Errata

Contem a correcção dos Capítulos, II, VII, e VIII , da Tese de Doutoramento em Física ''Estudo de algumas relações formais entre o Electromagnetismo a Mecânica dos Fluidos ``de de M.Rolão Santos.

Manuel António Rato Rolão Santos

Évora

INTRODUÇÃO

Partindo do facto de que tanto a Hidrodinâmica como o Electromagnetismo são expressos em termos de Análise Vectorial foi possível, através da analogia existente entre as fórmulas de Weber da aceleração e da força de Lorentz-Heaveside, exprimir, em função de grandezas mecânicas, os campos $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$ e partir daí para a expressão das Equações de Maxwell em termos dessas grandezas. Estas, foram assim reduzidas às equações do movimento de um meio físico (fluido) particular, o meio subquântico, que se supõe preencher totalmente o vazio. Supondo que $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$ são grandezas proporcionais aos campos vectoriais dinâmicos $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\omega},\vec{\mathbf{u}})$ e $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\omega},\vec{\mathbf{u}})$, cujo significado é puramente mecânico ($\vec{\omega}$ é o vector turbilhão e $\vec{\mathbf{u}}$ a velocidade do meio contínuo designado por meio subquântico), o Teorema de Ampère do Electromagnetismo permite determinar a constante de proporcionalidade $\mathbf{k}_1$ das relações $\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{k}_1\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{k}_1\vec{\boldsymbol{B}}$. Como alguns Cosmólogos admitem a possibilidade de se propagarem no vácuo ondas electromagnéticas não lineares, paralelamente ao facto bem conhecido de se propagarem igualmente no vácuo ondas e.m. lineares ter-nos-á sido possível obter generalizações não lineares das Equações de DÁlembert eventualmente susceptíveis de regerem as referidas ondas. A conveniência de tais equações não lineares darem origem por linearização ás equações conhecidas da Electrodinâmica Linear , ter-nos-á permitido conhecer o valor numérico da constante de proporcionalidade $k_1 = 1$. É de ter em conta este facto, que nos parece abonar de uma forma algo inexperada e espetacular, que haja identidade entre os vários campos escalares e vectoriais de natureza hidrodinâmica que construímos, e os campos de natureza electromagnética correspondentes. Como já referimos definimos os campos vectoriais hidrodinâmicos $\vec{E} = \left(\partial\vec{u}/\partial t + grad\left(u^2/2\right)\right)$; $\vec{B} = -2\vec{\omega}$. A hipótese referida de ser $k_1 = 1$ leva-nos ao resultado $\vec{E} = \vec{\boldsymbol{E}}$; $\vec{B} = \vec{\boldsymbol{B}}$. No âmbito de se estabelecer analogias entre fenómenos e grandezas hidrodinâmicas e correspondentes fenómenos e grandezas electromagnéticas ter-se-á conseguido demonstrar que um gerador de corrente D.C ou A.C. pode ser considerado como um ponto em $P\mathbb{C}$,e que o campo eléctrico que gera, sendo susceptível de ser representado por um complexo, corresponde a um potencial complexo com tantos pontos de ramificação quantos os geradores acoplados. O facto de a força electromotriz para cada gerador dever ser independente da trajectória seguida pelos electrões pelo menos dentro do gerador, implica a necessidade do ponto de ramificação que caracteriza o gerador seja coincidente com ele. Pusemos em evidência o facto de os potenciais complexos devidos a geradores acoplados, serem funções analíticas globais, e o facto dos potenciais poderem ser representados como funções uniformes sobre superficies de Riemann chama a atenção para a conveniência do estudo de geometria e topologia.O campo eléctrico complexo é derivável de um potencial escalar, holomorfo excepto nos pontos críticos ,que são pontos de ramificação desse potencial , e que são em número igual ao dos geradores acoplados. Sendo a indução magnética igual ao simétrico do vector vorticidade do movimento do meio subquântico: $\vec{B} = -2\vec{\omega}$; $\vec{\xi} = 2\vec{\omega} = -\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = -\vec{\xi}$,-e o campo eléctrico $\vec{E} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)$ é o equivalente da força mecânica que actuaria sobre um corpúsculo de gás de massa unitária sendo responsável pelo ***movimento composto de um elemento do continuum constituido por uma translação e uma deformação ; O vector turbilhão $\vec{\omega}$ traduz por outro lado um movimento de rotação de*** **um** ***elemento ''infinitesimal'' do fluido***, e ter-se-á podido inferir que o campo magnético se reduz a um movimento desse meio subquântico. Se pretendemos interpretar estes campos vectoriais em termos de movimentos do meio subquântico temos para isso que tornar explicito em relação a que sistema de referência se processam os movimentos desse meio subquântico, e dos corpúsculos materiais nele mergulhados. Inicialmente definia-se um''referencial de Copérnico'' definido por três estrelas fixas , o qual se considerava em repouso absoluto; chamando-se referencial inercial ao referencial de Copérnico ou a qualquer outro que se deslocasse em relação a ele com um movimento de translação rectilínea uniforme. Esta definição foi descartada pelo facto de se ter descoberto a não existência de estrelas fixas. A noção de referencial de Copérnico foi então substituída pela de ''referencial comóvel'', definido como um referencial que acompanha o movimento médio da matéria do Universo. Um referencial inercial , passou a ser um referencial comóvel, ou qualquer outro que se desloque em relação a ele com movimento de translacção rectilínea uniforme.

Entre vários fenómenos observados constata-se por exemplo a invariância ao longo do tempo do plano de oscilação de um pêndulo(*pêndulo de Foucault*) , ou do plano contendo uma roda em rotação, em torno de um dos pontos desse plano que é o seu centro. Algo de semelhante se observa no giroscópio.Tudo isso parece uma evidência da existência no Universo de um referencial com carácter absoluto, e Mach aventou a hipótese (Principio de Mach) segundo a qual a invariância do plano pendular ou do plano de rotação se processam em torno de um referencial definido pelos campos gravitacionais devidos a galáxias longínquas. Considerámos um sistema de duas linhas de fontes ou sumidoros.ou outro sistema constituído por linhas paralelas indefinidas de turbilhões .Em paralelo estudámos a interacção entre duas distribuições rectilíneas uniformes electrostáticas de cargas positivas(fontes) ou negativas(sumidouros) bem como entre linhas carregadas deste tipo ,uma com cargas positivas e outra com cargas negativas.usando os processos usuais .Assimilando as cargas positivas a fontes e as cargas negativas a sumidouros foi possível determinar a interacção pelos teoremas hidrodinâmicos de Blasius. Conseguiu-se por esse modo determinar formalmente a densidade de massa do meio subquântico. Analogamente se procedeu para duas distribuições paralelas indefinidas de turbilhões,e partir daí para a caracterização do torsor de interacção entre duas correntes eléctricas paralelas, rectilíneas e indefinidas. Dado que alguns físicos admitem em Cosmologia a existência de fenómenos não lineares no vácuo, pôde possivelmente obter-se uma generalização não linear das equações de D'Alembert a que satisfazem os potencias dos campos $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$. Ficámos aqui limitados pela escassez de textos existentes sobre uma abordagem macroscópica da Electrodinâmica não Linear do vácuo.

Obtivémos também uma interpretação hidrodinâmica da força electromotriz de um gerador de corrente constante ou alternada, e mostrámos que um gerador de corrente electrica , corresponde sempre a um ponto crítico, situado dentro dele, do potencial complexo do campo electrico que origina a corrente.Reforçou-se, assim, a verosimilhança de ser o vazio um meio material análogo a um fluido, embora com propriedades específicas em relação aos meios fluidos usuais tratados em Mecânica dos Fluidos ,dos quais temos conhecimento sensível e directo.

Admitindo a possibilidade de poderem propagar-se no vácuo ondas electromagnéticas satisfazendo a equações de onda não lineares, hipótese que parece consistente com a possibilidade de ser o vácuo um meio não linear, determinaram-se, sem necessidade de modificar as Equações de Maxwell , equações não lineares que generalizam as de D'Alembert . Paralelamente mostrou-se parecer possivel , usando , o que não completamente necessário, funções de variável complexa, verificar que a existência de um gerador de corrente eléctrica intercalado num circuito implica a existência de um ponto de ramificação do potencial complexo do campo eléctrico, e obter uma interpretação hidrodinâmica da força electromotriz.

Justificámos também o facto de os pontos críticos dos sistemas dinâmicos lineares associados á velocidade do fluido, em cuja teoria se chamam pontos críticos aos pontos onde se anulam os campos de vectores, (singularidades de um sistema dinâmico) serem de facto pontos onde a velocidade do fluido é infinita ,não nula, ou tem uma singularidade tipo pólo ou singularidade essencial (por ex. pontos de ramificação),etc., como impõe a sua natureza física, e que são pontos críticos dos potenciais complexos do campo de velocidade, no sentido em que se definem os pontos críticos de uma função de variável complexa. Há aqui uma aparente contradição na linguagem usada.

CAPÍTULO II

INTERPRETAÇÃO HIDRODINÂMICA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

A expressão de Weber para a aceleração, se for $\vec{\mathbf{F}}$ a força que actua sobre a unidade de massa do fluido é

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}} + \frac{1}{2}\mathbf{grad}\left(\mathbf{u}^2\right) + \left(\mathbf{rot}\vec{\mathbf{u}}\right) \wedge \vec{\mathbf{u}} \qquad (1)$$

sendo $\mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{u}} = 2\vec{\omega}$ a vorticidade do movimento.Por se tratar de uma aceleração é suposto a igualdade anterior ser válida sobre qualquer trajectória de uma partícula do fluido) , sendo:

$$\vec{\gamma} = -\mathbf{grad}\varphi^* \qquad (2)$$

A entalpia por unidade de massa do fluido é (3 –Cap.I) :

$$\Pi = \int \frac{\mathbf{dp}}{\rho}$$

Na expressão de $\vec{\gamma}$, φ^* é o potencial escalar do campo de forças. Se φ for o potencial escalar do campo de velocidades, teremos a relação (29-Cap.I) :

$$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{grad}\varphi$$

Pode provar-se que neste caso è (43-Cap.I):

$$\Pi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathbf{gz}\right)$$

Desprezando as forças gravitacionais vem:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) \qquad (2')$$

As equações (2) e (29-Cap.I) não são independentes. Para se verificarem simultaneamente, deve ser válida uma equação de ompatibilidade entre elas , que passamos a determinar :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} grad\varphi + (grad\varphi \cdot grad) grad\varphi = -\,\mathbf{grad}\varphi^*$$

Desta equação vem:

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} + \varphi^*\right) + \left(\mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{grad}\right)\mathbf{grad}\varphi = 0 \qquad (3)$$

1. A igualdade anterior é uma forma possível da condição de compatibilidade dinâmica, existente num fluido invíscido em movimento irrotacional,cuja velocidade é $\vec{u} = grad\varphi$, movendo-se sob a acção de forças conservativas $\vec{\gamma} = -grad\varphi^*$, de potencial por unidade de massa φ^*.

Proposição1: Num escoamento irrotacional de um fluido inviscido, sob a acção de forças superficiais conservativas, o potencial destas coincide com a entalpia por unidade de massa do fluido,vindo: $\varphi_S{}^* = \Pi$ ($\varphi_{R3}{}^* = 0.$)

Vamos determinar uma relação alternativa de compatibilidade entre os potenciais da velocidade e das forças aplicadas

Das relações:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.grad)\vec{u} \ ; \ \vec{\gamma} = -grad\varphi^* \ ; \ \vec{u} = grad\varphi$$

Vem:

$$grad\varphi^* = grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + (grad\varphi.grad)grad\varphi$$

Usemos a expressão de Webber:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + .(rot\vec{u} \wedge \vec{u})$$

vem, por ser nulo o rotacional de uma velocidade conservativa:

$$-grad\varphi^* = grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + grad\left[\frac{1}{2}|grad\varphi|^2\right]$$

Logo:

$$-\varphi^* = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|grad\varphi|^2}{2} + f(t)$$

Supondo $f(t)$ absorvido em $\partial\varphi/\partial t$ a expressão anterior toma a forma:

$$\varphi^* = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|grad\varphi|^2}{2}\right) \equiv -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \qquad (4)$$

Consideremos a expressão já apresentada da entalpia específica que tem em conta o potencial das forças conservativas φ^*., $\vec{F} = -grad\varphi^*$ .onde φ^* :se retira da expressão da entalpia especifica do fluido.: $\Pi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^*\right) \Leftrightarrow \varphi^* = \Pi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}$;

φ^* é o potencial das fporças conservativas, e pode conter o potencial gravitacional $\varphi_g{}^* = gz$.

Sendo φ^* o potencial das forças conservativas por unidade de massa actuando sobre o fluido,estas forças conservativas não são necessariamente gravitacionais.

Se sobre o sistema fluido só actuarem forças gravitacionais e for $\varphi^* = \varphi_g{}^* = gz$ existem situações nas quais estas podem ser desprezadas bem como o respectivo potencial , por este ser uma função linear homogénea da aceleração da gravidade e da altitude do ponto considerado.

No entanto um potencial escalar de forças conservativas que só assume valores numéricos muito pequenos pode dar lugar a forças elevadas; depende esse facto da sua expressão analítica ter um gradiente cujo módulo seja elevado.

Antes de passar adiante vamos relembrar certos resultados já obtidos.

1. ***Em escoamentos estacionário, sejam ou não irrotacionais, a energia mecânica total da***
2. ***unidade de massa de um fluido invíscido, dada pela Equação de Bernouli restrita, representa***
3. ***a equação do conservação da energia mecânica total do fluido em movimento,e assume o***
4. ***mesmo valor em qualquer ponto de uma linha de corrente pré-fixada, caracterizando-a:***

$$e = \frac{E}{m} = \frac{u^2}{2} + \varphi^* + \Pi = C^{te} \qquad (5)$$

Algumas considerações sobre o Teorema de Bernoulli

Em corrente permanente a ***pressão total*** dada pela expressão:

$$h = \frac{1}{g}\left(\frac{u^2}{2} + \varphi^* + \Pi\right) \qquad (6)$$

É chamada E***quação de Bernoulli*** e mantem sempre o mesmo valor h (pressão total ou de Bernoulli) em todos os pontos de uma mesma linha de corrente sendo dado pelo algoritmo anterior.

A constante $e = E/m = C^{te}$,isto é ,a C^{te} do 5^0 tem um só valor numérico sobre cada linha de corrente., mas pode tomar valores C^{tes} diferentes sobre linhas de corrente diferentes .

As linhas de corrente são linhas que em cada instante são tangentes a todas as trajectórias que nesse instante são envolventes da família das trajectórias e a estacionaridade do escoamento,

quando exista,implica a coincidência entre linhas de corrente e trajectórias sendo a energia mecânica total um integral primário das equações do movimento do fluido..

5. Se um escoamento não for conservativo a energia mecânica total especifica toma valores diferentes em linhas de corrente diferentes e em pontos diferentes dessas ou otras linhas.

Proposição 2. Em corrente permanente irrotacional,a energia total da unidade de massa é a mesma em cada ponto qualquer

Proposição 3. :Em escoamentos estacionários rotacionais ou irrotacionais de um fluido inviscido,a energia mecânica total da unidade de massa desse fluido (dada pela Equação de Bernoulli) é constante sobre uma linha de corrente e é o valor da energia mecânica total especifica sobre essa linha de corrente que a caracteriza. A estacionáridade deste escoamento implica a coíncidencia ao longo do tempo entre linhas de corrente e trajectórias e a energia total por unidade de massa é um integral primário do movimento do fluido.

De facto sobre uma trajectória identificada com uma linha de corrente a energia mecânica total por unidade de massa é dada pela Equação de Bernoulli Restrita,sendo ao longo de uma linha de corrente:

$$\forall P \in \gamma \subseteq D \subseteq R^3;\ e(P) = E(P)/m = u(P)^2/2 + \varphi^*(P) + \Pi(P) = C^{te}$$

Abreviadamente*:*

$$e = \frac{E}{m} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* + \Pi \qquad (7)$$

Note-se que a *Equação de Bernoulli* restrita é obtida da *Equação de Bernoulli Generalizada* tomando $\partial\varphi/\partial t = 0$. A equação generalizada é (7):

$$e = \frac{E}{m} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* + \Pi$$

***Proposição 4.** Se o escoamento de um fluido inviscido em $D \subseteq R^3$ for não estacionário e não conservativo, a energia mecânica especifica total do fluido nessa região, depende no instante $t \in R$ do ponto móvel $P(t)$ que nesse ponto ocupa uma certa posição $P(t)$ sobre a linha $\gamma \in D$ A esse instante t corresponde portanto, um certo ponto $P(t) \in \gamma \subset D \subseteq R^3$ no qual se encontra a correspondente partícula de fluido P(t), para todos as posições $P(t) \equiv P \in D$ Considerou-se que P é um ponto fixo do domínio D.*

Notemos que o facto de não existirem forças conservativas implica que a entalpia especifica tenha a forma:

$$\Pi_1 = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \tag{8}$$

E não:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^*\right) \tag{9}$$

Nas condições desta proposição a energia mecânica total de um fluido inviscido depende do ponto P do domínio D ocupado pelo fluido, onde a energia referida $e(P)$ é calculada ,e tem valores diferentes em pontos diferentes da mesma linha de corrente e em pontos diferentes de linhas de corrente do escoamento.Isso tem a ver com a Equação de Bernoulli generalizada(7):

$$e = \frac{dE}{dm} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* + \Pi$$

6. Se o escoamento de um fluido invíscido for conservativo a energia total da unidade de massa de um fluidoinvíscido é a mesma em todos os pontos do fluido; se for conservativo e não for estacionário (Equação de Bernoulli generalizada) as energias especificas em cada um dos pontos do fluido tomadas em instantes diferentes são diferentes.

7. Se o escoamento de um fluido invíscido for conservativo e estacinário a energia mecânica total especifica é a mesma em todos os pontos ocupados pelo fluido em qualquer instante.

***Proposição 5.** Um escoamento estacionário de um fluido incompressível invíscido pode ser determinado por uma Equação de Poisson complementada por condições iniciais apropriadas e por condições fronteiras apropriadasque podem ser variáveis no tempo,*

Fixemo-nos numa situação na qual o potencial das forças conservativas é desprezável, podendo porém ter valores que não podem ser ignorados. Se o potencial φ^* é desprezável, a expressão da entalpia especifica (que coincide com o potencial das forças de superfície por unidade de massa *que actuam sobre o sistema fluido) toma em cada instante o mesmo valor em todos os pontos do fluido(relação(8):*

$$\Pi_1 = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Sendo,como já vimos (relação (9)):

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^*\right)$$

Portanto o potencial das forças conservativas aplicadas à massa de gás é:

$$\varphi^* = -\Pi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}$$

Relembremos que a entalpia Π é o potencial das forças superficiais, as quais são conservativas. Se as forças conservativas são exclusivamente gravitacionais em domínios onde a altitude z varia suficientemente pouco para que se poder considerar constante, e o potencial φ^* de $\vec{F}$ tiver valor quase nulo, o qual só é definido a menos de uma constante tem-se:

$$\varphi^* = \Pi - \Pi_1 = \Pi \ -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \qquad (10)$$

Já vimos que

$$\vec{F} = -grad\varphi^* = -grad\Pi - grad\Pi_1 = -grad(\Pi - \Pi_1) = -grad\Pi + grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Note-se que : $\varphi^* = \Pi \Rightarrow \Pi_1 = 0$ ***.Portanto só é válida esta igualdade a menos de uma constante aditivaa.***

$$\varphi^* = \Pi + C^{te} \qquad (11)$$

se a porção da entalpia do sistema gasoso que não reflecte campos de forças conservativas aplicadas ao sistema for nula; isto é toda a entalpia da massa gasosa derivar de forças não conservativas.

Proposição:Só há coincidência entre o potencial φ^* da aceleração de uma massa gasosa sem viscosidade, e a sua entalpia especifica Π, se toda a entalpia da massa gasosa se não dever a forças conservativas sendo então: $\varphi^* = \Pi. - \Pi_1 = \Pi$

Voltemos a considerar o campo vectorial:

$$\vec{E} = \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)$$

Vejamos o que se passa com o potencial de $\vec{E}$ quando ele for irrotacional.Neste caso $\vec{u} = grad\varphi$.

Então :

$$\vec{E} = \left(\frac{\partial(grad\varphi)}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right) = -grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right);$$

Sabemos que é: $\Pi_1 = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$.Então:

$$\vec{E} = -grad.\Pi_1 = grad.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \qquad (12)$$

Podemos concluir que:

<u>Proposição:</u> O potencial de $\vec{E}$ é então a parte da entalpia especifica do sistema gasoso que não resulta da aplicação a esse sistema de forças conservativas.

Destes resultados conclui-se que:

Sendo num escoamento irrotacional : $\vec{u} = grad\varphi$.Então:

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = -grad\left[\Pi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)\right] = -grad\Pi - grad\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right] = -grad\Pi - (\frac{\partial}{\partial t} grad\varphi + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) =$$

$$= -grad\Pi - \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right) = -grad\Pi - \vec{E} \;;$$

Logo: ***A força de natureza hidridinâmica que actua sobre a unidade de massa de um fluido invíscido, comporta um termo conservativo cujo potencial é a entalpia especifica do gás e um termo hidrodinâmico análogo do campo eléctrico, que não é necessáriamente conservativo:***

$$\vec{F} = -grad\Pi + \vec{E} \qquad (13)$$

Se o campo $\vec{E}$ não for irrotacional, tem-se: $\vec{E} = rot\vec{a}\,*$ e a expressão anterior exprime a decomposição Helmholtzeana do vector força hidrodinâmica.

Se for $\vec{E}$ irrotacional, o que é apenas um caso particular tem-se $\vec{E} = -grad\Phi\,*$.Então:

$$\vec{F} = -grad(\Pi + \Phi\,*) \qquad (14)$$

<u>Conclusão: O potencial do campo de forças hidrodinâmicas conservatrivos $\vec{F}$, de um fluido sem viscosidade, é a soma da entalpia especifica Π do fluido com o potencial especifico do campo</u>

hidrodinâmico $\vec{E}$, se ele for conservativo.

Partamos da relação conhecida:

$$\varphi^* = \Pi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Vimos que é:

$$\vec{F} = -grad\left[\Pi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)\right] - grad\Pi + grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Como chamámos $\Pi_1 = -\left(\partial\varphi/\partial t + u^2/2\right)$ *à parcela da entalpia especifica que não resulta da acção de campos conservativos*, vem:

$$\Pi - \Pi_1 = \left\{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^*\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)\right\} = -\varphi^*$$

Concluímos que num escoamento irrotacional de um fluido invíscido o potencial escalar das forças volúmicas é igual à entalpia por unidade de massa do fluido:

$$\Pi - \Pi_1 = -\varphi^* \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^* = \Pi_1 - \Pi \tag{15}$$

Sendo o movimento irrotacional $(\vec{\omega} = \mathbf{0})$:

$$-\mathbf{grad}\varphi^* = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{grad}\varphi + \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) = \mathbf{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) \tag{16}$$

Verifica-se:

$$\varphi^* = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \tag{17}$$

Consideremos agora o caso mais geral de um escoamento com vorticidade, conhecido como escoamento de Beltrami, no qual se verifica:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{18}$$

Vamos definir os seguintes campos de vectores:

$$\vec{E} = \left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] \tag{19}$$

$$\vec{B} = -2\vec{\omega} \tag{20}$$

A expressão (7) dá-nos a força que actua sobre a unidade de massa de um fluido sem viscosidade, em escoamento de Beltrami ou irrotacional, permanente ou não. Esta restrição dá lugar a que, em tais escoamentos, que têm vorticidade, este campo tenha a mesma expressão que é válida na ausência de vorticidade. *A expressão (8) dá-nos, à parte o sinal, o vector turbilhão do mesmo fluido, num movimento deste tipo.* ***A interpretação física da natureza destes dois campos será indicada no fim deste capitulo.***

Consideremos a equação de Euler válida para fluídos sem viscosidade e vamos supor que o fluido cujo movimento traduz está sujeito a forças conservativas, de potencial φ^*, por unidade de massa. A equação de Euler, é:

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad(\frac{u^2}{2}) + (rot\vec{u}) \wedge \vec{u} = -grad\varphi^* - \frac{\mathbf{grad p}}{\rho}$$

Pode escrever-se na forma:

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] + (rot\vec{u}) \wedge \vec{u} = -grad\varphi * - \frac{gradp}{\rho}$$

Logo por ser , $\vec{E} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)$; $\vec{B} = -2\vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{u} \Leftrightarrow rot\vec{u} = 2\vec{\omega}$:

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = \vec{E} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{E} + \vec{u} \wedge (2\vec{\omega}) = -grad\varphi * - \frac{gradp}{\rho}$$

Portanto:

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge (-2\vec{\omega}) = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = -grad\varphi * - \frac{gradp}{\rho}$$

$$\Pi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Por ser: $d\Pi = \frac{dp}{\rho}$ vem:

$$\mathbf{grad}\Pi = \frac{\mathbf{gradp}}{\rho}$$

Substituindo na equação de Euler vem:

$$grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* + \Pi\right) = -(rot\vec{u}) \wedge \vec{u} \qquad \text{(i)}$$

Logo se o escoamento for de Bernoulli $(rot\vec{u}) \wedge \vec{u} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = 0$, vindo então:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi * + \Pi = f(t)$$

Supondo $f(t)$ absorvido por $\partial\varphi/\partial t$ vem:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}+\varphi^*+\Pi=0$$

Portanto, tomando $\Pi=\varphi^*=-\partial\varphi/\partial t-u^2/2$, obtém-se a implicação seguinte (φ^* é o potencial das forças volúmicas, e Π o potencial das forças de superficie:

$$\vec{F}=-grad\varphi^*=-grad(\Pi-\Pi_1)=0\ ;\ se\Pi_1=0\Rightarrow -\vec{u}\wedge rot\vec{u}=2\vec{\omega}\wedge\vec{u}\Rightarrow\vec{\omega}\wedge\vec{u}=0$$

Trata-se de um escoamento de Bernoulli (ausência de superfícies de Lamb).

Proposição: Sobre uma superfície equiescalar dos potenciais das velocidades e das acelerações o escoamento é de Bernoulli e a aceleração das partículas do fluido reduz-se à de Coriollis

Nesta relação φ * é o potencial das forças volúmicas, e Π o potencial das forças de superfície.

