pi,\pi,0}v(q'^0, q') - R_{\Phi+\pi,0,0}R_{0,\Theta_1,0}B(\xi(r_1)\hat{e}^3)R_{0,\Theta_2,0}v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\Phi',\Theta',0}R_{\pi,\pi,0}v(q'^0, q') - R_{\Phi,\pi-\Theta_1,0}R_{\pi,\pi,0}B(\xi(r_1)\hat{e}^3)R_{0,\Theta_2,0}v(M_n, 0)) \\
&= \delta(q'^0 - E(q'))\delta(\Phi' - \Phi)\delta(\cos\Theta' - \cos(\pi - \Theta_1))\frac{\delta(q' - r_1)}{r_1^2}. \tag{3.246}
\end{aligned}$$

Observemos que $0 \leq \Theta_1 \leq \pi$. Da eq. (3.246) concluímos que $q'^0 = E(q')$, $\Phi' = \Phi$, $\Theta' = \pi - \Theta_1$, $q' = r_1$. As condições $q'^0 = E(q')$, $0 \leq q' < M_t - q'^0$ acarretam que $0 \leq q' < q_s$. Sejam η e K tais que $0 < M_t \sinh \eta < (M_t^2 - M_n^2)/(2M_n)$ e $K = M_t \sinh \eta$. Então, as condições $0 \leq q' < q_s$, $q' = r_1$, $0 \leq q < q_s$, $0 \leq \Theta \leq \pi$ implicam que $0 \leq \Theta \leq \pi$ se $0 \leq q < a$, $\arccos b < \Theta \leq \pi$ se $a \leq q < q_s$, sendo

$$a = \frac{(M_t^2 - M_n^2)\sqrt{M_t^2 + K^2} - (M_t^2 + M_n^2)K}{2M_t^2}, \tag{3.247}$$

$$b = \frac{M_t\sqrt{M_n^2 + q_s^2} - \sqrt{(M_n^2 + q^2)(M_t^2 + K^2)}}{qK}. \tag{3.248}$$

Notemos que $0 < a < q_s$, $b = 1$ se $q = a$, $|b| < 1$ se $a < q < q_s$, $q' \rightarrow q_s$ quando $\Theta \rightarrow \arccos b^+$ se $a \leq q < q_s$. Empregaremos o intervalo I definido como $I = [0, \pi]$ se $0 \leq q < a$, $I = [\arccos b, \pi]$ se $a \leq q < q_s$. I é o conjunto dos valores de Θ . Partindo da quarta função delta de Dirac do produto (3.244) encontramos:

$$\begin{aligned}
&\delta^4(B(\eta\hat{e}^3)R_{\Phi',\Theta',0}Z(E(q'), q')R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) - R_{\Phi,\Theta,0}Z(E(q), q)R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0} \\
&\quad \times v(\tilde{p}^0, \tilde{p})) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - Z(E(q), -q)R_{0,-\Theta,0}B(\eta\hat{e}^3)R_{0,\Theta',0}Z(E(q'), q')R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3) \\
&\quad \times v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0,\vartheta_1,0}B(\xi(s_1)\hat{e}^3)R_{0,\vartheta_2+\Theta',0}Z(E(q'), q')R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0,\vartheta_1+\vartheta_3,0}B(\xi(s_2)\hat{e}^3)R_{0,\vartheta_4,0}R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0)). \tag{3.249}
\end{aligned}$$

Fixados K , Θ e q , passamos das variáveis $\tilde{\phi}'$, $\tilde{\theta}'$ para as variáveis $\bar{\phi}$, $\bar{\theta}$, sendo $0 \leq \bar{\phi} < 2\pi$, $0 \leq \bar{\theta} \leq \pi$ e pela proposição 3.5.3

$$R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',-\bar{\varphi}} = R_{0,-\vartheta_4,0}R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}. \tag{3.250}$$

Comprova-se que

$$\int_0^\pi d\tilde{\theta}' \sin \tilde{\theta}' \int_0^{2\pi} d\tilde{\phi}' = \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \int_0^{2\pi} d\bar{\phi}. \tag{3.251}$$

Regressando à eq. (3.249) e aplicando as proposições 3.5.1 e 3.5.3 obtemos

$$\delta^4(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0,\vartheta_1+\vartheta_3,0}B(\xi(s_2)\hat{e}^3)R_{0,\vartheta_4,0}R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0))$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0, \vartheta_1 + \vartheta_3, \tilde{\phi}} B(\xi(s_2) \hat{e}^3) R_{0, \tilde{\theta}, 0} B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3) R_{\tilde{\phi}, 0, 0} v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0, \vartheta_1 + \vartheta_3, \tilde{\phi}} R_{0, \vartheta_5, 0} B(\xi(s_3) \hat{e}^3) R_{0, \vartheta_6, \tilde{\phi}} v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{\phi_1, \vartheta_7, 0} B(\xi(s_3) \hat{e}^3) R_{\phi_2, \vartheta_6, \tilde{\phi}} v(M_n, 0)) \\
&= \delta(\tilde{p}^0 - E(\tilde{p})) \delta(\tilde{\phi} - \phi_1) \delta(\cos \tilde{\theta} - \cos \vartheta_7) \frac{\delta(\tilde{p} - s_3)}{s_3^2},
\end{aligned} \tag{3.252}$$

onde $\tilde{p}^0 = E(\tilde{p})$, $\tilde{\phi} = \phi_1$, $\tilde{\theta} = \vartheta_7$, $\tilde{p} = s_3$.

O diagrama A é expresso num primeiro passo como um integral sobre q , Θ , $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$, Φ :

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) Q_2^\dagger \tilde{\gamma}^0 G_3 \mathcal{J}_3^\mu G_3 Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle &= -\frac{M_n^2}{2(2\pi)^8} \int_0^{q_0} dq \frac{q^2}{E(q)} \\
\int_I d\Theta \sin \Theta \int_0^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \int_0^{2\pi} d\tilde{\phi} \int_0^{2\pi} d\Phi \sum_{\substack{T' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \rho'_3 \\ T j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_3}} \sqrt{2j'+1} \\
\times \sqrt{2j+1} D_{M', m' - \lambda'_1}^{(1/2)}(\Phi', \Theta', 0) D_{M, m - \lambda_1}^{(1/2)*}(\Phi, \Theta, 0) D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \\
\times C^*(q'^0 q' \tilde{p}'^0 \tilde{p}' M' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 + \rho'_3 T' \mathcal{T}_z) C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \rho_3 T \mathcal{T}_z) F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)} F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)} \\
\times (R_{\Phi, 0, 0})^\mu_\nu (F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(1)} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(2)} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau} Q_\tau + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(3)} G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}), \tag{3.253}
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_1) S^{-1}(B(\xi(q') \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S(R_{0, \Theta, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) \\
\times S(B(\xi(q) \hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_1), \tag{3.254}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_2) S^{-1}(B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \\
\times S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p}) \hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2), \tag{3.255}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} &= \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \right)^2 \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \sum_{\sigma' \sigma = \pm} O_{\rho'_3 \sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) O_{\rho_3 \sigma}(\tilde{p}, \lambda_3) \bar{u}^{\sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) \frac{q'_3 + M_n}{M_n^2 - q'^2_3} \\
\times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu S(R_{0, \Theta, 0}) \\
\times S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) \frac{q_3 + M_n}{M_n^2 - q_3^2} u^\sigma(\tilde{p}, \lambda_3), \tag{3.256}
\end{aligned}$$

$$q'_3 = \begin{pmatrix} W(q'^0, q') - \tilde{p}'^0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p}' \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} W(q^0, q) - \tilde{p}^0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \tag{3.257}$$

$$\begin{aligned}
F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau} = & \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \right)^2 \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \sum_{\sigma' \sigma = \pm} O_{\rho'_3 \sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) O_{\rho_3 \sigma}(\tilde{p}, \lambda_3) \bar{u}^{\sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) \frac{q'_3 + M_n}{M_n^2 - q'^2_3} \\
& \times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) i \sigma^{\nu\tau} \\
& \times S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) \frac{q_3 + M_n}{M_n^2 - q^2_3} u^\sigma(\tilde{p}, \lambda_3),
\end{aligned} \tag{3.258}$$

$$\begin{aligned}
G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = & \frac{1}{(2M_n)^2} \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \right)^2 \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \sum_{\sigma' \sigma = \pm} O_{\rho'_3 \sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) O_{\rho_3 \sigma}(\tilde{p}, \lambda_3) \bar{u}^{\sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\
& \times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu \\
& \times S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) u^\sigma(\tilde{p}, \lambda_3),
\end{aligned} \tag{3.259}$$

$$\begin{aligned}
F_{T'TT_z}^{(1)} = & \tilde{f}(q'^2_3, q^2_3) (F_{1p}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 + \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\
& + F_{1n}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 - \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle),
\end{aligned} \tag{3.260}$$

$$\begin{aligned}
F_{T'TT_z}^{(2)} = & \tilde{g}(q'^2_3, q^2_3) (F_{2p}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 + \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\
& + F_{2n}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 - \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle),
\end{aligned} \tag{3.261}$$

$$\begin{aligned}
F_{T'TT_z}^{(3)} = & \tilde{h}(q'^2_3, q^2_3) (F_{3p}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 + \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\
& + F_{3n}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 - \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle),
\end{aligned} \tag{3.262}$$

$\tilde{f}(q'^2_3, q^2_3) = 1$ ou $\tilde{f}(q'^2_3, q^2_3) = f_0(q'^2_3, q^2_3)$ consoante a corrente do nucleão é NCI ou NCII-NCV, $\tilde{g}(q'^2_3, q^2_3) = 1$ ou $\tilde{g}(q'^2_3, q^2_3) = f_0(q'^2_3, q^2_3)$ consoante a corrente é NCI, NCIV, NCV ou NCII, NCIII, $\tilde{h}(q'^2_3, q^2_3) = 0$ ou $\tilde{h}(q'^2_3, q^2_3) = g_0(q'^2_3, q^2_3)$ consoante a corrente é NCI ou NCII-NCV, $F_{3p}(Q^2) = G_{E,p}(Q^2)$, $F_{3n}(Q^2) = G_{E,n}(Q^2)$ ou $F_{3p}(Q^2) = F_{1p}(Q^2)$, $F_{3n}(Q^2) = F_{1n}(Q^2)$ consoante a corrente é NCII, NCIV ou NCIII, NCV, τ^3_3 o operador da componente do isospin do nucleão 3 segundo o eixo de isospin z ,

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \frac{1}{2}, \tag{3.263}$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \frac{1}{2} \pm \frac{2}{3} \mathcal{T}_z, \tag{3.264}$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{T}_z, \tag{3.265}$$

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau^3_3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{T}_z. \tag{3.266}$$

Utilizando

$$u^\rho(p, \lambda) = -\rho 2\lambda S(R_{0, \pi, 0}) \gamma^0 u^\rho(p, -\lambda) \tag{3.267}$$

demonstra-se que

$$F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)} = 2\lambda'_1 2\lambda_1 F_{-\lambda'_1 - \lambda_1}^{(11)}, \quad (3.268)$$

$$F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)} = 2\lambda'_2 2\lambda_2 F_{-\lambda'_2 - \lambda_2}^{(22)*}, \quad (3.269)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = \rho'_3 \rho_3 2\lambda'_3 2\lambda_3 F_{\rho'_3 - \lambda'_3 \rho_3 - \lambda_3}^{(33)\nu*}, \quad (3.270)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\mu} = \rho'_3 \rho_3 2\lambda'_3 2\lambda_3 F_{\rho'_3 - \lambda'_3 \rho_3 - \lambda_3}^{(33)\nu\mu*}, \quad (3.271)$$

$$G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = \rho'_3 \rho_3 2\lambda'_3 2\lambda_3 G_{\rho'_3 - \lambda'_3 \rho_3 - \lambda_3}^{(33)\nu*}. \quad (3.272)$$

$F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)}$ e $F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)}$ podem ser simplificados utilizando as proposições 3.5.2 e 3.5.4:

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_1) S^{-1}(B(\xi(q')\hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S(R_{\pi, 0, 0}) S^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \\ &\quad \times S(R_{0, \pi - \Theta, 0}) S(B(\xi(q)\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_1) \\ &= \varsigma_1(-\eta, \pi - \Theta, \xi(q)) \bar{u}^+(0, \lambda'_1) S^{-1}(B(\xi(q')\hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S(R_{0, \pi - \Theta, 0}) \\ &\quad \times S(R_{\pi, \pi, 0}) S(B(\xi(r_1)\hat{e}^3)) S(R_{0, \Theta_2, 0}) u^+(0, \lambda_1) \\ &= \varsigma_1(-\eta, \pi - \Theta, \xi(q)) d_{\lambda'_1, \lambda_1}^{(1/2)}(\Theta_2), \end{aligned} \quad (3.273)$$

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_2) [S^{-1}(Z(q^0, q)) S^{-1}(R_{0, \Theta, 0}) S(B(\eta\hat{e}^3)) S(R_{0, \Theta', 0}) S(Z(q^0, q')) S(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}, 0}) \\ &\quad \times S(B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3))]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \bar{u}^+(0, \lambda'_2) [S(R_{0, \vartheta_1, 0}) S(B(\xi(s_1)\hat{e}^3)) S(R_{0, \vartheta_2 + \Theta', 0}) S(Z(q^0, q')) \\ &\quad \times S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3))]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_2 + \Theta', \chi(q^0, q')) \bar{u}^+(0, \lambda'_2) [S(R_{0, \vartheta_1 + \vartheta_3, 0}) \\ &\quad \times S(B(\xi(s_2)\hat{e}^3)) S(R_{0, \vartheta_4, 0}) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3))]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) \\ &\quad \times u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_2 + \Theta', \chi(q^0, q')) \varsigma_2(-\vartheta_4, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) \bar{u}^+(0, \lambda'_2) \\ &\quad \times [S(R_{0, \vartheta_1 + \vartheta_3, \tilde{\phi}}) S(B(\xi(s_2)\hat{e}^3)) S(R_{0, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)) S(R_{\tilde{\phi}, 0, 0})]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) \\ &\quad \times S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_2 + \Theta', \chi(q^0, q')) \varsigma_2(-\vartheta_4, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) \varsigma_1(\xi(s_2), \tilde{\theta}, \xi(\tilde{p}')) \\ &\quad \times \bar{u}^+(0, \lambda'_2) [S(R_{0, \vartheta_1 + \vartheta_3, \tilde{\phi}}) S(R_{0, \vartheta_5, 0}) S(B(\xi(s_3)\hat{e}^3)) S(R_{0, \vartheta_6, \tilde{\phi}})]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) \\ &\quad \times S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_2 + \Theta', \chi(q^0, q')) \varsigma_2(-\vartheta_4, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) \varsigma_1(\xi(s_2), \tilde{\theta}, \xi(\tilde{p}')) \\ &\quad \times \varsigma_2(\vartheta_1 + \vartheta_3, \tilde{\phi}, \vartheta_5) \bar{u}^+(0, \lambda'_2) [S(R_{\phi_1, \vartheta_7, 0}) S(B(\xi(s_3)\hat{e}^3)) S(R_{\phi_2, \vartheta_6, \tilde{\phi}})]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) \\ &\quad \times S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_2 + \Theta', \chi(q^0, q')) \varsigma_2(-\vartheta_4, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) \varsigma_1(\xi(s_2), \tilde{\theta}, \xi(\tilde{p}')) \\ &\quad \times \varsigma_2(\vartheta_1 + \vartheta_3, \tilde{\phi}, \vartheta_5) e^{i(\tilde{\phi}\lambda'_2 + \phi_2\lambda_2)} d_{\lambda'_2, \lambda_2}^{(1/2)}(-\vartheta_6). \end{aligned} \quad (3.274)$$

Atendendo a

$$\frac{q_3 + M_n}{M_n^2 - q_3^2} = \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \sum_{\rho=\pm} \sum_{\lambda=\pm 1/2} u^\rho(\tilde{p}, \lambda) \frac{1}{(\rho+1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q)} \bar{u}^\rho(\tilde{p}, \lambda) \quad (3.275)$$

e à decomposição análoga de $(q'_3 + M_n)/(M_n^2 - q'_3^2)$, os elementos $F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}$, $F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau}$ simplificam-se:

$$\begin{aligned} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} &= \frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{1}{[(\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')][(\rho_3 + 1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q)]} \bar{u}^{\rho'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\ &\times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu S(R_{0, \Theta, 0}) \\ &\times S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) u^{\rho_3}(\tilde{p}, \lambda_3), \end{aligned} \quad (3.276)$$

$$\begin{aligned} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau} &= \frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{1}{[(\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')][(\rho_3 + 1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q)]} \bar{u}^{\rho'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\ &\times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) i\sigma^{\nu\tau} \\ &\times S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) u^{\rho_3}(\tilde{p}, \lambda_3). \end{aligned} \quad (3.277)$$

Em cada elemento (3.259), (3.276), (3.277) o respectivo número de matrizes representativas de transformações homogéneas de Lorentz no espaço de Dirac pode ser reduzido aplicando a proposição 3.5.5.

O denominador do terceiro factor de $F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}$, $F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau}$ nas eqs. (3.276), (3.277) é diferente de zero. Observemos o seguinte relativamente a $1/((\rho_3 + 1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q))$, $1/((\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q'))$: se $\rho'_3 = \rho_3 = 1$, então,

$$0 < \frac{1}{2E(\tilde{p}) - W(q^0, q)} \leq \frac{1}{3M_n - M_t}, \quad (3.278)$$

$$0 < \frac{1}{2E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')} \leq \frac{1}{3M_n - M_t}; \quad (3.279)$$

se $\rho'_3 = \rho_3 = -1$, então,

$$-\frac{1}{W(q^0, q)} \sim -\frac{1}{\sqrt{\frac{2M_t q_s}{E(q_s)} (q_s - q)}} \quad (3.280)$$

na vizinhança de $q = q_s$ e quando $a \leq q < q_s$

$$-\frac{1}{W(q'^0, q')} \sim -\frac{1}{\sqrt{2Kq(b - \cos \Theta)}} \quad (3.281)$$

na vizinhança de $\Theta = \arccos b$. As singularidades de $-1/W(q^0, q)$, $-1/W(q'^0, q')$ são integráveis. Além disso, $C(q^0 q' \tilde{p}'^0 \tilde{p}' M' j' m' \lambda'_1 \lambda'_3 + \rho'_3 T' \mathcal{T}_z) \rightarrow 0$ quando $a \leq q < q_s$ e $\Theta \rightarrow \arccos b^+$, $C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \rho_3 T \mathcal{T}_z) \rightarrow 0$ quando $q \rightarrow q_s$ [65].

