

Universidade de Évora

Departamento de Física

**ESTUDO DE ALGUMAS RELAÇÕES FORMAIS
ENTRE O ELECTROMAGNETISMO E A
MECÂNICA DOS FLUIDOS**

Candidato: Manuel António Rato Rolão Santos

Orientador : Professor João Corte Real



171 883

Tese para a obtenção do grau de Doutor em Física

“Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri”

Évora 2005

Dedico este modesto trabalho ao meu ilustre Mestre de Matemáticas Gerais e Cálculo Infinitesimal Professor Fernando Roldão Dias Agudo, com a maior gratidão pelo que com ele aprendi ; Dedico-o também aos meus amigos José Manuel Taborda Duarte, João Aires Teixeira, e Manuel Paiva Teixeira, um deles já falecido, que com o Professor Dias Agudo elaboraram os apontamentos da cadeira de Cálculo Infinitesimal por onde estudei, e ao meu amigo J.Sousa Ramos sempre disponível para me tirar dúvidas.

Dedico-o para terminar à memória imorredoura do Professor Bento de Jesus Caraça que pelo seu pensamento e pela sua acção nos indicou o caminho a seguir.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos nossos amigos e colegas *Eng.^{os}* Manuel Pedro Osório Henriques e José Manuel Nunes de Almeida Sequeira a sua preciosa colaboração, sem a qual esta tese nunca poderia ter sido feita. Do mesmo modo agradecemos ao Professor Cândido Passos Morgado a orientação inestimável que nos prestou na elaboração do Capítulo I e ao *Eng.^o* Mário Silva que nos ensinou a utilizar o computador.

ÍNDICE

Cap.I – INTRODUÇÃO A CERTOS ASPECTOS DA HIDRODINÂMICA. AS EQUAÇÕES DE PRANDTL-GLAUERT DA HIDRODINÂMICA E DO ELECTROMAGNETISMO	1
1. <i>Rotação média e função de Bernoulli</i>	1
2. <i>Conservação da massa e equação da continuidade</i>	6
3. <i>Expressão de $\frac{d\Pi}{dt}$ em função das derivadas de Φ (ou de ϕ). Determinação de uma forma equivalente da equação anterior</i>	8
4. <i>Interpretação hidrodinâmica de Π</i>	10
4.1. <i>Cálculo da velocidade do som no caso de uma transformação politrópica de um gás ideal e da sua expressão nas derivadas de Φ</i>	12
5. <i>Equação de Euler e Função de Bernoulli. Escoamentos estacionários</i>	13
5.1. <i>Generalidades</i>	13
5.2. <i>Regime estacionário</i>	14
5.2.1. <i>Linearização da equação do potencial das velocidades</i>	16
6. <i>A equação de Pradtl-Glauert em Electrodinâmica</i>	21
6.1. <i>Campo electromagnético criado por uma distribuição de carga eléctrica com movimento uniforme</i>	20
6.1.1. <i>Radiação de uma carga pontual</i>	20
Cap.II – INTERPRETAÇÃO HIDRODINÂMICA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL	31
<i>Conclusões</i>	39
Cap.III – LEIS DE BIOT-SAVART	43
1. <i>Lei de Biot-Savart do Electromagnetismo</i>	43
2. <i>A equação de Poisson-Laplace à qual satisfaz a velocidade \vec{u}</i>	45
3. <i>Leis de Biot-Savart da Mecânica dos Fluidos</i>	46
4. <i>Relação entre as leis de Biot-Savart do Electromagnetismo e da Hidrodinâmica</i>	49
5. <i>Relação entre a indução magnética numa região do meio subquântico e a vorticidade do movimento deste</i>	50