A igualdade anterior diz-nos que :

A aceleração das partículas de um fluido sem viscosidade,sob a acção de forças conservativas reduz-se à parte o sinal à aceração de Coriollis

Num escoamento de Bernoulli como não à superfície de Lamb $(\vec{\omega}\wedge\vec{u}=0)$***, as partículas dofluido nesse escoamento não estão sujeitas a forças de Coriollis.***

Seja $\vec{F}=-grad\varphi^*=-grad(\Pi-\Pi_1)$ a força hidrodinâmica supostamente conservativa, actuando sobre uma carga eléctrica unitária positiva dual da força de Lorentz, sendo o campo de forças puramente magnético. Então tem-se:

$$\vec{F}=\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B}=-grad\varphi^*=-grad(\Pi-\Pi_1)\qquad(21)$$

Portanto:

$$\vec{F}=\vec{u}\wedge\vec{B}=\vec{u}\wedge(-2\vec{\omega})=2\vec{\omega}\wedge\vec{u}=-\vec{f}_{Coriollis}\qquad(22)$$

Esta força identifica-se à parte o sinal com a força de Coriollis. Podemos obte-la substituindo (9) e (20) em (1) obtendo-se assim uma expressão que é equivalente á da força de Lorentz-Heaveside actuando sobre a unidade de carga eléctrica positiva:

$$\vec{F}=\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B}\qquad(23)$$

Notemos que a equação electromagnética anterior é consistente com a correspondente equação

Hidrodinâmica:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{u} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \ ,$$

se se verificarem entre as grandezas hidrodinâmicas e as grandezas electromagnéticas correspondentes as relações de proporcionalidade:

$$\vec{F} = k_1 \vec{\boldsymbol{F}} \ ; \ \vec{E} = k_1 \vec{\boldsymbol{E}}, \ \vec{B} = k_1 \vec{\boldsymbol{B}} \qquad (24)$$

Voltaremos posteriormente a esta questão. Vamos definir também o campo $\vec{\boldsymbol{H}}$ (η_0 é uma constante escalar) pela relação:

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \eta_0 \vec{\boldsymbol{H}} \qquad (25)$$

dual de:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} \qquad (26)$$

η_0 é a grandeza hidrodinâmica correspondente á permeabilidade magnética do vácuo.Vamos definir um campo vectorial $\vec{\boldsymbol{A}} = -\vec{\mathbf{u}}$, e um potencial escalar $\varphi^* = -{}^{u^2}\!/_2$, o qual, num escoamento permanente e na ausência de forças gravitacionais, ou na presença de forças conservativas de potencial escalar assumindo só pequenos valores, se reduz, aparte o sinal , á entalpia por unidade de massa. as grandezas $\vec{A} = -\vec{u}$; $\varphi^* = -u^2\!/_2$ ***reduzindo-se a última destas grandezas, na ausência de forças aplicadas à entalpia por unidade de massa do fluido***. Comecemos por considerar o caso mais geral de um escoamento não permanente.

Vimos que a Equação de Euler pode assumir a forma:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2rot\vec{u} \wedge \vec{u} = -grad\varphi^* - \frac{gradp}{\rho} \qquad (27)$$

Fazendo nesta última equação $\vec{u} = grad\varphi$ vem:

$$\frac{\partial}{\partial t} grad\varphi + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2rot\vec{u} \wedge \vec{u} = -grad\varphi^* - \frac{gradp}{\rho} \qquad (28)$$

Voltemos a considerar os campos vectoriais já definidos:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) \ ; \quad \vec{\boldsymbol{B}} = -2\vec{\omega}$$

Substituindo estes campos na expressão da aceleração (fórmula de Euler) reobtem-se a equação:

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = -grad\varphi^* - \frac{gradp}{\rho}$$

Notemos que o primeiro membro da igualdade anterior é a força que actua sobre a massa unitária de um fluido sem viscosidade;

Se o campo de forças $\vec{F}$ se puder derivar exclusivamente de um potencial escalar $\left(rot\vec{F} = 0\right)$,existe uma função escalar $\hat{\varphi}^*$ satisfazendo à igualdade $\hat{\varphi}^* = \varphi^* + \frac{gradp}{\rho}$,tal que: $\vec{F} = -grad\hat{\varphi}^*$. Neste caso podemos considerar o termo $gradp/\rho$ absorvido pela função $grad\varphi^*$, e por ser como vimos, $\varphi^* = \Pi$ escreve-se simplesmente:

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = -grad\varphi^* = -grad\Pi \qquad (29)$$

Consideremos mais uma vez a igualdade:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + (rot\vec{u}) \wedge \vec{u} = \vec{F} - \frac{gradp}{\rho}$$

Podemos dar outro aspecto a esta equação:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} + \frac{gradp}{\rho}$$

Ou seja por ser

$$\vec{E} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right); \qquad \vec{B} = -2\vec{\omega}$$

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \left(-2\vec{\omega}\right) + \frac{gradp}{\rho} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} + grad\Pi \qquad (30)$$

Obtivemos a expressão da força hidrodinâmica que actua sobre uma partícula de prova movendo-se no meio subquântico, devido ao campo de forças gerado por exemplo por uma carga potenciante.de natureza indeterminada,.também residente nesse meio subquântico: Se a partícula vista como uma unidade de massa quase pontualde um gás, tiver uma entalpia(ou equivalentemente um potencial das forças de superfície) nula , independente das coordenadas de espaço, ou independente do tempo, vem $grad\Pi = 0$ e a expressão anterior transforma-se em

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \qquad ;$$

Como já dissemos, se as forças volúmicas aplicadas forem puramente conservativas, derivando de um potencial escalar gravitacional $\varphi_g{}^* = gz$, e também de outros campos conservativos ,de

potencial φ^*, o potencial das forças de superfície é idêntico à entalpia do fluido por unidade de massa sendo dado por:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* + gz\right)$$

Portanto:

$$\varphi^* = \Pi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \mathrm{gz}$$

Esta expressão simplifica-se na ausência de forças gravitacionais $(gz \approx 0)$, e mesmo que elas existam e sejam de considerar, só teremos que incluir gz nas duas expressões seguintes :

$$\varphi^* = \Pi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -grad\Pi - grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Sendo :

$$\vec{\gamma} = \vec{F} = -grad\varphi^* = -grad\Pi - grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) = -grad\left[\Pi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right]$$

Já definimos a grandeza:

$$\vec{E} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Que vamos incluir na expressão de $\vec{\gamma}$:

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = -grad\Pi - grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) = -grad\Pi - (grad\frac{\partial\varphi}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)) =$$

$$= -grad\Pi + \left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right] = -grad\Pi + \vec{E}$$

Concluimos portanto:

<u>Proposição:</u> que uma Força hidrodinâmica actuando sobre uma massa unitária fluida sem viscosidade, é conservativa,e é igual à soma de um campo de forças conservativa cujo potencial escalar é o potencial das forças de superfície (que também são conservativas) ,identificando-se Π ***com a entalpia especifica de superfície, e*** $\vec{E}$ ***sendo o eqivalente hidrodinâmico do campo eléctrico.***

Vamos repetir aqui certos raciocineos feitos anteriormente.

Voltemos à expressão:

$$\vec{\gamma} = \vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = -grad\varphi^* - \frac{gradp}{\rho}$$

Note-se que $-{gradp}\!\big/_{\rho}$ não é necessariamente um campo irrotacional (conservativo).Se for um campo não conservativo ter-se-há:

$$rot\vec{a}^* = -\frac{gradp}{\rho}$$

obtendo-se assim a decomposição Helmholtzeana de $\vec{\gamma} = \vec{F}$,na qual como já vimos o temo $-{gradp}\!\big/_{\rho}$ .está relacionado com as possíveis rotações de $\vec{\gamma}$.

<u>Proposição:</u> Se um sistema fluido S sem viscosidade, estiver sujeito exclusivamente à acção de forças conservativas, um subsistema $S_1 \subset S$, de massa unitária, ${u^2}\!\big/_{2}$, exerce sobre a região de fluido em $S - S_1$ uma força coinservativa cujo potencial é a entalpia por unidade de massa.do fluido em S_1Se o escoamento for estacionário a entalpia reduz-se à energia mecânica especifica do fluido ${u^2}\!\big/_{2}$ que é então a função potencial de onde deriva a força irrotacional que S_1exerce obre $S - S_1$.

Vem por substituição de $\vec{u} = -\vec{A}$ e $\varphi^* = -{u^2}\!\big/_{2}$ em:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - grad\varphi^* + (rot\vec{u}) \wedge \vec{u} \qquad \text{(I)}$$

A expressão:

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi^* + (rot\vec{A}) \wedge \vec{A} \qquad \text{(II)}$$

Vindo:

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi^* + (rot\vec{A}) \wedge \vec{A} \qquad \text{(III)}$$

Fazendo na relação anterior $\vec{B} = rot\vec{A}$ vem:

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi^* + \vec{B} \wedge \vec{A} \qquad \text{(IV)}$$

Se um escoamento for de Beltrami (podendo ser irrotacional) é $(rot\vec{u}) \wedge \vec{u} = 0$,ou equivalentemente $\vec{\omega} \wedge \vec{u} = 0$, e não há superfícies de Lamb.

Vamos analisar as consequências de um escoamento ser de Beltrami.

Neste caso é como se viu :

$$(rot\vec{u}) \wedge \vec{u} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = 0$$

Se o escoamento não for estacionário, vem $(\vec{B} = rot\vec{A})$:

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi^* + \left(rot\vec{A} \wedge \vec{A}\right)$$

Da expressão de $\vec{B}$, $\vec{B} = -2\vec{\omega}$ vem: $\vec{B} = -2\,{}^{1}\!/_{2}\, rot\vec{u} = rot(-\vec{u}) = rot\vec{A}$. Portanto:

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = (rot\vec{A}) \wedge \vec{A} = (rot(-\vec{u})) \wedge (-\vec{u}) = (rot\vec{u}) \wedge \vec{u} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = 0\,;$$

Substituindo em:

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi^* + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

Vem:

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi^*$$

Se o escoamento for estacionário, vem:

$$\vec{F} = -grad\varphi^*$$

Note-se que $\vec{F}$ é uma força hidrodinâmica e φ^* o potencial dessa força, que se não deve confundir com o potencial da velocidade φ. Sempre que se trate de uma força eléctrica conservativa convem representá-la por $\vec{F}$ e o seu potencial por ϕ^*.

Já nos referimos que existe uma presumível relação de proporcionalidade,homogénea, entre certas grandezas hidrodinâmicas e correspondentes grandezas electromagnéticas.Podemos concluir portanto:

1. ***Um escoamento irrotacional do meio subquântico corresponde a um campo electromagnético puramente eléctrico, isto é um campo e.m. medido por um observador solidário com o sistema de referência onde estão em repouso as cargas geradoras do campo : num tal campo e.m. não há campo magnético.***
   Um escoamento irrotacional estacionário do meio subquântico corresponde a um campo e.m. com campo eléctrico conservativo (logo irrotacional) estacionário e independente do tempo.
2. ***Para um observador fixo num referencial inercial em relação ao qual a configuração de cargas electricas tem movimento rotatório, o meio subquântico tem também esse movimento em relação ao referencial do observador*** $(\vec{\omega} \neq 0,\ \vec{B} = -2\vec{\omega} \neq 0)$***;***
3. ***Num referencial e para o qual se tenha*** $\partial\vec{u}/\partial t = -grad\left(u^2/2\right)$***,quer dizer .no qual é*** $\vec{E} = 0$***, o valor local da aceleração é um campo irrotacional derivando de um potencial escalar, que em primeira aproximação coincide com a energia cinética por unidade de massado fluido.***

A situação na qual o campo de velocidades do meio subquântico é irrotacional corresponde a um campo puramente eléctrico.O que significa que existindo outros campos aplicados conservativos de potencial escalar φ^* (como o gravitacional),tem-se :

$$\Pi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* \right)$$

Da relação: $\vec{B} = rot\vec{A}$ vem:

$$rot\vec{B} = rotrot\vec{A} = graddiv\vec{A} - Lap\vec{A} = 2\vec{\omega}$$

Adoptemos a condição de Gauge:

$$div\vec{A} = 0$$

Vindo então:

$$Lap\vec{A} = -2\vec{\omega}$$

Esta última equação é dual da equação e.m.:

$$Lap\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Calculemos o rotacional de ambos os membros de: $\vec{\boldsymbol{E}} = -\partial\vec{A}/\partial t - grad\varphi^*$:

$$rot\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{A}$$

Por ser $\vec{\boldsymbol{B}} = rot\vec{A}$ vem:

$$rot\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$

<u>Obtivemos uma Equação de Maxwell da M. dos Fluidos, e a partir dela vamos obter a Equação de Maxwell de Electromagnetismo dual dessa equação:</u>

Atendendo a que é: $\vec{B} = k_1 \vec{\boldsymbol{B}}$, $\vec{E} = k_1 \vec{E}$ vem da equação anterior:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Partamos agora da igualdade de definição de $\vec{\boldsymbol{E}}$:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t} grad\varphi + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) = grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Logo:

$$div\vec{\boldsymbol{E}} = Lap\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + Lap\left(\frac{u^2}{2}\right) = Lap\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \qquad \text{(b)}$$

A entalpia por unidade de massa do fluido é dada por:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* \right) \qquad \text{(c)}$$

Consideremos agora a função:

$$\Pi_1 = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \qquad \text{(d)}$$

Atendamos à expressão com :

Sendo: $f = -Lap\Pi_1$.

Então vem como já tínhamos deduzido :

$$div\vec{E} = div\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) + Lap\left(\frac{u^2}{2}\right) = div\left(\frac{\partial}{\partial t} grad\varphi\right) + Lap\left(\frac{u^2}{2}\right) = Lap\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

$$div\vec{E} = -Lap\Pi_1 = f$$

Ou seja por ser : $\Pi_1 = {\partial \varphi}/{\partial t} + {u^2}/{2}$ vem:

$$div\vec{E} = -Lap\Pi_1 = Lap\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) = f$$

Ou escrito de outro modo:

$$div\vec{E} = [Lap\Pi - Lap\varphi^*] = f$$

Além disso:

1. Só contribui para as fontes de $\vec{E}$ a parte Π_1 da entalpia total Π que não resulta de forças conservativas aplicadas ao fluido

2. Se entre campos de forças aos quais a massa gasosa estiver sugeita existirem alguns campos, mas não todos, que sejam conservativos, então Π_1 é a parte da entalpia específica do gás que não é devida aos campos conservativos; não podemos dizer que neste caso a fonte do campo $\vec{E}$ seja a entalpia total do gás, mas somente a parte desta que não é correspondente aos campos conservativos;

Se o sistema gasoso só estiver sujeito a campos conservativos então a fonte do campo é a entalpia especifica total do gás:

$$\underline{div\vec{E} = f = -Lap\Pi_1}$$

Se os campos conservativos aos quais a massa fluida está sugeita tiverem potenciais desprezáveis, (o que não significa que os correspondentes campos de força sejam muito pequenos) podemos dizer em relação à equação aproximada $div\vec{E} = f = -Lap\Pi_1$ que $\vec{E}$ deriva aproximadamente da do potencial escalar Entalpia específica.

Seja $f = -Lap\Pi$ .ou $f = -Lap\Pi_1$. Das expressões de :

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^*\right) \quad \text{ou de:} \quad \Pi_1 = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Vem:

$$\varphi^* = \Pi + \partial\varphi/_{\partial t} + u^2/_2 = \Pi - \left[-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)\right] = \Pi - \Pi_1$$

Logo:

$$\varphi^* = \Pi - \Pi_1$$

Vem :

$$div\vec{\boldsymbol{E}} = -Lap\Pi_1$$

No primeiro caso: $f = Lap\Pi$,e no segundo é : $f = -Lap\Pi_1$ com $\Pi_1 \leq \Pi$ (estamos a supor que é $0 \leq \Pi_1 \leq \Pi$.).

Para evitar complicações de notação vamos omitir o índice 1 em Π_1 e escrever simplesmente:

$$div\vec{\boldsymbol{E}} = -Lap\Pi = f$$

Da equação $\vec{\boldsymbol{D}} = k\vec{\boldsymbol{E}}$, na qual k é uma constante de proporcionalidade, e da equação anterior, vem:

$div\vec{\boldsymbol{D}} = kdiv\vec{\boldsymbol{E}} = -kLap\Pi = kf$; Obtivemos assim a Equação hidrodinâmica de Maxwell:

$$div\vec{\boldsymbol{D}} = kf$$

dual da Equação de Maxwell do electromagnetismo:

$$div\vec{D} = \rho_e.$$

Por ser $\vec{D} = k_1\vec{\boldsymbol{D}}$ vem:

$$div\left(k_1\vec{\boldsymbol{D}}\right) = \rho_e = k_1 div\vec{\boldsymbol{D}} = k_1 k.f$$

Logo.

$$\rho_e = k_1 kf = -k_1 kLap\Pi$$

Substituindo numa das equações $div\vec{\boldsymbol{D}} = kf = \rho_e/_{k_1}$ é de se estranhar que seja $div\vec{D} = \rho_e$,ou seja que além da analogia de estrutura, estas equações tenham termos esforçadores proporcionais:

$$div\vec{\mathbb{D}} = \frac{\rho_e}{k_1 k} \quad ; \quad div\vec{D} = \rho_e$$

Portanto:

$$div\vec{D} = k_1 k div\vec{\mathbb{D}}$$

A ser verdadeira a conclusão a que chegámos a propósito das ondas electromagnéticas não lineares no vácuo, segundo a qual é $k_1 = 1$ ***teremos :*** $div\vec{\mathbb{D}} = \rho_e / k_1 = \rho_e$.

. Notemos no entanto que a igualdade $div\vec{\mathbb{D}} = div\vec{\mathbb{D}}$ ***não implica ser*** $\vec{\mathbb{D}} = \vec{D}$. ***Esta teoria parece ser bastante consistente.***

Proposição: O potencial escalar da aceleração num escoamento estacionário de um fluido sem viscosidade, $\varphi^* = -u^2/2$ ***, reduz-se à energia cinética por unidade de massa, ou equivalentemente, à entalpia do fluido por unidade de massa.***

Vamos partir das relações:

$$\vec{\mathbb{E}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad ; \quad \vec{\mathbb{B}} = -2\vec{\omega}$$

De facto para a unidade de massa de um meio subquântico :

$$\vec{\mathbb{F}} = \vec{\mathbb{E}} + \vec{u} \wedge \vec{\mathbb{B}} = \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] + \vec{u} \wedge (-2\vec{\omega})$$

Se o escoamento é estacionário $\partial \vec{u}/\partial t = 0$, logo:

$$\vec{\mathbb{F}} = -grad\left(\frac{u^2}{2}\right) = -grad\varphi^*$$

Portanto:

$$\varphi^* = \frac{u^2}{2}$$

A equação (8') toma então a forma :

$$\vec{\mathbb{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbb{A}}}{\partial t} - grad\ \varphi^* \qquad (10)$$

que é a relação hidrodinâmica correspondente á expressão geral do campo eléctrico não estacionário:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\phi^{*} \qquad (11)$$

De (8), e de $\mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}$, conclui-se que a relação:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{rot}\vec{\mathbf{A}} \qquad (12)$$

é uma identidade. Substituindo (12) e (9') em (8) vem: $\mathbf{rot}\vec{\mathbf{A}} = -\mathbf{rot}\vec{\mathbf{u}} = -\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

Calculando o rotacional de ambos os membros de (12) e substituindo (12) em (8) vem, com

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}' = \mathbf{rot}\vec{\boldsymbol{\omega}}, \qquad (12')$$

A relação

$$\mathbf{rot}\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{rot\,rot}\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{grad}\left(\mathbf{div}\vec{\mathbf{A}}\right) - \mathbf{Lap}\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{rot}\left(-2\vec{\boldsymbol{\omega}}\right) = -2.\vec{\boldsymbol{\omega}}' \qquad (13)$$

Adoptando a condição de gauge (similar à dos campos eléctricos estacionários):

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad (14)$$

e substituindo-a em (13) obtemos :

$$\mathbf{Lap}\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{2}.\vec{\boldsymbol{\omega}}' \qquad (15)$$

$\vec{\mathbf{A}}$ satisfaz a (15) se for independente do tempo ou uma função linear deste .

A equação (15) corresponde à equação da Magnetostática :

$$\mathrm{Lap}\vec{\mathrm{A}} = -\mu\,\vec{\mathrm{j}} \qquad (16)$$

Em (16), $\vec{\mathrm{A}}$ é o potencial vector de $\vec{\mathbf{B}}$ ($\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{rot}\vec{\mathbf{A}}$).

Calculando o rotacional de ambos os membros de (10) obtem-se uma Equação de Hidrodinâmica de Maxwell:

$$rot\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$

ou seja :

$$\mathbf{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}} = -\eta_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{t}} \qquad (17)$$

dual da equação de Maxwell:

$$\mathbf{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{t}} \qquad (18)$$

De (8) e (9') vem :

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad (19)$$

dual de :

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad (20)$$

Calculando a divergência de ambos os membros de (7), que é :

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

vem:

$$div\vec{E} = div\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) + Lap\left(\frac{u^2}{2}\right) \qquad (21)$$

Da relação $div\vec{E} = f = -Lap\varphi^*$ e de (21), vem:

$$f = div\vec{E} = -Lap\varphi^* = div\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) + Lap\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Ou seja:

$$grad\varphi^* = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Podemos notar que:

O potencial escalar $\varphi^* = -{u^2}/{2}$ *da aceleração* $\vec{E}$ *no escoamento estacionário de um fluido sem viscosidade reduz-se energia cinética por unidade de massa, do fluido ou equivalentemente à*

entalpia por .unidade de massa do fluido.

Logo:

$$\mathbf{div\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Lap\varphi} + \mathbf{Lap}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) \qquad (22)$$

ou seja :

$$\mathbf{div\vec{E}} = \mathbf{Lap}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) \qquad (23)$$

Se despresarmos o potencial das forças conservativas , nomeadamente das gravitacionais:

$$\varphi^* = \Pi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \qquad (24)$$

$$div\vec{E} = -Lap\varphi^* = -Lap\Pi \qquad (25)$$

Seja $f = -Lap\varphi^* = -Lap\Pi$ a densidade volúmica das fontes $\vec{E}$. Então vem:

$$f = Lap\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right]$$

Obtivemos para densidade volúmica das fontes ,à parte o sinal, o valor do laplaciano da energia por unidade de massa do fluido, dada pela equação de Bernoulli generalizada.Portanto, vem:

$$div\vec{E} = -f \qquad (25)$$

o que corresponde á equação do electromagnetismo:

$$\mathbf{div\vec{E}} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \qquad (26)$$

Portanto:

A divergência $div\vec{E}$ da força que actua a unidade de massa de um fluido invíscido , só sugeito a forças aplicadas conservativas, $\vec{E} = {\partial\vec{u}}/{\partial t} + grad\left({u^2}/{2}\right)$,é a entalpia especifica ou equivalentemente à sua energia cinética por unidade de massa;

O dual hidrodinâmico do Campo Electrico , $\vec{E}$, é a força que actua sobre a unidade de massa de um fluido invíscido em escoamentos irrotacionais ou de Beltrami .

Consideremos agora um fluido perfeito sem viscosidade sob a acção de forças exteriores conservativas e as equações de Euler:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + (rot\vec{u})\wedge\vec{u} = \vec{F} - \frac{gradp}{\rho}$$

Por ser: $d\Pi = {dp}/{\rho}$ vem: $grad\Pi = {gradp}/{\rho}$. Se o fluido só estiver sujeito a forças conservativas, pode-se escrever $\vec{F} = -grad\varphi\,*$. Substituindo na equação anterior vem:

Logo, vem da equação:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{u} = \vec{F} - \frac{gradp}{\rho}:$$

Como dissemos anteriormente, $d\Pi = {dp}/{\rho} \Rightarrow grad\Pi = {gradp}/{\rho}$. Estando o fluido exclusivamente sugeito a forças conservativas, tem-se: $\vec{F} = -grad\varphi\,*$,resultado que vamos substituir na equação anterior, atendendo a que é:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + grad\varphi\,* + grad\Pi = -2\vec{\omega}\wedge\vec{u}$$

Escrevendo:

$\vec{B} = -2\vec{\omega}$; $\vec{A} = -\vec{u}$ vem:

$$\left\{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right\} + grad\varphi^* + grad\Pi = -2\vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

Logo, sendo o escoamento conservativo:

Portanto por ser:: $\varphi^* = \Pi - \Pi_1$:vem: $\varphi^* + \Pi = 2\Pi - \Pi_1$.coim: $\Pi_1 = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$

$$grad\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + (\varphi^* + \Pi)\right\} = grad\{\Pi_1 + 2\Pi - \Pi_1\} = grad(2\Pi) = -2\vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

Logo:

$$grad(2\Pi) = -2\omega \wedge \vec{u}$$

O segundo membro da equação anterior é a aceleração de Coriollis .

Logo escrevendo $\vec{B} = -2\vec{\omega}, \vec{A} = -\vec{u}$ vem $\vec{\omega} = -\vec{B}/\vec{\omega}$; $\vec{u} = -\vec{A}$:

$$grad(2\Pi - \Pi_1) = 2\vec{u} \wedge \vec{\omega} = -\vec{B} \wedge \vec{A} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

Ou seja:

Podemos concluir que no escoamento estacionário de um fluido sem viscosidade, o campo $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$ é conservativo. Se o escoamento for de Beltrami não há superfícies de Lamb *A função*

$2\Pi - \Pi_1$ *é o potencial da força de Coriollis.*

Da equação (8) e de $\mathbf{rot}\vec{\omega} = \vec{\omega}'$, temos:

$$\mathbf{rot}\ \vec{B} = -\mathbf{rot}\ (2\vec{\omega}) = -2\vec{\omega}'$$

Se $\vec{J}'$ for a densidade volúmica das fontes de $\vec{H}$, então:

$$\mathbf{rot}\vec{H} = \vec{J}' \qquad (27)$$

Vindo de $\vec{B} = \eta_0 \vec{H}$ a expressão $\mathbf{rot}\vec{H} = -\frac{2\omega'}{\eta_0}$,da qual sai a relação $\vec{J}' = -\frac{2\vec{\omega}'}{\eta_0} = -\frac{2\mathbf{rot}\vec{\omega}}{\eta_0}$.

Seja $\vec{D}$ um campo vectorial proporcional a $\vec{E}$,cuja constante de proporcionalidade é k que desempenha em M.dos Fluidos. o papel da permitividade eléctrica $\varepsilon = D/E$.

De (25) e (28) obtemos :

$$div\vec{D} = -k.f \qquad (29)$$

dual de

$$\mathbf{div\vec{D}} = \rho_e \qquad (30)$$

Vamos definir um vector $\vec{J}$ pela relação:

$$\vec{J} = \vec{J}' - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (31)$$

Substituindo $\vec{J}'$, tirado de (31), em (27), deve poder obter-se, se existir dualidade entre as equações do Electromagnetismo e da Mecânica dos Fluidos :

$$\mathbf{rot\vec{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad (32)$$

que é a equação hidrodinâmica dual da de Maxwell :

$$\mathbf{rot\vec{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad (33)$$

Substituindo a expressão (10) de $\vec{E}$ em (25):

$$-div(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - Lap\varphi = -f \qquad (34)$$

Vamos adoptar a condição :

$$\mathbf{div\vec{A}} + \mathbf{k}\eta_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (35)$$

análoga da condição de gauge de Lorentz da Electrodinâmica:

$$\mathbf{div\vec{A}} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0 \qquad (36)$$

Calculando div$\vec{A}$ de (35) vem $\mathbf{div\vec{A}} = -\mathbf{k}_1\eta_0 \, {\partial \varphi}/{\partial t}$ .Substituindo em (34), vem:

$$k_1\eta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - Lap\varphi = -f \qquad (37)$$

que é análoga da equação electromagnética :

$$Lap\phi^* - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \qquad (38)$$

Obtivemos a equação de D'Alembert com fontes (37), que rege a propagação do potencial φ com a velocidade do som $\mathbf{a} = (\mathbf{k}\eta_0)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{d\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Vamos substituir $\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{rot}\vec{\mathbf{A}}$ e a expressão (10) de $\vec{\mathbf{E}}$ em (33). Obtém-se:

$$\frac{\mathbf{rotrot}\vec{\mathbf{A}}}{\eta_0} = \vec{\mathbf{J}} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial t}(-\mathbf{grad}\varphi^* - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t})$$

Então⊗35)(

$$\mathbf{grad\,div}\vec{\mathbf{A}} - \mathbf{Lap}\vec{\mathbf{A}} = \eta_0\vec{\mathbf{J}} - \mathbf{k}\eta_0\mathbf{grad}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right) - \mathbf{k}\eta_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2}$$

De (35) vem: $\mathbf{div}\vec{\mathbf{A}} = -\mathbf{k}\eta_0\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}$. Substituindo na expressão anterior $\mathbf{div}\vec{\mathbf{A}}$ pelo seu valor obtém-se :

$$\mathbf{k}\eta_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \mathbf{Lap}\vec{\mathbf{A}} = \eta_0\vec{\mathbf{J}} \qquad (39)$$

Dual de:

$$\mathrm{Lap}\vec{\mathrm{A}} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{\partial t^2} = -\mu\vec{\mathrm{J}} \qquad (40)$$

O potencial vector $\vec{A}$ se satisfaz a (39) e à condição de Gauge (35) satisfaz também à equação de Maxwell (33):

Se for $\vec{u} = C^{te}$ (movimento rectílineo e uniforme), obtêm-se as relações entre os potenciais vector e escalar para o Electromagnetismo e Hidrodinâmica, respectivamente. Como já vimos:

$$\vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{u}}$$

É possivel demonstrar que os potenciais $\vec{\mathbf{A}}$ e φ^* devidos ao movimento rectilínio uniforme de uma carga eléctrica pontual **Q** com velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ estão relacionados entre si.