A função integranda da eq. (3.253) depende de Φ por meio de $e^{-i(M' - M)\Phi}(R_{\Phi,0,0})^{\mu}_{\nu}$. A integração desse fragmento é trivial:

$$\int_0^{2\pi} d\Phi e^{-i(M' - M)\Phi} R_{\Phi,0,0} = (2 - |M' - M|)\pi \times \begin{pmatrix} 1 - |M' - M| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |M' - M| & i(M' - M) & 0 \\ 0 & -i(M' - M) & |M' - M| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - |M' - M| \end{pmatrix}. \quad (3.282)$$

Vejamos que também é possível integrar analiticamente com respeito a $\tilde{\phi}$ a função integranda da eq. (3.253), a qual depende de $\tilde{\phi}$ por meio de $\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', \tilde{\phi}, \tilde{\theta}$. Consequentemente, para a integração importam os elementos $D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}\(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0)$, $D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}\(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0)$, $F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)}, F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}, F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau}, G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}$ da eq. (3.253). $F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)} - G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}$ podem ser escritos convenientemente como

$$F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)} = \sum_{\xi'_2 \xi_2 = \pm 1/2} \sum_{\tau'_2 \tau_2 = \pm} D_{\xi'_2, \lambda'_2}^{(1/2)*}\(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{\xi_2, \lambda_2}^{(1/2)}\(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \tau'_2 \tau_2 [\bar{u}^{\tau'_2}(0, \lambda'_2) u^+(\tilde{p}', \lambda'_2)] \\ \times [\bar{u}^{\tau_2}(0, \lambda_2) u^+(\tilde{p}, \lambda_2)] \bar{u}^{\tau'_2}(0, \xi'_2) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S(R_{0, \Theta, 0}) \\ \times S(Z(q^0, q)) u^{\tau_2}(0, \xi_2), \quad (3.283)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = \frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{1}{[(\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')] [(\rho_3 + 1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q)]} \sum_{\xi'_3 \xi_3 = \pm 1/2} \\ \sum_{\tau'_3 \tau_3 = \pm} D_{\xi'_3, -\lambda'_3}^{(1/2)*}\(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{\xi_3, -\lambda_3}^{(1/2)}\(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \tau'_3 [\bar{u}^{\rho'_3}(0, \lambda'_3) u^{\tau'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3)] \bar{u}^{\tau'_3}(0, \xi'_3) S^{-1}(Z(q'^0, q')) \\ \times S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) u^{\tau_3}(0, \xi_3) \tau_3 [\bar{u}^{\rho_3}(0, \lambda_3) u^{\tau_3}(\tilde{p}, \lambda_3)], \quad (3.284)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau} = \frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{1}{[(\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')] [(\rho_3 + 1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q)]} \sum_{\xi'_3 \xi_3 = \pm 1/2} \\ \sum_{\tau'_3 \tau_3 = \pm} D_{\xi'_3, -\lambda'_3}^{(1/2)*}\(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{\xi_3, -\lambda_3}^{(1/2)}\(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \tau'_3 [\bar{u}^{\rho'_3}(0, \lambda'_3) u^{\tau'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3)] \bar{u}^{\tau'_3}(0, \xi'_3) S^{-1}(Z(q'^0, q')) \\ \times S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) i \sigma^{\nu\tau} S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) u^{\tau_3}(0, \xi_3) \tau_3 [\bar{u}^{\rho_3}(0, \lambda_3) u^{\tau_3}(\tilde{p}, \lambda_3)], \quad (3.285)$$

$$G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = \frac{M_n}{2E^2(\tilde{p}')} \frac{M_n}{2E^2(\tilde{p})} \sum_{\xi'_3 \xi_3 = \pm 1/2} \sum_{\tau'_3 \tau_3 \omega'_3 \omega_3 = \pm} D_{\xi'_3, -\lambda'_3}^{(1/2)*}\(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{\xi_3, -\lambda_3}^{(1/2)}\(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \tau'_3 \\ \times O_{\rho'_3 \omega'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3) [\bar{u}^{\omega'_3}(0, \lambda'_3) u^{\tau'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3)] \bar{u}^{\tau'_3}(0, \xi'_3) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \\ \times \gamma^\nu S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) u^{\tau_3}(0, \xi_3) \tau_3 O_{\rho_3 \omega_3}(\tilde{p}, \lambda_3) [\bar{u}^{\omega_3}(0, \lambda_3) u^{\tau_3}(\tilde{p}, \lambda_3)]. \quad (3.286)$$

Analizando as eqs. (3.253), (3.283)-(3.286) concluímos que a função integranda da eq. (3.253) depende de $\bar{\phi}$ por meio de

$$D_{m',\lambda'_2-\lambda'_3}^{(j')}(\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0)D_{m,\lambda_2-\lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi},\tilde{\theta},0)D_{\xi'_2,\lambda'_2}^{(1/2)*}(\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0)D_{\xi_2,\lambda_2}^{(1/2)}(\tilde{\phi},\tilde{\theta},0)D_{\xi'_3,-\lambda'_3}^{(1/2)*}(\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0) \\ \times D_{\xi_3,-\lambda_3}^{(1/2)}(\tilde{\phi},\tilde{\theta},0). \quad (3.287)$$

Utilizando

$$S(R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',-\bar{\varphi}}) = \varsigma_2(-\vartheta_4, \bar{\phi}, \bar{\theta}) S(R_{0,-\vartheta_4,0}) S(R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}), \quad (3.288)$$

$$S(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},\phi_2}) = \varsigma_2(\vartheta_1 + \vartheta_3, \bar{\phi}, \vartheta_5) S(R_{0,\vartheta_1+\vartheta_3,0}) S(R_{\bar{\phi},\vartheta_5,0}), \quad (3.289)$$

mostra-se que

$$D_{\alpha'\beta'}^{(1/2)}(\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0) = \varsigma_2(-\vartheta_4, \bar{\phi}, \bar{\theta}) [D^{(1/2)}(0, -\vartheta_4, 0) D^{(1/2)}(\bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})]_{\alpha'\beta'}, \quad (3.290)$$

$$D_{\alpha\beta}^{(1/2)}(\tilde{\phi},\tilde{\theta},0) = \varsigma_2(\vartheta_1 + \vartheta_3, \bar{\phi}, \vartheta_5) [D^{(1/2)}(0, \vartheta_1 + \vartheta_3, 0) D^{(1/2)}(\bar{\phi}, \vartheta_5, -\phi_2)]_{\alpha\beta}. \quad (3.291)$$

Como

$$R_{\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',-\bar{\varphi}} = R_{0,-\vartheta_4,0} R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}, \quad (3.292)$$

$$R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},\phi_2} = R_{0,\vartheta_1+\vartheta_3,0} R_{\bar{\phi},\vartheta_5,0} \quad (3.293)$$

e qualquer representação irreductível $(2n+1)$ -dimensional do grupo das rotações não é projectiva, sendo n um número inteiro, concluímos que

$$D_{k'l'}^{(j')}(\tilde{\phi}',\tilde{\theta}',0) = [D^{(j')}(0, -\vartheta_4, 0) D^{(j')}(0, \bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})]_{k'l'}, \quad (3.294)$$

$$D_{kl}^{(j)}(\tilde{\phi},\tilde{\theta},0) = [D^{(j)}(0, \vartheta_1 + \vartheta_3, 0) D^{(j)}(0, \bar{\phi}, \vartheta_5, -\phi_2)]_{kl}. \quad (3.295)$$

Empregando as eqs. (3.290), (3.291), (3.294) e (3.295), o produto (3.287) é equivalente a

$$(-1)^{m-\lambda_2+\lambda_3-\lambda'_2+\lambda'_3+\xi'_2+\xi'_3} [D^{(j')}(0, -\vartheta_4, 0) D^{(j')}(0, \bar{\phi}, \bar{\theta}, 0)]_{m',\lambda'_2-\lambda'_3} [D^{(1/2)}(0, -\vartheta_4, 0) \\ \times D^{(1/2)}(\bar{\phi}, \bar{\theta}, 0)]_{-\xi'_2-\lambda'_2} [D^{(1/2)}(0, -\vartheta_4, 0) D^{(1/2)}(\bar{\phi}, \bar{\theta}, 0)]_{-\xi'_3\lambda'_3} [D^{(j)}(0, \vartheta_1 + \vartheta_3, 0) \\ \times D^{(j)}(\bar{\phi}, \vartheta_5, 0)]_{-m,-\lambda_2+\lambda_3} [D^{(1/2)}(0, \vartheta_1 + \vartheta_3, 0) D^{(1/2)}(\bar{\phi}, \vartheta_5, 0)]_{\xi_2\lambda_2} [D^{(1/2)}(0, \vartheta_1 + \vartheta_3, 0) \\ \times D^{(1/2)}(\bar{\phi}, \vartheta_5, 0)]_{\xi_3-\lambda_3} \quad (3.296)$$

e, portanto, também a

$$(-1)^{m-\lambda_2+\lambda_3-\lambda'_2+\lambda'_3+\xi'_2+\xi'_3} \sum_{s'=-j', \dots, j'} \sum_{s=-j, \dots, j} \sum_{\beta'_2\beta'_3\beta_2\beta_3=\pm 1/2} e^{-i(s'+\beta'_2+\beta'_3+s+\beta_2+\beta_3)\bar{\theta}} d_{m's'}^{(j')}(-\vartheta_4) \\ \times d_{s',\lambda'_2-\lambda'_3}^{(j')}(\bar{\theta}) d_{-\xi'_2\beta'_2}^{(1/2)}(-\vartheta_4) d_{\beta'_2-\lambda'_2}^{(1/2)}(\bar{\theta}) d_{-\xi'_3\beta'_3}^{(1/2)}(-\vartheta_4) d_{\beta'_3\lambda'_3}^{(1/2)}(\bar{\theta}) d_{-ms}^{(j)}(\vartheta_1 + \vartheta_3) d_{s,-\lambda_2+\lambda_3}^{(j)}(\vartheta_5)$$

$$\times d_{\xi_2 \beta_2}^{(1/2)}(\vartheta_1 + \vartheta_3) d_{\beta_2 \lambda_2}^{(1/2)}(\vartheta_5) d_{\xi_3 \beta_3}^{(1/2)}(\vartheta_1 + \vartheta_3) d_{\beta_3 - \lambda_3}^{(1/2)}(\vartheta_5). \quad (3.297)$$

Assim, a integração do produto (3.287) com respeito a $\bar{\phi}$ no intervalo $[0, 2\pi]$ produz

$$2\pi(-1)^{m-\lambda_2+\lambda_3-\lambda'_2+\lambda'_3+\xi'_2+\xi'_3} \sum_{s'=-j', \dots, j'} \sum_{s=-j, \dots, j} \sum_{\beta'_2 \beta'_3 \beta_2 \beta_3 = \pm 1/2} \delta_{s'+\beta'_2+\beta'_3+s+\beta_2+\beta_3, 0} d_{m's'}^{(j')}(-\vartheta_4) \\ \times d_{s', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(\bar{\theta}) d_{-\xi'_2 \beta'_2}^{(1/2)}(-\vartheta_4) d_{\beta'_2 - \lambda'_2}^{(1/2)}(\bar{\theta}) d_{-\xi'_3 \beta'_3}^{(1/2)}(-\vartheta_4) d_{\beta'_3 \lambda'_3}^{(1/2)}(\bar{\theta}) d_{-ms}^{(j)}(\vartheta_1 + \vartheta_3) d_{s, -\lambda_2 + \lambda_3}^{(j)}(\vartheta_5) \\ \times d_{\xi_2 \beta_2}^{(1/2)}(\vartheta_1 + \vartheta_3) d_{\beta_2 \lambda_2}^{(1/2)}(\vartheta_5) d_{\xi_3 \beta_3}^{(1/2)}(\vartheta_1 + \vartheta_3) d_{\beta_3 - \lambda_3}^{(1/2)}(\vartheta_5). \quad (3.298)$$

Há outra maneira de integrar analiticamente em relação a $\bar{\phi}$ a função integranda da eq. (3.253). Partindo da expressão (3.297) do produto (3.287) demonstra-se que o fragmento

$$\int_0^{2\pi} d\Phi \sum_{\substack{T' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \rho'_3 \\ T j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_3}} \sqrt{2j'+1} \sqrt{2j+1} D_{M', m' - \lambda'_1}^{(1/2)}(\Phi', \Theta', 0) D_{M, m - \lambda_1}^{(1/2)*}(\Phi, \Theta, 0) \\ \times D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) C^*(q'^0 q' \tilde{p}'^0 \tilde{p}' M' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 + + \rho'_3 T' \mathcal{T}_z) \\ \times C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + + \rho_3 T \mathcal{T}_z) F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)} F_{\lambda'_2 \lambda_2}^{(22)} (R_{\Phi, 0, 0})^\mu{}_\nu (F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(1)} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(2)} \\ \times F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu \tau} Q_\tau + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(3)} G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}) \quad (3.299)$$

da eq. (3.253) pode ser escrito como

$$\sum_{|n| \leq 2(j_{max}+1)} c^\mu(n, q, \Theta, \tilde{p}, \bar{\theta}) e^{-in\bar{\phi}}, \quad (3.300)$$

em que j_{max} é o valor máximo de j no desenvolvimento (3.181), c^μ é real se $\mu = 0, 1, 3$ e c^2 é imaginário puro. As funções de vértice que utilizámos têm $j_{max} = 6$. Seja $j_{max} \leq 6$. Comprova-se que: (a) se $\mu = 0, 1, 3$,

$$\int_0^{2\pi} d\bar{\phi} \sum_{|n| \leq 2(j_{max}+1)} c^\mu(n, q, \Theta, \tilde{p}, \bar{\theta}) e^{-in\bar{\phi}} = \frac{\pi}{8} Re \sum_{0 \leq k \leq 8} a(k) \sum_{|n| \leq 2(j_{max}+1)} c^\mu(n, q, \Theta, \tilde{p}, \bar{\theta}) \\ \times e^{-ink\frac{\pi}{8}}, \quad (3.301)$$

sendo $a(0) = a(8) = 1$, $a(1) = \dots = a(7) = 2$; (b)

$$\int_0^{2\pi} d\bar{\phi} \sum_{|n| \leq 2(j_{max}+1)} c^2(n, q, \Theta, \tilde{p}, \bar{\theta}) e^{-in\bar{\phi}} = i \frac{\pi}{8} Im \sum_{0 \leq k \leq 8} a(k) \sum_{|n| \leq 2(j_{max}+1)} c^2(n, q, \Theta, \tilde{p}, \bar{\theta}) \\ \times e^{-ink\frac{\pi}{8}}. \quad (3.302)$$

Assim, a integração analítica da função (3.299) da variável $\bar{\phi}$ no intervalo $[0, 2\pi]$ comprehende o cálculo dessa função nos nove pontos $\bar{\phi} = 0, \pi/8, 2\pi/8, \dots, \pi$.

3.5.2 Cálculo da soma dos diagramas B e C

Como já dissemos, por causa da propriedade 20 basta calcularmos o diagrama C em vez da soma dos diagramas B e C. O diagrama C no referencial do laboratório representa o elemento de matriz

$$\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) Q_2^\dagger \tilde{\gamma}^0 \mathcal{J}_2^\mu G_2 G_3 Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle. \quad (3.303)$$

O produto das funções delta de Dirac contidas no elemento de matriz (3.303) é

$$\begin{aligned} & \delta(q^0 - E(q)) \delta^4(B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} v(q'^0, q') - R_{\Phi, \Theta, 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) v(M_n, 0)) \\ & \times \delta(\tilde{p}'^0 - E(\tilde{p}')) \delta^4(B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} Z(q'^0, q') R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} R_{\pi, \pi, 0} v(W(q'^0, q') - E(\tilde{p}'), \tilde{p}')) \\ & - R_{\Phi, \Theta, 0} Z(E(q), q) R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} R_{\pi, \pi, 0} v(W(E(q), q) - \tilde{p}^0, \tilde{p})). \end{aligned} \quad (3.304)$$

Os fragmentos dos produtos (3.244), (3.304) compostos pelas três primeiras funções delta de Dirac são iguais. Por isso, $q^0 = E(q)$, $0 \leq q < q_s$, $q'^0 = E(q')$, $\Phi' = \Phi$, $\Theta' = \pi - \Theta_1$, $q' = r_1$, $\tilde{p}'^0 = E(\tilde{p}')$ e o conjunto dos valores de Θ é o intervalo I . Consideremos a quarta função delta de Dirac do produto (3.304). Podemos substituí-la equivalentemente por

$$\begin{aligned} & \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} R_{\pi, \pi, 0} v(W(E(q), q) - \tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0, \vartheta_1 + \vartheta_3, \bar{\phi}} B(\xi(s_2) \hat{e}^3) R_{0, \bar{\theta}, \bar{\varphi}} R_{\pi, \pi, 0} \\ & \times v(W(E(q'), q') - E(\tilde{p}'), \tilde{p}'))), \end{aligned} \quad (3.305)$$

em que ϑ_1 , ϑ_3 , $\bar{\phi}$, s_2 , $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$ foram definidos na subsecção (3.5.1). A função delta de Dirac (3.305) é igual a

$$\begin{aligned} & \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} R_{\pi, \pi, 0} v(W(E(q), q) - \tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0, \vartheta_1 + \vartheta_3, \bar{\phi}} R_{0, \vartheta_5, 0} R_{\pi, \pi, 0} v((W(E(q'), q') - E(\tilde{p}')) \\ & \times \sqrt{M_n^2 + s_2^2}/M_n - \tilde{p}' \cos \bar{\theta} s_2/M_n, s_3)), \end{aligned} \quad (3.306)$$

em que $0 \leq \vartheta_5 \leq \pi$,

$$s_3 = \sqrt{(\tilde{p}' \sin \bar{\theta})^2 + \left((W(E(q'), q') - E(\tilde{p}')) \frac{s_2}{M_n} - \tilde{p}' \cos \bar{\theta} \frac{\sqrt{M_n^2 + s_2^2}}{M_n} \right)^2}, \quad (3.307)$$

$$s_3 \cos \vartheta_5 = -(W(E(q'), q') - E(\tilde{p}')) \frac{s_2}{M_n} + \tilde{p}' \cos \bar{\theta} \frac{\sqrt{M_n^2 + s_2^2}}{M_n}. \quad (3.308)$$

Partindo da expressão (3.306) encontramos

$$\begin{aligned} & \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} R_{\pi, \pi, 0} v(W(E(q), q) - \tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{\phi_1, \vartheta_6, \phi_2} R_{\pi, \pi, 0} v((W(E(q'), q') - E(\tilde{p}')) \\ & \times \sqrt{M_n^2 + s_2^2}/M_n - \tilde{p}' \cos \bar{\theta} s_2/M_n, s_3))) \\ & = \delta(\tilde{p}^0 - s_4) \delta(\tilde{\phi} - \phi_1) \delta(\cos \tilde{\theta} - \cos \vartheta_6) \frac{\delta(\tilde{p} - s_3)}{s_3^2}, \end{aligned} \quad (3.309)$$

em que

$$s_4 = W(E(q), q) - (W(E(q'), q') - E(\tilde{p}')) \frac{\sqrt{M_n^2 + s_2^2}}{M_n} + \tilde{p}' \cos \bar{\theta} \frac{s_2}{M_n}, \quad (3.310)$$

onde $\tilde{p}^0 = s_4$, $\tilde{p} = s_3$, $\tilde{\phi} = \phi_1$, $\tilde{\theta} = \vartheta_6$.

O diagrama C é expresso inicialmente como um integral sobre q , Θ , \tilde{p}' , $\bar{\theta}$, $\bar{\phi}$, Φ :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) Q_2^\dagger \tilde{\gamma}^0 \mathcal{J}_2^\mu G_2 G_3 Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle &= -\frac{M_n^2}{2(2\pi)^8} \int_0^{q_0} dq \frac{q^2}{E(q)} \\ &\int_I d\Theta \sin \Theta \int_0^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \int_0^{2\pi} d\bar{\phi} \int_0^{2\pi} d\Phi \sum_{\substack{T' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \rho'_3 \\ T j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_2 \rho_3}} \sqrt{2j'+1} \\ &\times \sqrt{2j+1} D_{M', m' - \lambda'_1}^{(1/2)}(\Phi', \Theta', 0) D_{M, m - \lambda_1}^{(1/2)*}(\Phi, \Theta, 0) D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \\ &\times C^*(q'^0 q' \tilde{p}'^0 \tilde{p}' M' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 + \rho'_3 T' \mathcal{T}_z) C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z) F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)} \\ &\times (R_{\Phi, 0, 0})^\mu_\nu (F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(1)} F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu} + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(2)} F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu\tau} Q_\tau) F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)}, \end{aligned} \quad (3.311)$$

sendo $F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(11)}$ definido pela eq. (3.254) e expresso também na eq. (3.273),

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu} &= \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \sum_{\sigma_2=\pm} O_{\rho_2 \sigma_2}(\tilde{p}, \lambda_2) \bar{u}^+(\tilde{p}', \lambda'_2) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) \\ &\times S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) \frac{\not{q}_2 + M_n}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} u^{\sigma_2}(\tilde{p}, \lambda_2), \end{aligned} \quad (3.312)$$

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu\tau} &= \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \sum_{\sigma_2=\pm} O_{\rho_2 \sigma_2}(\tilde{p}, \lambda_2) \bar{u}^+(\tilde{p}', \lambda'_2) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) \\ &\times S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) i \sigma^{\nu\tau} S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) \frac{\not{q}_2 + M_n}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} u^{\sigma_2}(\tilde{p}, \lambda_2), \end{aligned} \quad (3.313)$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} \tilde{p}^0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad (3.314)$$

$$\begin{aligned} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)} &= \frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \frac{1}{(\rho'_3 + 1) E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')} \sum_{\sigma_3=\pm} O_{\rho_3 \sigma_3}(\tilde{p}, \lambda_3) \bar{u}^{\rho'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\ &\times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S(R_{0, \Theta, 0}) \\ &\times S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) u^{\sigma_3}(\tilde{p}, \lambda_3), \end{aligned} \quad (3.315)$$

$$F_{T'T\mathcal{T}_z}^{(1)} = \tilde{f}(M_n^2, q_2^2) (F_{1p}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 + \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\ + F_{1n}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 - \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle), \quad (3.316)$$

$$F_{T'T\mathcal{T}_z}^{(2)} = \tilde{g}(M_n^2, q_2^2) (F_{2p}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 + \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\ + F_{2n}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 - \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle), \quad (3.317)$$

τ_2^3 o operador da componente do isospin do nucleão 2 segundo o eixo z ,

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \frac{1}{2}, \quad (3.318)$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \frac{1}{2} \pm \frac{2}{3} \mathcal{T}_z, \quad (3.319)$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{T}_z, \quad (3.320)$$

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{T}_z. \quad (3.321)$$

Verificam-se as propriedades

$$F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu} = \rho_2 2 \lambda'_2 2 \lambda_2 F_{-\lambda'_2 \rho_2 -\lambda_2}^{(22)\nu*}, \quad (3.322)$$

$$F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu\mu} = \rho_2 2 \lambda'_2 2 \lambda_2 F_{-\lambda'_2 \rho_2 -\lambda_2}^{(22)\nu\mu*}, \quad (3.323)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)} = \rho'_3 \rho_3 2 \lambda'_3 2 \lambda_3 F_{\rho'_3 -\lambda'_3 \rho_3 -\lambda_3}^{(33)*}. \quad (3.324)$$

Como

$$q_2 + M_n = \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \sum_{\rho=\pm} \sum_{\lambda=\pm 1/2} u^\rho(\tilde{p}, \lambda) (\tilde{p}^0 + \rho E(\tilde{p})) \bar{u}^\rho(\tilde{p}, \lambda), \quad (3.325)$$

$F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu}$, $F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu\tau}$ simplificam-se:

$$F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu} = \frac{\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \bar{u}^+(\tilde{p}', \lambda'_2) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) \\ \times S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) u^{\rho_2}(\tilde{p}, \lambda_2), \quad (3.326)$$

$$F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu\tau} = \frac{\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \bar{u}^+(\tilde{p}', \lambda'_2) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) \\ \times S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) i \sigma^{\nu\tau} S(R_{0, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) u^{\rho_2}(\tilde{p}, \lambda_2). \quad (3.327)$$

Em cada elemento (3.315), (3.326), (3.327) o respectivo número de matrizes representativas de transformações homogéneas de Lorentz no espaço de Dirac pode ser reduzido utilizando a proposição 3.5.5.