Uma carga **Q** com movimento rectilínio uniforme de velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ dá lugar aos potenciais:

$$\varphi^*(\vec{\mathbf{r}},\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{1}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{Q}}{\left[\vec{\mathbf{r}} - \frac{\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{c}}\right]_{t-\frac{r}{c}}} \qquad (41)$$

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{\mathbf{r}},\mathbf{t}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{Q}\left[\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{r}} - \frac{\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{c}}}\right]_{t-\frac{r}{c}} \qquad (42)$$

Dividindo membro a membro as igualdades anteriores vem:

$$\frac{\vec{A}}{\varphi^*}=\frac{\dfrac{\mu_0}{4\pi}Q\dfrac{\vec{v}}{\left[r-\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c}\right]_{t-\frac{r}{c}}}}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\left[\vec{r}-\dfrac{\vec{r}.\vec{v}}{c}\right]_{t-\frac{r}{c}}}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{v}4\pi\varepsilon_0=\mu_0\varepsilon_0\vec{v}=\frac{\vec{v}}{c^2}$$

Logo:

$$\vec{A}=\frac{1}{c^2}\varphi^*\vec{v} \qquad (43)$$

NOTA: os campos $\vec{F},\vec{E},\vec{H},\vec{D},\vec{B},\vec{A}$, estão relacionados com os campos vectoriais hidrodinâmicos $\vec{\mathbf{F}},\vec{\mathbf{E}},\vec{\mathbf{H}},\vec{\mathbf{D}},\vec{\mathbf{B}},\vec{\mathbf{A}}$ pelas relações de proporcionalidade $\vec{F}=k_1\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{E}=k_1\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{H}=k_1\vec{\mathbf{H}}$, $\vec{D}=k_1\vec{\mathbf{D}}$, $\vec{B}=k_1\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{A}=k_1\vec{\mathbf{A}}$.

CONCLUSÕES:

O exercício desenvolvido sugere as seguintes conclusões:

1 –Foi possível interpretar mecanicamente as equações de Maxwell, tirando proveito de certas analogias de formalismo matemático entre o Electromagnetismo e a Mecânica dos Fluidos. Estaríamos então tentados a dizer que, para além de certos conceitos físicos fundamentaiscomo a energia, e certos aspectos comuns a aos dois ramos da Física, é a generalidade das estruturas matemáticas sobre as quais se apoia o seu estudo uma possível causa de similaridade. Sugere também a possibilidade de fundamentar a Mecânica dos Fluidos num conjunto de equações contendo quatro equações ás derivadas parciais com a estrutura analítica das equações de Maxwell.

2 –As equações de Maxwell no vácuo são em si mesmas as equações do movimento desse meio material específico, que nos parece identificar-se coim o meio subquântico de De Broglie, e que é um meio indefinidamente diluído preenchendo todos os vazios e actuando de forma aleatória sobre as partículas materiais imersas no vazio. As diferenças qualitativas existentes entre o Electromagnetismo e a Mecânica dos Fluidos seriam o reflexo das diferenças qualitativas existentes entre o vácuo, visto como meio material particular (o meio subquântico), e os meios físicos contínuos, de evidência directa e sensível, cujo movimento se estuda em Hidrodinâmica. As considerações aqui desenvolvidas, de carácter meramente especulativo evocam dois conceitos presentemente obsoletos: a “Hipótese do Éter ”, e a “Pressão de Poincaré”. O facto de a luz se propagar no vácuo e a descoberta do seu carácter ondulatório, conduziu á suposição de estar o vácuo completamente preenchido por um fluido hipotético, o “ éter” , infinitamente diluído, possuindo uma capacidade ilimitada de penetrar em qualquer região do espaço. O éter seria assim o suporte das

vibrações luminosas, que se descobriu serem transversais. Sabia-se, da Mecânica dos Meios Contínuos, que as vibrações mecânicas transversais só se propagam em meios rígidos e que os fluidos só podem ser sede de vibrações mecânicas longitudinais como o som . Estas propriedades eram consideradas contraditórias, independentemente das diferenças qualitativas entre a luz (de natureza electromagnética), e o som (de natureza mecânica), e esse facto foi considerado desabonatório da "Teoria do Éter".

Notemos que a luz se propaga no vácuo com a velocidade que teria o som num fluido barotrópico de equação de estado :

$$p = c^2\rho + p_0$$

sendo **c** a velocidade da luz no vácuo e $\mathbf{p_0}$ uma constante. A diferença qualitativa entre o vácuo e os fluidos usuais em Hidrodinâmica condiciona estreitamente a diferença entre a luz e o som .

A experiência de Michelson–Morlay levou por fim ao abandono definitivo da "Teoria do éter". Esta experiência provou a inexistência do éter, enquanto forma de matéria qualitativamente idêntica aos meios físicos estudados em hidrodinâmica, e foi interpretada como provando ser o vazio a ausência de qualquer conteúdo material. A teoria quântica dos campos, constituiu, através da "energia do ponto zero", $\mathbf{E_0}$, uma reabilitação parcial de alguns aspectos da antiga teoria do éter .

Tentaremos, em trabalhos posteriores, continuar o tratamento desta questão.

Vamos agora referir-nos á "Pressão de Poincaré". Poincaré considerou que a carga negativa do electrão poderia ser vista como um "somatório" (integral) de cargas diferenciais que se deviam repelir entre si segundo a lei de Coulomb. Sendo o electrão uma partícula estável, então o vazio exterior a esta partícula deveria exercer sobre a sua superfície uma pressão que equilibrasse a repulsão referida, que foi designada por "Pressão de Poincaré".

Consideremos agora aspectos mais actuais desta questão: a equação dos vectores próprios do operador Hamiltoniano de um oscilador harmónico linear com f graus de liberdade e frequências fundamentais $\omega_{n1n2n3.....nf}$ é, com $n = n_1 + n_2 + ... + n_f$:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Forma abreviada de escrever:;

$$\hat{H}|n_1, n_2, n_3, ...n_f\rangle = E_{n1n2n3....nf}|n_1, n_2, n_3......n_f\rangle$$

O hamiltoneano de um oscilador harmónico é degenerado ,e a qualquer arranjo de f elementos

$\left\{n_i : \sum_{i=1}^{f} n_i = n \geq 0\right\}$ corresponde um só vector de estado ao qual está associada uma energia que só depende da soma n de todos os números quânticos do oscilador. Cada estado estacionário da energia do oscilador , $E_{n1n2n3,...nf}$ corresponndente a qualquer dos vectores de estado$|n_1, n_2,...n_f\rangle$ para um certo $n = \sum_{i=1}^{f} n_i \geq 0$, tem a energia ($\omega_{123...f}$ são as frequências fundamentais do oscilador):

$$E_{n1n2n3...nf} = \left(\sum_{i=1}^{f} n_i + \frac{f}{2} \right) .\hbar .\omega_{123...f}$$

Fixemo-nos para já no caso $f = 3$ e seja $n \geq 0$ um inteiro não negativo. Abreviadamente representando por ω a frequência fundamental do osvcilador, Os v.p. de $\hat{H}$ correspondentes ao número n são obtidos da equação $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ e são dados por:

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2} \right) .\hbar .\omega$$

sendo **n** um inteiro não negativo.A equação dos vectores próprios para um oscilador harmónico no estado $n > 0$ é interpretável como dizendo respeito não a um só oscilador no estado $n > 0$, mas a um sistema quântico com $n > 0$ partículas cada uma delas no estado fundamental.É por isso que o para uma colectividade de partículas o operador $\hat{N}$ correspondente, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ é chamado operador de contagem.

Se for $n = 0$ obtemos a energia do oscilador no seu estado fundamental, que é $E_0 = 3.\hbar .\omega/2$. Das expressões anteriores é possível a partir do citado valor do espectro calcular o valor vem:

$$\left(\hat{\mathbf{H}} - \frac{3}{2} \hbar \omega \right) / \mathbf{n} \rangle = \mathbf{0}$$

O operador de contagem $\hat{\mathrm{N}}$ de um sistema quântico de **n** partículas tem como vimos a equação de vectores próprios:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

Podemos, portanto, fazer a identificação para um sistema quântico de **n** partículas dos operadores

$$\hat{\mathbf{N}} \equiv \hat{\mathbf{H}} - \frac{3}{2} \hbar \omega$$

sendo o valor próprio de $\hat{\mathrm{H}}$ correspondendo a **n=0** partículas $\mathrm{E}_0 \neq 0$.

Se o sistema tiver **n=0** partículas (vácuo) , então :

$$\hat{N}|0\rangle = 0|0\rangle = 0$$

Voltemos à expressão:

$$E_{n1n2n3\ldots nf} = \left(\sum_{i=1}^{f} n_i + \frac{f}{2} \right) .\hbar.\omega_{123\ldots f}$$

Quando na expressão da energia deste oscilador f-dimensional, supostamente traduzindo a energia

um colectivo de f particulas no seu estado fundamental, se faz $n = \sum_{k=1}^{f} n_k \left(\forall k \in I_{>0};\ n_{i=0} \right)$isto significa que a referida colectividade de partículas idênticas está completamente vazia, isto é não contem qualquer partícula, identificando-se assim com o meio subquântico na hipótese de De Broglie ou com o vácuo da teoria quântica dos campos .Parece inegável que os muitos resultados experimentais positivos obtidos pelos físicos ''ortodoxos'' da chamada Escola de Copenhague para as suas próprias openiões, e a quem nunca faltaram recursos, têm parecido comprovar a justeza da física dita ''ortodoxa'' .A comprovação das concepções de Einstein-De Broglie exige o uso de um laboratório subterrâneo onde os instrumentos ópticos estejam completamente protegidos de vibrações. Tal instalação existe de facto, mas pertence a uma empreza de instrumentos ópticos de carácter particular que não a cede para investigação pura.A polémica que já se arrasta à muito, entre as concepções de Einstein –De Broglie, de carácter materialista, e as dos adeptos da Escola de Copenhagen não tendo tal carácter, bem como outras polémicas que tiveram lugar, e a pesar de alguns pequenos exageros que foram cometidos, como por exemplo a questão dos biólogos na polémica com Lissenko, fazem recordar com saudaudade os tempos do Idanovismo.

O facto de ao vácuo corresponder uma energia não nula é interpretado como uma manifestação do carácter material deste e não da ausência total de matéria. DeBroglie considerava o vácuo como um meio material específico, a que chamava "meio sub-quântico", exercendo uma força aleatória sobre os corpúsculos materiais nele mergulhados. Vamos agora referir o efeito Casimir.

Se colocarmos duas placas metálicas iguais em contacto perfeito no vácuo, entre elas não existe nenhuma forma de matéria ou de energia. Casimir previu, no entanto, que sendo o vácuo um meio material, deveria exercer sobre as superficies das placas, dos lados opostos á superficie de contacto, uma certa força, dando lugar a uma compressão uma contra a outra das duas placas (Efeito Casimir). Esta força foi detectada e medida por Steven Lamoureaux no Los Alamos National Laboratory.

Vamos terminar com uma citação, que nos parece a propósito, de Lewis Carrol em ***Alice no País das Maravilhas***: "*...e dessa vez desapareceu muito devagarinho, começando pela ponta da cauda e acabando no sorriso, que permaneceu ainda no ar por algum tempo depois dele já se ter ido* *embora. "Bem, já vi muitas vezes um gato sem um sorriso", pensou Alice, "Mas nunca vi um sorriso sem um gato! Nunca vi nada de tão estranho na minha vida."*

Voltemos à expressão dos valores próprios da energia.

$$E_{n1n2n3.....nf} = (\sum_{i=1}^{f} n_i + \frac{f}{2}).\hbar.\omega_{123....f} = \frac{f}{2}kT$$

já vimos que se não houverem corpusculos materiais no meio subquântico ,

teremos $n_1 = n_2 = n_3 = ...0$, o que corresponde ao vácuo. a energia por unidade de volume do vácuo é então:

$$E_{123...f} = \hbar.\omega_{123...f} = kT$$

o facto de ser: $E_{123..f} > 0$ devido à presença,entre parentesis, em $E_{123...f}$,do termo não nulo $f/2$, dá lugar à conclusão de se ter no vácuo, na ausência de corcuspuculos materiais , ou nas mesmas condições no meio subquântico, ambos em ''estado vazio`` , existir uma temperatura absoluta positiva apesar da não existência de corpusculos materiais. o facto de a energia por unidade de volume ser, no vazio dada pela expressão anterior conduz-nos à conclusâo de que o vazio tem por unidade de volume a massa

$$M = \frac{E_{123...f}}{c^2} = \frac{\hbar.\omega_{123...f}}{c^2} = \frac{kT}{c^2} > 0 \Rightarrow M,T > 0$$

concluimos que como se esperava o vazio tem natureza material, e que a temperatura do vazio á sempre superior a zero. A descoberta dos lasers conduziu à consideração de temperaturas negativas.

Para maior simplicidade voltemos ao caso de um oscilador 3-dimensional. Os seus valores próprios de energia são como vimos $E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right).\hbar.\omega$.Essa energia (energia cinética térmica) se não for muito pequena distribui-se igualmente por cada um dos 3 graus de liberdade, e sendo a energia cinética térmica de um oscilador 3-dimensional, teremos:

$$\left(n + \frac{3}{2}\right).\hbar.\omega = \frac{3}{2}kT \quad \Leftrightarrow \quad T_n = \frac{2}{3k}\left(n + \frac{3}{2}\right).\hbar.\omega$$

Consideremos agora a Equação de Schroedinger independente do tempo 3-dimensional:

$$Lap\psi - \frac{2m}{\hbar^2}\left(V - \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)\psi = 0$$

.Nesta equação V é a energia potencial da particula no campo e não o potencial desta .

$$\psi_n(x,y,z) == A\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)$$

Sendo:

$$H_n(q) = (-1)^n \exp\left(q^2\right)\frac{d^n}{dq^n}\left[\exp\left(-q^2\right)\right]$$

A diferença entre a energia potencial e a energia total é à parte o sinal a energia cinética., que no oscilador é qualquer energia estacionária desse oscilador. Então:

$$Lap\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\left(n+\frac{3}{2}\right).\hbar.\omega\right]\psi = 0$$

Da expressão $E_n = \left(n+\frac{3}{2}\right).\hbar.\omega = \frac{3}{2}kT$ vem a equação diferencial:

$$Lap\psi + \frac{3m}{\hbar^2}kT\psi = 0 \Rightarrow \left[Lap + \frac{3m}{\hbar^2}kT\right]\psi = 0$$

Pretendemos agora determinar o Observável Temperatura.Da equação anterior vem:

$$\left(\frac{\hbar^2}{3mk}Lap + T\right)\psi = 0 \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{3mk}Lap\psi = T\psi$$

Usando a notação de Dirac, vem:

$$\frac{\hbar^2}{3mk}Lap|\psi\rangle = T|\psi\rangle$$

Portanto o operador hermítico associado à variável temperatura é :

$$\hat{T} = \frac{\hbar^2}{3mk} Lap$$

E tem os valores próprios $E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar.\omega$ .A generalização para um oscilador f-dimensional é imediata e tem um espectro numerável com $n = 0,\pm 1 \pm 2..........\pm \infty$. Antes da descoberta do Laser suponha-se ser sempre $n \geq 0$; Com essa descoberta n passou a poder tomar todos os valores $n = 0,\pm 1,\pm 2,......\pm \infty$.

Referências:

[1]. Enzo Levy, "Elementos de Mecânica do Médio Continuo", Editorial Limusa-Wiley, S.ª México, 1971.

[2]. Fediaevsky C., "Mecânica dos Fluidos", Lopes da Silva Editora, Porto, 1978, pág.53, 72-74.

[3]. Méssiah, Albert, "Mecânica Cuantica", Tomo I, Editorial Tecnos, pág. 420-427, Spanish translation of Dunod edition , Paris

[4]. Nunzio Tralli, "Classical Electromagnetic Theory", McGrawHill, 1963, New York.

[5]. Passos Morgado, C. M., "Escoamentos Cónicos em Corpos Fusiformes com Jactos Laterais" (PHD thesis), chap.I, 1973 Lisboa.

[6]. Seife, Charles,''Zero, a biografia de uma ideia perigosa''Gradiva, 2001.

CAPÍTULO VII

CONSIDERAÇÕES SOBR+E O VÁCUO E O CAMPO ELECTROMAGNÉTICO SUGERIDAS PELAS FÓRMULAS DE BLASIUS DA HIDRODINÂMICA

1. Introdução. Escoamentos planos de um fluido incompressível

Consideremos a equação de Laplace em $\mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{Lap}\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$$

Seja **Z=x+iy** a variável complexa em $\mathbb{C} \cong \mathbf{R}^2$. Seja dada uma função de **Z,W=f(Z)** qualquer,

$$\mathbf{W} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{iy}) \tag{1}$$

Se **W** for harmónica o mesmo sucede a φ e a Ψ. Neste caso **W(Z)** é holomorfa, por se verificarem as condições de Cauchy-Riemann que, em coordenadas cartesianas, são:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{y}} \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{x}} \tag{2-2}$$

As equações $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{C}^{te}$ e $\psi(x,y) = C^{te}$ definem congruências no plano **(O,x,y)** nas quais as curvas φ intersectam ortogonalmente as curvas ψ definindo nesse plano uma quadrícula constituída por quadriláteros ditos *malhas de Beltrami*. Se $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ for o potencial escalar do campo de velocidade do movimento plano do fluído e $\psi(x,y)$ a função de corrente, tem-se, sob condições suficientes de regularidade da velocidade $\vec{u}(x,y)$ e do seu domínio de definição, que suporemos serem sempre verificadas:

$$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{grad}\varphi + \mathbf{rot}\vec{\mathbf{a}} \tag{3}$$

É o teorema de Helmholtz, no qual φ é dito o *potencial escalar de* $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{a}}$ *potencial vector de* $\vec{\mathbf{u}}$; $\vec{a}^*(x,y)$ é dado por:

$$\vec{\mathbf{a}} = \psi\vec{\mathbf{e}}_z \tag{4}$$

O espaço $\mathbf{R}^3$ está aqui referido à base cartesiana ortonormal $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ e o **z** que figura em $\vec{e}_z$ na expressão da base não é o complexo **x+iy** mas a terceira coordenada cartesiana neste espaço.

De (3) e (4) vem:

$$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{grad}\varphi - \vec{\mathbf{e}}_z \wedge \mathbf{grad}\psi \qquad (5)$$

que exprime, tal como (3), sendo válida (4), o teorema de Helmholtz.

Ao vector real:

$$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_x\vec{\mathbf{e}}_x + \mathbf{u}_y\vec{\mathbf{e}}_y \qquad (6)$$

faz-se corresponder a *velocidade complexa*:

$$\varsigma(\mathbf{Z}) = \mathbf{u}_x - \mathbf{i}\mathbf{u}_y \qquad (7)$$

sendo então

$$\varsigma(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{d}\overline{\mathbf{Z}}}{\mathbf{dt}} \qquad (8)$$

$\varsigma(\mathbf{Z})$ é o conjugado complexo de dZ/dt. A relação entre ς e $W(Z)$ é:

$$\varsigma = \overline{\mathbf{W}}'(\mathbf{Z}) \qquad (9)$$

Prova-se que, no caso geral, se tem num escoamento plano incompressível a equação de Poisson:

$$LapW = D - 2iw = \frac{\xi}{\rho} - 2iw \qquad (10)$$

sendo ρ a densidade de massa do fluido, $D = \sum_k D_k$ o débito total volúmico das fontes $(D_k > o)$ e sumidouros $(D_k < o)$, e $\Gamma = \sum_k \Gamma_k$ a intensidade total dos vórtices presentes ($\Gamma_k > o$ no sentido anti-horário e $\Gamma_k < o$ no sentido horário). Prova-se que uma fonte pontual em $Z = a$ de débito **D** é traduzida pelo potencial complexo (note-se que **D** representa aqui um número e não uma função, como em (10)):

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi}\ell n(Z - a) \qquad (11)$$

dando origem à velocidade complexa:

$$\varsigma(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{D}}{2\pi}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z} - \mathbf{a}} \qquad (12)$$

Tomando $Z - a = r\exp(i\theta)$, e por ser $\ell nZ = \ell n|Z| + i\theta$, obtêm-se as expressões:

$$\varsigma(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{D}}{2\pi}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} \qquad (13)$$

Por ser:

$$\varphi = \frac{\mathbf{D}}{2\pi}\ln\mathbf{r} \qquad (14\text{-}1)$$

$$\psi = \frac{\mathbf{D}}{2\pi}\theta \qquad (14\text{-}2)$$

com:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = \delta(x)\delta(y) = \delta(x + iy) = \delta(Z) \qquad (15)$$

vem, de (13) e (14):

$$\mathbf{Lap\varphi = D\delta(\vec{r})} \qquad (16)$$

Como se trata de uma fonte em $z = a$ e não há turbilhões presentes, é $\Gamma = o$ em (10); logo, por (15) vem:

$$LapW(Z) = D\delta(Z) \qquad (17)$$

De (10) vem:

$$Lap\psi = \frac{D}{2\pi} Lap\theta = o \qquad (18)$$

Logo $Lap\theta = o$; no caso de uma fonte pontual de um fluido incompressível e no complemento desta, W, ϕ e ψ são funções harmónicas. Comparando (17) com (10) notamos em (10) a falta do termo $(-2i\omega)$ por se tratar de uma fonte e não existir nenhum turbilhão.

Se o fluido fosse compressível (velocidade do som $a = \sqrt{dp/d\rho}$ finita) (10) seria substituída por:

$$LapW - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = D - 2i\omega \qquad (19)$$

Logo viria de (1) e (19):

$$\mathbf{Lap\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = D} \qquad (19')$$

$$\mathbf{Lap\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2\omega} \qquad (19'')$$

As equações (19′) e (19′′) substituiriam, respectivamente, as equações de Poisson para fluidos incompressíveis, que derivam directamente de (10), e que são:

$$\mathbf{Lap\varphi = D} \qquad (20)$$

$$\mathbf{Lap\psi = -2\omega} \qquad (20')$$

W só é harmónica e holomorfa, e φ e ψ só são harmónicas para fluidos incompressíveis na ausência de fontes, sumidouros, turbilhões e multipolos destes.
Logo: $W(Z)$ é então holomorfa e harmónica onde não houver tais singularidades. Os turbilhões não contribuem para φ que é harmónica onde não houver fontes, sumidouros ou multipolos e as fontes não contribuem para ψ que é harmónica na ausência de turbilhões.

1.1. Potencial complexo do escoamento devido a uma fonte pontual

Prova-se que uma fonte pontual em $Z = a$ de débito **D** corresponde ao potencial complexo:

$$\mathbf{W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln(Z - a)} \tag{21}$$

Então, tomando $Z - a == r \exp(i\theta)$ vem:

$$\mathbf{W(Z) = \frac{D}{2\pi}(\ln r + i\theta) \qquad \forall r > 0, \theta \in R} \tag{22}$$

Comparando com (1) vem:

$$\mathbf{\varphi(r,\theta) = \frac{D}{2\pi} \ln r \qquad \forall r > 0} \tag{23-1}$$

Por outro lado:

$$\mathbf{\psi(r,\theta) = \frac{D}{2\pi}\theta \qquad \forall \theta \in R} \tag{23-2}$$

Fazendo $\mathbf{D = -i\Gamma}$ a expressão (21) conduz a:

$$W(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ell n(z - a) \tag{24}$$

Logo:

$$\mathbf{\varsigma(Z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{Z - a}} \tag{25}$$

1.2. Aplicação à Electrostática da teoria das funções complexas de variável complexa

Vamos associar ao campo eléctrico vectorial real:

$$\mathbf{\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y} \tag{26}$$

o escalar complexo

$$\overset{C}{E} = E_x - iE_y \in \mathbb{C}^1 \tag{27}$$

que pode ser visto como um vector do espaço vectorial 1–Dimensional sobre o corpo $\mathbb{C}$. Se $\vec{E}$ for irrotacional é derivável de um potencial complexo $\mathbf{\overset{*}{W}(Z)}$ pela relação:

$$\mathbf{E^C = -W^{*\prime}(Z)} \tag{28}$$

$$\mathbf{W^* = \varphi^* + i\psi^*} \tag{29}$$

verificando-se então sempre a igualdade:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\varphi^{*} \quad (30)$$

Se $\vec{E}$ for um campo harmónico não estacionário tem-se:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \quad (31)$$

com $\vec{r} = (x,y,z)$. Substituindo na equação de Maxwell:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (32)$$

vem:

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}_o e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \quad (33)$$

(no vácuo ou num dieléctrico $\vec{E}$ e $\vec{B}$ então em fase). A dependência explícita de $\vec{B}$ em relação ao tempo implica que seja $rot\vec{E} \neq o$.

No caso de um campo eléctrico irrotacional dependente do tempo teremos:

$$\mathbf{E}^{c} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{W}}(\mathbf{Z},\mathbf{t})}{\partial \mathbf{Z}}$$

Se $\mathbf{W}^{*}$ depender do tempo, o mesmo sucede a φ^{*} e ψ^{*}. Se o campo for estacionário e irrotacional, o que sucede no referencial onde as cargas geradoras do campo estão em repouso, verifica-se a equação (no vácuo):

$$\mathbf{Lap}\varphi^{*} = -\frac{\rho_{e}}{\varepsilon_{0}} \quad (34)$$

Note-se que onde for $\rho_{e} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{W}^{*}(\mathbf{Z})$ não é holomorfa nem harmónica. Logo numa tal região não é possível determinar uma "função de corrente" pelas condições de holomorfia de Cauchy-Riemann. No entanto, se o suporte da distribuição de carga tiver um 3-volume nulo, (caso de uma carga distribuída numa linha ou superfície) é possível determinar ψ^{*}. Consideremos a expressão geral de um campo $\vec{E}$ não estacionário,

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\varphi^{*} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}} \quad (35)$$

sendo $\vec{B} = rot\vec{A}$ (se numa região do espaço existir um campo eléctrico dependente do tempo existe sempre simultaneamente um campo magnético). Então tem-se:

$$\mathbf{div}\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{Lap}\varphi^{*} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\mathbf{div}\vec{\mathbf{A}} \quad (36)$$

Da condição de gauge de Lorentz no vácuo:

$$\mathbf{div}\vec{\mathbf{A}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \mathbf{0} \qquad (37)$$

tira-se $\mathbf{div}\vec{\mathbf{A}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \, \partial \varphi^* / \partial t$ e substitui-se em (36).

Chama-se suporte de ρ (ρ é uma função ou função generalizada) ao fecho do conjunto de pontos onde é $\rho \neq o$. O conjunto de pontos onde é $\rho(P) = o$ chama-se núcleo de ρ:

$$\mathbf{Ker}\rho = \{\mathbf{P} \in \mathbf{R}^3 : \rho(\mathbf{P}) = \mathbf{0}\}$$

Vem da substituição da expressão de $\mathbf{div}\vec{\mathbf{A}}$ em (36):

$$\mathbf{Lap}\varphi^* - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad (38)$$

Para o potencial vector $\vec{A}$ vem:

$$\mathbf{Lap}\vec{\mathbf{A}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\mathbf{j}} \qquad (39)$$

Consideremos agora o equivalente electrodinâmico de (5):

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\varphi^* + \mathbf{rot}\vec{\mathbf{a}}^* = -\mathbf{grad}\varphi^* - \vec{\mathbf{e}}_z \wedge \mathbf{grad}\psi^* \qquad (40)$$

onde figura a "função de corrente" ψ^* de $\vec{E}$, no caso de $\vec{E}$ ter valores no plano (xOy). Neste caso tem-se:

$$\vec{a}^* = \vec{e}_z \psi^* \qquad (41)$$

Calculemos a divergência de ambos os membros de (40):

$$div\vec{E} = -Lap\varphi^* - div(\vec{e}_z \wedge grad\psi^*) \qquad (42)$$

Pela lei de Gauss:

$$-\mathbf{Lap}\varphi^* - \mathbf{div}(\vec{\mathbf{e}}_z \wedge \mathbf{grad}\psi^*) = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad (43)$$

Onde for $\rho_e \neq \mathbf{0}$, W^* é holomorfa e harmónica sendo também harmónicas φ^* e ψ^*.

A igualdade (40) pode escrever-se na forma (35). Então tem-se ($\vec{\mathbf{a}}^* = \psi^* \vec{\mathbf{e}}_z$):

$$rot\vec{a}^* = rot(\psi^* \vec{e}_z) = -\vec{e}_z \wedge grad\psi^* \qquad (44)$$

vindo (34):

$$\mathbf{Lap}\varphi^* = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

A relação (29) pode escrever-se, atendendo às condições de holomorfia, (logo onde for $\rho_e = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{y}} = -\mathbf{Re}\,\mathbf{W}'(\mathbf{Z}) \qquad (45\text{-}1)$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Im}\,\mathbf{W}'(\mathbf{Z}) \qquad (45\text{-}2)$$

Notemos que é:

$$W'(Z) = \mathrm{Re}\,W'(Z) + i\,\mathrm{Im}\,W'(Z) = -E_x + iE_y \tag{46}$$

Onde for $\rho_e \neq 0$ tem-se, então:

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x\partial y}; \qquad \frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y\partial x} \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y\partial x}; \qquad \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x\partial y}$$

Logo:

$$\mathbf{Lap\varphi^* = 0}$$

$$\mathbf{Lap\psi^* = 0}$$

A primeira destas equações já tinha sido obtida para uma região onde fosse $\rho_e = 0$ derivando a segunda das condições de holomorfia de W^*.

Da igualdade entre o primeiro e o terceiro membros de (40), vem se o campo eléctrico tiver valores no plano z=0 :

$$\vec{E} = -grad\varphi^* + rot\vec{a}^* = -grad\varphi^* + \vec{e}_z \wedge grad\psi^*$$

Calculemos a divergência de ambos os membros desta relação numa região do espaço onde for $\rho_e = 0$:

$$div\vec{E} = -Lap\varphi^* + divrot\vec{a} = -Lap\varphi^* + div(\vec{e}_z \wedge grad\psi^*) = -Lap\varphi^* = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

se $\vec{E}$ depender explicitamente do tempo e não for irrotacional (campo $\vec{E}$ associado a uma radiação), pode escrever-se:

$$\mathbf{\vec{E} = -grad\varphi^* - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \tag{48}$$

com $\vec{B} = rot\vec{A}$, vem:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{e}_z \wedge grad\psi^+ \tag{49}$$

Logo o potencial vector da indução magnética é determinado pela "função de corrente" do campo eléctrico, à parte uma "constante aditiva", que é uma função independente do tempo:

$$\vec{A}(t,x,y,z) = -\vec{e}_z \wedge \int grad\psi^+ dt + \vec{A}(x,y,z)$$

Se $\vec{E}$ for irrotacional , e solenoidal e´derivável de um $W^*(Z)$holomorfo, sendo a condição de holomorfia de W^* expressa vectorialmente pela igualdade

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\varphi^* = \vec{\mathbf{e}}_z \wedge \mathbf{grad}\psi^* \qquad (50)$$

concluímos que neste caso existem funções φ^* e ψ^* que verificam a igualdade:

$$\vec{E} = -grad\varphi^* = \vec{e}_z \wedge grad\psi^* \qquad (51)$$

Notemos que (30) pode escrever-se na forma:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\varphi^* + \mathbf{rot}\vec{\mathbf{a}}^* \qquad (52)$$

com $\vec{a}^* = \vec{e}_z\psi^*$. A função vectorial $\vec{a}^*$ é chamada *potencial vector do campo eléctrico.* Se $\vec{E}$ for irrotacional poder-se-á escrever equivalentemente a (29):

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\varphi^* = \mathbf{rot}\vec{\mathbf{a}}^* \qquad (53)$$

Voltemos agora à expressão (29) do potencial complexo $\mathbf{W}^* = \varphi^* + \mathbf{i}\psi^*$. Então:

$$\mathbf{LapW}^* = \mathbf{Lap}\varphi^* + \mathbf{iLap}\psi^*$$

De $\vec{a}^* = \vec{e}_z\psi^*$ vem $\psi^* = \vec{e}_z.\vec{a}^*$. Logo é: $Lap\psi^* = \vec{e}_z Lap\vec{a}^* \equiv Lap(\vec{e}_z.\vec{a}^*)$.Logo:

$$\mathbf{LapW}^* = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} + \mathbf{i}\vec{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{Lap}\vec{\mathbf{a}}^* \qquad (53')$$

Note-se que se $\vec{a}^*$ estiver dirigido segundo $\vec{e}_z$ se tem $\vec{e}_z.\vec{a}^* = a^*$, vindo:

$$Lap\psi^* = Lapa^* \qquad (54)$$

Logo:

$$\mathbf{LapW}^* = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} + \mathbf{iLap}\psi^* \qquad (55)$$

Em Hidrodinâmica, se for $\vec{u} = rot\vec{a}$ temos $Lap\vec{a} = -2\vec{\omega}$, $(div\vec{a} = 0)$. Procedendo por analogia vamos definir um pseudo-vector "turbilhão electromagnético" pela relação:

$$Lap\vec{a}^* = -2\vec{\Omega} \qquad (56)$$

com $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$. Então (53') dá lugar a:

$$\mathbf{LapW}^* = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} - 2\mathbf{i}\Omega \qquad (57)$$

Esta equação é a análoga da equação hidrodinâmica (10). Se o campo electromagnético depender do tempo (57) deve ser substituída por:

$$\mathbf{LapW}^* - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{W}^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} - 2\mathbf{i}\Omega \qquad (58)$$

De (56) vem a relação:

$$Lap\psi^* = -2\Omega \qquad (58')$$

Por outro lado:

$$Lap\vec{a}^* = Lap(\vec{e}_z\psi^*) = \vec{e}_z Lap\psi^* = -2\vec{\Omega} \quad \Rightarrow Lap\vec{a}^* = -2\vec{\Omega} \qquad (59)$$

se não houver dependência temporal (58) decompõe-se em:

$$Lap\varphi^* - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad (60)$$

$$\mathbf{Lap\psi^* - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} = -2\Omega} \qquad (61)$$

(61) é equivalente a:

$$\mathbf{Lap\vec{a}^* - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{a}^*}{\partial t^2} = -2\vec{\Omega}} \qquad (62)$$

Podemos comparar estes resultados com as equações (19) (19') e (19").Das relações anteriores vem:

$$LapW^* - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 W^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} - 2i.\Omega$$

Portanto da definição de $\vec{E}$ e das condições de Holomorfia vem:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi^*}{\partial x} = -\frac{\partial\psi^*}{\partial y} = -\mathrm{Re}W'(Z) \quad (63-1); \quad E_y = -\frac{\partial\varphi^*}{\partial y} = \frac{\partial\psi^*}{\partial x} = \mathrm{Im}W'(Z) \quad (63-2)$$

sendo $\varphi, \psi \in C''$ .Onde for $\varphi^*, \psi^* \in C''$ é válido o torema de Schwarz. $\rho_q = 0$ $Lap\varphi^* = 0$ e se verifica:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial x\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial y\partial x} \end{cases} \quad (64\text{-}1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2\varphi^*}{\partial x\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2\varphi^*}{\partial x\partial y} \end{cases} \quad (64-2)$$

Portanto:

$$Lap\varphi^* = Lap\psi^* = 0$$

São as condições de harmonicidade de φ^*, ψ^*,que implicam a holomorfia de $W^* = \varphi^* + i\psi^*$..

A harmonicidade de φ^* resulta de $Lap\varphi^* = -\rho_e/\varepsilon_0$ onde for $\rho_e = 0$,e a de ψ^* resulta das condições de holomorfia de W^* .

Voltemos à equação (40) na qual figura a ''função de corrente ψ^* de $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -grad\varphi * + rot\vec{a}* = -grad\varphi * - \vec{e}_z \wedge grad\psi *$$

Se $\vec{E}$ tiver valores no plano z=0, é $\vec{a}* = \psi * \vec{e}_z$.Então:

Calculemos a divergência de ambos os membros de (40) :

$$div\vec{E} = -Lap\varphi * - div[\vec{e}_z \wedge grad\varphi *] \qquad (65)$$

Logo:

$$-Lap\varphi * - div(\vec{e}_z \wedge grad\psi *) = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

Podemos escrever:

$$rot\vec{a}* = rot(\psi * \vec{e}_z) = -\vec{e}_z \wedge grad\psi *$$

1.3. Campo eléctrico devido a uma distribuição uniforme rectilínea indefinida e independente do tempo de carga eléctrica.

A expressão deste campo, em coordenadas polares, no plano normal ao suporte da distribuição é:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{e}_r}{r} \qquad (66)$$

na qual λ é a densidade linear de carga. Trata-se de um campo irrotacional relacionado por (30) com o potencial escalar:

$$\varphi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r \qquad (67)$$

Para $r > o$ existe uma "função de corrente do campo eléctrico", ψ^*, relacionada com ϕ^* pelas condições de Cauchy-Riemann, dada por:

:

Atendendo.a

$$\vec{E} = -grad\varphi*, \; div\vec{E} = Lap\varphi *$$

Vem:

$$\underset{\theta \in R}{\forall} \psi* = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\theta \qquad (68)$$

Da expressão :

$$div\vec{E} = -Lap\varphi^* = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Lap\ln r$$

com:

$$\mathbf{Lap\,ln\,r} = -2\pi\delta(\vec{r})$$

vindo, assim:

$$\mathbf{div}\vec{E} = -\mathbf{Lap}\varphi^* = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}) \qquad (69)$$

De (64) e (65) vem o potencial complexo:

$$\forall \mathbf{r} > 0, \theta \in \mathbf{R} \quad \mathbf{W}^* = \phi^* + i\psi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r + i\theta) \qquad (70)$$

Por ser $\ell nZ = \ell nr + i\theta$ vem de (67):

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{Z}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln \mathbf{Z} \qquad (71)$$

Este potencial é holomorfo em $Z \neq o$, e tem em $Z = o$ um ponto de ramificação logarítmica (Supõe-se que $\mathbf{W}^*(\mathbf{Z})$ tem valores na recta projectiva complexa que, munida da distância euclideana $d(Z_1, Z_2) = | Z_1 - Z_2 |$ constitui um espaço métrico localmente compacto, compactificado pela adjunção de um só ponto impróprio, a recta projectiva complexa, $\mathbf{P}\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, existindo e sendo então determinado o $\lim\limits_{Z\to 0} \mathbf{W}^*(\mathbf{Z})$. Então:

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \quad \lim_{Z\to 0} \mathbf{W}^*(\mathbf{Z}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\lim_{Z\to 0}\ln \mathbf{Z} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\lim_{Z\to 0}(\ln|\mathbf{Z}| + i\theta)$$

Em $\mathbf{P}\mathbb{C}$ faz-se a identificação:

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \qquad \pm\infty \pm i\theta = \infty$$

vindo assim:

$$\exists \lim_{z\to o} W(Z) = \infty$$

Se se considerar que $\mathbf{W}(\mathbf{Z})$ tem valores num espaço topológico compacto com vários pontos impróprios não existe o limite anterior, no sentido de este não ter um valor único.

1.4. Potencial complexo da indução magnética devida a uma corrente eléctrica rectilínea indefinida.

. Vamos analisar o caso do campo magnético criado por uma corrente eléctrica rectilínea e indefinida de intensidade I normal ao plano onde se avalia $\vec{B}$. Neste caso, usando coordenadas polares nesse plano é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{r}\vec{e}_\theta \qquad (72)$$

Por ser então $rot\vec{B} = o$ se $r \neq o$, há a garantia de existir $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \theta)$ tal que se tenha:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{grad}\widetilde{\varphi} \tag{73}$$

Em coordenadas cilíndricas (r,θ,z) temos:

$$\mathbf{grad}\widetilde{\varphi} = \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial \mathbf{r}}\vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial \mathbf{z}}\vec{\mathbf{e}}_z \tag{74}$$

De (72) e (74) vem então:

$$\frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\theta} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}}$$

Integrando:

$$\widetilde{\varphi} = \frac{\mu_0}{2\pi}\mathbf{I}\theta \tag{75}$$

Para $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, $\widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{r},\theta) = \widetilde{\varphi}(\mathbf{r},\theta) + i\widetilde{\psi}(\mathbf{r},\theta)$ é holomorfa, e as condições de holomorfia são:

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\theta} \tag{76-1}$$

$$\frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\theta} = \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial \mathbf{r}} \tag{76-2}$$

Substituindo (75) em (76-1) e (76-2) obtém-se:

$$\frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\theta} = \mathbf{0} \tag{77-1}$$

$$\frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi} = \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial \mathbf{r}} \tag{77-2}$$

Logo:

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(\mathbf{r})$$

Portanto:

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi}\ln \mathbf{r} \tag{78}$$

Substituindo (75) e (78) em (71) vem, atendendo a que é $Z = r\exp(i\theta)$, o potencial complexo de $\vec{B}$ é dado por:

$$\widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{Z}) = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi}(\theta + \mathbf{i}\ln \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi}\mathbf{i}\left(\frac{\theta}{\mathbf{i}} + \ln \mathbf{r}\right) = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi}\mathbf{i}(\ln \mathbf{r} - \mathbf{i}\theta) \tag{79}$$

Ou seja:

$$\widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{Z}) = \mathbf{i}\frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi}\overline{\ln} \mathbf{Z} \tag{80}$$

Logo:

$$\overline{\overline{W}}(Z) = B_x + iB_y = -i\frac{\mu_0 I \ln Z}{2\pi} \tag{81}$$

Então:

$$\overline{B}^c = i\frac{\mu_o I}{2\pi}\frac{1}{Z} \quad \Leftrightarrow \quad B^c = -i\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\overline{Z} \tag{82}$$

As funções $\mathbf{W}(\mathbf{Z})$ e a sua conjugada são holomorfas e têm um ponto de ramificação logarítmica em $Z = o$.

3.1. Força de interacção entre duas correntes eléctricas rectilíneas indefinidas paralelas

Neste caso cada corrente sofre a acção do campo magnético produzido pela outra: a corrente de intensidade I_2 sofre a acção do campo magnético devido a I_1 e recíprocamente. Vamos representar a intensidade I_1 por um vector $\vec{I}_1$ do qual I_1 é o valor algébrico em relação a um vector unitário $\vec{n}$, escolhido, e proceder análogamente com I_2:

$$\vec{I}_i = I_i\vec{n} \qquad i = 1, 2.$$

O campo magnético H devido a I_1 em coordenadas polares num plano normal aos dois condutores é:

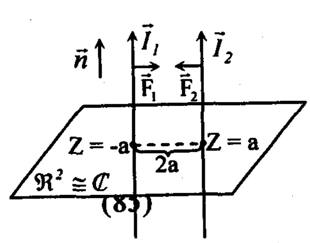
$$\vec{H} = \frac{\vec{I}_1 \wedge \vec{r}}{2\pi . r^2} \tag{83}$$

Na situação da Fig.1 a corrente I_2 está sujeita à indução:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{I}_1 \wedge \vec{r}}{r^2} \tag{84}$$

A expressão da força exercida pela corrente $\vec{I}_1$ sobre a carga $dQ_2 = I_2 dt$ da 2ª corrente é:

Fig.1



$$d\vec{f} = dQ_2\vec{v}_2 \wedge \vec{B} = \frac{dQ_2}{dt}d\vec{l}_2 \wedge \vec{B} =$$
$$= \vec{I}_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B} \tag{85}$$

Substituindo $\vec{B}$ em (85) pela sua expressão (84) vem:

$$\vec{f} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{I}_2 \wedge \vec{I}_1.\vec{r}}{r^2} l_2 \qquad (85)$$

A força que a unidade de comprimento do primeiro circuito exerce sobre a unidade de comprimento do segundo é $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{f}}/\mathbf{l}_2$ e de (86) vem:

$$\frac{\vec{F}_2}{l_2} = \vec{f} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi.r^3}\vec{r}$$

<u>Obtivemos a expressão da força que a corrente rectilínea indefinida I_1 exerce sobre o condutor paralelo percorrido por I_2, por unidade de comprimento do condutor percorrido por I_2</u>

Como $\vec{I}_2$ é normal a $\vec{r}(\vec{I}_2.\vec{r} = o)$ vem, da expressão anterior:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi r^2}\vec{r} \qquad (86)$$

Logo concluímos que correntes eléctricas do mesmo sentido se atraem e de sentidos contrários se repelem.

2. As funções holomorfas no estudo da interacção das correntes electricas

2.1. Cálculo dos esforços globais em Mecânica dos Fluidos pelas fórmulas de Blasius

Pretendemos calcular o esforço exercido por um fluído de densidade ρ sobre uma parede banhada por ele. Quando falamos de pressão ou esforço sobre um arco de curva, referimo-nos à que é exercida pelo fluido sobre uma superfície cilíndrica de altura unitária, cuja directriz é esse arco de curva e cujas geratrizes são ortogonais ao plano desta. Se o arco AB da Fig.2 for uma linha de corrente fechada, a força e o momento complexos são dados pelas expressões:

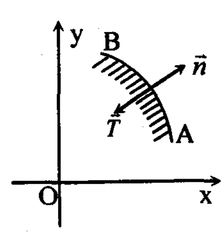


Fig.2

$$\mathbf{F}^c = i\frac{\rho}{2}\oint_{(c)}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ \tag{87}$$

$$\mathbf{M}^c = -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\oint_{(c)} Z\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ \tag{88}$$

C é a curva $\mathbf{AB}$. Segundo as convenções adoptadas para a orientação das trajectórias, os integrais devem ser calculados no sentido anti-horário se o fluido do qual se estuda a acção estiver no exterior da região limitada por C, e no sentido horário se estiver no interior.

Estes integrais, quando calculados ao longo de um contorno fechado limitando o fluido, representa a força exercida pelo fluido sobre a parede..E', em rigor. aforça, exercida pelo fluido sobre uma parede cilíndrica de altura unitária, normal ao plano do contorno de integração. O integral calcula-se no sentido antihorário.

Se o fluido for exterior ao contorno fechado os integrais de Blasius dão-nos o esforço exercido sobre o contorno pelo fluido exterior à parede. O integral calcula-se no sentido horário.-É possível provar que as expressões (88) ,(89) nos dão a interacção entre fontes e entre turbilões.

Consideremos um par de vórtices de intensidades Γ e $-\Gamma$ situados, respectivamente, nos pontos $Z = a$ e $Z = -a$. O potencial da velocidade do escoamento respectivo é:

$$W(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ell n\left(\frac{Z-a}{Z+a}\right) \tag{89}$$

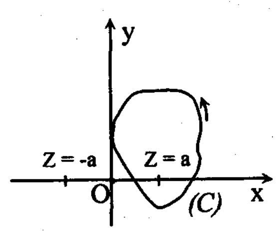


Fig.3

ao qual corresponde a velocidade complexa:

$$\varsigma = \mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y = \frac{dW}{dZ} = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{Z+a}{Z-a}\right)\left(\frac{2a}{(Z+a)^2}\right) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{2a}{Z^2-a^2} \tag{90}$$

Então:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{(Z-a)^2} - \frac{1/a}{Z-a} + \frac{1/a}{Z+a} + \frac{1}{(Z+a)^2}\right\}$$

Vamos integrar ao longo da curva contornando o ponto $z = a$. O resíduo da função $(dW / dZ)^2$ em Z=a é $-\Gamma^2/4\pi^2 a$. Então:

$$F^C = \frac{i\rho}{2} 2\pi . i\left(-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a}\right) \tag{91}$$

Logo:

$$\vec{F} = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi a}\vec{e}_x \tag{92}$$

Analogamente se obtém:

$$M^C = o \tag{93-1}$$

vindo então:

$$\vec{M} = o \tag{93-2}$$

Concluímos que dois vórtices pontuais do mesmo sentido se atraem. O resultado obtido é independente da linha de corrente (c) escolhida: Tomando para contorno (c) uma circunferência de centro $Z = a$ vê-se que o fluído exerce uma força repulsiva por unidade de comprimento de (c) e que para manter o turbilhão na posição $Z = a$ fixa é preciso exercer uma força finita sobre este que, se estiver situado na vizinhança de uma parede plana, é repelido por ela. Efectuando os mesmos cálculos para o momento vem $M = M^C = o$.

Vamos agora utilizar as fórmulas de Blasius para calcular a interacção entre turbilhões de intensidades diferentes $(\Gamma_1 \neq \Gamma_2)$ e obter daí as expressões análogas para fontes de débitos diferentes $(D_1 \neq D_2)$.

Consideremos então um turbilhão pontual em $Z = -a$ de intensidade Γ_1 e outro de intensidade Γ_2 em $Z = a$. O potencial complexo do conjunto é:

$$\mathbf{W(Z)} = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi}\ln(Z+a) - \frac{i\Gamma_2}{2\pi}\ln(Z-a) = -\frac{i}{2\pi}\left[\Gamma_1 \ln(Z-a) + \Gamma_2 \ln(Z+a)\right] \tag{94}$$

Derivando vem:

$$\mathbf{W'(Z)} = -\frac{i}{2\pi}\left[\frac{\Gamma_1}{Z+a} + \frac{\Gamma_2}{Z-a}\right] \tag{95}$$

Atendendo a que é:

$$\frac{1}{Z^2-a^2}=\frac{1/2a}{Z-a}-\frac{1/2a}{Z+a}$$

vem, por substituição na expressão de $\mathbf{W'(Z)^2}$:

$$W'(Z)^2=\frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{\Gamma_1^2}{(Z+a)^2}+2\Gamma_1\Gamma_2\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{Z-a}-\frac{1}{Z+a}\right]+\frac{\Gamma_2^2}{(Z-a)^2}\right\} \tag{96}$$

Substituindo em (88) vem:

$$F^c=-\frac{i\rho}{2}(-\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi^2 a})2\pi i=-\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a} \tag{97}$$

Logo:

$$\vec{F}=-\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a}\vec{e}_x \tag{98}$$

Se for $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ vem:

$$\vec{F}=-\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi a}\vec{e}_x \tag{99}$$

Concluímos que turbilhões do mesmo sentido se repelem e de sentidos diferentes se atraem. Fazendo $\Gamma=\mathbf{iD}$ nas expressões da força (98) ou (99) obtêm-se as forças de interacção entre fontes ou sumidouros:

$$F^C=\frac{\rho D_1 D_2}{4\pi a} \tag{100}$$

$$\vec{\mathbf{F}}=-\frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{D_1}\mathbf{D_2}}{\mathbf{4\pi a}}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{x} \tag{101}$$

Se for $\mathbf{D_1}=\mathbf{D_2}=\mathbf{D}$, vem:

$$\mathbf{F^C}=-\frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{D^2}}{\mathbf{4\pi a}} \tag{102}$$

$$\vec{\mathbf{F}}=-\frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{D^2}}{\mathbf{4\pi a}}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{x} \tag{103}$$

Concluímos que as fontes se atraem bem como os sumidouros; e que uma fonte e um sumidouro se repelem. Fazendo $\mathbf{D}=-\mathbf{i}\Gamma$ em (90) vem:

$$W(Z)=\frac{D}{2\pi}\ell n\frac{Z-a}{Z+a} \tag{104}$$

A linha (c) é um contorno fechado qualquer, descrito no sentido anti-horário envolvendo $z=a$ e deixando de fora $z=-a$. Os elementos de redução do torsor dos esforços são obtidos de (100), (101), (102) e (103) fazendo nessas expressões a substituição $D=-i\Gamma$ vindo então as relações (97), (98), (99), (93-1) e (93-2).

Vem também:

$$M^C = o \quad (105) \qquad \vec{M} = 0 \quad (105')$$

Concluímos que o torsor dos esforços é equivalente a um vector único; que duas fontes ou dois sumidouros se atraem e que uma fonte e um sumidouro se repelem sendo sempre a força de interacção inversamente proporcional à distância. Obtivemos equivalentemente a acção do fluido sobre uma fonte pontual: se uma fonte debita na vizinhança de uma parede plana, a acção do fluido tende a aproximar a fonte da parede; para a manter fixa em $Z = a$ deve-se exercer sobre ela uma força oposta à dada por (101).

Proposição: turbilhões do mesmo sentido repelem-se

Façamos $D_1 = -i\Gamma_1$, $D_2 = -i\Gamma_2$, ou seja $\Gamma_1 = iD_1$, $\Gamma_2 = iD_2$ na expressão da lei de forças. Vem:

Se os turbilhões estiverem à distância $r = 2a$, a expressão:

$$F^c = -\frac{\rho.i.^2 D_1 D_2}{4\pi.a} = \frac{\rho D_1 D_2}{4\pi.a}$$

Obtivemos assim uma relação ligando de uma fórmula plausível o débito de partículas do meio subquântico emitido (ou absorvido) pela unidade de comprimento das duas distribuições de carga com a densidade de massa do meio subquântico e a distância entre os suportes das duas distribuições.