A função integranda da eq. (3.311) depende de Φ através de $e^{-i(M'-M)\Phi}(R_{\Phi,0,0})^\mu{}_\nu$. A integração desse elemento está na eq. (3.282).

A função integranda da eq. (3.311) depende de $\bar{\phi}$ por meio de $\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}', \tilde{\theta}'$. A prova de que a integração analítica dessa função com respeito a $\bar{\phi}$ é exequível é similar à demonstração referente ao diagrama A. Começamos por escrever $F_{\lambda'_2\rho_2\lambda_2}^{(22)\nu}, F_{\lambda'_2\rho_2\lambda_2}^{(22)\nu\tau}$ e $F_{\rho'_3\lambda'_3\rho_3\lambda_3}^{(33)}$ como

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_2\rho_2\lambda_2}^{(22)\nu} &= \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} \sum_{\xi'_2 \xi_2 = \pm 1/2} \sum_{\tau'_2 \tau_2 = \pm} D_{\xi'_2, \lambda'_2}^{(1/2)*}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{\xi_2, \lambda_2}^{(1/2)}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \tau'_2 \\ &\times [\bar{u}^{\tau'_2}(0, \lambda'_2) u^+(\tilde{p}', \lambda'_2)] \tau_2 [\bar{u}^{\rho_2}(0, \lambda_2) u^{\tau_2}(\tilde{p}, \lambda_2)] \bar{u}^{\tau'_2}(0, \xi'_2) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0,\Theta',0}) \\ &\times S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu S(R_{0,\Theta,0}) S(Z(q^0, q)) u^{\tau_2}(0, \xi_2), \end{aligned} \quad (3.328)$$

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_2\rho_2\lambda_2}^{(22)\nu\tau} &= \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} \sum_{\xi'_2 \xi_2 = \pm 1/2} \sum_{\tau'_2 \tau_2 = \pm} D_{\xi'_2, \lambda'_2}^{(1/2)*}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{\xi_2, \lambda_2}^{(1/2)}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \tau'_2 \\ &\times [\bar{u}^{\tau'_2}(0, \lambda'_2) u^+(\tilde{p}', \lambda'_2)] \tau_2 [\bar{u}^{\rho_2}(0, \lambda_2) u^{\tau_2}(\tilde{p}, \lambda_2)] \bar{u}^{\tau'_2}(0, \xi'_2) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0,\Theta',0}) \\ &\times S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) i \sigma^{\nu\tau} S(R_{0,\Theta,0}) S(Z(q^0, q)) u^{\tau_2}(0, \xi_2), \end{aligned} \quad (3.329)$$

$$\begin{aligned} F_{\rho'_3\lambda'_3\rho_3\lambda_3}^{(33)} &= \frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \frac{1}{(\rho'_3 + 1) E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')} \sum_{\xi'_3 \xi_3 = \pm 1/2} \sum_{\tau'_3 \tau_3 \sigma_3 = \pm} D_{\xi'_3, -\lambda'_3}^{(1/2)*}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) \\ &\times D_{\xi_3, -\lambda_3}^{(1/2)}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) O_{\rho_3 \sigma_3}(\tilde{p}, \lambda_3) \tau'_3 [\bar{u}^{\tau'_3}(0, \lambda'_3) u^{\rho'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3)] \tau_3 [\bar{u}^{\tau_3}(0, \lambda_3) u^{\sigma_3}(\tilde{p}, \lambda_3)] \\ &\times \bar{u}^{\tau'_3}(0, \xi'_3) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0,\Theta',0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S(R_{0,\Theta,0}) S(Z(q^0, q)) \\ &\times u^{\tau_3}(0, \xi_3). \end{aligned} \quad (3.330)$$

Assim, a função integranda da eq. (3.311) depende de $\bar{\phi}$ através de

$$\begin{aligned} &D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) D_{\xi'_2, \lambda'_2}^{(1/2)*}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{\xi_2, \lambda_2}^{(1/2)}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) D_{\xi'_3, -\lambda'_3}^{(1/2)*}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) \\ &\times D_{\xi_3, -\lambda_3}^{(1/2)}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0). \end{aligned} \quad (3.331)$$

Os produtos (3.287) e (3.331) são iguais quanto à forma. Por isso, a partir da eq. (3.331) a prova é decalcada da relativa ao diagrama A. A integração do elemento

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\Phi \sum_{\substack{T' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \rho'_3 \\ T' j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_2 \rho_3}} \sqrt{2j' + 1} \sqrt{2j + 1} D_{M', m' - \lambda'_1}^{(1/2)}(\Phi', \Theta', 0) D_{M, m - \lambda_1}^{(1/2)*}(\Phi, \Theta, 0) \\ &\times D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) C^*(q'^0 q' \tilde{p}'^0 \tilde{p}' M' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 + + \rho'_3 T' \mathcal{T}_z) \\ &\times C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z) F_{\lambda'_1 \lambda_1}^{(1)}(R_{\Phi,0,0})^\mu{}_\nu (F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(1)} F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu} + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(2)} F_{\lambda'_2 \rho_2 \lambda_2}^{(22)\nu\tau} Q_\tau) \end{aligned}$$

$$\times F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)} \quad (3.332)$$

da eq. (3.311) relativamente a $\bar{\phi}$ em $[0, 2\pi]$ é feita segundo as fórmulas (3.301) e (3.302), sendo agora a expressão (3.300) o integral (3.332).

O denominador do factor $1/((\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q^0, q'))$ na eq. (3.315) é diferente de zero. São satisfeitas as eqs. (3.279), (3.281).

Indaguemos se o denominador do factor $(\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p}))/(\tilde{p}^2 - \tilde{p}^{02})$ nas eqs. (3.326), (3.327) tem algum zero. Notemos que

$$E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02} = AE(\tilde{p}') - B\tilde{p}' \cos \bar{\theta} - C, \quad (3.333)$$

sendo

$$A = 2W(E(q'), q') - 2W(E(q), q) \frac{\sqrt{M_n^2 + s_2^2}}{M_n}, \quad (3.334)$$

$$B = 2W(E(q), q) \frac{s_2}{M_n}, \quad (3.335)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{A^2 - B^2}{4} \\ &= W^2(E(q), q) + W^2(E(q'), q') - 2W(E(q), q)W(E(q'), q') \frac{\sqrt{M_n^2 + s_2^2}}{M_n}. \end{aligned} \quad (3.336)$$

As incógnitas da equação

$$\begin{aligned} E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02} &= AE(\tilde{p}') - B\tilde{p}' \cos \bar{\theta} - C \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.337)$$

são \tilde{p}' , $\bar{\theta}$. Observemos também que

$$\begin{aligned} E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02} &= M_n^2 - [R_{\Phi, \Theta, 0} Z(E(q), q) R_{\bar{\phi}, \bar{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p})]^2 \\ &= M_n^2 - [B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} Z(E(q'), q') R_{0, -\vartheta_4, 0} R_{\bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}} B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3) v(M_n, 0) - Q]^2 \\ &= -Q^2 + 2Q \cdot B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} Z(E(q'), q') R_{0, -\vartheta_4, 0} R_{\bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}} B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3) v(M_n, 0) \\ &= -Q^2 + 2B(\zeta \hat{e}^3) Q \cdot B((\eta + \zeta) \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} Z(E(q'), q') R_{0, -\vartheta_4, 0} R_{\bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}} \\ &\quad \times B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3) v(M_n, 0) \\ &= -Q^2 - 2\sqrt{-Q^2} [B((\eta + \zeta) \hat{e}^3) R_{0, \Theta', 0} Z(E(q'), q') R_{0, -\vartheta_4, 0} R_{\bar{\phi}, \bar{\theta}, 0} \\ &\quad \times B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3) v(M_n, 0)]^3, \end{aligned} \quad (3.338)$$

sendo ζ tal que

$$\sinh \zeta = -\frac{Q^0}{\sqrt{-Q^2}}. \quad (3.339)$$

Prova-se que $\sinh(\eta + \zeta) > 0$. A eq. (3.337) é possível se, e somente se, a equação

$$\begin{aligned} E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02} &= -Q^2 - 2\sqrt{-Q^2}[B((\eta + \zeta)\hat{e}^3)R_{0,\theta',0}Z(E(q'), q')R_{0,-\vartheta_4,0}R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0} \\ &\quad \times B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0)]^3 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.340)$$

de incógnitas $\bar{\phi}, \bar{\theta}, \tilde{p}'$ é possível. A eq. (3.340) é possível se, e somente se, existem ϕ, p tais que $0 \leq \phi < 2\pi$, $p \geq \sqrt{-Q^2}/2$ e é possível a equação

$$\begin{aligned} B((\eta + \zeta)\hat{e}^3)R_{0,\theta',0}Z(E(q'), q')R_{0,-\vartheta_4,0}R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) &= R_{\phi,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3) \\ &\quad \times v(M_n, 0) \end{aligned} \quad (3.341)$$

de incógnitas $\bar{\phi}, \bar{\theta}, \tilde{p}'$ em que $\arccos \theta = \sqrt{-Q^2}/(2p)$. Suponhamos que ϕ, p, θ satisfazem as condições $0 \leq \phi < 2\pi$, $p \geq \sqrt{-Q^2}/2$, $\arccos \theta = \sqrt{-Q^2}/(2p)$. Consideremos a seguinte sequência de equivalências:

$$\begin{aligned} &B((\eta + \zeta)\hat{e}^3)R_{0,\theta',0}Z(E(q'), q')R_{0,-\vartheta_4,0}R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) = R_{\phi,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3) \\ &\quad \times v(M_n, 0) \\ \Leftrightarrow &R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) = R_{0,\vartheta_4,0}Z(E(q'), -q')R_{0,-\theta',0}B((- \eta - \zeta)\hat{e}^3)R_{\phi,\theta,0} \\ &\quad \times B(\xi(p)\hat{e}^3)v(M_n, 0) \\ \Leftrightarrow &R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) = R_{0,\vartheta_4+\theta_1,0}B(\xi(t_1)\hat{e}^3)R_{0,\theta_2,0}R_{\phi,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3)v(M_n, 0) \\ \Leftrightarrow &R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) = R_{0,\vartheta_4+\theta_1,\varphi_1}B(\xi(t_1)\hat{e}^3)R_{0,\theta_3,0}B(\xi(p)\hat{e}^3)R_{\varphi_2,0,0}v(M_n, 0) \\ \Leftrightarrow &R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) = R_{0,\vartheta_4+\theta_1,\varphi_1}R_{0,\theta_4,0}B(\xi(t_2)\hat{e}^3)R_{0,\theta_5,0}v(M_n, 0) \\ \Leftrightarrow &R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)v(M_n, 0) = R_{\varphi_3,\theta_6,0}B(\xi(t_2)\hat{e}^3)v(M_n, 0). \end{aligned} \quad (3.342)$$

Concluímos que $\bar{\phi} = \varphi_3$, $\bar{\theta} = \theta_6$, $\tilde{p}' = t_2$ é uma solução da eq. (3.341). Assim, a eq. (3.337) é possível. Dados uma solução $\tilde{p}', \bar{\theta}$ da eq. (3.337) e $\bar{\phi}$ com $0 \leq \bar{\phi} < 2\pi$, existem ϕ, θ, p tais que $0 \leq \phi < 2\pi$, $p \geq \sqrt{-Q^2}/2$, $\arccos \theta = \sqrt{-Q^2}/(2p)$ e

$$R_{\Phi,\Theta,0}Z(E(q), q)R_{\bar{\phi},\bar{\theta},0}v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) = B(-\zeta\hat{e}^3)R_{\Phi'+\phi,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3)v(M_n, 0) - Q. \quad (3.343)$$

Como

$$[B(-\zeta\hat{e}^3)R_{\Phi'+\phi,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3)v(M_n, 0) - Q]^0 > 0, \quad (3.344)$$

$$\tilde{p}^0 = E(\tilde{p}).$$

Uma condição necessária e suficiente de existência de solução da eq. (3.337) é a inequação

$$|AE(\tilde{p}') - C| \leq B\tilde{p}' \quad (3.345)$$

de incógnita \tilde{p}' ser possível. Em virtude de $0 < W(E(q'), q'), W(E(q), q) < 2M_n$ comprova-se que $C < 4M_n^2$. Ignoraremos momentaneamente que a eq. (3.337) é possível assim como essa condição necessária e suficiente. Utilizando apenas as desigualdades $B \geq 0$ e $C < 4M_n^2$ na resolução da inequação (3.345), obtemos a respectiva solução:

$$\text{inequação impossível se } A > 0, B \leq A; \quad (3.346)$$

$$\tilde{p}' \geq p_- \text{ se } A > 0, B > A; \quad (3.347)$$

$$\tilde{p}' \geq \frac{B}{4} \text{ se } A = 0; \quad (3.348)$$

$$\text{inequação impossível se } A < 0, B \leq |A|; \quad (3.349)$$

$$\tilde{p}' \geq -p_+ \text{ se } A < 0, |A| < B < \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}; \quad (3.350)$$

$$\tilde{p}' \geq 0 \text{ se } A < 0, B = \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}; \quad (3.351)$$

$$\tilde{p}' \geq p_+ \text{ se } A < 0, B > \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}, \quad (3.352)$$

sendo

$$p_{\pm} = \frac{BC \pm |A|\sqrt{C^2 + M_n^2(B^2 - A^2)}}{A^2 - B^2}. \quad (3.353)$$

Como a eq. (3.337) é possível, a inequação (3.345) também é. Por conseguinte, $B > |A|$ se $A \neq 0$. Demonstraremos a seguir que $s_2 > 0$, do que se conclui que $B > |A|$ qualquer que seja A . Suponhamos que $s_2 = 0$. Então, existe \tilde{p}' tal que

$$AE(\tilde{p}') - C = (W(E(q), q) - W(E(q'), q'))(W(E(q'), q') - W(E(q), q) - 2E(\tilde{p}')) = 0. \quad (3.354)$$

Como

$$W(E(q'), q') - W(E(q), q) - 2E(\tilde{p}') < 2M_n - 2E(\tilde{p}') \leq 0, \quad (3.355)$$

da eq. (3.354) resulta que $q' = q$. A equação

$$B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) v(M_n, 0) = R_{\Phi, \Theta, 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) v(M_n, 0) \quad (3.356)$$

de incógnitas Φ', Θ' é possível se, e somente se,

$$q \geq \sqrt{\frac{M_n^2(\sqrt{M_t^2 + K^2} - M_t)}{2M_t}}, \quad (3.357)$$

$$\Theta = \arccos \left[\frac{\sqrt{M_n^2 + q^2}(-\sqrt{M_t^2 + K^2} + M_t)}{qK} \right]. \quad (3.358)$$

Notemos que: (a)

$$\sqrt{\frac{M_n^2(\sqrt{M_t^2 + K^2} - M_t)}{2M_t}} < q_s; \quad (3.359)$$

(b) uma condição necessária e suficiente para a inequação (3.357) ser satisfeita é

$$-1 \leq \frac{\sqrt{M_n^2 + q^2}(-\sqrt{M_t^2 + K^2} + M_t)}{qK}. \quad (3.360)$$

A solução da eq. (3.356) é $\Phi' = \Phi$, $\Theta' = \pi - \Theta$. De

$$\begin{aligned} Z(E(q), -q)R_{0,-\Theta,0}B(\eta\hat{e}^3)R_{0,\pi-\Theta,0}Z(E(q), q)v(M_n, 0) &= R_{0,\vartheta_1+\vartheta_3,0}B(\xi(s_2)\hat{e}^3)R_{0,\vartheta_4,0} \\ &\times v(M_n, 0) \end{aligned} \quad (3.361)$$

tiramos que

$$\begin{aligned} s_2^2 &= [Z(E(q), -q)R_{0,-\Theta,0}B(\eta\hat{e}^3)R_{0,\pi-\Theta,0}Z(E(q), q)v(M_n, 0)]^{02} - M_n^2 \\ &= \frac{M_n^2}{M_t W^2(E(q), q)} (\sqrt{M_t^2 + K^2} - M_t)(\sqrt{M_n^2 + q^2} + \sqrt{W^2(E(q), q) + q^2})^2 \\ &\quad \times \left[\frac{(\sqrt{M_t^2 + K^2} - M_t)(\sqrt{M_n^2 + q^2} + \sqrt{W^2(E(q), q) + q^2})^2}{M_t W^2(E(q), q)} + 2 \right] \\ &> 0. \end{aligned} \quad (3.362)$$

Portanto, partindo da hipótese $s_2 = 0$, encontramos o absurdo $s_2 > 0$, donde necessariamente $s_2 > 0$.

Agora, regressando à inequação (3.345), escrevemos a respectiva solução:

$$\tilde{p}' \geq p_- \text{ se } A \geq 0; \quad (3.363)$$

$$\tilde{p}' \geq -p_+ \text{ se } A < 0, B < \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}; \quad (3.364)$$

$$\tilde{p}' \geq 0 \text{ se } A < 0, B = \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}; \quad (3.365)$$

$$\tilde{p}' \geq p_+ \text{ se } A < 0, B > \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}. \quad (3.366)$$

No que respeita aos extremos inferiores dos intervalos, verifica-se que p_- , $-p_+$, $p_+ > 0$.