Poderia objectar-se que as partículas do meio subquântico ,se fossem, digamos que para fixar ideias, permanentemente emitidas por exemplo por um protão, esse protão acabaria por se reduzir a uma massa final nula.e desapareceria. Mas tendo as partículas do meio subquântico uma massa praticamente infinitesimal, o decréscimo de massa do protão por unidade de tempo devido à emissão de partículas do meio subquântico seria tão lento que à escala de muitos milhões de anos não poderia ser observado. Inicialmente supôs-se até que a vida média do protão era infinita

Logo, obtém-se a expressão vectorial da força de interacção repulsiva entre fontes, e entre

sumodouros, e a força atractiva 4entre fontes e4 sumidouros :

$$\vec{F} = \frac{\rho.D_1 D_2}{4\pi.a}\vec{e}_x \qquad (106)$$

De acordo com (98), a força de interacção entre turbilhões é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{\rho.\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi.a}\vec{e}_x \qquad (107)$$

Proposição:

1. Turbilhões do mesmo sentido repelem-se, e de sentidos opostos atraem-se;

2. Para manter um turbilhão numa posição fixa é preciso exercer sobre ele uma força finita;

Tratando-se de duas linhas rectas de turbilhões é necessário uma força finita por unidade de comprimento;

3. Força de interacção entre duas correntes eléctricas rectilíneas indefinidas no vácuo

A expressão deste campo, em coordenadas polares,no plano normal ao suporte da distribuição é:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi.\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_\theta}{r} \qquad (108)$$

Trata-se de um campo irrotacional derivando do potencial escalar:

$$\varphi^* = -\frac{\lambda}{2\pi.\varepsilon_0}\ln r \quad (r > 0) \qquad (109)$$

Para $r > 0$ existe uma ''função de corrente do campo eléctrico``, ψ^* ,relacionada com φ^* pelas condições de Cauchy-Riemann, em coordenadas cilíndricas, vindo:

$$\psi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\theta \quad (\theta \in R) \qquad (110)$$

Da expressão $\vec{E} = -grad\varphi^*$ vem:

$$div\vec{E} = -Lap\varphi^* = -\frac{\lambda}{2\pi.\varepsilon_0}Lap\ln r$$

Da igualdade: $Lap\ln r = -2\pi\delta(\vec{r})$ vem:

$$Lap\varphi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(-2).\pi.\delta(\vec{r}) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})$$

Das expressões de φ^*, ψ^* vem:

$$W^* = \varphi^* + i\psi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r + (\theta + 2\pi] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln Z$$

Portanto:

$$W^* = -\frac{\lambda}{2\pi.\varepsilon_0}\ln Z \qquad (111)$$

Obtivemos para uma distribuição rectilínea de carga de densidade linear λ uma infinidade de ramos univocos lolomorfos, constituindo uma <u>função analítica global</u> com um ponto de ramificação em $Z = 0$. e outro em $Z = \infty$.

O potencial W^* tem um ponto de ramificaçãp logarítmica em $Z = 0$ e outro em $Z = \infty$ tendo os seus valores no recta projectiva complexa $P\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existindo neste espaço e sendo aí determinado :

$$\forall \theta \in R \qquad \lim W^*(Z) = -\frac{\lambda}{2\pi.\varepsilon_0}\lim[\ln r + i(\theta + 2k\pi)]$$

Em $P\mathbb{C}$ faz-se a identificação:

$$\forall \theta \in R \quad \pm\infty \pm i\theta = \infty$$

Este limite existe, no sentido de ser único, porque a compactificação de $\mathbb{C}$ é feita á custa de um só ponto impróprio. Se essa compactificação tivesse sido feita com mais que um ponto impróprio, por maioria de razão com uma infinidade numerável de pontos impróprios, um por cada ramo holomorfo da função analítica global W^* , não existiria $\lim\limits_{Z\to 0} W^*$ ou $\lim\limits_{Z\to 0}\ln Z$. $Z = 0$ sendo um ponto de ramificação logarítmica é uma ***singularidade essencial*** pois quando Z se aproxima indefinidamente de $Z_0 = 0$, a função $\ln Z$ assume valores arbitrariamente próximos de qualquer valor dado, em particular ∞. Por isso não podemos dizer que seja $\lim\limits_{Z\to o}\ln Z = \infty$. Se usarmos o espaço $P\mathbb{C}$ como o Universo desta teoria podemos dizer que é: $\lim\limits_{Z\to}\ln Z = \infty$.

Sabemos que duas cargas eléctricas do mesmo sinal se repelem tal sucede com dois turbilhões de sentido oposto, e também com duas fontes de débito positivo (fontes propriamente ditas) ou de débito negativo (sumidouros). Se são duas fontes de débito positivo chamam-se fontes própriamente ditas; são ambas de débito negativo chamam-se sumidouros ', Então duas fontes repelem-se entre si, bem como sucede com dois sumidouros; Sabemos também que duas cargas eléctricas de sinais diferentes se atraem, tal como turbilhões do mesmo sentido ; igualmente se atraem fontes (própriamente ditas). Sabemos também que duas cargas eléctricas de sinais diferentes se atraem, o que sucede igualmente com dois turbilhões de sentidos opostos ou com conjuntos de fontes (uma de débito positivo e outra de débito negativo).

De (63) podemos concluir que a força de interacção entre duas distribuições electrostáticas, uniformes, rectilíneas, indefinidas e paralelas, de carga eléctrica, de densidades lineares λ_1, λ_2 à distancia $\mathbf{r} = \mathbf{2a}$, é dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0\mathbf{r}} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0\mathbf{a}} \qquad (112)$$

Notemos que cargas eléctricas do mesmo sinal se repelem bem como turbilhões do mesmo sentido e fontes com débitos do mesmo sinal. Portanto se as duas distribuições rectilíneas paralelas estiverem á distância $r = 2a$ teremos (112):

Notemos que cargas eléctricas do mesmo sinal se repelem bem como fontes tendo conjuntamente o mesmo sinal, ou turbilhões de sentidos diferentes ; atraem-se se as cargas eléctricas tiverem sinais opostos, ou em M.dosF.se as fontes tiverem débitos com sinal diferente, sendo uma delas uma fonte e a outra um sumidouro, ou se forem turbilhões de sentidos iguais.

Então:

$$\frac{\rho.D_1 D_2}{4\pi.a} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi.\varepsilon_0 a} \qquad (113)$$

Podemos de algum modo considerar as cargas eléctricas como fontes das partículas do meio subquântico ,partículas essas que na ausência do campo electromagnético devido á carga eléctrica, teriam um movimento aleatório, bem como todo o seu comportamente global, mas que na presença do campo e.m. devido ás cargas adquirem trajectórias previlegiadas, que poderiam ser eventualmente as linhas de força do campo.

Em particular podemos ter: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,\ D_1 = D_2 = D$ se forem iguais as densidades lineares de carga das duas distribuições e os correspondentes débitos das correspondentes fontes, à distância $r = 2a$ vem:

$$\frac{\rho D^2}{4\pi.a} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Portanto:

$$\rho.D^2 = \frac{\lambda^2}{\varepsilon_0 a} \qquad \Leftrightarrow \qquad D = \frac{\lambda}{\rho.\varepsilon_0.a} \qquad (114)$$

Fixemo-nos agora nos turbilhões:

Neste último caso a respectiva força,(turbilhões do mesmo sentido atraem-se, de sentido diferente repelem-se) ,como já vimos, é dada por (98):

$$F = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi.a}$$

Logo, se for possível identificar as expressões (98) e (106) poderemos eventualmente concluir que as referidas distribuições de carga eléctrica, de densidades λ_1 e λ_2 dão lugar a vórtices de intensidades respectivamente Γ_1 e Γ_2:

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a} \qquad (115)$$

Se for $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ vem:

$$\frac{\rho.\Gamma^2}{4\pi.a} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Logo:

$$\Gamma = \pm i\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_0\rho}} \qquad (110)$$

Consideremos dois turbilhões de intensidades de vórtice eventualmente diferentes:

$$\Gamma_1 = \pm i\frac{\lambda_1}{\sqrt{\varepsilon_0\rho}}; \quad \Gamma_2 = \pm i\frac{\lambda_2}{\sqrt{\varepsilon_0\rho}}$$

Sendo como se viu:

$$F^C = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi.a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi.a}\vec{e}_x$$

Pode concluir-se que:

$$M^C = o \qquad (116\text{-}1) \qquad\qquad \vec{M} = o \qquad (116\text{-}2)$$

De (63) conclui-se que a força de interacção entre duas distribuições electrostáticas uniformes, rectilíneas, indefinidas de densidades lineares λ_1 e λ_2, à distância $r = 2a$, por unidade de comprimento de cada uma delas, é igual à força de interacção entre duas linhas de turbilhões de intensidades Γ_1 e Γ_2 se se verificar:

$$\Gamma_1 = \pm\lambda_1 i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\rho}}; \quad \Gamma_2 = \pm\lambda_2 i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\rho}}$$

Podemos concluir que duas distribuições de carga eléctrica ,rectilíneas, paralelas entre si,à distância $r = 2a$, de densidades lineares λ_1, λ_2, interactuam como duas linhas rectilíneas paralelas de turbilhões de intensidades de vórtices complexas ,dadas pela expressão sintética:

$$\Gamma_k = \pm\lambda_k i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\rho}} \quad k = 1,2 \qquad (117)$$

Já apresentámos o potencial complexo da velocidade num turbilhão e o potencial complexo da força de interacção electrosrtática , respectivamente:

$$W = -\frac{\lambda}{2\pi.\varepsilon_0}\ln Z \quad (118) \quad ; \quad W^* = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln Z \quad (119)$$

Vamos admitir que os potenciais complexos da velocidade, $W(Z)$, e do campo eléctrico, $W^*(Z)$, têm o mesmo tipo de ponto crítico (ponto de ramificação logarítmica) no mesmo ponto de $\mathbb{C}$ $(Z = o)$ existindo e foirmemos o cociente:

$$\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{W}^*} = \mathbf{K}(\varepsilon_0, \rho) \qquad (120)$$

Então, ser $\Gamma = iD$ vem:

$$K(\varepsilon_0\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2\pi}{i\Gamma}\right) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0\Gamma} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 i.D} = -i\frac{\lambda}{\varepsilon_0 D}$$

na qual ρ é a densidade de massa do meio subquântico e Γ a intensidade do vórtice -uma função . De (23) e (68) vem ($\Gamma = iD$) .Logo:

$$D = -i.[-i\lambda.K(\varepsilon_0, \rho)] = -\lambda.K(\varepsilon_0, \rho) \qquad (121)$$

Consideremos duas distribuições de carga eléctrica rectilíneas uniformes, estáticas, de densidade λ_1 e λ_2 em $Z = -a$ e $Z = a$, respectivamente. O potencial complexo dessa associação é:

$$W^*(Z) = -K(\varepsilon_0, \rho)\left[\frac{\lambda_1}{2\pi.\varepsilon_0}\ln(Z+a) + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(Z-a)\right]$$

Derivando, obtém-se:

$$W^{*'} = -\frac{K(\varepsilon_0, \rho)}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\lambda_1}{Z+a} + \frac{\lambda_2}{Z-a}\right]$$

$$W(Z)^{*'2} = \frac{K(\varepsilon_0, \rho)^2}{4\pi^2}\left[\frac{\lambda_1^2}{(Z+a)^2} + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(Z-a)(Z+a)} + \frac{\lambda_2^2}{(Z-a)^2}\right] =$$

$$= \frac{K^2}{4\pi^2}\left[\frac{\lambda_1^2}{(Z+a)^2} + \frac{\lambda_1\lambda_2/a}{Z-a} - \frac{\lambda_1\lambda_2/a}{(Z-a)^2} + \frac{\lambda_2^2}{(Z-a)^2}\right]$$

Logo substituindo em (88), vem:

$$\mathbf{F}^C = \frac{i\rho}{2}\frac{K^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\oint_{(C)}[\ldots]dZ = i\frac{\rho}{2}\frac{K^2}{4\pi^2\varepsilon_0}2\pi i\frac{\lambda_1\lambda_2}{a}$$

Simplificando, vem:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^C = -\frac{\rho K^2\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0{}^2} \tag{122}$$

vindo, portanto:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^C = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{com } \mathbf{r=2a}$$

Analogamente, $M = M^C = o$.

3. Interacção de correntes eléctricas

Vamos recorrer à expressão (84) da indução magnética devida a uma corrente I_1 na situação esquematizada na Fig.3. O campo de indução magnética é irrotacional e solenoidal admitindo um potencial complexo. Consideremos a indução magnética devida a uma corrente rectilínea indefinida:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{I}_1 \wedge \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi . r^2}\vec{e}_\theta \tag{123}$$

Vamos agora determinar o potencial complexo escalar de $\vec{B}$, $\widetilde{W}$. Se $\vec{B}$ é irrotacional, é um campo gradiente; seja $\widetilde{\varphi}$ o seu potencial escalar:

$$\vec{B} = grad\widetilde{\varphi}$$

Se $\vec{B}$ é solenoidal , $div\vec{B} = 0$. Então o complexo $B^c = B_x - iB_y$ deriva de um potencial complexo holomorfo:

$$\overline{B}^c(Z) = B_x + iB_y = \frac{d\widetilde{W}}{dZ}$$

O gradiente em coordenadas polares é:

$$grad\widetilde{\varphi} = \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial z}$$

Atendendo à expressão do gradiente e á da indução magnética:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\vec{e}_\theta$$

Vem:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi . r}$$

Logo:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\mu_0}{2\pi} I\theta$$

A função de corrente é calculável pelas condições de holomorfia que são:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}$$

Logo: (81) dá-nos o conjugado do potencial complexo da indução magnética devida a aI_1:

$$\overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}_1 = -\mathbf{i}\frac{\mu_0 \mathbf{I}_1}{2\pi}\ln \mathbf{Z} \qquad (124)$$

Se I_1 está em $\mathbf{Z} = -\mathbf{a}$, vem:

$$\overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}_1 = -\mathbf{i}\frac{\mu_0 \mathbf{I}_1}{2\pi}\ln(\mathbf{Z}+\mathbf{a}) \qquad (125)$$

Se I_2 está em $\mathbf{Z} = \mathbf{a}$:

$$\overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}_2 = -\mathbf{i}\frac{\mu_0 \mathbf{I}_2}{2\pi}\ln(\mathbf{Z}-\mathbf{a}) \qquad (126)$$

Para a sobreposição das duas singularidades tem-se o potencial:

$$\overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}} = \overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}_1 + \overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}_2 = -\mathbf{i}\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\mathbf{I}_1 \ln(\mathbf{Z}+\mathbf{a}) + \mathbf{I}_2 \ln(\mathbf{Z}-\mathbf{a})\right] \qquad (127)$$

Logo:

$$\overline{\mathbf{B}}^{C} = \mathbf{B}_x + \mathbf{i}\mathbf{B}_y = \overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}(\mathbf{Z}) = -\frac{\mathbf{i}}{2\pi}\mu_0\left[\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Z}+\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Z}-\mathbf{a}}\right] \qquad (128)$$

O potencial da velocidade para um conjunto de dois turbilhões de intensidades Γ_1 em $z = -a$ e Γ_2 em $z = a$ é dado por:

$$W(Z) = -\frac{i}{2\pi}\left\{\Gamma_1 \ell n(Z+a) + \Gamma_2 \ell n(Z-a)\right\}$$

Por analogia com (111) vamos supor que existe uma função $\mathbf{K}^*$ tal que:

$$\frac{\mathbf{W}}{\overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}} = \mathbf{K}^*(\mu_0, \rho) \qquad (129)$$

Então, respectivamente das expressões (90) e (121) vem o potencial de uma associação de dois turbilhões:

$$W(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ell n\left(\frac{Z-a}{Z+a}\right)$$

$$\overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}} = \overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}_1 + \overline{\overline{\tilde{\mathbf{W}}}}_2 = -\mathbf{i}\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\mathbf{I}_1 \ln(\mathbf{Z}+\mathbf{a}) + \mathbf{I}_2 \ln(\mathbf{Z}-\mathbf{a})\right]$$

$$-\frac{i}{2\pi}[\Gamma_1 \ln(Z+a)+\Gamma_2 \ln(Z-a)] = K^{*}\cdot\left(-i\frac{\mu_0}{2\pi}\right)[I_1 \ln(Z+a)+I_2 \ln(Z-a)]$$

Portanto $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ estão relacionadas com Γ_1 e Γ_2 pela expressão:

$$\Gamma_i = \mu_0 K^{*}(\mu_0, \rho)I_i \qquad (130)$$

Se admitirmos que uma corrente eléctrica I dá lugar na região vazia circundante (em Γ_i figuram, respectivamente, a permeabilidade magnética μ_o e a permitividade eléctrica ε_0 do vácuo) a um vórtice livre do meio subquântico, as expressões (124) traduzirão um fenómeno físico efectivo e não apenas uma analogia ocasional de formalismo matemático.

A serem correctas as hipóteses feitas e as conclusões a que chegámos parece verosímil que o campo electromagnético se identifique com um movimento do meio subquântico: a indução magnética é proporcional à vorticidade do meio subquântico, $\vec{B} = -2\vec{\omega}$; Procuremos analizar a segunda das variáveis:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Suponhamos que uma partícula pontual percorre uma trajectória qualquer em R^3,compatível com as ligações a que essa partícula está constrangida. Suponhamos também que um observador acompanha o movimento da partícula pontual referida , sendo solidário com ela e nela residindo. O observador durante o movimento do ponto móvel sobre a trajectória, que é suposta suficientemente regular, pode considerar que a partícula pontual está instantaneamente imóvel em cada instante t , i.é o ponto móvel está fixo no intervalo $\left(t - dt/_2 , t + dt/_2\right)$.A aceleração, tem a expressão geral:

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{d\vec{u}}{dt}(P) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(P) + \vec{u}(P).grad\vec{u}(P)$$

O observador, por ser solidário com o ponto móvel sobre a trajectória descrita e que portanto podemos confundir com esse ponto, tem velocidade $\vec{u}(t) = 0$, nula em relação a ele; No intervalo $\left(t - dt/_2 , t + dt/_2\right)$ podemos então considerar nulo o termo de advecção, $\vec{u}(t).grad\vec{u}(t) = 0$,vindo: $\vec{\gamma}(t) = \partial\vec{u}/_{\partial t}$. Então a derivada temporal substancial ,que é a aceleração, $d\vec{u}/_{dt}$ reduz-se à derivada local $\partial\vec{u}/_{\partial t}$,vindo instantaneamente $d\vec{u}/_{dt} = \partial\vec{u}/_{\partial t}$.Concluímos que $\partial\vec{u}/_{\partial t}$ é a força que ***numa vizinhança suficientemente estreita de qualquer instante, t***, está aplicada ao ponto corrente P(t)

O termo $grad\left(u^2/2\right)$ é o gradiente da energia cinética da unidade de massa do ponto em movimento; e parece ser interpretável como a força exercida, pela partícula em movimento com a energia cinética por unidade de massa dada $u^2/2$, sobre um obstáculo .Essa força é ''transportada`` pelo ponto móvel ao longo da trajectória. Se o ponto em movimento está sujeito, por unidade de massa , a uma força $\partial\vec{u}/\partial t$, digamos melhor ''transporta`` essa força, e, possuindo a energia cinética $u^2/2$,''transporta'' por esse facto a força que resulta dessa energia cinética, $grad\left(u^2/2\right)$ o ponto material está sugeito ,ou ``transporta`` instantaneamente a força total $\vec{E} = \partial\vec{u}/\partial t + grad\left(u^2/2\right)$ Esta explicação do sentido físico do vector $\vec{E}$ não é totalmente convincente. Mas podemos sem dúvida afirmar que :

Em regime estacionário, $\vec{E}$ é a força que a unidade de massa do fluido exerce sobre o meio circundante quando a sua energia cinética especifica for $u^2/2$

Do exposto podemos concluir que duas correntes eléctricas paralelas indefinidas de intensidades I_1 e I_2 exercem, uma sobre a outra, a mesma força de interacção que duas linhas de turbilhões, paralelas e indefinidas, de intensidades Γ_1 e Γ_2, dadas por (124). Substituindo (124) em (98) vem a expressão:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\rho\mu_0^2\mathbf{K}^{*2}(\mu_0,\rho)\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2}{4\pi\mathbf{a}}\vec{\mathbf{e}}_x \qquad (131)$$

A expressão (87) é:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2}{2\mathbf{a}}\vec{\mathbf{e}}_x$$

Para se identificarem os valores algébricos das forças que figuram em (125) e (87) basta tomar:

$$\rho\mu_0\mathbf{K}^{*2} = -1 \qquad (132)$$

vindo então:

$$\mathbf{K}^* = \pm\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{\rho\mu_0}} \qquad (133)$$

Obtivemos a expressão explícita de duas funções $\mathbf{K}^*(\mu_0,\rho)$ satisfazendo às especificações impostas.

A variável ρ que figura em (127) e que desaparece na expressão da força de interacção (87) parece interpretável como a densidade de massa do meio subquântico.

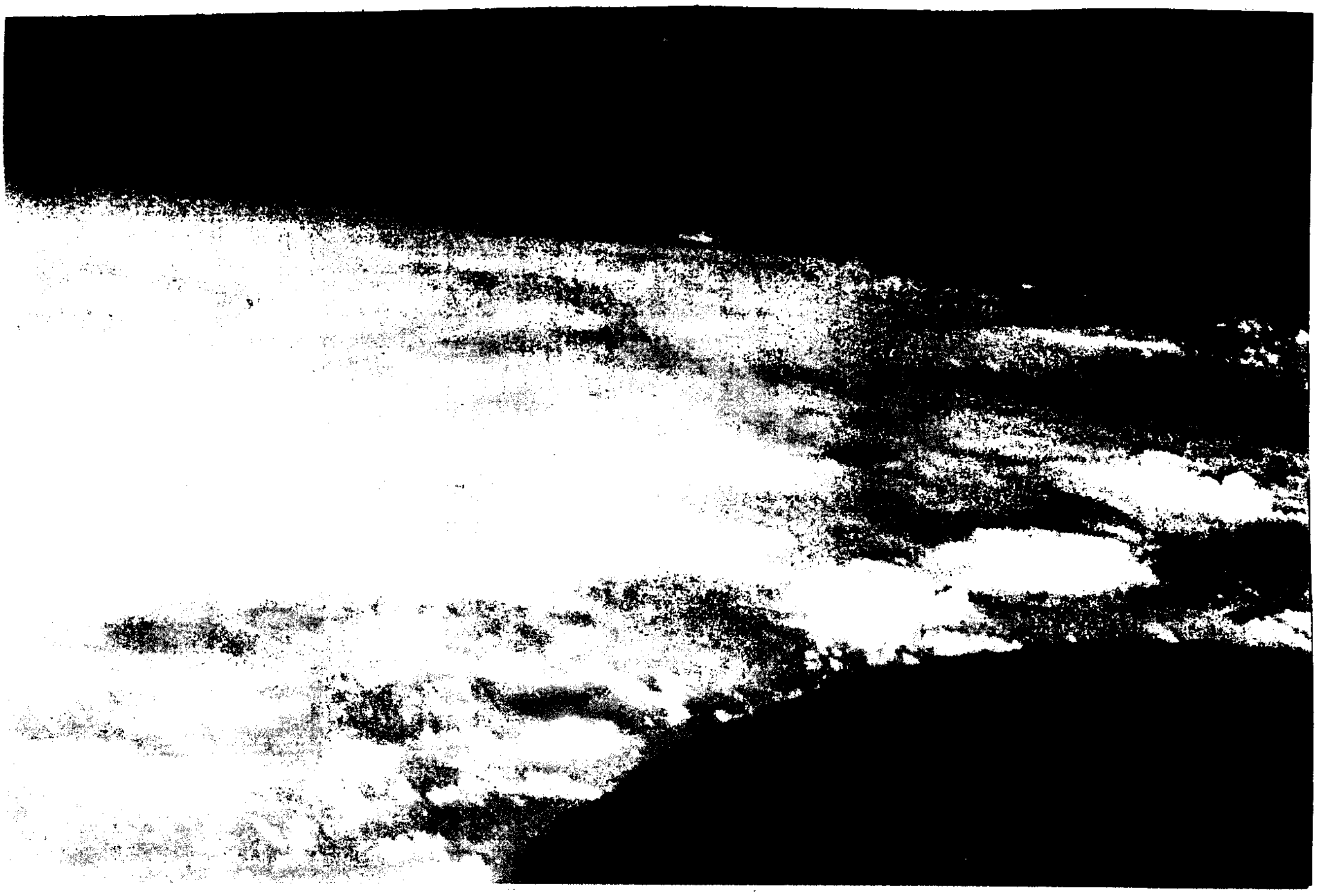


Fig. 8. Fotografia da Terra apresentando em segundo plano a Lua, tirada de bordo da Apolo-8, no Natal de 1968.

Destaca-se a limitação externa da atmosfera terrestre, a grande altitude.

Referências :

[1] . Germain, P.; Mecanique des Milieux Continus, 1962, Massont et C$^{ie.}$ Editeurs, Paris.

[2] . Palacios J.; Electricidad y Magnetismo, 1959, Editorial Espasa-Calpe, S.A., Madrid.

[3] . Peixoto, J.P.; Lições da Cadeira de Meteorologia, F.C.U.L., 1972.

Capitulo VIII

Uma generalização não linear possível das Equações de DÁlembert dos potenciais escalar do campo eléctrico e do potencial vector da indução magnética. Existência eventual de ondas electromagnéticas não lineares propagando-se no vácuo

1. Generalização não linear da Equação de DÁlembert para o potencial da velocidade.

Em cosmologia admite-se que o vácuo pode comportar-se como um meio não linear, Sendo sede de propagação de ondas electromagnéticas não lineares. Não chegámos por agora a tentar relacionar o esboço de teoria que vamos expor com a Equação KVW

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

ou com a equação de Schroedínger não linear :

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2|\psi|^2 \psi$$

A primeira destas equações que é admitida em M.Newt.. nem sequer é covariante para as transformações de Galileu, o que constitui uma dificuldade, e muito menos o é para as transformações de Lorentz., Passando-se o mesmo com a Equação N.L.S :

Começamos porconsiderar a equação de ondas válida para o potencial das velocidades: Vamos partir de uma generalização não linear da Equação de DÁlembert para o potencial das velocidades de um fluido inviscido, válida em particular em escoamentos de grande n^0 de Mach.

$$Lap\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t} = \frac{\xi}{\rho} + \left\{ 2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{(grad\varphi)^2}{2}\right]\right\} (1)$$

Vamos esboçar uma teoria possível das ondas e.m. não lineares admitindo a hipótese de Broglie do Meio Subquântico *.Admitimos que o meio suquântico adquire trajectórias previlegiadas na presença de um campo e.m. ,gozando de propriedades particulares,e !*

que são as linhas integrais da equação

Calculemos o gradiente de ambos os membros dessa equação:

$$Lapgrad\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} grad\varphi = grad\left(\frac{\xi}{\rho_m}\right) + \frac{1}{a^2}\left\{grad\left[2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + grad(grad\varphi)|grad\varphi|\right]^2\right\} (1')$$

(1')

Pelo teorema de Helmholtz $\vec{u} = grad\varphi + rot\vec{a}$; $\vec{a} = \psi.\vec{e}_3$. Desta última expressão vem:

$$rot\vec{a} = -\vec{e}_z \wedge grad\psi = grad\psi \wedge \vec{e}_z \qquad (2)$$

Portanto:

$$\vec{u} = grad\varphi - \vec{e}_z \wedge grad\psi \qquad (2)$$

Se omeio subquântico for invíscido for incompressível e irrotacional,

$$grad\varphi = rot\vec{a} \quad (\vec{a} = \psi.\vec{e}_3)$$

Vem então:

$$grad\varphi = -\vec{e}_z \wedge grad\psi \qquad (3)$$

Obtivemos uma equação não linear ,fundamentada na Física de Newton, possivelmente covariante para o grupo deLorentz., e que será eventualmente susceptível de traduzir a parte determinista do comportamento das partículas materiais que guia, que são aqui os fotões .A boa equação deve ter termos traduzindo o comportamento aleatório dos fotões sob a acção aleatória dos choques que sofrem pelo meio subquântico.

Se o escoamento do meio subquântico for irrotacional ,$\vec{u} = grad\varphi$ .Neste caso $\vec{A} = -\vec{u}$, e portanto: $\vec{B} = rot\vec{A} = rot.(-\vec{u}) = 0$.

Vamos voltar à hipótese anterior $\vec{A} = k_1\vec{A} = -k_1\vec{u}$, sendo $\vec{B} = rot\vec{A} = -rot\vec{u} = -2\vec{\omega} = 0$

Um campo e.m. pode propagar-se por ondas não lineares se satisfizer à equação de ondas e.m. obtida da correspondente equação da Mecânica (1),fazendo as substituições:

$$\vec{B} = -2\vec{\omega}$$

Se numa região do meio subquântica existe uma vorticidade $\vec{\xi} = 2\vec{\omega}$ existe concomitantemente uma indução magnética $\vec{B}. = -\vec{\xi}$:

A indução magnétia $\vec{B}$ relacionada com a vorticidade do meio subquântico pela expressão anterior Então a indução magnétic $\vec{B}$ a é igual á parte o sinal á vorticidade $\vec{\xi}$ do meio subquantico que determina a existência do campo:

$$\vec{B} = -\vec{\xi}$$

Conclusão: A hipótese cosmológica de se poderem propagar no vácuo do Universo ondas e.m. não lineares, a ser verdadeira, permite-nos calcular o valor nuérico da constante de proporcionalidade entre as grandezas hidrodinâmicas que inicialmente fopram postuladas e às grandezas e.m. que lhes são correspondentes devem ser proporcionais: p.ex. $\vec{E} = k_1\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{D} = k_1\vec{D}$, $\vec{B} = k_1\vec{\boldsymbol{B}}$, $\vec{A} = k_1\vec{A}$ *etc.*

Esta hipótese cosmológica, se vier a ser aceite, constitui indubitávelmente uma comprovação brilhante de que, mesmo que a natureza do campo e. m. se não reduza necessariamente à Hidrodinâmica do meio subquântico, é tão fortemente condicionada por ela, que o comportamento das partículas elementares mergulhadas no meio subquântico está indessoluvelmente ligado ao comportamento hidrodinâmico deste meio : OVácuo (Meio subquântico) e as partículas materiais, de certo modo entidades contraditórias, condicionam-se mútua e reciprocamente: A sua contradição forma uma parte do seu sentido.

Uma das equações às quais deve satisfazer neste caso o campo e. m. é

$$\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left|\vec{A}\right|^2 = 0 \ .$$

O teorema de Helmholtz no plano è :

$$\vec{u} = -grad\varphi + rot\vec{a} = -grad\varphi - i.\vec{e}_z \wedge grad\psi \quad ; \qquad (\vec{a} = \psi.e_3)$$

Admitamos que este escoamento admite superfícies de Lamb globalmente regulares . Podemos tomar sobre elas um sistema de linhas coordenadas curvilíneas ortogonais $\varphi = C^{te}, \psi = C^{te}$.sob a condição de o fluido não ter pontos de estagnação sobre a superfície de Lamb.

Seja $\vec{u}$ velocidade do fluido. A relação : $|J| = \dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = |\vec{u}|^2 \neq 0,\infty$, sendo x,y coordenadas cartesianas sobre o plano onde se projecta, ortogonalmente (sem perda de generalidade), a superfície de Lamb é condição suficiente de invertibilidade dasfunções $\varphi = \varphi(x,y)$, $\psi = \psi(x,y)$, definindo as funções inversas $x = x(\varphi,\psi)$, $y = y(\varphi,\psi)$.

Neste caso x, y,. podem ser usadas como coordenadas sobre a variedade 2-dimensional de Lamb. Notemos que portanto só há garantia de invertibilidade suficientemente longe dos pontos de estagnação do fluido..(Note-se também que a situação $|J| = |\vec{u}| = \infty$, sendo $\vec{u}$ a velocidade do fluido, é interditada pela T da Relatividade R é portanto deve ser descartada.)

No caso de o movimento do fluido poder se descrito pelo teorema de Helmholtz e admitir um potencial complexo holomorfo. Oteorema de Helmholtz dá lugar a uma formulação particularmente simples, que resulta das condições de Cauchy-Riemann.

Se o campo de velocidade for irrotacional temos necessariamente

$$\vec{u} = grad\varphi$$

sendo então supérfluo o termo aditivo rotacional: Se o quisermos incluir para manter a expressão formal do teorema de Helmholtz, esse termo é sempre igual a um gradiente e pode ser absorvido em $grad\varphi$.Pode ter lugar a igualdade $grad\varphi = rot\vec{a}$ ($\vec{a} = \psi.\vec{e}_3$)

Se o escoamento além de irrotacional $(\vec{u} = grad\varphi)$ for incompressível, $(div\vec{u} = 0)$

Vindo:

$$\mathrm{Lap}\,\varphi = 0\,.$$

Como vimos em escoamentos planos o teorema de H.,é :

$$\vec{u} = grad\varphi + rot\vec{a} = grad\varphi - \vec{e}_3 \wedge grad\psi = grad\varphi + grad\psi \wedge \vec{e}_3 \qquad (\ \vec{a} = \psi.\vec{e}_3\,)$$

Se o escoamento for irrotacional e solenoidal (dizem-se solenoidais os escoamento nos quais $div\vec{u} = 0$) .então: $divgrad\vec{u} = Lap\vec{u} = 0$. Sabemos que para um escoamento admitir um potencial escalar complexo (isto é fora de uma vizinhança dos pontos de estagnação) deve esse potencial ser holomorfo.

Fixemo-nos no caso em que é:

$$grad\varphi = rot\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad grad\varphi = grad\psi \wedge \vec{e}_3 \qquad (6)$$

Equação que tem soluções para fluidos irrotacionais solenoidais (isto é sem fontes.

Desta última equação saem as condições de holomorfia:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial y} - \vec{e}_2 \frac{\partial\psi}{\partial x} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right\}$$

Logo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (7)$$

Vimos que é sob a condição de holomorfia de W :

$$grad\varphi = rot(\psi.\vec{e}_3) = grad\psi \wedge \vec{e}_3$$

Sendo a igualdade anterior equivalente às condições de Cauchy-Riemann.

...

Vamos substituir na equação da Acústica :

$$Lap\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\xi}{\rho} + \left\{2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{(grad\varphi)}{2}\right]\right\} \qquad (8)$$

Calculemos o gradiente de ambos os membros da equação anterior e atendamos que se o escoamento for irrotacional se tem:

$\vec{u} = grad\varphi \; ; \vec{A} = -\vec{u} \;\; \vec{A} = k_1\vec{A}. \Rightarrow grad\varphi = \vec{u} = -\vec{A}$

$$Lapgrad\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}grad\varphi = -\frac{\xi}{\rho}\vec{n} + \left\{2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial}{\partial t}grad\varphi\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{1}{2}grad\varphi\right]\right\}$$

(9)

O vector unitário $\vec{n} = \vec{A}/A$ foi introduzido por se tratar de uma equação vectorial onde não tem sentido haver temos aditivos escalares.

Então vem:

$$Lap(-\vec{A}) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\vec{A}) = \frac{\xi}{\rho}\vec{n} + \{2.(-\vec{A})\}grad\left(-\frac{\partial}{\partial t}(-\vec{A})\right) + (-\vec{A})\frac{1}{2}grad(-\vec{A})$$

Logo:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\xi}{\rho}\vec{n} - 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A}$$

Por ser $\vec{A} = k_1\vec{A}$ $(k_1 = 1)$ e fazendo formalmente tender $a \to c$ na equação anterior, vem:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{f} + 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A} \qquad (10)$$

Sendo f o termo hidrodinâmico de fonte que na passagem para a equação electromagnética deve dar lugar a uma grandeza e.m..

Obtivemos uma equação não linear, que por linearização se deve reduzir a (5):

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

Esse facto impõe que seja na passagem para a equação não linear: $\vec{f} = \xi/\rho\,\vec{n} \to \mu_0\vec{J}$.

Do mesmo modo: $a \to c$.

A massa $0 \le M \in R_+ \cup \{0\}$ de um conjunto de pontos satisfaz aos postulados que lhe garantem a qualidade de ´´Medida de Conjunto``; Se quizéssemos que as cargas eléctricas $Q \in R$ fossem também medidas de conjunto deveríamos generalizar a teoria da medida para que ela pudesse assumir valores negativos, o que já foi feito para as probabilidades (que são medidas normadas).

Foi possível termos concluído como hipótese consistente, que entre as grandezas e.m. $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ *etc.* e as correspondentes grandezas hidrodinâmicas $\vec{\mathbb{E}}, \vec{\mathbb{D}}, \vec{\mathbb{B}}, etc.$ existe uma relação de proporcionalidade, k_1, sendo:

$\vec{E} = k_1\vec{\mathbb{E}}$, $\vec{D} = k_1\vec{\mathbb{D}}$, $\vec{B} = k_1\vec{\mathbb{B}}, \vec{A} = k_1\vec{\mathbb{A}}, \ldots \Phi^* = k_1\varphi$. As equações de Euler permitiram

Considerações sobre a possibilidade de se propagarem no vácuo ondas e.m.não lineares ,paralelamente às ondas lineares, levaram-nos á conclusão de ser verosímil a hipótese $k_1 = 1$, o que implica a identidade , ao menos em termos de valores numéricos, entre os referidos campos e.m. e os correspondentes campos hidrodinâmicos.

Para tal efeito partimos da generalização não linear da equação de DÁlembert à qual em certas circunstâncias satisfaz o potencial da velocidade de um fluido invíscido num escoamento irrotacional, ($\vec{u} = grad\varphi$) sendo $a = \sqrt{dp/d\rho}$ a velocidade do som:

$$Lap\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\xi}{\rho} + \left\{2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{grad\varphi}{2}\right]\right\}$$

Esta equação é de natureza hidrodinâmica. Como já tínhamos feito :

$$\vec{u} = grad\varphi \quad ; \quad \vec{\mathbb{A}} = -\vec{u} \quad ; \quad \vec{A} = k_1\vec{\mathbb{A}}$$

Logo: $grad\varphi = -\vec{u} = \vec{\mathbb{A}} = k_1^{-1}\vec{A}$. Vamos também fazer $a \to c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Portanto vão fazer-se estas substituições na equação hodrodinâmica proposta ,o que nos conduz a:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -k_1\mu_0\vec{J} - k_1^{-1}\frac{1}{c^2}\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left|\vec{A}\right|^2 grad\vec{A} \quad (11)$$

Esta equação candidata a equação de ondas não linear governando $\vec{A}(x,y,z,t)$ no vácuo , deve também poder traduzir o comportamento das ondas electromagnéticas lineares, governadas pelas equações de DÁlembert da Electrodinâmica Linear. Se fizermos desaparecer os termos não lineares da equação anterior, vem:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -k_1\mu_0\vec{J} \quad (12)$$

Sob a condição de ser:

$$\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left|\vec{A}\right|^2 \to 0 \quad (13)$$

Ora para que a teoria das ondas não lineares se possa reduzir no limite à das ondas lineares a equação (12) deve poder reduzir-se a:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_o\vec{J} \quad (14)$$

Comparando (13) e (14),vem:

$$k_1 = 1$$

Parece-nos portanto verosímil que havendo identidade na estrutura analítica das equações do Electromagnetismo e da Mecânica dos Fluidos, sendo essa estrutura a das Equações de Maxwell , identificando-se além disso as grandezas electrotromagnéticas com correspondentes grandezas Hidrodinâmicas, o Campo Electromagnético se reduz de facto a um certo estado de movimento do meio subquântico, provavelmente como De Broglie o caracterizou.

Sabemos até onde tem ido o radicalismo da polémica entre Einstein-De-Brogliee e

os físicos ditos ''ortodoxos'' da Escola de Copenhagen. Essa polémica não é certamente menos acirrada da que ocorreu à mais de duzentos anos entre Newton, partidário da natureza corpuscular da luz, e Huygens que defendia a sua natureza ondulatória. Só De Broglie, Davisson e Germer já no século XX puderam provar que, pelo menos à escala do microsmos, os caracteres ondulatório e corpuscular não eram antagónicos mas necessariamente complementares. Diria talvez Gonseth: Corpúsculo e onda são noções conjugadas que só adquirem todo seu sentido quando tomadas uma em relação à outra. Nem uma nem outra têm existência autónoma. A sua contradição mútua forma uma parte do seu sentido.

Tais locubrações não são necessariamente mais que a enunciação de uma possibi-bilidade.

Estabelecida a correspondência formal entre as grandezas electromagnéticas e hidrodi-âmicas deduzir das referidas Equações de Maxwell da Hidrodinâmica , e por serem as grandezas e.m. e h. dadas pelos mesmos valores numéricos foi possível obter dessas equações as Equações de Maxwell do Electromagnetismo. Voltemos Às Equações de Euler, da Hidrodinâmica das quais só nos vamos fixar no primeiro membro (fórmula de Euler):,

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$$

Podemos definir o campo de forças (6-1) e (6.2), a saber:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) \qquad\qquad \vec{B} = -2\vec{\omega}$$

Raciocinando em termos de grandezas da M. dos F. podemos dizer que o movimento de um fluido se reduz à composição ou produto de três movimentos elementares da partículafluida: uma translação, uma deformação, e uma rotação.

Se o centro de massa da partícula se desloca ao longo de uma certa trajectória γ, e em cada instante ocupa sobre essa trajectória uma posição bem determinada $G(t) \in \gamma \in R^3$.

Vamos admitir a existência em cada ponto referido $G(t)$, de um sistema de referência, Σ_t deslocando-se ao longo de γ em R^3 paralelamente a si mesmo. Numa vizinhança do instante t, $\left(t - dt/2, t + dt/2\right)$, ou seja numa proximidade de $G(t) \in \gamma$ a partícula (suposta com extensão) sofre uma translação sobre Σ_t definida pela velocidade $\vec{u}[G(t)]$; $(G(t) \in \gamma)$, supondo que a partícula referida se desloca como um sólido rígido tendo apenas um movimento de translação rectilínea uniforme ao longo de γ .Podemos supor que a partícula permanece instantaneamente fixa em $\left(t - dt/2, t, t + dt/2\right)$em rela ção ao referencial Σ_t, constituindo esse facto a referida ***translação instantânea.***

Examinemos a expressão analítica do campo hidrodinâmico $\vec{E}$, à qual podemos dar a seguinte forma::

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \left[-grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]$$

O ***primeiro termo*** desta soma é $\partial \vec{u}/\partial t$, e representa a taxa de variação temporal local (rapidez de transformação) do vector $\vec{u}$ e caracteriza a ***translação da partícula***, (quanto à sua velocidade) , considerada a referida partícula como um sólido rígido.

O segundo termo é uma força cujo potencial escalar é a energia cinética do fluido por unidade de massa; é a taxa de variação espacial da energia cinética específica de uma partícula de massa constante unitária de um fluido, no caso mais geral compressível.

Se esta energia varia de ponto para ponto com uma certa velocidade, mantendo-se a massa constante ao longo do tempo, então durante o movimento há deformação da partícula, que deixa de poder ser vista como um sólido rígido.

O campo vectorial $\vec{E}$ caracteriza portanto a translação e a deformação da partícula

do fluido durante o seu movimento.

Vimos que a fórmula de Weber da aceleração comporta por fim, além dos termos já analisados, um termo $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_{Coriollis} = -2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{B}$. *Trata-se da aceleração de Coriollis , responsável pela rotação da partícula em torno de um dos seus eixos , que no*

seu movimento é a recta suporte de $\vec{\omega}$*,que é a sua velocidade angular. Na transposição para o Electromagnetismo, a rotação* $\vec{\omega}$ *,ou dito de outro modo a aceleração de Coriollis à qual está sujeita a partícula do meio subquântico, é responsável pela indução magnética.*

.

A massa $0 \leq M \in R_{+} \cup \{0\}$ de um conjunto de pontos satisfaz aos postulados que lhe garantem a qualidade de ''Medida de Conjunto``; Se quizéssemos que as cargas eléctricas $Q \in R$ fossem também medidas de conjunto deveríamos generalizar a teoria da medida para que ela pudesse assumir valores negativos, o que já foi feito para as probabilidades (que são medidas normadas).

Foi possível termos concluído como hipótese consistente, que entre as grandezas e.m. $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ $etc.$ e as correspondentes grandezas hidrodinâmicas $\vec{\mathbb{E}}, \vec{\mathbb{D}}, \vec{\mathbb{B}}, etc.$ existe uma relação de proporcionalidade, k_1, sendo:

$\vec{E} = k_1 \vec{\mathbb{E}}$, $\vec{D} = k_1 \vec{\mathbb{D}}$, $\vec{B} = k_1 \vec{\mathbb{B}}, \vec{A} = k_1 \vec{\mathbb{A}}, ... \Phi^* = k_1 \varphi$. As equações de Euler permitiram

<u>Considerações sobre a possibilidade de se propagarem no vácuo ondas e.m.não lineares ,paralelamente às ondas lineares, levaram-nos á conclusão de ser verosímil a hipótese $k_1 = 1$, o que implica a identidade , ao menos em termos de valores numéricos, entre os referidos campos e.m. e os correspondentes campos hidrodinâmicos.</u>

Para tal efeito partimos da generalização não linear da equação de DÁlembert à qual em certas circunstâncias satisfaz o potencial da velocidade de um fluido invíscido num escoamento irrotacional, ($\vec{u} = grad\varphi$) sendo $a = \sqrt{dp/d\rho}$ a velocidade do som:

$$Lap\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\xi}{\rho} + \left\{2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{grad\varphi}{2}\right]\right\}$$

Esta equação é de natureza hidrodinâmica. Como já tínhamos feito :

$$\vec{u} = grad\varphi \quad ; \quad \vec{\mathbb{A}} = -\vec{u} \quad ; \quad \vec{A} = k_1 \vec{\mathbb{A}}$$

Logo: $grad\varphi = -\vec{u} = \vec{\mathbb{A}} = k_1^{-1}\vec{A}$. Vamos também fazer $a \to c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Portanto vão fazer-se estas substituições na equação hodrodinâmica proposta ,o que nos conduz a:

$$Lap\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-k_1\mu_0\vec{J}-k_1^{-1}\frac{1}{c^2}\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left|\vec{A}\right|^2 grad\vec{A} \quad (11)$$

Esta equação candidata a equação de ondas não linear governando $\vec{A}(x,y,z,t)$ no vácuo , deve também poder traduzir o comportamento das ondas electromagnéticas lineares, governadas pelas equações de DÁlembert da Electrodinâmica Linear. Se fizermos desaparecer os termos não lineares da equação anterior, vem:

$$Lap\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-k_1\mu_0\vec{J} \qquad (12)$$

Sob a condição de ser:

$$\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left|\vec{A}\right|^2 \to 0 \qquad (13)$$

Ora para que a teoria das ondas não lineares se possa reduzir no limite à das ondas lineares a equação (12) deve poder reduzir-se a:

$$Lap\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_o\vec{J} \qquad (14)$$

Comparando (13) e (14),vem:

$$k_1=1$$

Parece-nos portanto verosímil que havendo identidade na estrutura analítica das equações do Electromagnetismo e da Mecânica dos Fluidos, sendo essa estrutura a das Equações de Maxwell , identificando-se além disso as grandezas electrotromagnéticas com correspondentes grandezas Hidrodinâmicas, o Campo Electromagnético se reduz de facto a um certo estado de movimento do meio subquântico, provavelmente como De Broglie o caracterizou.

Sabemos até onde tem ido o radicalismo da polémica entre Einstein-De-Brogliee

os físicos ditos ''ortodoxos'' da Escola de Copenhagen. Essa polémica não é certamente menos acirrada da que ocorreu à mais de duzentos anos entre Newton, partidário da natureza corpuscular da luz, e Huygens que defendia a sua natureza ondulatória. Só De Broglie, Davisson e Germer já no século XX puderam provar que, pelo menos à escala do microsmos, os caracteres ondulatório e corpuscular não eram antagónicos mas necessariamente complementares. Diria talvez Gonseth: Corpúsculo e onda são noções conjugadas que só adquirem todo seu sentido quando tomadas uma em relação à outra. Nem uma nem outra têm existência autónoma. A sua contradição mútua forma uma parte do seu sentido.

Tais locubrações não são necessariamente mais que a enunciação de uma possibi-bilidade.

Estabelecida a correspondência formal entre as grandezas electromagnéticas e hidrodi-âmicas deduzir das referidas Equações de Maxwell da Hidrodinâmica , e por serem as grandezas e.m. e h. dadas pelos mesmos valores numéricos foi possível obter dessas equações as Equações de Maxwell do Electromagnetismo. Voltemos Às Equações de Euler, da Hidrodinâmica das quais só nos vamos fixar no primeiro membro (fórmula de Euler):,

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{u} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$$

Podemos definir o campo de forças (6-1) e (6.2), a saber:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = -2\vec{\omega}$$

Raciocinando em termos de grandezas da M. dos F. podemos dizer que o movimento de um fluido é se reduz à composição ou produto de três movimentos elementares da partículafluida: uma translação, uma deformação, e uma rotação.

os físicos ditos ''ortodoxos'' da Escola de Copenhagen. Essa polémica não é certamente menos acirrada da que ocorreu à mais de duzentos anos entre Newton, partidário da natureza corpuscular da luz, e Huygens que defendia a sua natureza ondulatória. Só De Broglie, Davisson e Germer já no século XX puderam provar que, pelo menos à escala do microsmos, os caracteres ondulatório e corpuscular não eram antagónicos mas necessariamente complementares. Diria talvez Gonseth: Corpúsculo e onda são noções conjugadas que só adquirem todo seu sentido quando tomadas uma em relação à outra. Nem uma nem outra têm existência autónoma. A sua contradição mútua forma uma parte do seu sentido.

Tais locubrações não são necessariamente mais que a enunciação de uma possibi-bilidade.

Estabelecida a correspondência formal entre as grandezas electromagnéticas e hidrodi-âmicas deduzir das referidas Equações de Maxwell da Hidrodinâmica , e por serem as grandezas e.m. e h. dadas pelos mesmos valores numéricos foi possível obter dessas equações as Equações de Maxwell do Electromagnetismo. Voltemos Às Equações de Euler, da Hidrodinâmica das quais só nos vamos fixar no primeiro membro (fórmula de Euler):,

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$$

Podemos definir o campo de forças (6-1) e (6.2), a saber:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) \qquad \vec{B} = -2\vec{\omega}$$

Raciocinando em termos de grandezas da M. dos F. podemos dizer que o movimento de um fluido é se reduz à composição ou produto de três movimentos elementares da partículafluida: uma translação, uma deformação, e uma rotação.

Se o centro de massa da partícula se desloca ao longo de uma certa trajectória γ , e em cada instante ocupa sobre essa trajectória uma posição bem determinada $G(t) \in \gamma \in R^3$.

Vamos admitir a existência em cada ponto referido $G(t)$, de um sistema de referência , Σ_t deslocando-se ao longo de γ em R^3 paralelamente a si mesmo. Numa vizinhança do instante t , $\left(t - \frac{dt}{2}, t + \frac{dt}{2}\right)$, ou seja numa proximidade de $G(t) \in \gamma$ a partícula (suposta com extensão) sofre uma translação sobre Σ_t definida pela velocidade $\vec{u}[G(t)]$; $(G(t) \in \gamma)$, supondo que a partícula referida se desloca como um sólido rígido tendo apenas um movimento de translação rectilínea uniforme ao longo de γ .Podemos supor que a partícula permanece instantaneamente fixa em $\left(t - \frac{dt}{2}, t, t + \frac{dt}{2}\right)$em rela ção ao referencial Σ_t, constituindo esse facto a referida ***translação instantânea.***

Examinemos a expressão analítica do campo hidrodinâmico $\vec{E}$, à qual podemos dar a seguinte forma::

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \left[-grad\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]$$

O ***primeiro termo*** desta soma é $\partial \vec{u}/\partial t$, e representa a taxa de variação temporal local (rapidez de transformação) do vector $\vec{u}$ e caracteriza a ***translação da partícula***, (quanto à sua velocidade) , considerada a referida partícula como um sólido rígido.

O segundo termo é uma força cujo potencial escalar é a energia cinética do fluido por unidade de massa; é a taxa de variação espacial da energia cinética específica de uma partícula de massa constante unitária de um fluido, no caso mais geral compressível.

Se esta energia varia de ponto para ponto com uma certa velocidade, mantendo-se a massa constante ao longo do tempo, então durante o movimento há deformação da partícula, que deixa de poder ser vista como um sólido rígido.

O campo vectorial $\vec{E}$ caracteriza portanto a translação e a deformação da partícula

A massa $0 \le M \in R_+ \cup \{0\}$ de um conjunto de pontos satisfaz aos postulados que lhe garantem a qualidade de ''Medida de Conjunto``; Se quizéssemos que as cargas eléctricas $Q \in R$ fossem também medidas de conjunto deveríamos generalizar a teoria da medida para que ela pudesse assumir valores negativos, o que já foi feito para as probabilidades (que são medidas normadas).

Foi possível termos concluído como hipótese consistente, que entre as grandezas e.m. $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ $etc.$ e as correspondentes grandezas hidrodinâmicas $\vec{\mathbb{E}}, \vec{\mathbb{D}}, \vec{\mathbb{B}}, etc.$ existe uma relação de proporcionalidade, k_1, sendo:

$\vec{E} = k_1\vec{\mathbb{E}}$, $\vec{D} = k_1\vec{\mathbb{D}}$,$\vec{B} = k_1\vec{\mathbb{B}}, \vec{A} = k_1\vec{\mathbb{A}},....\Phi^* = k_1\varphi$. As equações de Euler permitiram

<u>Considerações sobre a possibilidade de se propagarem no vácuo ondas e.m.não lineares ,paralelamente às ondas lineares, levaram-nos á conclusão de ser verosímil a hipótese $k_1 = 1$, o que implica a identidade , ao menos em termos de valores numéricos, entre os referidos campos e.m. e os correspondentes campos hidrodinâmicos.</u>

Para tal efeito partimos da generalização não linear da equação de DÁlembert à qual em certas circunstâncias satisfaz o potencial da velocidade de um fluido invíscido num escoamento irrotacional, $(\vec{u} = grad\varphi)$ sendo $a = \sqrt{dp/d\rho}$ a velocidade do som:

$$Lap\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\xi}{\rho} + \left\{2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{grad\varphi}{2}\right]\right\}$$

Esta equação é de natureza hidrodinâmica. Como já tínhamos feito :

$$\vec{u} = grad\varphi \qquad ; \qquad \vec{\mathbb{A}} = -\vec{u} \qquad ; \quad \vec{A} = k_1\vec{\mathbb{A}}$$

Logo: $grad\varphi = -\vec{u} = \vec{\mathbb{A}} = k_1^{-1}\vec{A}$. Vamos também fazer $a \to c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Portanto vão fazer-se estas substituições na equação hodrodinâmica proposta ,o que nos conduz a

$$grad\varphi = \vec{u} = -k_1^{-1}\vec{A} \qquad ; a = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \to c = {}^{1}\!\big/\!\sqrt{\mu_0 \varepsilon_o} \qquad ; grad\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = -\eta_0 \vec{J}_m \to \mu_0 \vec{J}.$$

Em:

$$Lapgrad\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} grad\varphi = grad\left(\frac{\xi}{\rho}\right) + \frac{1}{a^2}\left\{grad\left[2grad.grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right] + grad\varphi.grad.\left|grad\varphi\right|^2\right\}$$

Então:

$$-k_1^{-1} Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-k_1^{-1}\vec{A}\right) = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\left\{grad\left[2grad.\frac{\partial}{\partial t}\left(-k_1^{-1}\vec{A}\right)\right]grad\left(-k_1^{-1}\vec{A}\right)grad\left|-k_1^{1}\vec{A}\right|^2\right\}$$

Logo:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -k_1\mu_0\vec{J} + k_1 k_1^{-2}\frac{1}{c^2}\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left(-k_1^{-1}\right)grad\vec{A}.k_1^2\left|\vec{A}\right|^2$$

Logo:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -k_1\mu_0\vec{J} - k_1^{-1}\frac{1}{c^2}\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}grad\vec{A}\left|\vec{A}\right|^2 \qquad (4)$$

Este candidato a equação de ondas $e.m.^s$. não lineares no vácuo, pode também traduzir o comportamento de ondas e.m. lineares satisfazendo á equação de DÁlembert

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -k_1\mu_0\vec{J}$$

se se verificar:

$$\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left|\vec{A}\right|^2 = 0$$

Notemos agora que as generalizações não lineares da quação de DÁlembert , eventualmente validas no vácuo e em regiões mais ou menos afastadas do Universo, devem poder reduzir-se à escala não astronómica em zonas próximas, à equação de D'Alembert :

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \qquad (5)$$

Portanto deve ter-se $\underline{k_1 = 1}$ **:Foi-nos possível por meio de considerações cosmológicas determinar o valor da constante** $\underline{k_1 = 1}$

$\vec{B} = -2\vec{\omega}$

Se numa região do meio subquântica existe uma vorticidade $\vec{\xi} = 2\vec{\omega}$ existe concomitantemente uma indução magnética $\vec{B}. = -\vec{\xi}$:

A indução magnétia $\vec{B}$ relacionada com a vorticidade do meio subquântico pela expressão anterior Então a indução magnétic $\vec{B}$ a é igual á parte o sinal á vorticidade $\vec{\xi}$ do meio subquantico que determina a existência do campo:

$$\vec{B} = -\vec{\xi}$$

Conclusão: A hipótese cosmológica de se poderem propagar no vácuo do Universo ondas e.m. não lineares, a ser verdadeira, permite-nos calcular o valor nuérico da constante de proporcionalidade entre as grandezas hidrodinâmicas que inicialmente fopram postuladas e às grandezas e.m. que lhes são correspondentes devem ser proporcionais: p.ex. $\vec{E} = k_1\vec{E}$, $\vec{D} = k_1\vec{D}$, $\vec{B} = k_1\vec{B}$, $\vec{A} = k_1\vec{A}$ *etc.*

Esta hipótese cosmológica, se vier a ser aceite, constitui indubitávelmente uma comprovação brilhante de que, mesmo que a natureza do campo e. m. se não reduza necessariamente à Hidrodinâmica do meio subquântico, é tão fortemente condicionada por ela, que o comportamento das partículas elementares mergulhadas no meio subquântico está indessoluvelmente ligado ao comportamento hidrodinâmico deste meio : OVácuo (Meio subquântico) e as partículas materiais, de certo modo entidades contraditórias, condicionam-se mútua e reciprocamente: A sua contradição forma uma parte do seu sentido.