Uma vez que já resolvemos a inequação (3.345), é fácil determinarmos a solução da eq. (3.337). Sendo $\tilde{p}' \neq 0$, definimos D por

$$D = \frac{-C + AE(\tilde{p}')}{B\tilde{p}'}. \quad (3.367)$$

A solução da eq. (3.337) é:

$$\tilde{p}' \geq p_-, \bar{\theta} = \arccos D(\tilde{p}') \text{ se } A \geq 0; \quad (3.368)$$

$$\tilde{p}' \geq -p_+, \bar{\theta} = \arccos D(\tilde{p}') \text{ se } A < 0, B < \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}; \quad (3.369)$$

$$\tilde{p}' = 0, 0 \leq \bar{\theta} \leq \pi \text{ ou } \tilde{p}' > 0, \bar{\theta} = \arccos D(\tilde{p}'), \text{ se } A < 0, B = \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}; \quad (3.370)$$

$$\tilde{p}' \geq p_+, \bar{\theta} = \arccos D(\tilde{p}') \text{ se } A < 0, B > \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}. \quad (3.371)$$

Colocando em evidência o factor $1/(E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}'^2)$ das eqs. (3.326), (3.327), podemos escrever o diagrama C como

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta\hat{e}^3)) Q_2^\dagger \tilde{\gamma}^0 \mathcal{J}_2^\mu G_2 G_3 Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle = & -\frac{M_n^2}{2(2\pi)^8} \int_0^{q_*} dq \frac{q^2}{E(q)} \\ & \int_I d\Theta \sin \Theta \int_0^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \frac{F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \bar{\theta})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}'^2}. \end{aligned} \quad (3.372)$$

Seja $A \geq 0$. Em consequência dos pontos de singularidade do factor $1/(E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}'^2)$ fazemos a decomposição

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \frac{F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \bar{\theta})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}'^2} = & \int_0^{p_-} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \\ & \times \frac{F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \bar{\theta}) - F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \arccos(D(p_-)))}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}'^2} - \frac{1}{B} \int_0^{p_-} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'}{E(\tilde{p}')} \\ & \times F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \arccos(D(p_-))) \ln \left| \frac{1 - D(\tilde{p}')}{1 + D(\tilde{p}')} \right| + \int_{p_-}^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \\ & \times \frac{F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \bar{\theta}) - F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \arccos(D(\tilde{p}')))}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}'^2} - \frac{1}{B} \int_{p_-}^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'}{E(\tilde{p}')} \\ & \times F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \arccos(D(\tilde{p}'))) \ln \frac{1 - D(\tilde{p}')}{1 + D(\tilde{p}')}, \end{aligned} \quad (3.373)$$

em que $|D(\tilde{p}')| < 1$ se $\tilde{p}' > p_-$, $D(\tilde{p}') > 1$ se $0 < \tilde{p}' < p_-$, $D(\tilde{p}') = 1$ se $\tilde{p}' = p_-$,

$$\lim_{\tilde{p}' \rightarrow 0} D(\tilde{p}') = +\infty, \quad (3.374)$$

$$\lim_{\tilde{p}' \rightarrow 0} \ln \left| \frac{1 - D(\tilde{p}')}{1 + D(\tilde{p}')} \right| = 0, \quad (3.375)$$

$$0 \leq \lim_{\tilde{p}' \rightarrow +\infty} D(\tilde{p}') = \frac{A}{B} < 1, \quad (3.376)$$

$$\ln \left| \frac{1 - D(\tilde{p}')}{1 + D(\tilde{p}')} \right| \sim \ln \left| \frac{BE(p_-) - Ap_-}{2Bp_-E(p_-)} (\tilde{p}' - p_-) \right| \quad (3.377)$$

na vizinhança de $\tilde{p}' = p_-$. Sejam $A < 0$ e $B < \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}$. A respectiva decomposição resulta da substituição de p_- por $-p_+$ na eq. (3.373). Agora, $|D(\tilde{p}')| < 1$ se $\tilde{p}' > -p_+$, $D(\tilde{p}') < -1$ se $0 < \tilde{p}' < -p_+$, $D(\tilde{p}') = -1$ se $\tilde{p}' = -p_+$, a eq. (3.375) mantém-se,

$$\lim_{\tilde{p}' \rightarrow 0} D(\tilde{p}') = -\infty, \quad (3.378)$$

$$-1 < \lim_{\tilde{p}' \rightarrow +\infty} D(\tilde{p}') = \frac{A}{B} < 0, \quad (3.379)$$

$$\ln \left| \frac{1 - D(\tilde{p}')}{1 + D(\tilde{p}')} \right| \sim - \ln \left| \frac{-BE(p_+) + Ap_+}{2Bp_+E(p_+)} (\tilde{p}' + p_+) \right| \quad (3.380)$$

na vizinhança de $\tilde{p}' = -p_+$. Sejam $A < 0$ e $B = \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}$. Neste caso a decomposição é

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \frac{F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \bar{\theta})}{E^2(\tilde{p}') - \tilde{p}'^2} &= \int_0^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'^2}{E(\tilde{p}')} \int_0^\pi d\bar{\theta} \sin \bar{\theta} \\ &\times \frac{F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \bar{\theta}) - F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \arccos(D(\tilde{p}')))}{E^2(\tilde{p}') - \tilde{p}'^2} - \frac{1}{B} \int_0^{+\infty} d\tilde{p}' \frac{\tilde{p}'}{E(\tilde{p}')} \\ &\times F^\mu(q, \Theta, \tilde{p}', \arccos(D(\tilde{p}'))) \ln \frac{1 - D(\tilde{p}')}{1 + D(\tilde{p}')}, \end{aligned} \quad (3.381)$$

em que $|D(\tilde{p}')| < 1$ se $\tilde{p}' > 0$, $\lim_{\tilde{p}' \rightarrow 0} D(\tilde{p}') = 0$ e a eq. (3.379) é preservada. Sejam $A < 0$ e $B > \sqrt{A^2 + 4M_n|A|}$. Obtemos a respectiva decomposição substituindo p_- por p_+ na eq. (3.373). Agora, $|D(\tilde{p}')| < 1$ se $\tilde{p}' > p_+$, $D(\tilde{p}') > 1$ se $0 < \tilde{p}' < p_+$, $D(\tilde{p}') = 1$ se $\tilde{p}' = p_+$, as eqs. (3.374), (3.375), (3.379) mantêm-se e

$$\ln \left| \frac{1 - D(\tilde{p}')}{1 + D(\tilde{p}') \right| \sim \ln \left| \frac{BE(p_+) - Ap_+}{2Bp_+E(p_+)} (\tilde{p}' - p_+) \right| \quad (3.382)$$

na vizinhança de $\tilde{p}' = p_+$.

3.5.3 Cálculo do diagrama D

O diagrama D no referencial do laboratório representa o elemento de matriz

$$\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) Q_1^\dagger \tilde{\gamma}^0 G_3 J_3^\mu G_3 P_{12} Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle. \quad (3.383)$$

O produto das funções delta de Dirac contidas no elemento de matriz (3.383) é

$$\begin{aligned} \delta(q'^0 - E(q')) \delta(q^0 - E(q)) \delta^4(B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) - R_{\Phi, \Theta, 0} Z(E(q), q) \\ \times R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p})) \delta^4(B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} Z(E(q'), q') R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}')) - R_{\Phi, \Theta, 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) \\ \times v(M_n, 0)). \end{aligned} \quad (3.384)$$

Da primeira e segunda funções delta de Dirac do produto (3.384) tiramos que $q'^0 = E(q')$, $q^0 = E(q)$. Os pares de condições $q'^0 = E(q')$, $0 \leq q' < M_t - q'^0$ e $q^0 = E(q)$, $0 \leq q < M_t - q^0$ implicam que $0 \leq q' < q_s$ e $0 \leq q < q_s$ respectivamente. Passemos ao tratamento da terceira função delta de Dirac do produto (3.384):

$$\delta^4(B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) - R_{\Phi, \Theta, 0} Z(E(q), q) R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}))$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - Z(E(q), -q) R_{0, -\Theta, 0} B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi' - \Phi, \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0, \theta_1, 0} B(\xi(r_1) \hat{e}^3) R_{0, \theta_2, 0} R_{\Phi' - \Phi + \pi, \pi - \Theta', 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0, \theta_1, \phi_1} B(\xi(r_1) \hat{e}^3) R_{0, \theta_3, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) R_{\phi_2, 0, 0} v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{0, \theta_1, 0} R_{\phi_1, \theta_4, 0} B(\xi(r_2) \hat{e}^3) R_{0, \theta_5, \phi_2} v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{\phi_3, \theta_6, 0} B(\xi(r_2) \hat{e}^3) R_{\phi_4, \theta_5, \phi_2} v(M_n, 0)) \\
&= \delta(\tilde{p}^0 - E(\tilde{p})) \delta(\tilde{\phi} - \phi_3) \delta(\cos \tilde{\theta} - \cos \theta_6) \frac{\delta(\tilde{p} - r_2)}{r_2^2}. \tag{3.385}
\end{aligned}$$

Quanto à quarta função delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
&\delta^4(B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} Z(E(q'), q') R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}') - R_{\Phi, \Theta, 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}') - Z(E(q'), -q') R_{0, -\Theta', 0} B(-\eta \hat{e}^3) R_{\Phi - \Phi', \Theta, 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}') - R_{0, \vartheta_1, 0} B(\xi(s_1) \hat{e}^3) R_{0, \vartheta_2, 0} R_{\Phi - \Phi' + \pi, \pi - \Theta, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}') - R_{0, \vartheta_1, \varphi_1} B(\xi(s_1) \hat{e}^3) R_{0, \vartheta_3, 0} B(\xi(q) \hat{e}^3) R_{\varphi_2, 0, 0} v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}') - R_{0, \vartheta_1, \varphi_1} R_{0, \vartheta_4, 0} B(\xi(s_2) \hat{e}^3) R_{0, \vartheta_5, \varphi_2} v(M_n, 0)) \\
&= \delta^4(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}') - R_{\varphi_3, \theta_6, 0} B(\xi(s_2) \hat{e}^3) R_{\varphi_4, \vartheta_5, \varphi_2} v(M_n, 0)) \\
&= \delta(\tilde{p}'^0 - E(\tilde{p}')) \delta(\tilde{\phi}' - \varphi_3) \delta(\cos \tilde{\theta}' - \cos \vartheta_6) \frac{\delta(\tilde{p}' - s_2)}{s_2^2}. \tag{3.386}
\end{aligned}$$

Agora, é imediato que das eqs. (3.385), (3.386) extraímos que $\tilde{p}^0 = E(\tilde{p})$, $\tilde{\phi} = \phi_3$, $\tilde{\theta} = \theta_6$, $\tilde{p} = r_2$, $\tilde{p}'^0 = E(\tilde{p}')$, $\tilde{\phi}' = \varphi_3$, $\tilde{\theta}' = \vartheta_6$, $\tilde{p}' = s_2$.

O diagrama D é expresso inicialmente como um integral sobre $q, \Theta, \Phi, q', \Theta', \Phi'$:

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) Q_1^\dagger \gamma^0 G_3 J_3^\mu G_3 P_{12} Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle &= -\frac{M_n^2}{2(2\pi)^8} \int_0^{q_s} dq \frac{q^2}{E(q)} \\
&\int_0^{q_s} dq' \frac{q'^2}{E(q')} \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \int_0^\pi d\Theta' \sin \Theta' \int_0^{2\pi} d\Phi' \int_0^{2\pi} d\Phi \sum_{\substack{T' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \rho'_3 \\ T' j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_3}} \sqrt{2j' + 1} \\
&\times \sqrt{2j + 1} D_{M', m' - \lambda'_1}^{(1/2)}(\Phi', \Theta', 0) D_{M, m - \lambda_1}^{(1/2)*}(\Phi, \Theta, 0) D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(0, \tilde{\theta}', 0) D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \\
&\times C^*(q^0 q' \tilde{p}'^0 \tilde{p}' M' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 + + \rho'_3 T' \mathcal{T}_z) C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + + \rho_3 T \mathcal{T}_z) F_{\lambda'_1 \lambda_2}^{(12)} F_{\lambda'_2 \lambda_1}^{(21)} \\
&\times (R_{\frac{\Phi+\Phi'}{2}, 0, 0})^\mu_\nu (F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(1)} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(2)} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau} Q_\tau + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(3)} F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}), \tag{3.387}
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_{\lambda'_1 \lambda_2}^{(12)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_1) S^{-1}(B(\xi(q') \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) S(R_{\Phi - \Phi', \Theta, 0}) \\
&\times S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p}) \hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2), \tag{3.388}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\lambda'_2 \lambda_1}^{(21)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_2) S^{-1}(B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \\
&\times S(R_{\Phi - \Phi', \Theta, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) S(B(\xi(q) \hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_1), \tag{3.389}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = & \frac{M_n}{E(\tilde{p}')}\frac{M_n}{E(\tilde{p})}\frac{1}{[(\rho'_3+1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')][(\rho_3+1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q)]}\bar{u}^{\rho'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\
& \times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0})S^{-1}(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0})S^{-1}(Z(q'^0, q'))S^{-1}(R_{0, \Theta', 0})S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3))S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, 0, 0}) \\
& \times \gamma^\nu S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, 0, 0})S(R_{0, \Theta, 0})S(Z(q^0, q))S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0})S(R_{\pi, \pi, 0})u^{\rho_3}(\tilde{p}, \lambda_3),
\end{aligned} \tag{3.390}$$

$$\begin{aligned}
F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau} = & \frac{M_n}{E(\tilde{p}')}\frac{M_n}{E(\tilde{p})}\frac{1}{[(\rho'_3+1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')][(\rho_3+1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q)]}\bar{u}^{\rho'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\
& \times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0})S^{-1}(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0})S^{-1}(Z(q'^0, q'))S^{-1}(R_{0, \Theta', 0})S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3))S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, 0, 0}) \\
& \times i\sigma^{\nu\tau} S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, 0, 0})S(R_{0, \Theta, 0})S(Z(q^0, q))S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0})S(R_{\pi, \pi, 0})u^{\rho_3}(\tilde{p}, \lambda_3),
\end{aligned} \tag{3.391}$$

$$\begin{aligned}
G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = & \frac{1}{(2M_n)^2} \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \right)^2 \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \sum_{\sigma' \sigma = \pm} O_{\rho'_3 \sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) O_{\rho_3 \sigma}(\tilde{p}, \lambda_3) \bar{u}^{\sigma'}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\
& \times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0})S^{-1}(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0})S^{-1}(Z(q'^0, q'))S^{-1}(R_{0, \Theta', 0})S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \\
& \times S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, 0, 0})\gamma^\nu S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, 0, 0})S(R_{0, \Theta, 0})S(Z(q^0, q))S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0})S(R_{\pi, \pi, 0}) \\
& \times u^\sigma(\tilde{p}, \lambda_3),
\end{aligned} \tag{3.392}$$

$$\begin{aligned}
F_{T'T\mathcal{T}_z}^{(1)} = & \tilde{f}(q_3'^2, q_3^2)(F_{1p}(Q^2)\langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 + \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\
& + F_{1n}(Q^2)\langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 - \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle),
\end{aligned} \tag{3.393}$$

$$\begin{aligned}
F_{T'T\mathcal{T}_z}^{(2)} = & \tilde{g}(q_3'^2, q_3^2)(F_{2p}(Q^2)\langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 + \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\
& + F_{2n}(Q^2)\langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 - \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle),
\end{aligned} \tag{3.394}$$

$$\begin{aligned}
F_{T'T\mathcal{T}_z}^{(3)} = & \tilde{h}(q_3'^2, q_3^2)(F_{3p}(Q^2)\langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 + \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\
& + F_{3n}(Q^2)\langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 - \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle),
\end{aligned} \tag{3.395}$$

P_{12}^{iso} o operador que troca entre si os estados de isospin dos nucleões 1 e 2,

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \frac{1}{4} \mp \frac{1}{2} \mathcal{T}_z, \tag{3.396}$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = -\frac{1}{4} \mp \frac{5}{6} \mathcal{T}_z, \tag{3.397}$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4} \mp \frac{\sqrt{3}}{6} \mathcal{T}_z, \tag{3.398}$$

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_3^3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4} \mp \frac{\sqrt{3}}{6} \mathcal{T}_z. \tag{3.399}$$

Comprova-se que

$$F_{\lambda'_1 \lambda_2}^{(12)} = 2\lambda'_1 2\lambda_2 F_{-\lambda'_1 - \lambda_2}^{(12)*}, \quad (3.400)$$

$$F_{\lambda'_2 \lambda_1}^{(21)} = 2\lambda'_2 2\lambda_1 F_{-\lambda'_2 - \lambda_1}^{(21)*}, \quad (3.401)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = \rho'_3 \rho_3 2\lambda'_3 2\lambda_3 F_{\rho'_3 - \lambda'_3 \rho_3 - \lambda_3}^{(33)\nu*}, \quad (3.402)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\mu} = \rho'_3 \rho_3 2\lambda'_3 2\lambda_3 F_{\rho'_3 - \lambda'_3 \rho_3 - \lambda_3}^{(33)\nu\mu*}, \quad (3.403)$$

$$G_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu} = \rho'_3 \rho_3 2\lambda'_3 2\lambda_3 G_{\rho'_3 - \lambda'_3 \rho_3 - \lambda_3}^{(33)\nu*}. \quad (3.404)$$

Segue-se a simplificação de $F_{\lambda'_1 \lambda_2}^{(12)}$ e $F_{\lambda'_2 \lambda_1}^{(21)}$:

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_1 \lambda_2}^{(12)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_1) S^{-1}(B(\xi(q')\hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\Phi' - \Phi, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) S(R_{0, \Theta, 0}) \\ &\quad \times S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \bar{u}^+(0, \lambda'_1) [S^{-1}(Z(q^0, q)) S^{-1}(R_{0, \Theta, 0}) S(B(\eta\hat{e}^3)) S(R_{\Phi' - \Phi, \Theta', 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) \\ &\quad \times S(B(\xi(q')\hat{e}^3))]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \bar{u}^+(0, \lambda'_1) [S(R_{0, \theta_1, 0}) S(B(\xi(r_1)\hat{e}^3)) S(R_{0, \theta_2, 0}) \\ &\quad \times S(R_{\Phi' - \Phi + \pi, \pi - \Theta', 0}) S(B(\xi(q')\hat{e}^3))]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_2(\theta_2, \Phi' - \Phi + \pi, \pi - \Theta') \bar{u}^+(0, \lambda'_1) [S(R_{0, \theta_1, \phi_1}) S(B(\xi(r_1)\hat{e}^3)) \\ &\quad \times S(R_{0, \theta_3, 0}) S(B(\xi(q')\hat{e}^3)) S(R_{\phi_2, 0, 0})]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_2(\theta_2, \Phi' - \Phi + \pi, \pi - \Theta') \varsigma_1(\xi(r_1), \theta_3, \xi(q')) \bar{u}^+(0, \lambda'_1) \\ &\quad \times [S(R_{0, \theta_1, \phi_1}) S(R_{0, \theta_4, 0}) S(B(\xi(r_2)\hat{e}^3)) S(R_{0, \theta_5, \phi_2})]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) \\ &\quad \times u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_2(\theta_2, \Phi' - \Phi + \pi, \pi - \Theta') \varsigma_1(\xi(r_1), \theta_3, \xi(q')) \varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_4) \\ &\quad \times \bar{u}^+(0, \lambda'_1) [S(R_{\phi_3, \theta_6, 0}) S(B(\xi(r_2)\hat{e}^3)) S(R_{\phi_4, \theta_5, \phi_2})]^{-1} S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) \\ &\quad \times u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_2(\theta_2, \Phi' - \Phi + \pi, \pi - \Theta') \varsigma_1(\xi(r_1), \theta_3, \xi(q')) \varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_4) \\ &\quad \times \bar{u}^+(0, \lambda'_1) S(R_{-\phi_2, -\theta_5, -\phi_4}) u^+(0, \lambda_2) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q), -\Theta, \eta) \varsigma_2(\theta_2, \Phi' - \Phi + \pi, \pi - \Theta') \varsigma_1(\xi(r_1), \theta_3, \xi(q')) \varsigma_2(\theta_1, \phi_1, \theta_4) \\ &\quad \times e^{i(\phi_2 \lambda'_1 + \phi_4 \lambda_2)} d_{\lambda'_1, \lambda_2}^{(1/2)}(-\theta_5), \end{aligned} \quad (3.405)$$

$$\begin{aligned} F_{\lambda'_2 \lambda_1}^{(21)} &= \bar{u}^+(0, \lambda'_2) S^{-1}(B(\xi(\tilde{p})\hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S^{-1}(Z(q^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta\hat{e}^3)) \\ &\quad \times S(R_{\Phi - \Phi', \Theta, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) S(B(\xi(q)\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_1) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q'), -\Theta', -\eta) \bar{u}^+(0, \lambda'_2) S^{-1}(B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S(R_{0, \theta_1, 0}) \\ &\quad \times S(B(\xi(s_1)\hat{e}^3)) S(R_{0, \theta_2, 0}) S(R_{\Phi - \Phi' + \pi, \pi - \Theta, 0}) S(B(\xi(q)\hat{e}^3)) u^+(0, \lambda_1) \\ &= \varsigma_1(-\chi(q^0, q'), -\Theta', -\eta) \varsigma_2(\theta_2, \Phi - \Phi' + \pi, \pi - \Theta) \bar{u}^+(0, \lambda'_2) S^{-1}(B(\xi(\tilde{p}')\hat{e}^3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S(R_{0, \vartheta_1, \varphi_1}) S(B(\xi(s_1) \hat{e}^3)) S(R_{0, \vartheta_3, 0}) S(B(\xi(q) \hat{e}^3)) S(R_{\varphi_2}, 0, 0) \\
& \times u^+(0, \lambda_1) \\
= & \varsigma_1(-\chi(q'^0, q'), -\Theta', -\eta) \varsigma_2(\vartheta_2, \Phi - \Phi' + \pi, \pi - \Theta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_3, \xi(q)) \bar{u}^+(0, \lambda'_2) \\
& \times S^{-1}(B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S(R_{0, \vartheta_1, \varphi_1}) S(R_{0, \vartheta_4, 0}) S(B(\xi(s_2) \hat{e}^3)) S(R_{0, \vartheta_5, \varphi_2}) \\
& \times u^+(0, \lambda_1) \\
= & \varsigma_1(-\chi(q'^0, q'), -\Theta', -\eta) \varsigma_2(\vartheta_2, \Phi - \Phi' + \pi, \pi - \Theta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_3, \xi(q)) \varsigma_2(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_4) \\
& \times \bar{u}^+(0, \lambda'_2) S^{-1}(B(\xi(\tilde{p}') \hat{e}^3)) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0}) S(R_{\varphi_3, \vartheta_6, 0}) S(B(\xi(s_2) \hat{e}^3)) S(R_{\varphi_4, \vartheta_5, \varphi_2}) \\
& \times u^+(0, \lambda_1) \\
= & \varsigma_1(-\chi(q'^0, q'), -\Theta', -\eta) \varsigma_2(\vartheta_2, \Phi - \Phi' + \pi, \pi - \Theta) \varsigma_1(\xi(s_1), \vartheta_3, \xi(q)) \varsigma_2(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_4) \\
& \times e^{-i(\varphi_4 \lambda'_2 + \varphi_2 \lambda_1)} d_{\lambda'_2, \lambda_1}^{(1/2)}(\vartheta_5). \tag{3.406}
\end{aligned}$$

Em cada elemento (3.390), (3.391), (3.392) o respectivo número de matrizes representativas de transformações homogéneas de Lorentz no espaço de Dirac pode ser reduzido empregando a proposição 3.5.5.