Uma das equações às quais deve satisfazer neste caso o campo e. m. é

$$\left\{grad\left[2grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right]\right\}\left|\vec{A}\right|^2 = 0 \ .$$

O teorema de Helmholtz no plano è :

$$\vec{u} = -grad\varphi + rot\vec{a} = -grad\varphi - i.\vec{e}_z \wedge grad\psi \quad ; \qquad (\vec{a} = \psi.e_3)$$

Admitamos que este escoamento admite superfícies de Lamb globalmente regulares . Podemos tomar sobre elas um sistema de linhas coordenadas curvilíneas ortogonais $\varphi = C^{te}, \psi = C^{te}$. sob a condição de o fluido não ter pontos de estagnação sobre a superfície de Lamb.

Seja $\vec{u}$ velocidade do fluido. A relação : $|J| = \dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = |\vec{u}|^2 \neq 0,\infty$, sendo x,y coordenadas cartesianas sobre o plano onde se projecta, ortogonalmente (sem perda de generalidade), a superfície de Lamb é condição suficiente de invertibilidade dasfunções $\varphi = \varphi(x,y)$, $\psi = \psi(x,y)$, definindo as funções inversas $x = x(\varphi,\psi)$, $y = y(\varphi,\psi)$. Neste caso x, y,. podem ser usadas como coordenadas sobre a variedade 2-dimensional de Lamb. Notemos que portanto só há garantia de invertibilidade suficientemente longe dos pontos de estagnação do fluido..(Note-se também que a situação $|J| = |\vec{u}| = \infty$, sendo $\vec{u}$ a velocidade do fluido, é interditada pela T da Relatividade R é portanto deve ser descartada.)

No caso de o movimento do fluido poder se descrito pelo teorema de Helmholtz e admitir um potencial complexo holomorfo. Oteorema de Helmholtz dá lugar a uma formulação particularmente simples, que resulta das condições de Cauchy-Riemann.

Se o campo de velocidade for irrotacional temos necessariamente

$$\vec{u} = grad\varphi$$

sendo então supérfluo o termo aditivo rotacional: Se o quisermos incluir para manter a expressão formal do teorema de Helmholtz, esse termo é sempre igual a um gradiente e pode ser absorvido em $grad\varphi$ .Pode ter lugar a igualdade $grad\varphi = rot\vec{a}$ $(\vec{a} = \psi.\vec{e}_3)$

Se o escoamento além de irrotacional $(\vec{u} = grad\varphi)$ for incompressível, $(div\vec{u} = 0)$

Vindo:

$$\text{Lap}\,\varphi = 0\,.$$

Como vimos em escoamentos planos o teorema de H.,é :

$$\vec{u} = grad\varphi + rot\vec{a} = grad\varphi - \vec{e}_3 \wedge grad\psi = grad\varphi + grad\psi \wedge \vec{e}_3 \qquad (\ \vec{a} = \psi.\vec{e}_3\,)$$

Se o escoamento for irrotacional e solenoidal (dizem-se solenoidais os escoamento nos quais $div\vec{u} = 0$) .então: $divgrad\vec{u} = Lap\vec{u} = 0$. Sabemos que para um escoamento admitir um potencial escalar complexo (isto é fora de uma vizinhança dos pontos de estagnação) deve esse potencial ser holomorfo.

Fixemo-nos no caso em que é:

$$grad\varphi = rot\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad grad\varphi = grad\psi \wedge \vec{e}_3 \qquad (6)$$

Equação que tem soluções para fluidos irrotacionais solenoidais (isto é sem fontes.

Desta última equação saem as condições de holomorfia:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial y} - \vec{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial x} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right\}$$

Logo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (7)$$

Vimos que é sob a condição de holomorfia de W :

$$grad\varphi = rot(\psi.\vec{e}_3) = grad\psi \wedge \vec{e}_3$$

Sendo a igualdade anterior equivalente às condições de Cauchy-Riemann.

Vamos substituir na equação da Acústica :

$$Lap\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\xi}{\rho} + \left\{2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{(grad\varphi)}{2}\right]\right\} \qquad (8)$$

Calculemos o gradiente de ambos os membros da equação anterior e atendamos que se o escoamento for irrotacional se tem:

$\vec{u} = grad\varphi$; $\vec{A} = -\vec{u}$ $\vec{A} = k_1\vec{A}. \Rightarrow grad\varphi = \vec{u} = -\vec{A}$

$$Lapgrad\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}grad\varphi = -\frac{\xi}{\rho}\vec{n} + \left\{2grad\varphi.grad\left(\frac{\partial}{\partial t}grad\varphi\right) + grad\varphi.grad\left[\frac{1}{2}grad\varphi\right]\right\} \qquad (9)$$

O vector unitário $\vec{n} = \vec{A}/A$ foi introduzido por se tratar de uma equação vectorial onde não tem sentido haver temos aditivos escalares.

Então vem:

$$Lap(-\vec{A}) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\vec{A}) = \frac{\xi}{\rho}\vec{n} + \{2.(-\vec{A})\}grad\left(-\frac{\partial}{\partial t}(-\vec{A})\right) + (-\vec{A})\frac{1}{2}grad(-\vec{A})$$

Logo:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\xi}{\rho}\vec{n} - 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A}$$

Por ser $\vec{A} = k_1\vec{A}$ $(k_1 = 1)$ e fazendo formalmente tender $a \to c$ na equação anterior, vem:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{f} + 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A} \qquad (10)$$

Sendo f o termo hidrodinâmico de fonte que na passagem para a equação electromagnética deve dar lugar a uma grandeza e.m..

Obtivemos uma equação não linear, que por linearização se deve reduzir a (5):

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

Esse facto impõe que seja na passagem para a equação não linear: $\vec{f} = \xi/\rho\,\vec{n} \to \mu_0\vec{J}$.

Do mesmo modo: $a \to c$.

$$Lap\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}+2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}grad\vec{A} \qquad (11)$$

Atendamos a que é válida em Electrodinâmica Linear a relação:

$$\vec{A}=\frac{1}{c^2}\varphi^*\vec{v} \qquad (\ \vec{v}=\vec{C}^{te}\ )$$

Substituindo-a na equação anterior, e atendendo a que como estamos a enxertar uma equação da Electrodinâmica não linear numa equação de ondas da Electrodinâmica linear, não podemos esperar obter senão uma equação de validade quando muito aproximada, vem:

$$Lap\left(\frac{\varphi^*\vec{v}}{c^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\varphi^*\vec{v}}{c^2}\right)=-\mu_0\vec{J}+\frac{2\varphi^*}{c^2}\vec{v}.grad\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi^*\vec{v}}{c^2}\right)+\frac{1}{2}grad\left(\frac{\varphi^*\vec{v}}{c^2}\right)$$

Logo:

$$\frac{\vec{v}}{c^2}\left\{Lap\varphi^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}\right\}=-\mu_0\vec{J}+\frac{2\varphi^*}{c^4}\vec{v}..\frac{\vec{v}}{c^2}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)+\frac{1}{2c^2}\vec{v}.grad\varphi^*$$

Como é $\vec{v}=\vec{C}^{te}$,vem:

$$\frac{v}{c^2}\left[Lap\varphi^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}\right]=-\mu_o J+\frac{2\varphi^*}{c^6}\vec{v}(\vec{v}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right))+\frac{1}{2c^2}\vec{v}.grad\varphi^*$$

Logo:

$$Lap\varphi^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}=-\mu_0 J\left(\frac{c^2}{v}\right)+\frac{c^2}{v}\frac{2\varphi^*}{c^6}v\left[\vec{v}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{2c^2}\vec{v}.grad\varphi^*$$

Portanto:

$$Lap\varphi^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}=-\mu_0 J\left(\frac{c^2}{v}\right)+\frac{2\varphi^*}{c^4}\left[\vec{v}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\right]+\left(\frac{c^2}{v}\right)\frac{1}{2c^2}\vec{v}.grad\varphi^*$$

Logo:

$$Lap\varphi^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}=-\mu_0 J\left(\frac{c^2}{v}\right)+\frac{2\varphi^*}{c^4}\left[\vec{v}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{2v}\vec{v}.grad\varphi^*$$

Na equação anterior é: $\vec{J}=\rho_e\vec{v}$. Vamos substituir esta expressão na equação anterior:

$$Lap\varphi^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}=-\mu_0\rho_e v\frac{c^2}{v}+\frac{2\varphi^*}{c^4}\left[\vec{v}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{2v}\vec{v}.grad\varphi^*$$

Atendendo a que é $c^2={}^1\!/_{\mu_0\varepsilon_0}$ vem:

$$Lap\varphi^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2} = -\mu_0\rho_e\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} + \frac{2\varphi^*}{c^4}\left[\vec{v}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\right] + \frac{\vec{v}.grad\varphi^*}{2v}$$

Portanto:

$$Lap\varphi^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{2\varphi^*}{c^4}\left[\vec{v}.grad\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\right] + \frac{\vec{v}.grad\varphi^*}{2v} \qquad (12)$$

Na aproximação linear a equação obtida reduz-se à Equação de DÁlembert da Electrodinâmica linear, como seria de esperar.

Consideremos a Equação de Dirac que só é válida para particulas de spin $s = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{\nu=1}^{4}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + \frac{2mc}{h}\psi = 0$$

D. Ivanenko chegou a uma generalização não linear da Equação de Dirac por esta não explicar certos fenómenos:

$$\sum_{\nu=1}^{4}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + \frac{2mc}{h}\psi + \lambda\psi^3 = 0$$

A titulo de curiosidade vamos escrever os vários γ_k.

$$\gamma_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \gamma_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \gamma_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

O problema destas equações não lineares, consiste em não as sabemos resolver . Yvanenko , Por tal razão, comparou estas equações não lineares de que não sabemos encontrar a solução, a um cofre cheio de preciosidades, que não podemos abrir por não sermos possuidores da chave nem do segredo do cofre..O mesmo se passa com as equações não lineares da Electrodinâmica .

Como complemento vamos especificar o sentido dos γ_v,

Da igualdade $grad\varphi = grad\psi \wedge \vec{e}_3$, já deduzida, vem:

$$Lap(grad\psi \wedge \vec{e}_3) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(grad\psi \wedge \vec{e}_3) = \frac{\xi}{\rho} + \left\{2grad(grad\psi \wedge \vec{e}_3).grad\left(\frac{\partial}{\partial t}(grad\psi \wedge \vec{e}_3)\right)\right\} +$$

$$+ grad(\psi \wedge \vec{e}_3).grad\left(\frac{(grad\psi \wedge \vec{e}_3))}{2}\right)$$

Logo:

$$Lap\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -2rot\vec{\omega} + \frac{1}{a^2}\left\{2grad\psi.grad\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + grad\psi.grad\left[\frac{|grad\psi|^2}{2}\right]\right\} \quad (13)$$

As equações (!) e (7) são válidas em escoamentos do meio subquântico quando este for incompressível $\vec{u} = grad\varphi \Rightarrow div\vec{u} = Lap\varphi = 0$, sendo então holomorfo o potencial das velocidades. $grad\varphi = \vec{e}_z \wedge grad\psi \Rightarrow Lap\varphi = \vec{e}_z \wedge Lap\psi = 0$ por ser $Lap\varphi = 0$. e por maioria de razão ser $grad\varphi = \vec{e}_z \wedge grad\psi$ que é a formulação vectorial das

<u>Proposição: um fluido compressível ($Lap\varphi \neq 0$) não admite potencial complexo holomorfo.</u>

<u>Conclusão: A quação de ondas à qual deve satisfazer a grandeza hidrodinâmica $\vec{A}$ é a mesma á qual deve satisfazer $\vec{A}$ por ser $\vec{A} = k_1\vec{A}$ com $k_1 = 1$, sendo portanto $\vec{A} = \vec{A}$.</u>

Uma carga pontual Q ou uma configuração rígida de cargas, de valor total Q, com movimentos respectivamente recilineo uniforme, de velocidade $\vec{v}$ dão lugar a um campo e.m. no qual $\vec{A}$ e φ^* estão relacionados (pp.43-CapII) por :

$$\vec{A} = \frac{\varphi^* \vec{v}}{c^2}$$

No caso de uma carga pontual :

$$\rho_e = Q\delta(\vec{r} - \vec{v}.t)$$

Consideremos as expressões $\vec{B} = -2k_1\vec{\omega}$ e $rot\vec{B} = -2k_1\vec{\omega}$.

Se for $\vec{J}$ a densidade volúmica das fontes de $\vec{H}$ tem-se:

$$rot\vec{H} = \vec{J}'$$

Vindo de $\vec{B} = \eta_0\vec{H}$,

$$rot\vec{B} = \eta_0 rot\vec{H} = \eta_0\vec{J} = -2k_1 rot\vec{\omega}$$

Logo:

$$rot\vec{H} = -\frac{2k_1}{\eta_0} rot\vec{\omega}$$

+Vamos daqui em diante assumir o valor deduzido $k_1 = 1$ a partir das ondas e.m. não lineares no Universo, vindo assim:

$$rot\vec{H} = -\frac{2}{\eta_0} rot\vec{\omega} = -\frac{2\omega'}{\eta_0}$$

Seja $\vec{D}$ um campo vectorial proporcional a $\vec{E}$, $\vec{D} = k\vec{E}$ .sendo $div\vec{E} = f$ (f descreve as fontes de $\vec{E}$) Então:

$$div\vec{D} = kf\ .$$

É a equação dual de $div\vec{D} = \rho$.

Vamos definir um vector $\vec{J}$ pela relação :

$$\vec{J} = \vec{J}' - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Substituindo $\vec{J}'$ em $rot\vec{H} = \vec{J}$ vem:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Dual da Equação de Maxwell:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Calculemos a divergência de ambos os membros da expressão(10)

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\varphi^*$$

Vem:

$$div\vec{E} = -div\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - Lap\varphi^*$$

Logo substituindo $div\vec{E} = f$ na equação anterior:

$$div\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + Lap\varphi = -f$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial t} div\vec{A} + Lap\varphi = -f \qquad (14)$$

Vamos adoptar a condição de Gauge:

$$div\vec{A} + k\eta_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad div\vec{A} = -k\eta_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad (15)$$

Vamos partir da equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} div\vec{A} + Lap\varphi = -f$$

E substituir nela a condição de Gauge:

$$-k\eta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + Lap\varphi = -f \qquad (k = \frac{D}{E})$$

Análoga da condição de Gauge de Lorentz:

$$div\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = 0$$

Da condição de Gauge de Lorentz sai: $div\vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \,\partial^2 \varphi^* / \partial t^2$

A correspondente relação da Mecânica dos Fluidos é :

$$div\vec{A} = -k\eta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (k_1 = 1) \quad ; \quad div\vec{A} = -\eta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Substituindo em (34)que é:

$$k_1 \eta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - Lap\varphi = f \qquad ((k_1 = 1)$$

Logo:

$$Lap\varphi - \eta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f \qquad (16)$$

Esta equação é análoga de (5):

$$Lap\varphi^* - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

A velocidade de propagação deste campo é: $c = 1/\mu_0\varepsilon 0$

Vamos agora determinar a correspondente equação da M.dos F.

Vamos substituir $\vec{B} = rot\vec{A}$ e $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - grad\varphi$ em :

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Por ser: $\vec{B} = \eta_0\vec{H}$ vem:

$$rot\left(\frac{\vec{B}}{\eta_0}\right) = rot\vec{H} = \vec{J} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Logo:

$$rot\vec{B} = \eta_0 rot\vec{H} = \eta_0\vec{J} - \eta_0 k\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Nota: $k = D/E$; *não confundir k com* $k_1 = 1$

Portanto:

$$rotrot\vec{A} = \eta_0\vec{J} - \eta_0 k\frac{\partial}{\partial t}\left(-grad\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

Note-se que é. $a = \sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}} = k\eta_0$ Logo: $graddiv\vec{A} - Lap\vec{A} = -\eta_0 kgrad\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \eta_0 k\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

Logo:

$$grad\left[div\vec{A} + \eta_0 k\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] - Lap\vec{A} = \eta_0 k\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = f$$

Adoptando a versão hidrodinâmica da condição de Gauge de Lorentz já apresentada vem:

$$Lap\vec{A} + \eta_0 k\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad (17)$$

Atendamos á condição de Gauge anterior; vem:

$$Lap\vec{A} - k\eta_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\eta_0\vec{J} \qquad (18)$$

Análoga de (5):

$$Lap\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

Foi-nos deste modo possível concluir que a Mecânica dos Fluidos Newtonianos é uma teoria de Gauge, sendo a condição de gauge usada em M.dos F., directamente decalcada 33 . completamente análoga. á da Electrodinâmica que é de génese uma teoria relativista, que sublinhemos foi elaborada por Maxwell anteriormente à formulação por Einstein da Teoria da Relatividade Restrita.

O facto de por meio de considerações exclusivamente Newtonianas termos podido chegar a equações acústicas , como as de DÁlembert não homogéneas, analiticamente análogas às correspondentes equações Electrodinâmicas que são relativistas de raiz, sob a reserva de se substituir nas equações do Electromagnetismo a velocidade da luz no vácuo pela velocidade do som no ''meio material``é um tanto intrigante.

É o caso da Equação de Prandtl-Glauert.válida em M.dosF. e em Electromagnetismo, que dá lugar a comportamentos que são chocantemente análogos . Ignoramos até que ponto a exigência de covariância para um certo grupo de transformações é condição necessária de validade de uma equação física. Já vimos por exemplo que a equação K.V.W. , aceite . pelos físicos, não é covariante para o grupo de Galileu.

A exigência da covariância como exigência absoluta da validade de uma equação física não tem portanto, ao menos aparentemente , um carácter de exigência absoluta. Uma equação newtoniana não linear não nos parece poder ser covariante para o grupo de Galileu.

Existe uma semi-explicação para ceretas analogias observadas, às quais não nos referimos: As equações da Electrodinâmica são covariantes para o grupo de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Grupo deixa invariante a métrica de Minkowsky $\quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

Neste grupo a velocidade da luz no vácuo, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ é a mesma em todos os referenciais inerciais; As equações da Acústica que têm a estrutura analítica das equações relativistas são covariantes para o grupo obtido do de Lorentz substituindo c por $a = \sqrt{dp/d\rho}$, e aos valores possiveis a desta velocidade , que no mesmo referencial inercial, assume valores diferentes conforme o meio físico no qual o som se propaga, corresponde a métrica,

$$ds^2 = a^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

que varia de meio físico para meio físico, de acordo com os correspondentes valores de a dependendo do meio físico sede da propagação e das condições termodinâmicas existentes, não tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais .

As equações da Acústica que têm a estrutura analítica das Relativistas são covariantes para o grupo obtido do de Lorentz substituindo c por a :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}}$$

Este grupo deixa invariante a métrica:

$$ds^2 = a^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Como além do que foi dito, o som ,ao contrário da luz no vácuo, não tem a mesma velocidade em todos os referenciais inerciais, a trasnsformação de coordenadas expressa pelo respectivo elemento do grupo, elemento que ao definir a passagem de $\Sigma(x, y, z, t)$ para $\Sigma(x', y', z')$ deve ser bem determinado, isto é com um valor de a único e bem determinado não satisfaz a essa condição pois em Σ e em Σ' os valores da velocidade do som , a não têm o mesmo valor.

Chama-se *referencial inercial,*

a ***um referencial comóvel isto é acompanhando o movimento médio da matéria do Universo, ou que se desloca em relação a um referencial comóvel com movimento de translação rectilínea uniforme;***

uniforme.; Recentemente constatou-se porém a não existência de estrelas fixas.e a noção de referencial de Copérnico foi substituída pela de referencial comóvel.

A equação á qual satisfaz o potencial vector da indução magnética é então::

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{{}^{2}} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} + 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A}$$

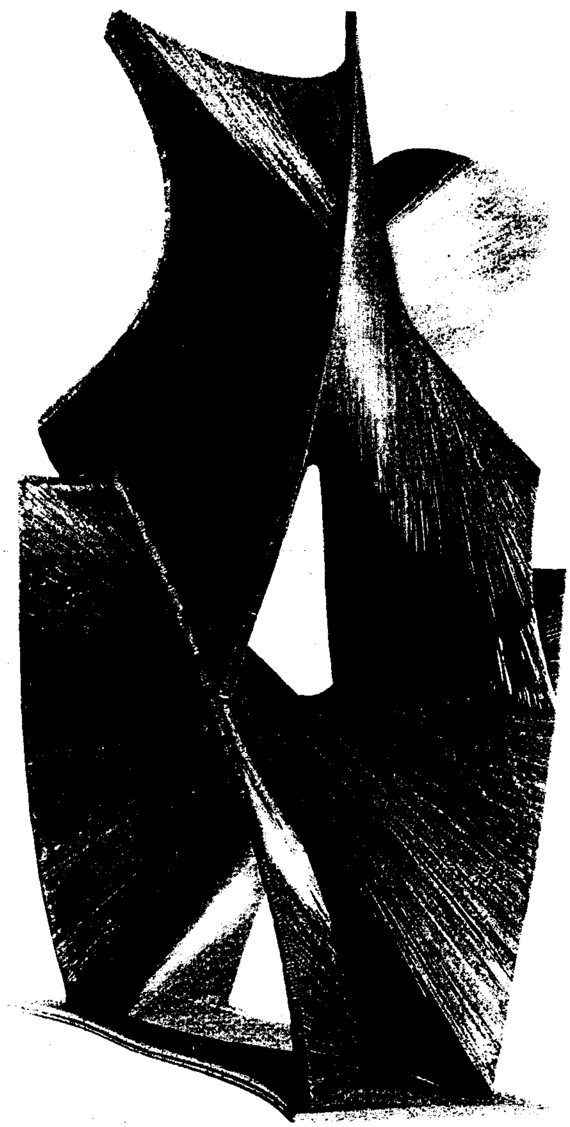
Consideremos a decomposição Helmholtziana de $\vec{E}$, expressão geral do campo eléctrico não estacionário:CapII-pp11:

$$\vec{E} = -grad\varphi * - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

A equação:

$$grad\varphi^* = \frac{\partial .\vec{a}}{\partial t}$$

Tem sempre solução



Antoine Pevsner. **Construction spatiale aux troisième et quatrième dimensions.**
1961. *Phot. des Musées nationaux.*

Considerando $\vec{a}$ absorvido em $\vec{A}$ vem:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (21)$$

Um campo electromagnético é caracterizado por um par $\varphi^{*}, \vec{A}$; se for não estacionário pode escolher-se um potencial φ^{*} independente do tempo, com o que vem de (11-Cap.II) e de (19) a relação (21). Do exposto conclui-se que, por uma escolha apropriada de $\vec{A}$, o campo $\vec{E}$ pode ser determinado unicamente por este vector.

Se $\vec{A}$ for irrotacional ($\vec{B} = 0 \Leftarrow$ Campo electrostático) existe uma função ϕ_1^{*} tal que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mathbf{grad}\phi_1^{*} \qquad (22)$$

Substituindo em (11-Cap.II), vem:

$$\vec{E} = -\mathbf{grad}(\varphi^{*} + \phi_1^{*}) = -\mathbf{grad}\phi_2^{*}$$

com $\phi_2^{*} = \varphi^{*} + \phi_2^{*}$. Trata-se de um campo irrotacional que pode ou não ser electrostático, conforme depender ou não do tempo.

Voltemos à equação (49-Cap.I) e suponhamos que o escoamento é estacionário, existindo uma corrente uniforme de velocidade $\vec{U}_0 = U_0\vec{e}_x$ que encontra no seu trajecto um obstáculo fusiforme que lhe produz uma pequena perturbação irrotacional e estacionária $\vec{u}$.

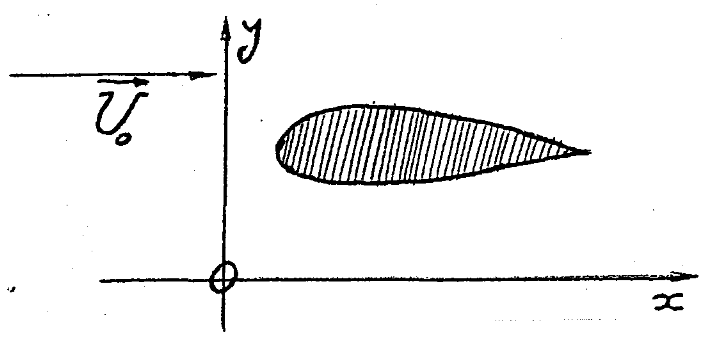


Fig1

O potencial satisfaz a (49-Cap.I), com o potencial φ substituído por $\phi(x) = U_0 x + \varphi(x)$, sendo $\vec{u} = \mathbf{grad}\varphi$ a perturbação adicionada à velocidade $\vec{U}_0$ para se obter a velocidade efectiva do fluido na proximidade do obstáculo, com $\lim_{P\to\infty} \varphi(x, y, z) = 0$.

É possível demonstrar que, por linearização da equação (49-Cap.I), no caso estacionário, se obtém a Equação de Prandtl-Glauert (linear) à qual satisfaz φ:

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\varphi_{xx}+\varphi_{y_y}+\varphi_{zz}=\frac{\xi}{\rho} \qquad (23)$$

sendo $\xi = 0$ onde não houver fontes, sumidouros, turbilhões, multipolos ou associações destes. Tratando-se do escoamento em torno de um obstáculo é $\xi = 0$ na região de $\mathbf{R}^3$ que este ocupa, obtendo-se a equação homogénea

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0 \qquad (24)$$

As equações (23) e (24) são Newtonianas e, portanto, devem ser covariantes para o grupo de Galileu; são também covariantes para um grupo de transformações obtidas das de Lorentz substituindo a velocidade da luz pela do som, o qual não tem interesse físico. O potencial ϕ também satisfaz a (23) e (24).

É possível concluir que se numa região do vácuo existir um campo eléctrico uniforme $\bar{E}_0$ e se nessa região se deslocar uma configuração rígida de carga eléctrica dedensidade volúmica ρ_e, no sentido negativo do eixo dos xx com velocidade $\bar{u} = u\bar{e}_x$, existe fora do obstáculo o potencial estacionário $\phi(x)^* = -E_0 x + \phi_1^*(x)$, com:

$$\lim_{x\to\infty}\phi_1^*(x)=0$$

verificando-se as equações:

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=-\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad (25)$$

com $\rho_e = 0$ onde não houver carga, vindo:

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0 \qquad (26)$$

ϕ_1 satisfaz as mesmas equações.

Se em lugar do vácuo houver um dieléctrico, em vez de figurar $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ em (25) e (26) figura $c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ nestas equações.

Note-se que a linearização das equações da hidrodinâmica conduzindo a (23) e (24) é uma operação de filtragem, pressupondo condições fronteiras suficientemente favoráveis, que permite obter uma solução analítica aproximada do problema à custa de perdas de informação sobre ele, passando-se o mesmo para a linearização das expressões analíticas das condições fronteiras. As correspondentes equações da

Electrodinâmica, (25) e (26) são intrinsecamente lineares traduzindo exactamente os fenómenos físicos e não sendo o resultado de qualquer aproximação.

Em Electrodinâmica Clássica é possível deduzir a equação (25):

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=-\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

Sendo $\phi=\phi_0+\phi_1$, relação na qual ϕ_0 é o potencial do campo eléctrico na ausência da distribuição de cargas de densidade ρ_e e ϕ_1 o acréscimo sofrido pelo potencial do campo devido a essa distribuição de cargas de densidade volúmica ρ_e. ϕ_1 satisfaz a:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\phi_1)_{xx}+(\phi_1)_{yy}+(\phi_1)_{zz}=-\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad (27)$$

O potencial vector do campo eléctrico satisfaz a:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{A}_{xx}+\vec{A}_{YY}+\vec{A}_{ZZ}=-\mu_0\vec{J} \qquad (28)$$

com $\vec{J}=\rho_e\vec{v}$, sendo $\vec{v}$ a velocidade (de translação rectilínea uniforme) da configuração rígida de cargas eléctricas geradora do campo. Recorrendo a uma equação do Cap.II, $\vec{A}=-\vec{u}$ e à condição de irrotacionalidade do campo tem-se, no vácuo (tomando $\vec{A}=\vec{A}$):

$$\vec{A}=-\vec{u}=-\mathbf{grad}\varphi \qquad (29)$$

Nesta equação pode notar-se que se $\vec{u}$ fosse sempre irrotacional $\vec{B}=\mathbf{rot}\vec{A}$ seria sempre zero, o que só sucede nos campos Electrostáticos, isto é, avaliados por um observador no referencial inercial onde a distribuição ρ_e esteja em repouso.

De facto, $\vec{B}=-2k_1\vec{\omega}$ indica-nos que a existência de um $\vec{B}\neq 0$ implica a existência de vorticidade no movimento do meio subquântico. Em (27) φ é a perturbação do potencial da velocidade do meio subquântico devida à presença de campos electromagnéticos; Se for adicionada a ϕ_0, que é o potencial da velocidade do meio subqântico na ausência de campos (supusemos o seu movimento irrotacional) obtém-se o potencial ϕ do movimento do meio em causa na presença de campos:

$$\phi=\phi_0+\varphi \qquad (30).$$

De (30), com $\phi_0=0$ vem:

$$\phi=\varphi \qquad (31)$$

A equação (4´) teve como pressuposto que o escoamento do fluido (o meio subquântico) seja irrotacional ($\vec{\omega}=0$) e conduz a um $\vec{B}=0$ ($\vec{B}=-2k_1\vec{\omega}=-\vec{\omega}$). Note-se que o facto de ser $\vec{B}=0$ implica que $\vec{A}$ seja irrotacional mas não impede que possa depender do tempo. No caso geral de ser $\vec{B}=\vec{B}(x,y,z,t)\neq 0$, na decomposição de Helmholtz de $\vec{u}(x,y,z,t) \neq 0$, tem-se a soma de um termo conservativo com um termo solenoidal. Neste caso, para ter em conta a situação geral, a densidade de corrente que figura em (4') deve ser uma função de $\vec{\omega}$:

$$\vec{u} = \mathbf{grad}\varphi + \mathbf{rot}\vec{a} \tag{34}$$

ou, equivalentemente:

$$\vec{B} = \mathbf{grad}\Omega + \mathbf{rot}\vec{a}^{*} = \mathbf{rot}\vec{A} \tag{35}$$

Para ter em conta na equação (4') o movimento rotacional do meio subquântico, a densidade $\vec{J}$ que figura nesta equação deve depender, como referimos, do termo $\mathbf{2rot}\vec{\omega}$. Na impossibilidade de determinar $\vec{a}$ e $\vec{a}^{*}$ vamos atender à relação (11-Cap.II) e determinar $\vec{E}$ por meio desta relação, recorrendo a uma escolha conveniente de φ^{*} e $\vec{A}$. Tem-se:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \varphi^{*} = 0 \tag{36}$$

2. Efeitos de não linearidade em Electrodinâmica

2.1. Generalidades

No tratamento linear da propagação da luz admite-se a existência de uma relação linear entre o campo eléctrico aplicado a um meio material e a resposta desse meio, que é a polarização:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{37}$$

Sendo, num meio linear, $\vec{P}$ proporcional a $\vec{E}$ vamos definir um parâmetro X_e que figura em $\vec{P} = \varepsilon_0 X_e \vec{D}$, e que é chamado *susceptibilidade eléctrica*. De (37) vem:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E} \tag{38}$$

Seja $k_e = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ a constante dieléctrica do meio, e $X_e = k_e - 1$ a sua susceptibilidade eléctrica. Então, a relação anterior toma a forma:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 X_e \vec{E} \tag{39}$$

Se o meio for não linear, a susceptibilidade eléctrica pode expandir-se numa série de Mac-Laurin:

$$X_e = \sum_{n=1}^{+\infty} X_{en} E^n \tag{40}$$

Substituindo em (39) vem, sendo $\vec{n} = \vec{E}/E$:

O processo descrito pode ser generalizado quando duas ondas de frequências diferentes ν_1 e ν_2 se propagam em meios físicos apropriados. Pode então ocorrer a absorção conjunta de dois fotões, um de cada uma das ondas, ficando o meio óptico num estado excitado de energia $E_0 + h(\nu_1 + \nu_2)$, sendo E_0 a sua energia fundamental inicial.

Quando a soma das energias dos dois fotões excitantes for superior à energia de ligação de um electrão do meio óptico ao correspondente átomo ou molécula, a absorção por esse electrão dos dois fotões referidos dá lugar à ionização desse átomo ou molécula (ionização por dois fotões).

Quando três ondas de luz se propagam através de um meio anisotrópico podem gerar-se novas ondas cujas frequências resultam da combinação das frequências originais.

No processo *de geração do segundo harmónico* dá-se a fusão de dois fotões de frequência ν_1 num fotão de frequência $\nu_2 = 2\nu_1$. Esta conversão só é eficiente quando as duas ondas tiverem a mesma velocidade de propagação. O processo de geração do segundo harmónico é usado para transportar a emissão laser do infravermelho para a zona do visível.

No processo de *geração de frequência soma*, um fotão de frequência ν_1 e um fotão de frequência ν_2 são convertidos num fotão de frequência $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$. É uma generalização do processo de geração do segundo harmónico. No processo de *geração da frequência diferença*, um fotão de frequência ν_1 e outro de frequência ν_2 são convertidos num fotão de frequência $\nu_3 = \nu_1 - \nu_2$. A rectificação óptica é um caso particular deste processo com $\nu_1 = \nu_2$, vindo $\nu_3 = 0$.

Outro processo não linear envolvendo três fotões é a *amplificação paramétrica*. Neste caso, um electrão de um meio não linear apropriado é iluminado por uma onda (dita de bombardeamento) suficientemente intensa, de frequência ν_3 e decai emitindo uma onda de frequência ν_1 (onda de sinal), e outra de frequência $\nu_2 = \nu_3 - \nu_1$.

2.2.2. Interacção de três fotões

Quando duas ondas luminosas se propagam através de um meio não linear pode verificar-se a geração de novas ondas cujas frequências resultam da combinação das frequências iniciais.

No processo de *geração do segundo harmónico*, dá-se a fusão de dois fotões de frequências ν_1 , iguais, originando-se um fotão de frequência $\nu = 2\nu_1$,sendo esta conversão eficiente só quando as duas ondas tiverem velocidades de propagação próximas. Este processo é usado para deslocar a emissão *laser* infravermelho para a banda do visível. No processo de *geração da frequência soma*, um fotão de frequência ν_1 funde-se com um fotão de frequência ν_2 criando-se um fotão de frequência $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$. No processo de *geração da frequência diferença*, um fotão de frequência ν_1 e um fotão de frequência ν_2 são convertidos

$$\vec{P} = \varepsilon_0 X_e \vec{E} = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{+\infty} X_{en} E^n \vec{n} = \varepsilon_0 X_{e1} \vec{E} + \varepsilon_0 \sum_{n=2}^{+\infty} X_{en} E^n \vec{n} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL} \qquad (41)$$

Sendo:

$$\vec{P}_L = \varepsilon_0 X_{e1} \vec{E} \qquad (42\text{-}1) \qquad\qquad \vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 \sum_{n=2}^{+\infty} X_{en} E^n \vec{n} \qquad (42\text{-}2)$$

Se fizermos $\mathbf{P}_k = \varepsilon_0 X_{ek} E^k$, vem:

$$\vec{P}_L = \vec{P}_1 \qquad (42'\text{-}1) \qquad\qquad \vec{P}_{NL} = \sum_{n=2}^{+\infty} \vec{P}_k \qquad (42'\text{-}2)$$

Os coeficientes X_{en} do desenvolvimento de $\vec{P}(\vec{E})$ descrevem completamente a resposta $\vec{D}$ do meio à excitação $\vec{E}$. Entre os fenómenos resultantes do termo de segunda ordem em (41) há a considerar a *geração do segundo harmónico*, a *mistura de três ondas*, a *rectificação óptica*, e a *amplificação paramétrica* verificando-se a anulação de $\mathbf{P}_2$ se o sistema material admitir centro de simetria, deixando então os fenómenos referidos de serem observados. O termo $\mathbf{P}_3$ dá lugar à *mistura de quatro ondas*, à *dispersão Raman*, à *conjugação óptica de fase*, à *dispersão Brillouin* e ao *efeito Kerr*.

Pode ser conveniente escrever o índice de refracção na forma:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_0^2} + \sum_{i=1}^{p} k_i E_i + \sum_{i,j=1}^{q} k_{ij} E_i E_j \qquad (43)$$

Os tensores $\mathbf{k}_i$ *e* $\mathbf{k}_{ij}$ *reflectem a simetria dos cristais deste meio anisotrópico e as suas componentes são chamadas coeficientes electro-ópticos, respectivamente lineares e quadráticos. Normalmente é ,suficiente tomar em (43), p=q=1.*

2.2. Descrição quântica de certos processos não lineares

2.2.1. Interacção de dois fotões

Um fotão de energia adequada, quando atravessa um meio óptico, pode eventualmente ser absorvido e provocar a ionização de um átomo desse meio; e um átomo pode também ionizar-se por absorção de dois fotões quando a soma das energias destes igualar a sua energia de ionização. É a absorção e ionização por dois fotões.

Considere-se um meio óptico com um nível de energia $\Delta E = 2h\nu_1$ acima do seu nível fundamental E_0. Se esse meio for atravessado por uma onda de frequência ν_1 pode passar para o estado excitado, $E_0 + \Delta E$, por absorção simultânea, pelos seus átomos, de dois fotões, cada um deles com a energia $h\nu_1$. A probabilidade deste acontecimento é proporcional à intensidade luminosa incidente. O meio óptico absorve fotões de frequência ν_1 embora esta frequência não esteja contida no seu espectro de absorção.

num fotão de frequência $\nu_3 = \nu_1 - \nu_2$. Um caso particular deste processo é a *rectificação óptica*, na qual é $\nu_1 = \nu_2$, vindo $\nu_3 = 0$.

Outro processo não linear envolvendo três fotões é a chamada *amplificação paramétrica*. Neste caso, se um meio não linear adequado for iluminado por uma onda (*onda de bombardeamento*) suficientemente intensa, de frequência ν_3, decai, depois de a absorver, emitindo uma onda de frequência ν_1 (***onda de sinal***) e depois outra de frequência $\nu_2 = \nu_3 - \nu_1$. Tanto a onda de sinal como a de frequência ν_2 são amplificadas à custa da potência da onda de bombardeamento.

2.2.3. *Interacção de fotões múltiplos*

Existe, neste caso, uma grande variedade de combinações possíveis. Uma delas é *a multiplicação de frequências*, na qual, **n** fotões de frequências $\nu_1, \nu_2, ... \nu_n$ interactuam com os átomos ou moléculas do meio óptico criando-se um fotão de frequência $\nu = \nu_1 + \nu_2 + ... \nu_n$. É o caso da *geração do terceiro harmónico* $\nu_2 = 3\nu_1$ e do *quarto harmónico*, $\nu_2 = 4\nu_1$.

Outros processos não lineares são a *absorção* e a *ionização por electrões múltiplos*. No primeiro caso, **n** fotões de frequências $\nu_1, \nu_2 ... \nu_n$ são simultaneamente absorvidos por um meio não linear, passando do seu estado inicial, não excitado, $\mathbf{E_0}$, para o estado excitado $\mathbf{E_0 + \Delta E}$, com $\mathbf{\Delta E = h(\nu_1 + \nu_2 + ... \nu_n)}$. No *processo de ionização*, $\mathbf{\Delta E}$ é superior à energia de ligação dos electrões, o que produz a ionização dos átomos ou moléculas.

2.2.4. *Efeito Faraday*

Faraday, em 1854 estudou a transmissão da luz polarizada segundo um plano na presença de um campo magnético. Verificou que quando a direcção de transmissão era oblíqua em relação às linhas de força do campo se produzia uma rotação do plano de polarização. Se $\mathbf{H_p}$ é a componente do campo segundo a direcção de transmissão e se $\mathbf{L}$ é o perímetro do percurso o ângulo de rotação é dado por:

$$\theta = \mathbf{C H_p L}$$

Este fenómeno é chamado efeito Faraday e a constante $\mathbf{C}$ é chamada constante de Verdet.

2.2.5. Efeito Kerr

É um efeito electroóptico de segunda ordem. Em 1876 J. Kerr demonstrou que muitas substâncias isotrópicas sob a acção de um campo eléctrico se comportam como um cristal uniaxial com o eixo óptico dirigido segundo as linhas de força. Se forem $\mathbf{n}_0$ o índice de refracção da substância na ausência de campo e $\mathbf{n}_p$ e $\mathbf{n}_s$ os índices de refracção segundo direcções respectivamente paralela e perpendicular ao campo tem-se:

$$\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_s = \lambda_0 \mathbf{K}\mathbf{E}^2$$

sendo $\mathbf{K}$ a constante de Kerr e $\mathbf{E}$ o campo eléctrico aplicado. Verifica-se neste caso a lei de Havelock:

$$\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_s = 2(\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_0)$$

Existe um efeito electro-óptico de primeira ordem (Efeito Pockels): certos cristais anisotrópicos apresentam um nítido aumento de birefrangência, proporcional a $\mathbf{E}$, sob a acção de um campo eléctrico.

2.2.6. Efeito Cotton-Mouton

Em 1905 Cotton e Mouton descobriram um efeito magneto-óptico semelhante ao efeito Kerr. A diferença de índices $\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_s$ é proporcional a $\mathbf{E}^2$ mas a sua constante de proporcionalidade é pequena em relação à do efeito Kerr.

3. Equações de propagação de ondas em meios não lineares

Consideremos um meio físico com as relações constitutivas: $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}}$. Atendamos à expressão:

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$$

da qual vem:

$$\vec{\mathbf{P}} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \mathbf{X}_e \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0(\mathbf{k}_e - 1)\vec{\mathbf{E}} \qquad (44)$$

sendo $\mathbf{X}_e = \varepsilon/\varepsilon_0 - 1$ a *susceptibilidade eléctrica* e $\mathbf{k}_e = \varepsilon/\varepsilon_0$ a *constante dieléctrica* do meio.

Partamos da equação de Maxwell (18-Cap.II) aplicada a um meio de permeabilidade magnética μ:

$$\mathbf{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t}$$

$$rotrot\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H}$$

Logo:

$$graddiv\vec{E} - Lap\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H}$$

Atendendo a (33-Cap.II):

$$\mathbf{rot\vec{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{t}}$$

e a (26-CapII):

$$\mathbf{div\vec{E}} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad graddiv\vec{E} = \frac{grad\rho_e}{\varepsilon_0}$$

Substituindo em:

$$graddiv\vec{E} - Lap\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H}$$

Vem:

$$\frac{grad\rho_e}{\varepsilon_0} - Lap\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H}$$

Atendendo a que é:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

vem:

$$\frac{grad\rho_e}{\varepsilon} - Lap\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Atendendo a que $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$, vem:

$$\frac{grad\rho_e}{\varepsilon} - Lap\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)$$

Logo:

$$\frac{\mathbf{grad}\rho_e}{\varepsilon} - \mathbf{Lap\vec{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial \mathbf{t}} - \mu\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}^2} - \mu \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{P}}\left(\vec{\mathbf{E}}\right)}{\partial \mathbf{t}^2}$$

Portanto:

$$\mathbf{Lap\vec{E}} - \mu\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}^2} - \mu \frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial \mathbf{t}} = \mu \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t}^2}\left(\vec{\mathbf{P}}_L + \vec{\mathbf{P}}_{NL}\right) \qquad (45)$$

Se se verificar a lei de Ohm, vem:

$$\mathrm{Lap}\vec{E} - \mu\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{P}_L + \vec{P}_{NL}\right) \qquad (46)$$

Das expressões (42-1) e (42-2), respectivamente,

$$\vec{P}_L = \varepsilon_0 X_e \vec{E} = \varepsilon_0 X_e E \vec{n} \qquad (47\text{-}1) \qquad\qquad \vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 \sum_{n=2}^{+\infty} X_{en} E^n \vec{n} \qquad (47\text{-}2)$$

(sendo $\vec{n} = \vec{E}/E$) e da equação (46), vem:

$$\mathrm{Lap}\vec{E} - \mu\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\varepsilon_0 X_e \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\varepsilon_0 \vec{n} \sum_{n=2}^{+\infty} X_{en} n(n-1) E^{n-2} \qquad (47)$$

Logo:

$$\mathrm{Lap}\vec{E} - \mu\varepsilon_0 (1 + X_e) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\varepsilon_0 \vec{n} \sum_{n=2}^{+\infty} X_{en} n(n-1) E^{n-2} \qquad (48)$$

Substituindo (36) e atendendo a que o gradiente de um escalar $-grad\varphi^*$ pode ser absorvido em $-\partial\vec{A}/\partial t$ pode escrever-se:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \varphi^* = 0$$

em (48), vem:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Lap}\vec{A} + \mu\varepsilon_0 (1 + X) \frac{\partial^3 \vec{A}}{\partial t^3} + \mu\sigma \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu\varepsilon_0 \vec{n} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^n \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{n-2}$$

e integrando em ordem ao tempo, com: $\vec{n} = vers.\vec{E}$:

$$\mathrm{Lap}\vec{A} - \mu\varepsilon_0 (1 + X) \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu\varepsilon_0 \vec{n} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^{n+1} \int \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{n-2} dt + \Theta(x,y,z) \qquad (49)$$

sendo $\Theta(x,y,z)$ a constante de integração. Vamos supor que a equação anterior é generalizável ao vácuo, sendo:

$$\varepsilon = \varepsilon_0, k_e = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1, X_e = \varepsilon_0 (k_e - 1) = 0, \vec{J} = \sigma_0 \vec{E}$$

Até aqui estivemos a considerar ondas não lineares em meios materiais caracterizados pelos parâmetros ε_0, μ . Vamos agora extrapolar estes resultados para o vácuo caracterizado por ε_0, μ_0 .

(49) toma a forma:

$$Lap\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\sigma_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\vec{n}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^{n+1}\int\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{n-2}dt + \vec{\Theta}(x,y,z) \quad (50)$$

Voltemos à equação (4'), feita a hipótese de o meio subquântico se comportar como um fluido para os efeitos pretendidos. Atendendo a (36) vem, fazendo $\vec{\mathbf{J}} = \sigma_0\vec{\mathbf{E}} = -\sigma_0\, \partial\vec{\mathbf{A}}/\partial \mathbf{t}$ na equação (11):

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A}$$

Logo:

$$Lap\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\sigma_0\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A}$$

Igualando os segundos membros desta equação e de: (50) e de (4') vem, atendendo a (36):

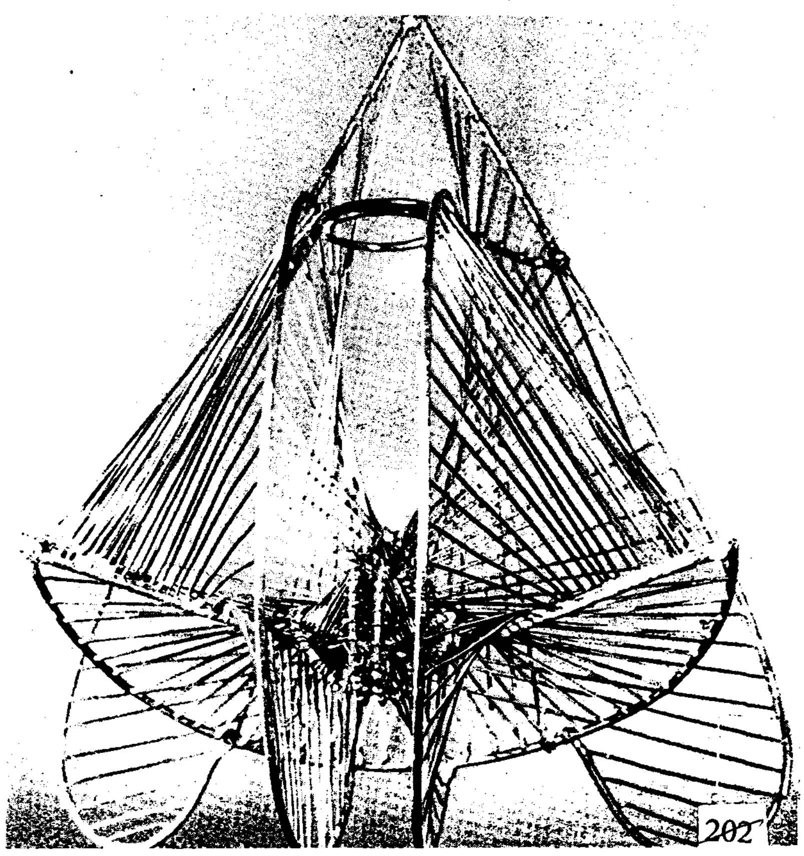
Atendamos à equação anterior e à equação (50)

$$LapA - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\sigma_0\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\vec{n}\sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).(-1)^n \int\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^{n-2}dt + \vec{\Theta}(x,y,z)$$

Então igualando os segundos membros destas duas equações vem:

$$\mu_0\sigma_0\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\vec{n}\sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).(-1)^{n+1} \int\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^{n-2}dt + \vec{\Theta}(x,y,z) = -\mu_0\vec{J} + 2\vec{A}.grad\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\vec{A}.grad\vec{A}$$

A função $\vec{\Theta}(x,y,z)$ ficou indeterminada.



Pevsner. Maquette pour la Construction du monde.
Phot. des Musées nationaux.

Referências:

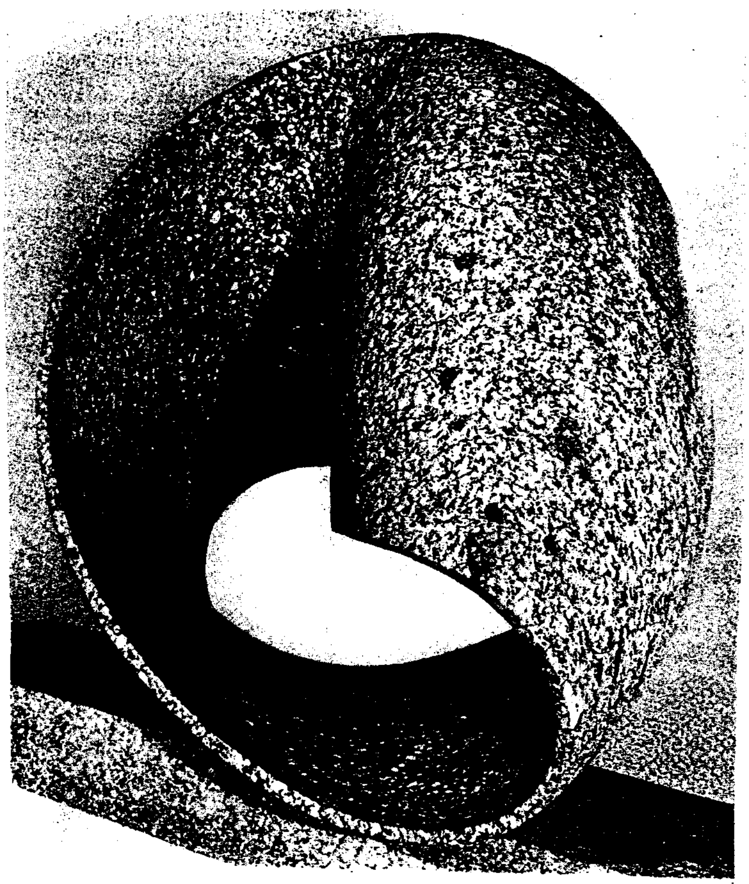
[1]. Ditchburn,R.W., 1982.Óptica,Cap.16,Editorial Reverte,Barcelona.

[2]. Ferreira, Mário ,20003.Óptica e Fotónica, Cap.19, pp.379 a 383. LIDEL Lisboa, Porto, Coimbra.

[3]. Morgado, Cândido Manuel Passos, 1965/66. Lições da Cadeira de Mecânica Física. Edição da F.C.U.L.

[4]. Morgado, Cândido Manuel Passos, 1973. Escoamentos Cónicos em Corpos Fusiformes com Jactos Laterais. Tese de Doutoramento, Lisboa.

[4]. Morgado, Cândido Manuel Passos, Manuel Rolão Santos. A Equação de Prandtl-Glauert em Escoamentos Planos de Fluidos Incompressíveis e Invíscidos e a sua análoga em Electrodinâmica Clássica (em elaboração).



Max Bill. Ruban sans fin. 1961. *Phot. des Musées nationaux.*