No integral da eq. (3.387) mudemos Φ' , Φ para as variáveis ϕ , φ definidas por

$$\phi = \frac{\Phi - \Phi'}{2}, \quad \varphi = \frac{\Phi + \Phi'}{2}. \tag{3.407}$$

Por conseguinte,

$$\int_0^{2\pi} d\Phi' \int_0^{2\pi} d\Phi = 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{|\phi|}^{-|\phi|+2\pi} d\varphi. \tag{3.408}$$

A função integranda da eq. (3.387) depende de φ por meio de $e^{-i(M'-M)\varphi} (R_{\varphi, 0, 0})^\mu_\nu$. A integração desse fragmento é: (a) se $M' = M$,

$$\int_{|\phi|}^{-|\phi|+2\pi} d\varphi e^{-i(M'-M)\varphi} R_{\varphi, 0, 0} = \begin{pmatrix} 2\pi - 2|\phi| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \sin|\phi| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \sin|\phi| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi - 2|\phi| \end{pmatrix}; \tag{3.409}$$

(b) se $M' = -M = 1/2$,

$$\begin{aligned}
& \int_{|\phi|}^{-|\phi|+2\pi} d\varphi e^{-i(M'-M)\varphi} R_{\varphi, 0, 0} = \\
& \begin{pmatrix} -2 \sin|\phi| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|\phi| + \pi - \frac{1}{2} \sin(2|\phi|) & i[-|\phi| + \pi + \frac{1}{2} \sin(2|\phi|)] & 0 \\ 0 & -i[-|\phi| + \pi + \frac{1}{2} \sin(2|\phi|)] & -|\phi| + \pi - \frac{1}{2} \sin(2|\phi|) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \sin|\phi| \end{pmatrix}; \tag{3.410}
\end{aligned}$$

(c) se $M' = -M = -1/2$,

$$\int_{|\phi|}^{-|\phi|+2\pi} d\phi e^{-i(M'-M)\phi} R_{\varphi,0,0} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 \sin |\phi| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|\phi| + \pi - \frac{1}{2} \sin(2|\phi|) & -i[-|\phi| + \pi + \frac{1}{2} \sin(2|\phi|)] & 0 \\ 0 & i[-|\phi| + \pi + \frac{1}{2} \sin(2|\phi|)] & -|\phi| + \pi - \frac{1}{2} \sin(2|\phi|) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \sin |\phi| \end{pmatrix}. \quad (3.411)$$

O denominador do terceiro factor de $F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu}$, $F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)\nu\tau}$ nas eqs. (3.390), (3.391) é diferente de zero. Quanto a $1/((\rho_3 + 1)E(\tilde{p}) - W(q^0, q))$, $1/((\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q'))$, notemos que: se $\rho'_3 = \rho_3 = 1$, então,

$$0 < \frac{1}{2E(\tilde{p}) - W(q^0, q)} \leq \frac{1}{3M_n - M_t}, \quad (3.412)$$

$$0 < \frac{1}{2E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')} \leq \frac{1}{3M_n - M_t}; \quad (3.413)$$

se $\rho'_3 = \rho_3 = -1$, então,

$$-\frac{1}{W(q'^0, q')} \sim -\frac{1}{\sqrt{\frac{2M_t q_s}{E(q_s)}(q_s - q')}} \quad (3.414)$$

na vizinhança de $q' = q_s$ e a eq. (3.280) é satisfeita.

3.5.4 Cálculo da soma dos diagramas E e F

Devido à propriedade 20 é suficiente calcularmos o diagrama F no lugar da soma dos diagramas E e F. O diagrama F no referencial do laboratório representa o elemento de matriz

$$\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) Q_1^\dagger \tilde{\gamma}^0 P_{12} G_3 \mathcal{J}_2^\mu G_2 Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle. \quad (3.415)$$

O produto das funções delta de Dirac contidas nesse elemento de matriz é

$$\begin{aligned} & \delta(q'^0 - E(q')) \delta(q^0 - E(q)) \delta^4(B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} Z(E(q'), q') R_{\tilde{\Phi}, \tilde{\Theta}, 0} v(\tilde{p}'^0, \tilde{p}')) - R_{\Phi, \Theta, 0} R_{\pi, \pi, 0} \\ & \times B(\xi(q) \hat{e}^3) v(M_n, 0)) \delta^4(R_{\Phi, \Theta, 0} Z(E(q), q) R_{\tilde{\Phi}, \tilde{\Theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} \\ & \times B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) + Q). \end{aligned} \quad (3.416)$$

O fragmento do produto (3.416) constituído pelas três primeiras funções delta de Dirac é igual ao fragmento do produto (3.384) composto pela primeira, segunda e quarta funções

delta de Dirac. Portanto, $q'^0 = E(q')$, $q^0 = E(q)$, $0 \leq q'$, $q < q_s$, $\tilde{p}'^0 = E(\tilde{p}')$, $\tilde{\phi}' = \varphi_3$, $\tilde{\theta}' = \vartheta_6$, $\tilde{p}' = s_2$. Passemos à quarta função delta de Dirac do produto (3.416):

$$\begin{aligned} & \delta^4(R_{\Phi,\Theta,0}Z(E(q),q)R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0,\tilde{p}) - B(\eta\hat{e}^3)R_{\Phi',\Theta',0}R_{\pi,\pi,0}B(\xi(q')\hat{e}^3)v(M_n,0) + Q) \\ &= \delta^4(R_{\Phi,\Theta,0}Z(E(q),q)R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0,\tilde{p}) - R_{\Phi'+\pi,\theta_1,0}v(E(q')\sqrt{M_t^2 + K^2}/M_t - q'\cos\Theta'K/M_t \\ &\quad - Q^0, r_1)), \end{aligned} \quad (3.417)$$

sendo

$$r_1 = \sqrt{q'^2 \sin^2\Theta' + \left(\frac{K}{M_t}E(q') - \frac{\sqrt{M_t^2 + K^2}}{M_t}q'\cos\Theta' - Q^0 \right)^2} \quad (3.418)$$

e θ_1 tal que $0 \leq \theta_1 \leq \pi$,

$$r_1 \cos\theta_1 = \frac{K}{M_t}E(q') - \frac{\sqrt{M_t^2 + K^2}}{M_t}q'\cos\Theta' - Q^0. \quad (3.419)$$

Prosseguindo:

$$\begin{aligned} & \delta^4(R_{\Phi,\Theta,0}Z(E(q),q)R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0,\tilde{p}) - R_{\Phi'+\pi,\theta_1,0}v(E(q')\sqrt{M_t^2 + K^2}/M_t - q'\cos\Theta'K/M_t \\ &\quad - Q^0, r_1)) \\ &= \delta^4(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0,\tilde{p}) - Z(E(q),-q)R_{0,-\Theta,-\Phi+\Phi'+\pi}R_{0,\theta_1,0}v(E(q')\sqrt{M_t^2 + K^2}/M_t \\ &\quad - q'\cos\Theta'K/M_t - Q^0, r_1)) \\ &= \delta^4(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0,\tilde{p}) - R_{\phi_1,0,0}Z(E(q),-q)R_{0,\theta_2,\phi_2}v(E(q')\sqrt{M_t^2 + K^2}/M_t - q'\cos\Theta'K/M_t \\ &\quad - Q^0, r_1)) \\ &= \delta^4(R_{\tilde{\phi},\tilde{\theta},0}v(\tilde{p}^0,\tilde{p}) - R_{\phi_1,\theta_3,0}v((E(q')\sqrt{M_t^2 + K^2}/M_t - q'\cos\Theta'K/M_t - Q^0) \\ &\quad \times \sqrt{W^2(E(q),q) + q^2}/W(E(q),q) - r_1 \cos\theta_2 q/W(E(q),q), r_2)), \end{aligned} \quad (3.420)$$

em que

$$\begin{aligned} r_2 = & \left[r_1^2 \sin^2\theta_2 + \left(-\frac{q}{W(E(q),q)} \left(E(q') \frac{\sqrt{M_t^2 + K^2}}{M_t} - q'\cos\Theta' \frac{K}{M_t} - Q^0 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sqrt{W^2(E(q),q) + q^2}}{W(E(q),q)} r_1 \cos\theta_2 \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.421)$$

e θ_3 é tal que $0 \leq \theta_3 \leq \pi$,

$$\begin{aligned} r_2 \cos\theta_3 = & -\frac{q}{W(E(q),q)} \left(E(q') \frac{\sqrt{M_t^2 + K^2}}{M_t} - q'\cos\Theta' \frac{K}{M_t} - Q^0 \right) \\ & + \frac{\sqrt{W^2(E(q),q) + q^2}}{W(E(q),q)} r_1 \cos\theta_2. \end{aligned} \quad (3.422)$$

Concluindo:

$$\begin{aligned}
& \delta^4(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) - R_{\phi_1, \theta_3, 0} v((E(q')\sqrt{M_t^2 + K^2}/M_t - q' \cos \Theta' K/M_t - Q^0) \\
& \quad \times \sqrt{W^2(E(q), q) + q^2}/W(E(q), q) - r_1 \cos \theta_2 q/W(E(q), q), r_2)) \\
= & \delta(\tilde{p}^0 - (E(q')\sqrt{M_t^2 + K^2}/M_t - q' \cos \Theta' K/M_t - Q^0)\sqrt{W^2(E(q), q) + q^2}/W(E(q), q) \\
& \quad - r_1 \cos \theta_2 q/W(E(q), q))\delta(\tilde{\phi} - \phi_1)\delta(\cos \tilde{\theta} - \cos \theta_3)\frac{\delta(\tilde{p} - r_2)}{r_2^2}, \tag{3.423}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^0 = & \frac{\sqrt{W^2(E(q), q) + q^2}}{W(E(q), q)} \left(E(q') \frac{\sqrt{M_t^2 + K^2}}{M_t} - q' \cos \Theta' \frac{K}{M_t} - Q^0 \right) \\
& - \frac{q}{W(E(q), q)} r_1 \cos \theta_2, \tag{3.424}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\phi} = \phi_1, \tilde{\theta} = \theta_3, \tilde{p} = r_2.$$

O diagrama F começa por ser expresso como um integral sobre $q, \Theta, \Phi, q', \Theta', \Phi'$:

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) \mathcal{Q}_1^\dagger \tilde{\gamma}^0 P_{12} G_3 \mathcal{J}_2^\mu G_2 \mathcal{Q}_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle = & -\frac{M_n^2}{2(2\pi)^8} \int_0^{q_s} dq \frac{q^2}{E(q)} \\
& \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \int_0^{2\pi} d\Phi' \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{q_s} dq' \frac{q'^2}{E(q')} \int_0^\pi d\Theta' \sin \Theta' \sum_{\substack{T' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \rho'_3 \\ T j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho_2 \rho_3}} \sqrt{2j' + 1} \\
& \times \sqrt{2j + 1} D_{M', m' - \lambda'_1}^{(1/2)}(\Phi', \Theta', 0) D_{M, m - \lambda_1}^{(1/2)*}(\Phi, \Theta, 0) D_{m', \lambda'_2 - \lambda'_3}^{(j')}(\tilde{\phi}', \tilde{\theta}', 0) D_{m, \lambda_2 - \lambda_3}^{(j)*}(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0) \\
& \times C^*(q^0 q' \tilde{p}'^0 \tilde{p}' M' j' m' \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 + + \rho'_3 T' \mathcal{T}_z) C(q^0 q \tilde{p}^0 \tilde{p} M j m \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \rho_2 \rho_3 T \mathcal{T}_z) F_{\lambda'_2 \lambda_1}^{(21)} \\
& \times (R_{\frac{\Phi+\Phi'}{2}, 0, 0})^\mu_\nu (F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(1)} F_{\lambda'_1 \rho_2 \lambda_2}^{(12)\nu} + F_{T' T \mathcal{T}_z}^{(2)} F_{\lambda'_1 \rho_2 \lambda_2}^{(12)\nu\tau} Q_\tau) F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)}, \tag{3.425}
\end{aligned}$$

sendo $F_{\lambda'_2 \lambda_1}^{(21)}$ definido pela eq. (3.389) e expresso também pela eq. (3.406),

$$\begin{aligned}
F_{\lambda'_1 \rho_2 \lambda_2}^{(12)\nu} = & \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} \bar{u}^+(q', \lambda'_1) S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \gamma^\nu \\
& \times S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) u^{\rho_2}(\tilde{p}, \lambda_2), \tag{3.426}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\lambda'_1 \rho_2 \lambda_2}^{(12)\nu\tau} = & \frac{M_n}{E(\tilde{p})} \frac{\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p})}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} \bar{u}^+(q', \lambda'_1) S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) i\sigma^{\nu\tau} \\
& \times S(R_{\frac{\Phi-\Phi'}{2}, \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) u^{\rho_2}(\tilde{p}, \lambda_2), \tag{3.427}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)} = & \frac{M_n}{E(\tilde{p}')} \left(\frac{M_n}{E(\tilde{p})} \right)^2 \frac{1}{(\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q')} \sum_{\sigma_3=\pm} O_{\rho_3 \sigma_3}(\tilde{p}, \lambda_3) \bar{u}^{\rho'_3}(\tilde{p}', \lambda'_3) \\
& \times S^{-1}(R_{\pi, \pi, 0}) S^{-1}(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S^{-1}(Z(q'^0, q')) S^{-1}(R_{0, \Theta', 0}) S^{-1}(B(\eta \hat{e}^3)) \\
& \times S(R_{\Phi-\Phi', \Theta, 0}) S(Z(q^0, q)) S(R_{\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, 0}) S(R_{\pi, \pi, 0}) u^{\sigma_3}(\tilde{p}, \lambda_3), \tag{3.428}
\end{aligned}$$

$$F_{T'T\mathcal{T}_z}^{(1)} = \tilde{f}(M_n^2, q_2^2) (F_{1p}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 + \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\ + F_{1n}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 - \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle), \quad (3.429)$$

$$F_{T'T\mathcal{T}_z}^{(2)} = \tilde{g}(M_n^2, q_2^2) (F_{2p}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 + \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle \\ + F_{2n}(Q^2) \langle [(t_2 t_3) T' t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 - \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) T t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle), \quad (3.430)$$

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \mathcal{T}_z, \quad (3.431)$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{6} \mathcal{T}_z, \quad (3.432)$$

$$\langle [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \mathcal{T}_z, \quad (3.433)$$

$$\langle [(t_2 t_3) 0 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z | P_{12}^{iso} \frac{1 \pm \tau_2^3}{2} | [(t_2 t_3) 1 t_1] 1/2 \mathcal{T}_z \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \mathcal{T}_z. \quad (3.434)$$

Demonstra-se que

$$F_{\lambda'_1 \rho_2 \lambda_2}^{(12)\nu} = \rho_2 2 \lambda'_1 2 \lambda_2 F_{-\lambda'_1 \rho_2 - \lambda_2}^{(12)\nu*}, \quad (3.435)$$

$$F_{\lambda'_1 \rho_2 \lambda_2}^{(12)\nu\mu} = \rho_2 2 \lambda'_1 2 \lambda_2 F_{-\lambda'_1 \rho_2 - \lambda_2}^{(12)\nu\mu*}, \quad (3.436)$$

$$F_{\rho'_3 \lambda'_3 \rho_3 \lambda_3}^{(33)} = \rho'_3 \rho_3 2 \lambda'_3 2 \lambda_3 F_{\rho'_3 - \lambda'_3 \rho_3 - \lambda_3}^{(33)*}. \quad (3.437)$$

Em cada elemento (3.426), (3.427), (3.428) o respectivo número de matrizes representativas de transformações homogéneas de Lorentz no espaço de Dirac pode ser reduzido utilizando a proposição 3.5.5.

No integral da eq. (3.425) substituímos Φ' , Φ pelas variáveis ϕ , φ definidas na eq. (3.407). Assim, o integral do primeiro membro da eq. (3.408) é substituído pelo do segundo membro. A função integranda da eq. (3.425) depende de φ por meio de $e^{-i(M' - M)\varphi} (R_{\varphi,0,0})^\mu_\nu$. A integração desse elemento está nas eqs. (3.409)-(3.411).

O denominador do factor $1/((\rho'_3 + 1)E(\tilde{p}') - W(q'^0, q'))$ na eq. (3.428) é diferente de zero. São satisfeitas as eqs. (3.413), (3.414).

Investiguemos se o denominador do factor $(\tilde{p}^0 + \rho_2 E(\tilde{p}))/(\tilde{p}^2 - \tilde{p}^{02})$ nas eqs. (3.426), (3.427) tem algum zero. Observemos que

$$E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02} = M_n^2 - (B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) - Q)^2 \\ = -Q^2 + 2Q \cdot B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) \\ = -Q^2 + 2B(\zeta \hat{e}^3) Q \cdot B((\zeta + \eta) \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) \\ = -Q^2 - 2\sqrt{-Q^2} [B((\zeta + \eta) \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0)]^3 \\ = -Q^2 - 2\sqrt{-Q^2} [B((\zeta + \eta) \hat{e}^3) R_{0, \pi - \Theta', 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0)]^3$$

$$= -Q^2 - 2\sqrt{-Q^2}(\sinh(\zeta + \eta)E(q') - \cosh(\zeta + \eta)q' \cos \Theta'). \quad (3.438)$$

Consideremos as seguintes duas equações de incógnitas q' , Θ' :

$$\begin{aligned} E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02} &= -Q^2 - 2\sqrt{-Q^2}(\sinh(\zeta + \eta)E(q') - \cosh(\zeta + \eta)q' \cos \Theta') \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.439)$$

e

$$B((\zeta + \eta)\hat{e}^3)R_{0,\pi-\Theta',0}B(\xi(q')\hat{e}^3)v(M_n, 0) = R_{0,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3)v(M_n, 0), \quad (3.440)$$

em que $p \geq \sqrt{-Q^2}/2$ e $\theta = \arccos(\sqrt{-Q^2}/(2p))$. Notemos que: (a) se q' , Θ' é uma solução da eq. (3.439), então, existe $p' \geq \sqrt{-Q^2}/2$ tal que q' , Θ' é uma solução da eq. (3.440) com $p = p'$; (b) dado $p' \geq \sqrt{-Q^2}/2$, se q' , Θ' é uma solução da eq. (3.440) com $p = p'$, então, q' , Θ' é uma solução da eq. (3.439). Consequentemente, podemos determinar o conjunto das soluções da eq. (3.439) resolvendo a eq. (3.440):

$$\begin{aligned} B((\zeta + \eta)\hat{e}^3)R_{0,\pi-\Theta',0}B(\xi(q')\hat{e}^3)v(M_n, 0) &= R_{0,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3)v(M_n, 0) \\ \Leftrightarrow R_{0,\pi-\Theta',0}B(\xi(q')\hat{e}^3)v(M_n, 0) &= B((- \zeta - \eta)\hat{e}^3)R_{0,\theta,0}B(\xi(p)\hat{e}^3)v(M_n, 0); \end{aligned} \quad (3.441)$$

q' , Θ' é uma solução da eq. (3.440) se, e somente se,

$$q_s > \sqrt{-M_n^2 + \left(\cosh(\zeta + \eta)E(p) - \sinh(\zeta + \eta)\frac{\sqrt{-Q^2}}{2} \right)^2}, \quad (3.442)$$

$$q' = \sqrt{-M_n^2 + \left(\cosh(\zeta + \eta)E(p) - \sinh(\zeta + \eta)\frac{\sqrt{-Q^2}}{2} \right)^2}, \quad (3.443)$$

$$q' \cos \Theta' = \frac{\sinh(\zeta + \eta)E(q') - \frac{\sqrt{-Q^2}}{2}}{\cosh(\zeta + \eta)}. \quad (3.444)$$

Reparemos que a condição (3.443) implica

$$\left| \frac{\sinh(\zeta + \eta)E(q') - \frac{\sqrt{-Q^2}}{2}}{\cosh(\zeta + \eta)} \right| \leq q'. \quad (3.445)$$

Seja a definido por

$$a = \sqrt{-M_n^2 + \left(\cosh(\zeta + \eta)E\left(\frac{\sqrt{-Q^2}}{2}\right) - \sinh(\zeta + \eta)\frac{\sqrt{-Q^2}}{2} \right)^2}. \quad (3.446)$$

Demonstra-se que

$$a = -\sinh(\zeta + \eta)E\left(\frac{\sqrt{-Q^2}}{2}\right) + \cosh(\zeta + \eta)\frac{\sqrt{-Q^2}}{2}, \quad (3.447)$$

$$0 < a < q_s . \quad (3.448)$$

Como $a < q_s$ e $q' < q_s$, uma condição necessária e suficiente para que a eq. (3.440) seja possível é

$$\frac{\sqrt{-Q^2}}{2} \leq p < \sqrt{\left(\frac{E(q_s) + \sinh(\zeta + \eta) \frac{\sqrt{-Q^2}}{2}}{\cosh(\zeta + \eta)} \right)^2 - M_n^2} . \quad (3.449)$$

A desigualdade

$$\left(\frac{E(q_s) + \sinh(\zeta + \eta) \frac{\sqrt{-Q^2}}{2}}{\cosh(\zeta + \eta)} \right)^2 - M_n^2 > \frac{-Q^2}{4} . \quad (3.450)$$

é uma consequência de $a < q_s$. Do que dissemos resulta que q' , Θ' é uma solução da eq. (3.439) se, e somente se,

$$a \leq q' , \quad (3.451)$$

$$\Theta' = \arccos \frac{\sinh(\zeta + \eta) E(q') - \frac{\sqrt{-Q^2}}{2}}{q' \cosh(\zeta + \eta)} . \quad (3.452)$$

Notemos que $a \leq q'$ implica

$$\left| \frac{\sinh(\zeta + \eta) E(q') - \frac{\sqrt{-Q^2}}{2}}{\cosh(\zeta + \eta)} \right| \leq q' . \quad (3.453)$$

Passemos a mostrar que $\tilde{p}^0 = E(\tilde{p})$ se $E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02} = 0$. Seja q' , Θ' uma solução da eq. (3.439). Então, existe p pertencente ao intervalo definido pela eq. (3.449) tal que

$$B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) = B(-\zeta \hat{e}^3) R_{\Phi' + \pi, \theta, 0} B(\xi(p) \hat{e}^3) v(M_n, 0) , \quad (3.454)$$

sendo $\theta = \arccos(\sqrt{-Q^2}/(2p))$. Comprova-se que

$$[B(-\zeta \hat{e}^3) R_{\Phi' + \pi, \theta, 0} B(\xi(p) \hat{e}^3) v(M_n, 0) - Q]^0 > 0 . \quad (3.455)$$

Das eqs. (3.454), (3.455) e

$$R_{\Phi, \Theta, 0} Z(E(q), q) R_{\tilde{\Phi}, \tilde{\Theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p}) = B(\eta \hat{e}^3) R_{\Phi', \Theta', 0} R_{\pi, \pi, 0} B(\xi(q') \hat{e}^3) v(M_n, 0) - Q \quad (3.456)$$

resulta que

$$[R_{\Phi, \Theta, 0} Z(E(q), q) R_{\tilde{\Phi}, \tilde{\Theta}, 0} v(\tilde{p}^0, \tilde{p})]^0 > 0 , \quad (3.457)$$

onde $\tilde{p}^0 = E(\tilde{p})$.

Pondo em evidência o factor $1/(E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02})$ das eqs. (3.426), (3.427), escrevemos o diagrama F como

$$\langle \Gamma^1(\tilde{P}_t, M', \mathcal{T}_z) | L^\dagger(B(\eta \hat{e}^3)) Q_1^\dagger \tilde{\gamma}^0 P_{12} G_3 J_2^\mu G_2 Q_1 | \Gamma^1(\tilde{P}_t, M, \mathcal{T}_z) \rangle = -\frac{M_n^2}{(2\pi)^8} \int_0^{q_s} dq \frac{q^2}{E(q)} \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \int_{-\pi}^\pi d\phi \int_0^{q_s} dq' \frac{q'^2}{E(q')} \int_0^\pi d\Theta' \sin \Theta' \frac{F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \Theta')}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}}. \quad (3.458)$$

Seja $B(x)$ tal que

$$B(x) = \frac{\sinh(\zeta + \eta) E(x) - \frac{\sqrt{-Q^2}}{2}}{x \cosh(\zeta + \eta)}, \quad (3.459)$$

em que $0 < x \leq q_s$. Em virtude dos pontos de singularidade do factor $1/(E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02})$ fazemos a decomposição

$$\begin{aligned} \int_0^{q_s} dq' \frac{q'^2}{E(q')} \int_0^\pi d\Theta' \sin \Theta' \frac{F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \Theta')}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} &= \int_0^a dq' \frac{q'^2}{E(q')} \int_0^\pi d\Theta' \sin \Theta' \\ &\times \frac{F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \Theta') - F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \arccos B(a))}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} + \frac{1}{2\sqrt{-Q^2} \cosh(\zeta + \eta)} \\ &\times \int_0^a dq' \frac{q'}{E(q')} F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \arccos B(a)) \ln \left| \frac{1 - B(q')}{1 + B(q')} \right| + \int_a^{q_s} dq' \frac{q'^2}{E(q')} \\ &\times \int_0^\pi d\Theta' \sin \Theta' \frac{F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \Theta') - F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \arccos B(q'))}{E^2(\tilde{p}) - \tilde{p}^{02}} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{-Q^2} \cosh(\zeta + \eta)} \int_a^{q_s} dq' \frac{q'}{E(q')} F^\mu(q, \Theta, \phi, q', \arccos B(q')) \ln \frac{1 - B(q')}{1 + B(q')}. \end{aligned} \quad (3.460)$$

Observemos que $B(x) < -1$ se $0 < x < a$, $B(x) = -1$ se $x = a$, $-1 < B(x) < 0$ se $a < x \leq q_s$,

$$\lim_{q' \rightarrow 0} \ln \left| \frac{1 - B(q')}{1 + B(q')} \right| = 0 \quad (3.461)$$

e na vizinhança de $q' = a$

$$\ln \left| \frac{1 - B(q')}{1 + B(q')} \right| \sim -\ln \left| \frac{E\left(\frac{\sqrt{-Q^2}}{2}\right)(q' - a)}{2aE(a)\cosh(\zeta + \eta)} \right|. \quad (3.462)$$

3.6 Resultados

Calculámos até ao momento transferido $Q = 9 \text{ fm}^{-1}$ os factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ bem como as respectivas combinações isoescalares e isovectoriais relativos aos modelos W00, W10, W16, W19, W26 da interacção NN, às

correntes electromagnéticas NCI, NCII, NCIII, NCIV, NCV do nucleão e às parametrizações de Galster [81] e MMD [82] dos factores de forma electromagnéticos do nucleão. Denotamos por A/B/C o cálculo dos factores de forma dos núcleos do ^3He e ^3H referente ao modelo A da interacção NN, à corrente B do nucleão e à parametrização C dos factores de forma electromagnéticos do nucleão.

Conforme mencionámos no capítulo 3, utilizámos ondas parciais para calcular os factores de forma. Estudámos a dependência dessas observáveis relativamente ao valor máximo do momento angular do par dos nucleões 2 e 3 aumentando-o de 0 a 6. Verificámos que há uma convergência rápida visto que o valor máximo de 2 fornece em geral resultados quase estáveis. Como era de esperar, a convergência é mais rápida para valores mais baixos de Q .

Os factores de forma decaem várias ordens de grandeza no intervalo de 0 a 9 fm^{-1} . Para distinguirmos melhor entre si os factores de forma dividimos cada um por uma função exponencial.

Nas figs. 3.1 e 3.2 representamos graficamente em função de Q os factores de forma dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais [75] assim como os relativos a W16/NCI/Galster e ao cálculo das refs. [76, 83, 84]. Este último cálculo é denotado por IARC.

Em IARC a função de onda do núcleo do ^3H é a solução de uma equação de Schrödinger. O termo de interacção do hamiltoniano é formado pela interacção de dois nucleões Argonne v_{18} [85] e pela interacção de três nucleões Urbana IX [86]. O ajustamento do modelo Argonne v_{18} a dados experimentais da dispersão NN e à energia de ligação do deuterão é caracterizado por $\chi^2/N_{data} \approx 1$. A interacção de Argonne v_{18} contém termos de quebra da simetria de carga e quebra da independência de carga assim como a interacção electromagnética até à segunda ordem relativamente à constante de estrutura fina. A energia de ligação do núcleo do ^3H é de 8.473 MeV. Ao contrário da interacção de Argonne v_{18} , os modelos WX, $X = 00, 10, 16, 19, 26$, não incluem a interacção electromagnética entre dois protões. Por isso, em IARC o núcleo do ^3He é descrito pela função de onda do núcleo do ^3H [84] e, consequentemente, os dois núcleos possuem a mesma energia de ligação.

No cálculo IARC os operadores da carga e da 3-corrente do nucleão resultam da truncagem na segunda ordem das respectivas séries de potências de $1/M_n$. Por conseguinte, o operador da carga inclui as correções relativistas de Darwin-Foldy e de spin-órbita. Em IARC é utilizada a parametrização de Galster dos factores de forma electromagnéticos do nucleão e excluída a contribuição das correntes de interacção.

Os resultados de W16/NCI/Galster e IARC concordam consideravelmente para pequenos valores de Q . Assim, comprova-se pela primeira vez que a teoria de Gross

descreve bem a estrutura electromagnética dos núcleos do ^3He e ^3H (recordamos que a mesma teoria reproduz praticamente a energia de ligação do núcleo do ^3H). As diferenças entre a dinâmica de IARC (potencial NN não relativista e uma força de três corpos irredutível) e a de W16/NCI/Galster (*kernel* NN relativista com acoplamentos escalares *off-mass-shell* e nenhuma força de três corpos irredutível) parecem ser menos importante na região de pequenos valores de Q do que o facto de que essas dinâmicas fornecem quase a mesma energia de ligação do núcleo do ^3H .

Os resultados de W16/NCI/Galster e IARC concordam aproximadamente até um valor de Q entre 4 e 6 fm^{-1} dependente do factor de forma. Os factores de forma de carga são aproximadamente iguais até um valor de Q de cerca de 6 fm^{-1} além do qual cada factor de forma de carga de W16/NCI/Galster oscila com um comprimento de onda maior do que o de IARC. Ocorre o mesmo com os factores de forma magnéticos excepto que concordam aproximadamente até cerca de 4 fm^{-1} . Considerações semelhantes podem ser feitas para as combinações isoescalares e isovectoriais.

Nas figs. 3.3-3.6 representamos os factores de forma dos núcleos do ^3He e ^3H experimentais e de WX/NCI/MMD, $X = 00, 10, 16, 19, 26$. A variação de cada factor de forma relativamente ao modelo da interacção NN é bastante suave e parece ser explicada pelas diferentes energias de ligação do núcleo do ^3H dos modelos (tabela 2.1).

A comparação dos dados teóricos das figs. 3.1-3.6 com os experimentais mostra discrepâncias importantes além de cerca de 1 fm^{-1} sobretudo para o factor de forma magnético isovectorial. Foi mostrado que a inclusão em IARC das contribuições grandes das correntes de interacção produz uma boa descrição dos dados experimentais [76]. Acreditamos que o mesmo acontecerá na aproximação CIA.

Na figs. 3.2 e 3.6 os factores de forma magnéticos isoescalares de W16/NCI/Galster e W16/NCI/MMD estão muito próximos dos dados experimentais excepto entre 1 e 3 fm^{-1} . Talvez a diferença nesse intervalo entre esses dados teóricos e os experimentais seja reduzida pelo emprego de melhores funções de onda nucleares. No que concerne ao factor de forma magnético isoescalar de IARC, o efeito das correntes de interacção é pequeno, sendo as correcções relativistas de spin-órbita as maiores [76]. Referimos, a propósito, que essas correcções estão incluídas na aproximação CIA. Assim, a contribuição das correntes de interacção deverá ser uma pequena correcção à aproximação CIA.

Os factores de forma de carga isoescalares e isovectoriais teóricos nas figs. 3.2 e 3.5 bem como os factores de forma magnéticos isovectoriais teóricos nas figs. 3.2 e 3.6 exibem grandes discrepâncias em relação aos dados experimentais. No caso de IARC a diferença é explicada pela exclusão das grandes contribuições das correntes de interacção de ρ e π . É provável que se verifique o mesmo na aproximação CIA.

Na fig. 3.7 representamos os factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ experimentais e de W16/NCX/MMD, $X = \text{I}, \dots, \text{V}$. As diferenças entre os cálculos são muito pequenas até cerca de 5 fm^{-1} . Para valores superiores de Q há divergências principalmente nos factores de forma de carga. As discrepâncias entre W16/NCII/MMD e W16/NCIII/MMD e entre W16/NCIV/MMD e W16/NCV/MMD são tão pequenas que são graficamente imperceptíveis. Concluindo, as correntes *off-mass-shell* do nucleão, ou seja, as correntes NCII-NCIV, não têm efeitos importantes até cerca de 5 fm^{-1} e a escolha do factor de forma electromagnético do nucleão no termo *off-mass-shell* da corrente é irrelevante.

Os raios de carga e magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ experimentais [76, 84] e de WX/NCI/MMD, $X = 00, 10, 16, 19, 26$, W16/NCX/MMD, $X = \text{II}, \dots, \text{V}$, W16/NCI/Galster estão nas tabelas 3.1, 3.2. Na fig. 3.8 verificamos, para os cálculos WX/NCI/MMD, $X = 00, 10, 16, 19, 26$, a relação bem conhecida $r_c^2 \propto 1/B_t$ entre o raio de carga nuclear r_c e a energia de ligação nuclear B_t . Em consequência dessa relação o modelo com a menor energia de ligação do núcleo do ${}^3\text{H}$, W00, tem a maior curvatura em $Q = 0$ e o modelo com a maior energia de ligação do núcleo do ${}^3\text{H}$, W26, tem a menor curvatura em $Q = 0$, o que pode ser confirmado examinando os gráficos. Como esperávamos, os raios de carga e magnéticos de W16/NCI/Galster, W16/NCI/MMD e IARC estão muito próximos assim como os de W16/NCX/MMD, $X = \text{I}, \dots, \text{V}$.

Os momentos magnéticos e os momentos magnéticos isoescalares e isovectoriais dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ experimentais [76, 84] e de WX/NCI/MMD, $X = 00, 10, 16, 19, 26$, W16/NCX/MMD, $X = \text{II}, \dots, \text{V}$, W16/NCI/Galster estão na tabela 3.3. Mais uma vez, os dados de W16/NCI/Galster, W16/NCI/MMD e IARC estão muito próximos bem como os de W16/NCX/MMD, $X = \text{I}, \dots, \text{V}$.

É conhecido que os *Z-graphs* do acoplamento pseudovectorial NN-pião são pequenos (W16 tem um esse acoplamento). Em IARC não é incluída a contribuição dos *Z-graphs*; se fosse, seria grande porque o modelo Argonne v_{18} tem um acoplamento pseudo-escalar NN-pião. A aproximação CIA inclui o acoplamento do fotão a estados de energia negativa do nucleão, resultante da decomposição do propagador do nucleão em estados de energia positiva e negativa. Esse acoplamento do fotão contém a contribuição dos *Z-graphs* [87]. Os efeitos nos factores de forma dos estados de energia negativa incluídos na função de vértice são pequenos: na fig. 3.9 mostramos os factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ de W16/NCI/MMD bem como as contribuições das componentes da função de vértice (eq. (3.181)) com $\rho_2 = \rho_3 = +$ para esses factores de forma (sabemos das subsecções 3.5.1-3.5.4 que os factores de forma não dependem das componentes com $\rho_1 = +$); no que concerne a cada factor de forma de carga, há uma

pequena diferença entre a contribuição de todas as componentes da função de vértice e a das componentes com $\rho_2 = \rho_3 = +$ para valores de Q superiores a 6 fm^{-1} ; para cada um dos factores de forma magnéticos a diferença é praticamente nula no intervalo de 0 a 9 fm^{-1} . Portanto, o efeito dos *Z-graphs* nos factores de forma é pequeno. A causa da concordância mencionada entre W16/NCI/Galster e IARC é a pequena contribuição dos *Z-graphs* para a aproximação CIA e a exclusão da correção a IARC dos *Z-graphs*.

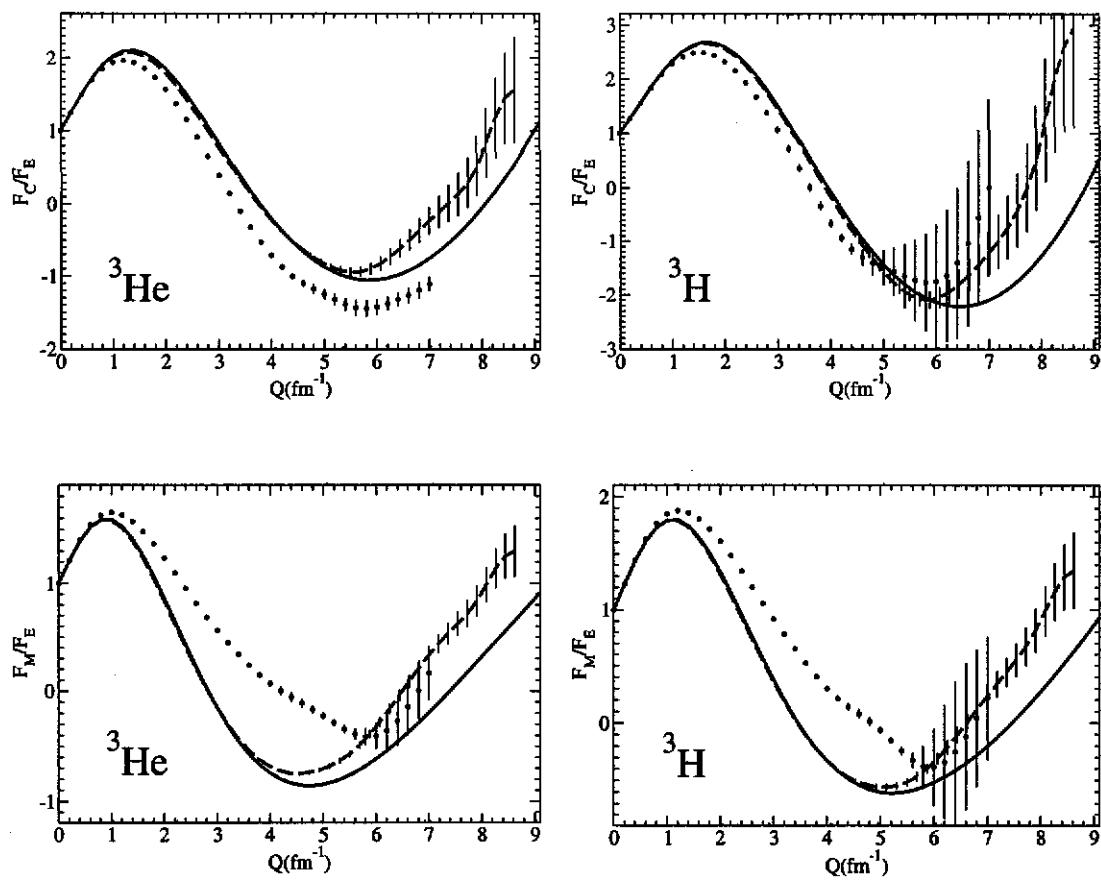


Figura 3.1: Factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H . São representados os dados experimentais (círculos) e os resultantes dos cálculos W16/NCI/Galster (linha contínua), IARC (tracejado).

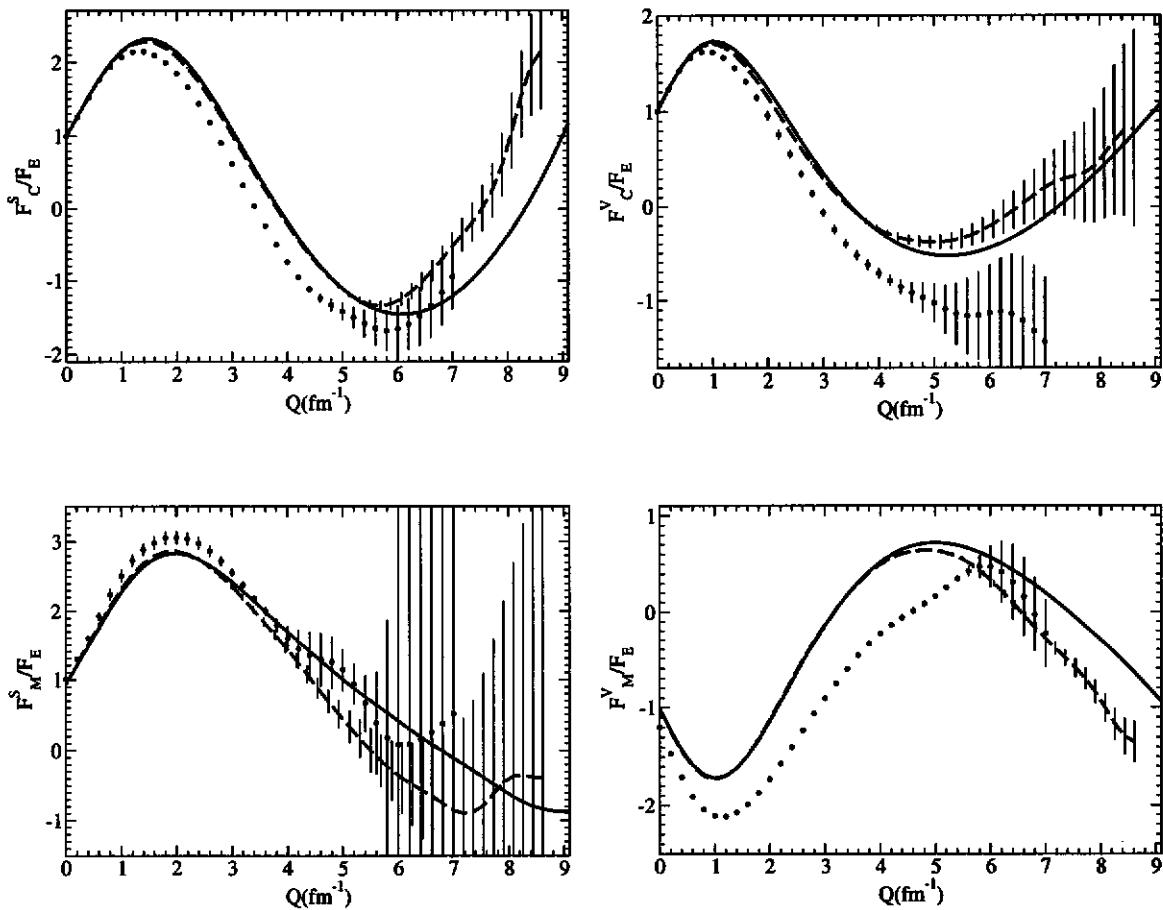


Figura 3.2: Combinações isoescalares e isovectoriais dos factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$. Os dados experimentais são representados por círculos e a correspondência entre os resultados dos cálculos W16/NCL/Galster, IARC e os tipos de linha está na legenda da fig. 3.1.

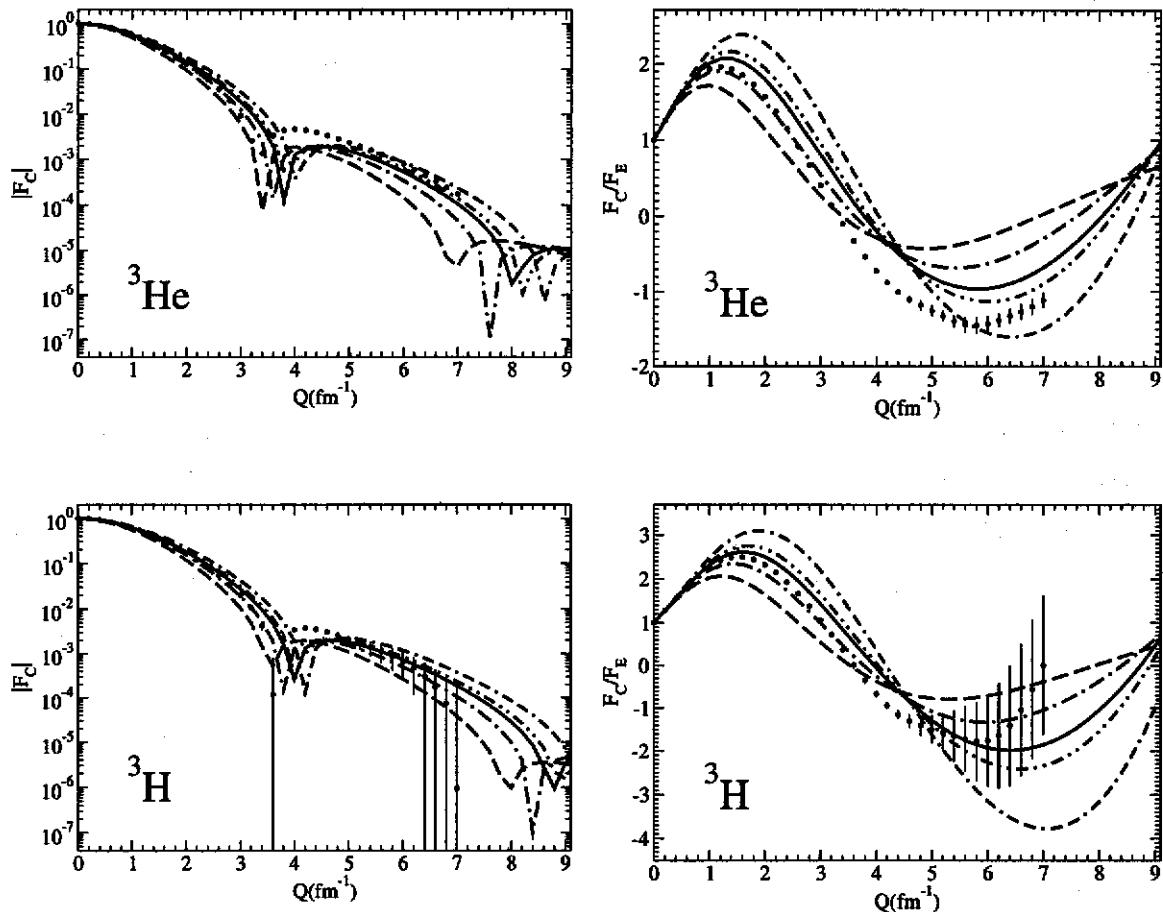


Figura 3.3: Factores de forma de carga dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ em valor absoluto à esquerda e divididos respectivamente pelas funções $F_E = \exp[\ln(1.29 \times 10^{-5})Q/9]$ e $F_E = \exp[\ln(7.25 \times 10^{-6})Q/9]$ à direita. São representados os dados experimentais (círculos) e os resultantes dos cálculos W00/NCI/MMD (tracejado), W10/NCI/MMD (traço-ponto), W16/NCI/MMD (linha contínua), W19/NCI/MMD (traço-ponto-ponto), W26/NCI/MMD (traço-traço-ponto).

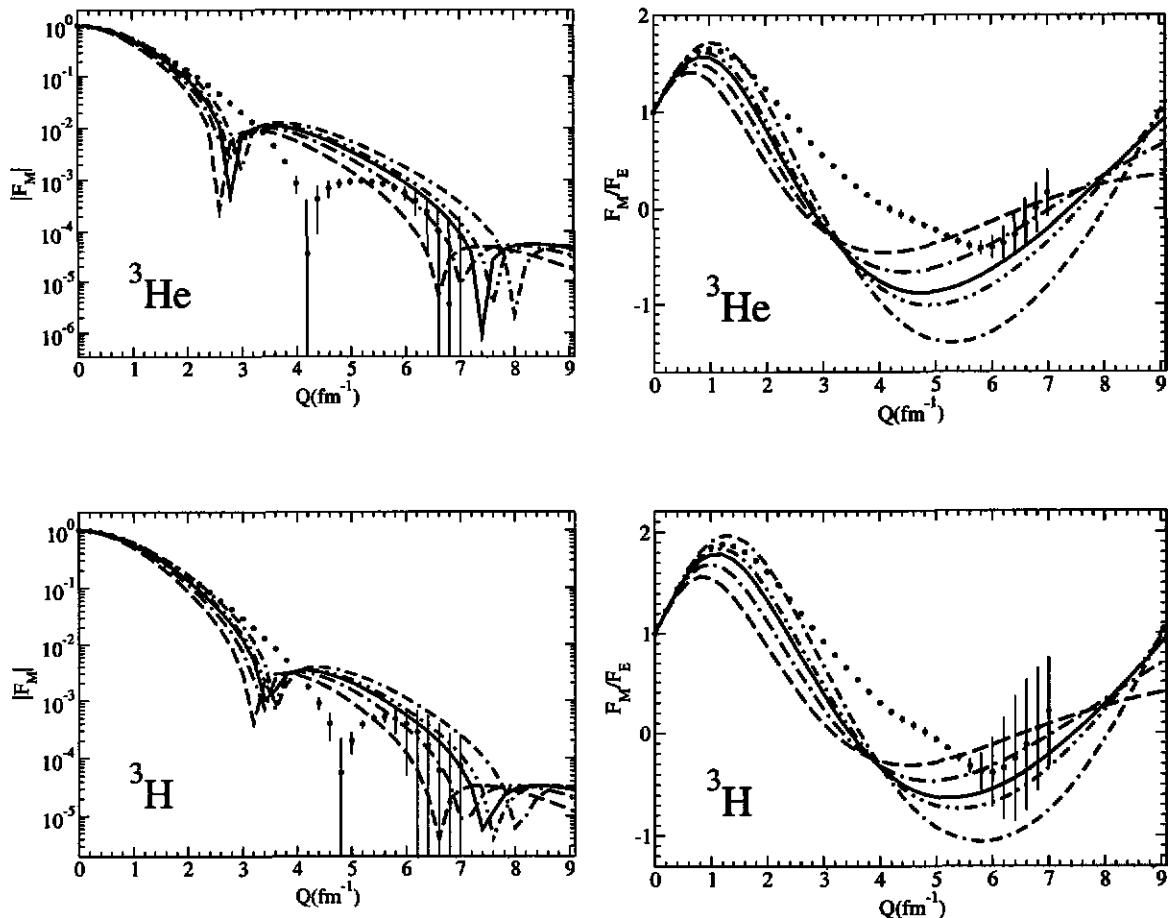


Figura 3.4: Factores de forma magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ em valor absoluto à esquerda e divididos respectivamente pelas funções $F_E = \exp[\ln(5.21 \times 10^{-5})Q/9]$ e $F_E = \exp[\ln(3.28 \times 10^{-5})Q/9]$ à direita. Os dados experimentais são representados por círculos e a correspondência entre os resultados dos cálculos WX/NCI/MMD, X = 00, 10, 16, 19, 26, e os tipos de linha está na legenda da fig. 3.3.

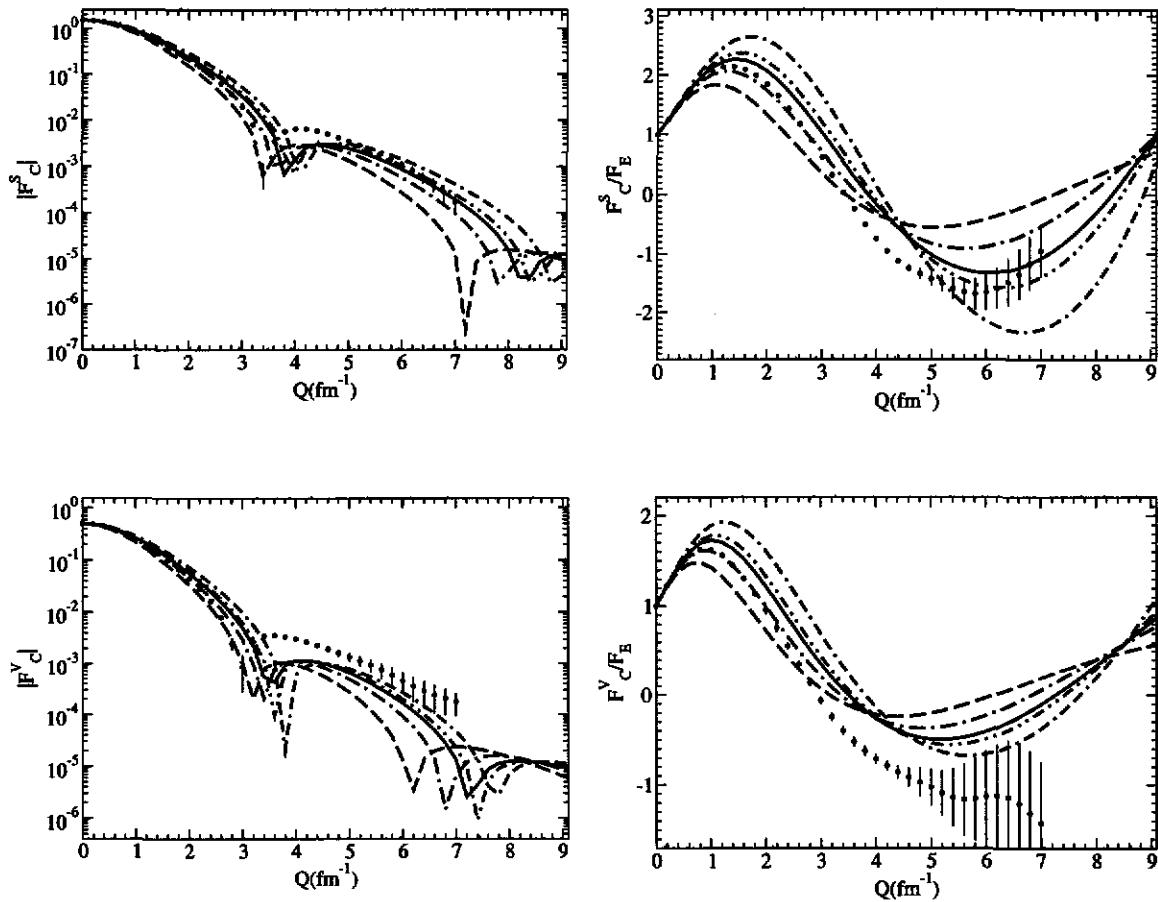


Figura 3.5: Factores de forma de carga isoescalar e isovectorial dos n\'ucleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ em valor absoluto \textbf{\`a} esquerda e divididos respectivamente pelas fun\c{c}\o{es} $F_E = \exp[\ln(1.42 \times 10^{-5}/1.5)Q/9 + \ln(1.5)]$ e $F_E = \exp[\ln(1.15 \times 10^{-5}/0.5)Q/9 + \ln(0.5)]$ \textbf{\`a} direita. Os dados experimentais s\~ao representados por c\'irculos e a correspond\^encia entre os resultados dos c\'alculos WX/NCI/MMD, X = 00, 10, 16, 19, 26, e os tipos de linha est\'a na legenda da fig. 3.3.

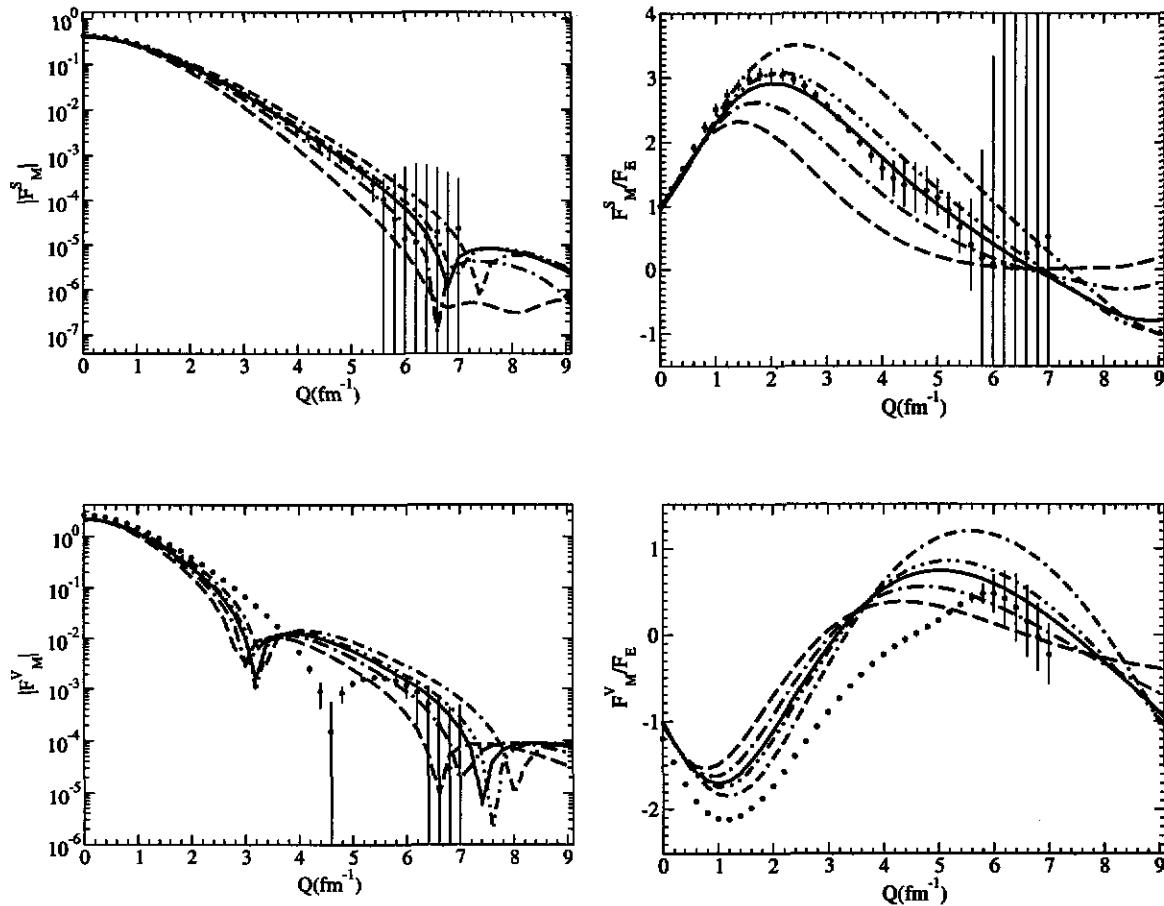


Figura 3.6: Factores de forma magnéticos isoescalar e isovectorial dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ em valor absoluto à esquerda e divididos respectivamente pelas funções $F_E = \exp[\ln(3.31 \times 10^{-6}/0.423)Q/9 + \ln(0.423)]$ e $F_E = \exp[\ln(8.63 \times 10^{-5}/2.13)Q/9 + \ln(2.13)]$ à direita. Os dados experimentais são representados por círculos e a correspondência entre os resultados dos cálculos WX/NCI/MMD, X = 00, 10, 16, 19, 26, e os tipos de linha está na legenda da fig. 3.3.

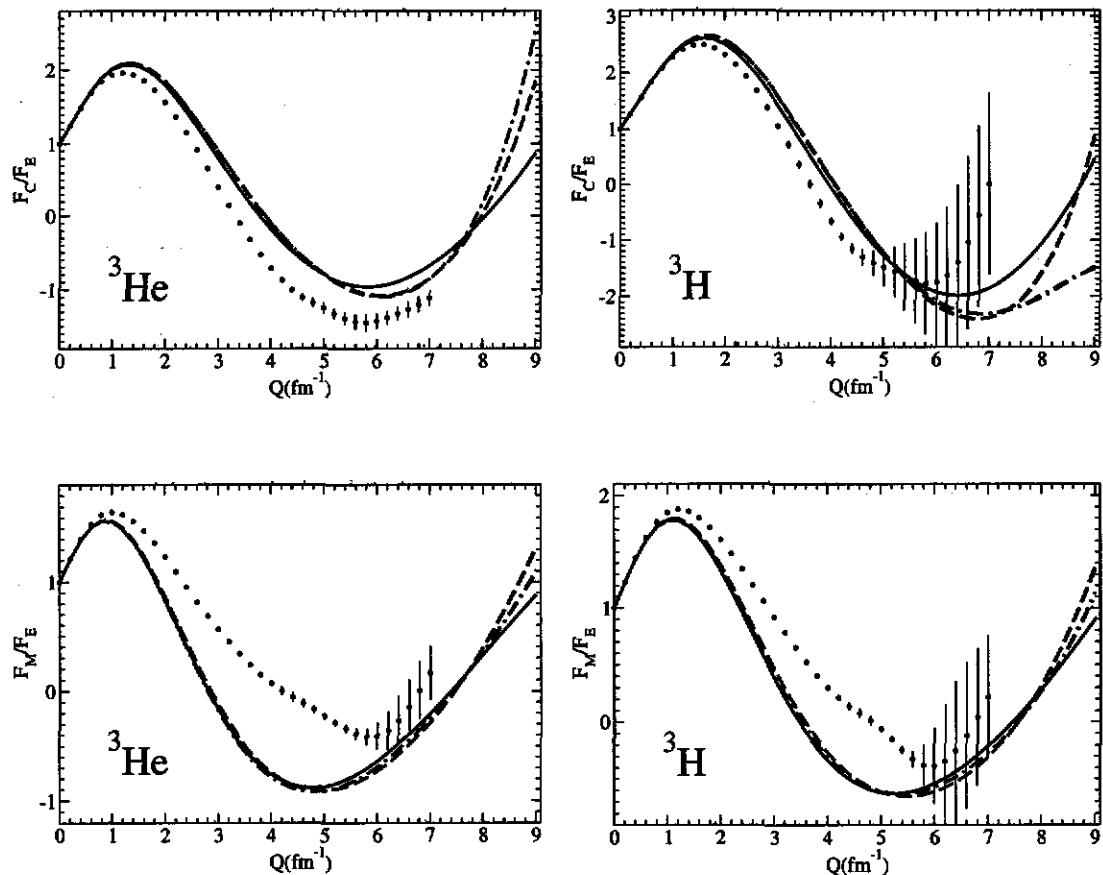


Figura 3.7: Factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$. São representados os dados experimentais (círculos) e os resultantes dos cálculos W16/NCI/MMD (linha contínua), W16/NCII/MMD (tracejado), W16/NCIII/MMD (tracejado), W16/NCIV/MMD (traço-ponto), W16/NCV/MMD (traço-ponto).

	${}^3\text{He}$	${}^3\text{H}$
Dados experimentais	1.959 ± 0.030	1.755 ± 0.086
W00/NCI/MMD	2.204	1.986
W10/NCI/MMD	2.030	1.842
W16/NCI/MMD	1.917	1.742
W16/NCI/Galster	1.900	1.718
W16/NCII/MMD	1.907	1.731
W16/NCIII/MMD	1.907	1.731
W16/NCIV/MMD	1.907	1.732
W16/NCV/MMD	1.907	1.732
W19/NCI/MMD	1.869	1.698
W26/NCI/MMD	1.783	1.613
IARC	1.890	1.708
	1.893	1.712

Tabela 3.1: Raios de carga dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ expressos em fm. Os raios de carga teóricos foram obtidos por uma extração polinomial quadrática excepto os constantes na primeira linha relativa a IARC [76, 84].

	${}^3\text{He}$	${}^3\text{H}$
Dados experimentais	1.965 ± 0.153	1.840 ± 0.181
W00/NCI/MMD	2.361	2.172
W10/NCI/MMD	2.195	2.027
W16/NCI/MMD	2.061	1.946
W16/NCI/Galster	2.031	1.928
W16/NCII/MMD	2.053	1.934
W16/NCIII/MMD	2.053	1.934
W16/NCIV/MMD	2.064	1.941
W16/NCV/MMD	2.064	1.941
W19/NCI/MMD	1.991	1.914
W26/NCI/MMD	1.819	1.862
IARC	2.017	1.893
	2.015	1.896

Tabela 3.2: Raios magnéticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ expressos em fm. Os raios magnéticos teóricos foram obtidos por uma extração polinomial quadrática excepto os constantes na primeira linha relativa a IARC [76, 84].

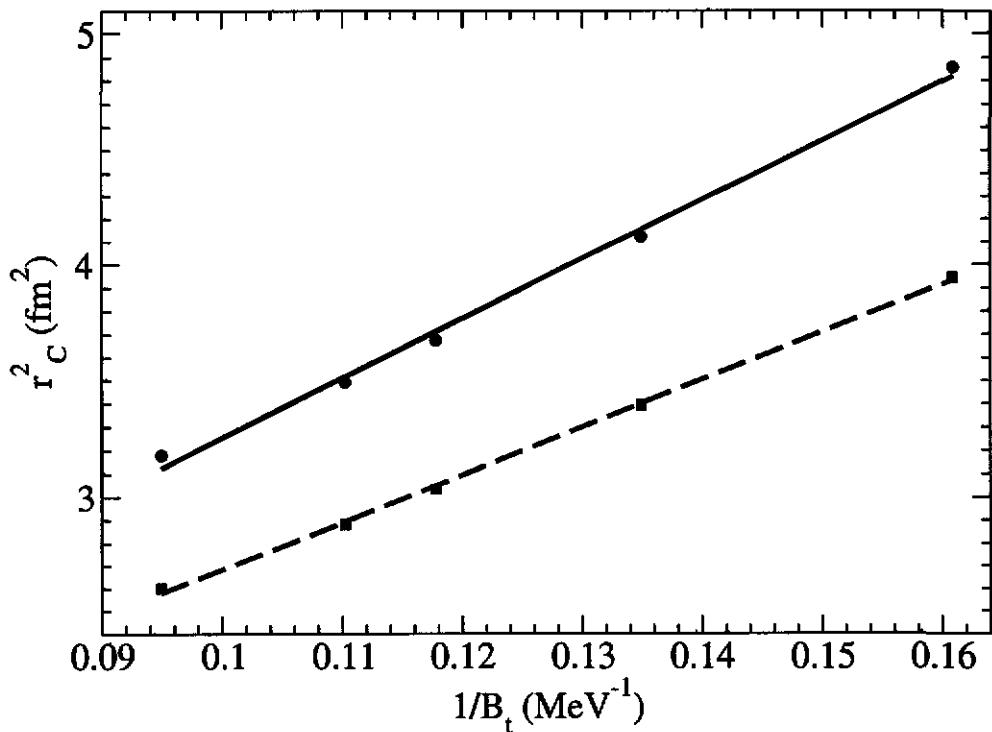


Figura 3.8: Raios de carga quadráticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ expressos em fm 2 em função do inverso da energia de ligação nuclear expressa em MeV $^{-1}$ para os cálculos WX/NCI/MMD, X = 00, 10, 16, 19, 26. São representados os raios de carga quadráticos dos núcleos do ${}^3\text{He}$ (círculos) e ${}^3\text{H}$ (quadrados). O segmento de recta contínuo foi determinado por regressão linear dos raios de carga quadráticos do núcleo do ${}^3\text{He}$ e o segmento de recta tracejado foi determinado por regressão linear dos raios de carga quadráticos do núcleo do ${}^3\text{H}$.

	$\mu(^3\text{He})$	$\mu(^3\text{H})$	μ_s	μ_v
Dados experimentais	-2.127	2.979	0.426	-2.553
W00/NCI/MMD	-1.768	2.613	0.4225	-2.191
W10/NCI/MMD	-1.760	2.578	0.4091	-2.169
W16/NCI/MMD	-1.747	2.550	0.4016	-2.149
W16/NCI/Galster	-1.749	2.546	0.3984	-2.147
W16/NCII/MMD	-1.742	2.540	0.3990	-2.141
W16/NCIII/MMD	-1.742	2.540	0.3990	-2.141
W16/NCIV/MMD	-1.714	2.513	0.3995	-2.114
W16/NCV/MMD	-1.714	2.513	0.3995	-2.114
W19/NCI/MMD	-1.740	2.542	0.4006	-2.141
W26/NCI/MMD	-1.721	2.531	0.4051	-2.126
IARC	-1.763	2.572	0.4045	-2.168
	-1.763	2.571	0.4040	-2.167

Tabela 3.3: Momentos magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H e respectivas combinações isoescalar e isovectorial expressos em magnetões nucleares. Os momentos magnéticos teóricos foram obtidos por uma extrapolação polinomial quadrática excepto os constantes na primeira linha relativa a IARC [76, 84].

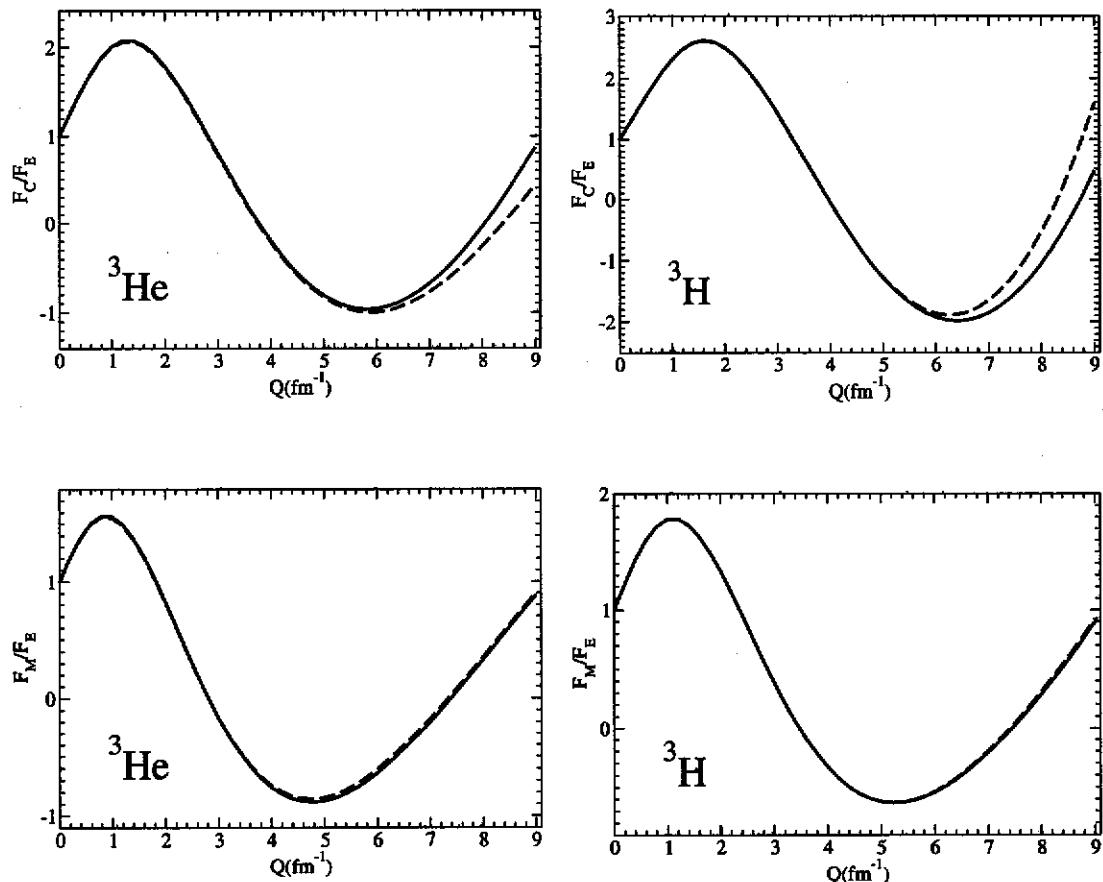


Figura 3.9: Contribuições das componentes da função de vértice com $\rho_2 = \rho_3 = +$ para os factores de forma de carga e magnéticos dos núcleos do ^3He e ^3H . São representados os resultados do cálculo W16/NCI/MMD (linha contínua) e as respectivas contribuições das componentes da função de vértice com $\rho_2 = \rho_3 = +$ (tracejado).

Capítulo 4

Conclusões

Efectuámos o primeiro cálculo dos factores de forma electromagnéticos elásticos dos núcleos do hélio-3 e trítio na aproximação CIA da teoria de Gross. Esta teoria é manifestamente covariante e inclui exactamente todos os efeitos relativistas como por exemplo os efeitos da transformação de Lorentz pura, da rotação de Wigner e dos estados intermédios com nucleões de energia negativa. A aproximação CIA exclui as correntes de interacção. Os factores de forma de um núcleo contêm informação sobre a sua estrutura interna, visto que a distribuição da carga e das correntes associadas aos nucleões determina essas funções. A comparação dos factores de forma calculados com os dados experimentais avalia as várias componentes da descrição teórica como por exemplo o formalismo e o modelo das interacções nuclear e electromagnética.

Para a descrição dos núcleos do hélio-3 e trítio utilizámos as funções de vértice de uma família de modelos da interacção NN construídos no âmbito da teoria de Gross. Os modelos representam a interacção NN pela soma de diagramas de troca de um mesão e têm a simetria de isospin e um acoplamento *off-mass-shell* dos mesões escalares ao nucleão. Os modelos possuem diferentes intensidades do acoplamento. A energia de ligação do núcleo do trítio varia bastante com a intensidade do acoplamento, enquanto que a qualidade da representação das observáveis de dois nucleões é aproximadamente constante. Por isso, foi possível estudar a dependência dos factores de forma relativamente à energia de ligação.

Em geral, os resultados do nosso cálculo não descrevem quantitativamente os dados experimentais, o que não é surpreendente devido à importância das correntes de interacção: sabe-se de outros cálculos que a contribuição das correntes de interacção para cada factor de forma é considerável quando o momento transferido é elevado e a contribuição para cada factor de forma magnético também é grande quando o momento transferido é pequeno. A variação de cada factor de forma relativamente ao momento

transferido é satisfatória.

A relação entre o raio de carga quadrático e o inverso da energia de ligação é aproximadamente linear.

A variação de cada factor de forma com respeito ao modelo da interacção NN parece ser explicada pelas diferentes energias de ligação dos modelos.

Utilizámos várias correntes electromagnéticas *off-mass-shell* do nucleão. Os seus efeitos nos factores de forma são pequenos.

Comparámos os resultados do modelo da interacção NN com a melhor energia de ligação do núcleo do trítio, denominado W16, com os de um cálculo, designado IARC, efectuado no âmbito de um formalismo não relativista com correcções relativistas. Em IARC: o termo de interacção do hamiltoniano é formado pela interacção de dois nucleões Argonne v_{18} e pela interacção de três nucleões Urbana IX; o núcleo do hélio-3 é descrito pela função de onda do núcleo do trítio; a energia de ligação do núcleo do trítio coincide praticamente com o valor experimental; as correntes de interacção são desprezadas. Os resultados concordam consideravelmente para pequenos valores do momento transferido. As diferenças entre a dinâmica de IARC (potencial NN não relativista e uma força de três corpos irredutível) e a de W16 (*kernel* NN relativista com acoplamento escalar *off-mass-shell* e nenhuma força de três corpos irredutível) parecem ser menos importantes na região de pequenos valores do momento transferido do que o facto de que essas dinâmicas fornecem quase a mesma energia de ligação do núcleo do trítio.

É conhecido de outros cálculos que os *Z-graphs* do acoplamento pseudovectorial NN-pião são pequenos (o modelo W16 tem este acoplamento), enquanto que os *Z-graphs* do acoplamento pseudo-escalar NN-pião são grandes (o modelo Argonne v_{18} tem este acoplamento). Em IARC é excluída a contribuição dos *Z-graphs*. A aproximação CIA inclui o acoplamento do fotão a estados intermédios de energia negativa do nucleão. Esse acoplamento do fotão contém a contribuição dos *Z-graphs*. Verificámos que a contribuição para os factores de forma dos estados de energia negativa incluídos na função de vértice é pequena. Por isso, o efeito dos *Z-graphs* nos factores de forma é pequeno. A causa da concordância mencionada entre IARC e o cálculo com o modelo W16 é a pequena contribuição dos *Z-graphs* para a aproximação CIA e a exclusão da correcção a IARC dos *Z-graphs*.

Bibliografia

- [1] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
- [2] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That* (Addison-Wesley, 1980).
- [3] C. Cisneros, R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez and A. L. Salas-Brito, Eur. J. Phys. **19**, 237 (1998).
- [4] L. Fonda and G. C. Ghirardi, *Symmetry Principles in Quantum Physics* (Marcel Dekker, New York, 1970).
- [5] Eugene P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (Academic Press, New York, 1959).
- [6] E. P. Wigner, J. Math. Phys. **1**, 414 (1960).
- [7] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [8] R. Jost, *The General Theory of Quantized Fields* (American Mathematical Society, Providence, R. I., 1965).
- [9] K. Huang and H. Arthur Weldon, Phys. Rev. D **11**, 257 (1975).
- [10] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, Nuovo Cimento **1**, 205 (1955).
- [11] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, Nuovo Cimento **1**, 1425 (1955).
- [12] W. Zimmermann, Nuovo Cimento **10**, 597 (1958).
- [13] H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998).
- [14] D. Lurié, *Particles and Fields* (Interscience Publishers, New York, 1968).

- [15] M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. **84**, 350 (1951).
- [16] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [17] A. N. Kvinkhidze and B. Blankleider, Nucl. Phys. **A574**, 788 (1994).
- [18] A. N. Kvinkhidze and B. Blankleider, Phys. Rev. C **60**, 044004 (1999).
- [19] E. O. Alt, P. Grassberger, and W. Sandhas, Nucl. Phys. **B2**, 167 (1967).
- [20] W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*, Texts and Monographs in Physics (Springer, Berlin, 1983).
- [21] D. Hüber, H. Witala, and W. Glöckle, Few-Body Syst. **3**, 123 (1988).
- [22] H. Witala, T. Cornelius, and W. Glöckle, Few-Body Syst. **14**, 171 (1993).
- [23] J. L. Gammel, M. T. Menzel, and W. R. Wortman, Phys. Rev. D **3**, 2175 (1971).
- [24] J. L. Gammel and M. T. Menzel, Phys. Rev. D **7**, 565 (1973).
- [25] J. Fleischer and J. A. Tjon, Nucl. Phys. **B84**, 375 (1975).
- [26] J. Fleischer and J. A. Tjon, Phys. Rev. D **15**, 2537 (1977).
- [27] J. Fleischer and J. A. Tjon, Phys. Rev. D **21**, 87 (1980).
- [28] J. Carlson and R. Schiavilla, Rev. Mod. Phys. **70**, 87 (1998).
- [29] M. J. Zuilhof and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **22**, 2369 (1980).
- [30] G. C. Wick, Phys. Rev. **96**, 1124 (1954).
- [31] Joseph J. Kubis, Phys. Rev. D **6**, 547 (1972).
- [32] Franz Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993).
- [33] Franz Gross, Phys. Rev. C **26**, 2203 (1982).
- [34] R. E. Cutkosky, Phys. Rev. D **96**, 1135 (1954).
- [35] G. Rupp and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **37**, 1729 (1988).
- [36] G. Rupp and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **45**, 2133 (1992).
- [37] Raymond Arnold, Carl E. Carlson and Franz Gross, Phys. Rev. C **21**, 1426 (1980).

- [38] J. W. Van Orden, N. Devine, and F. Gross, Phys. Rev. Lett. **75**, 4369 (1995).
- [39] N. K. Devine and S. J. Wallace, Phys. Rev. C **48**, R973 (1993).
- [40] D. R. Phillips, S. J. Wallace, and N. K. Devine, Phys. Rev. C **58**, 2261 (1998).
- [41] D. R. Phillips, S. J. Wallace, and N. K. Devine, Phys. Rev. C **72**, 014006 (2005).
- [42] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber, *Quantum field theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [43] Silvan S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper & Row, New York, 1961).
- [44] Elon Lages Lima, *Curso de Análise, Vol. 1* (Projecto Euclides-IMPA, Rio de Janeiro, 1976).
- [45] R. M. Woloshyn, Phys. Rev. C **12**, 901 (1975).
- [46] J .C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
- [47] Y. Takahashi, Nuovo Cimento **6**, 371 (1957).
- [48] A. N. Kvinikhidze and B. Blankleider, Phys. Rev. C **60**, 044003 (1999).
- [49] W. Bentz, Nucl. Phys. **A446**, 678 (1985).
- [50] A. N. Kvinikhidze and B. Blankleider, Phys. Rev. C **56**, 2973 (1997).
- [51] F. Gross and D. O. Riska, Phys. Rev. C **36**, 1928 (1987).
- [52] R. J. Yaes, Phys. Rev. D **3**, 3086 (1971).
- [53] B. Blankenbecler and R. Sugar, Phys. Rev. **142**, 1051 (1966).
- [54] A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
- [55] V. B. Mandelzweig and S. J. Wallace, Phys. Lett. B **197**, 469 (1987).
- [56] S. J. Wallace and V. B. Mandelzweig, Nucl. Phys. **A503**, 673 (1989).
- [57] Franz Gross, Phys. Rev. **186**, 1448 (1969).
- [58] E. D. Cooper and B. K. Jennings, Nucl. Phys. A **500**, 553 (1989).
- [59] E. Hummel and J. A. Tjon, Phys. Rev. Lett. **63**, 1788 (1989).

- [60] E. Hummel and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **42**, 423 (1990).
- [61] E. Hummel and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **49**, 21 (1994).
- [62] Taco Nieuwenhuis and J. A. Tjon, Phys. Rev. Lett. **77**, 814 (1996).
- [63] H. J. Rothe, *Lattice Gauge theories: An Introduction* (World Scientific, Singapore, 1992).
- [64] Yu. A. Simonov and J. A. Tjon, Ann. Phys. (N. Y.) **228**, 1 (1993).
- [65] Alfred Stadler, Franz Gross, and Michael Frank, Phys. Rev. C **56**, 2396 (1997).
- [66] Franz Gross, J. W. Van Orden, and Karl Holinde, Phys. Rev. C **45**, 2094 (1992).
- [67] Alfred Stadler and Franz Gross, Phys. Rev. Lett. **78**, 26 (1997).
- [68] A. Stadler, Czech. J. Phys. **49**, 1347 (1999).
- [69] A. N. Kvinikhidze and B. Blankleider, Phys. Rev. C **56**, 2963 (1997).
- [70] J. Adam, Jr, J. W. Van Orden, Franz Gross, Nucl. Phys. A **640**, 391 (1998).
- [71] Franz Gross, Alfred Stadler, and M. T. Peña, Phys. Rev. C **69**, 034007 (2004).
- [72] J. Adam, Jr. and J. W. Van Orden, Phys. Rev. C **71**, 034003 (2005).
- [73] Sérgio Alexandre Pinto, *Sobre a condição de conservação da carga na teoria de Gross* (2005) (não publicado).
- [74] H. Kamada, W. Glöckle and J. Golak, Il Nuovo Cimento **105 A**, 1435 (1992).
- [75] I. Sick, Prog. Part. Nucl. Phys. **47**, 245 (2001).
- [76] L. E. Marcucci, D. O. Riska, and R. Schiavilla, Phys. Rev. C **58**, 3069 (1998).
- [77] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [78] M. Jacob and G. C. Wick, Ann. Phys. (N.Y.) **7**, 404 (1959).
- [79] G. C. Wick, Ann. Phys. (N.Y.) **18**, 65 (1962).
- [80] Franz Gross and Yohanes Surya, Phys. Rev. C **47**, 703 (1993).

- [81] S. Galster, H. Klein, J. Moritz, K. H. Schmidt and D. Wegener, Nucl. Phys. **B32**, 221 (1971).
- [82] P. Mergell, Ulf-G. Meissner and D. Drechsel, Nucl. Phys. **A596**, 367 (1996).
- [83] L. E. Marcucci, M. Viviani, R. Schiavilla, A. Kievsky, and S. Rosati, Phys. Rev. C **72**, 014001 (2005).
- [84] L. E. Marcucci, comunicação privada.
- [85] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995).
- [86] B. S. Pudliner, V. R. Pandharipande, J. Carlson, and R. B. Wiringa, Phys. Rev. Lett. **74**, 4396 (1995).
- [87] Sérgio Alexandre Pinto, Alfred Stadler, and Franz Gross, arXiv:0901.4313 [nucl-th].