Cap.IV – EQUIVALENTE HIDRODINÂMICO DE UM GERADOR DE CORRENTE ELÉCTRICA E DA SUA FORÇA ELECTROMOTRIZ	55
<i>1. Movimentos rotacionais de um fluido</i>	55
<i>2. Força electromotriz</i>	57
<i>2.1. Interpretação da força electromotriz de um gerador através do teorema de Helmholtz</i>	63
<i>2.2. Definição da f.e.m. em termos de uma potência</i>	64
<i>3. Potencial complexo do campo eléctrico</i>	64
<u>Nota</u>	68
<i>1. Noções sobre aplicações</i>	68
<i>2. Noções sobre funções de variável complexa</i>	68
<i>Prolongamento analítico</i>	70
<i>Noção intuitiva de superfície de Riemann</i>	72
Cap.V – DESCRIÇÃO ANALÍTICA DOS ESCOAMENTOS PLANOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS	75
<i>1. escoamentos planos</i>	75
<i>2. Propriedades da função de corrente</i>	80
<i>3. Potencial complexo</i>	81
<i>4. Dedução de algumas relações envolvendo distribuições</i>	84
<i>5. Singularidades pontuais do potencial complexo num escoamento plano</i>	86
<i>6. Singularidades pontuais do potencial complexo da velocidade</i>	88
<i>6.1. Fonte pontual</i>	88
<i>6.2. Turbilhão pontual</i>	90
<i>6.3. Superfície de Riemann de uma função analítica global</i>	93
<i>7. Singularidades pontuais do potencial das velocidades</i>	94
<i>7.1. Dipolo pontual fonte-sumidouro</i>	94
<i>7.2. Dipolos de turbilhões</i>	98
<i>7.3. Dipolo fonte-sumidouro no ponto impróprio</i>	100
<i>7.4. Dipolo de turbilhões no ponto impróprio</i>	102
<i>7.5. Quadripolo pontual fonte-sumidouro</i>	103

7.6. <i>Multipolos no infinito</i>	109
7.7. <i>Escoamento num ângulo ou em torno de um ângulo</i>	109
7.8. <i>Transformações conformes</i>	111
7.9. <i>Funções lineares inteiras</i>	112
7.10. <i>A função $W = 1/Z$</i>	112
8. <i>Interpretação física da série de Laurent</i>	114
9. <i>Aplicação das conclusões anteriores ao cálculo dos Laplacianos de alguns potenciais complexos</i>	117
10. <i>Holomorfia e incompressibilidade</i>	119
11. <i>Associação de uma fonte ou sumidouro com um turbilhão</i>	120
<i>Notas Complementares sobre topologia</i>	120
1. <i>Definição de espaços topológicos</i>	120
2. <i>Conjuntos fechados</i>	121
3. <i>Subespaços e topologias relativas</i>	122
4. <i>Definições equivalentes de topologias</i>	122
5. <i>Bases e sub-bases</i>	123
5.1. <i>Base para uma topologia</i>	123
5.2. <i>Topologias geradas por classes de conjuntos</i>	124
5.3. <i>Sub-base</i>	124
5.4. <i>Definição de topologias geradas por classes de conjuntos</i>	125
5.5. <i>Compacticidade</i>	126
5.5.1. <i>Conjuntos compactos</i>	126
5.5.2. <i>Espaços localmente compactos</i>	127
5.5.3. <i>Compactificação</i>	127
Cap.VI – SISTEMAS DINÂMICOS E POTENCIAIS COMPLEXOS	131
1.1. <i>A questão do determinismo no movimento dos fluidos</i>	131
1.2. <i>Exemplos de casos singulares</i>	138
1.3. <i>O determinismo mecânico</i>	140
1.4. <i>Algumas considerações</i>	140

2. <i>Sistemas Dinâmicos</i>	141
2.1. <i>Problema de Cauchy. Teorema da existência e unicidade</i>	142
3. <i>Sistemas dinâmicos, fontes, sumidouros e turbilhões</i>	149
Cap.VII – CONSIDERAÇÕES SOBRE O VÁCUO E O CAMPO ELECTROMGNÉTICO SUGERIDAS PELAS FÓRMULAS DE BLASIUS DA HIDRODINÂMICA	155
1. <i>Introdução. escoamentos planos de um fluido incompressível</i>	155
1.1. <i>Potencial complexo do escoamento devido a uma fonte pontual</i>	158
1.2. <i>Aplicação à Electrostática e à teoria das funções complexas de variável complexa</i>	158
1.3. <i>Campo eléctrico devido a uma distribuição uniforme rectilínea indefinida e independente do tempo de carga eléctrica</i>	163
1.4. <i>Potencial complexo da indução magnética devida a uma corrente eléctrica rectilínea indefinida</i>	164
1.5. <i>Força de interacção entre duas correntes eléctricas rectilíneas indefinidas paralelas</i>	166
2. <i>Cálculo dos esforços globais em Mecânica dos Fluidos pelas fórmulas de Blasius</i>	167
3. <i>Interacção de correntes eléctricas</i>	174
Cap.VIII – UMA GENERALIZAÇÃO NÃO LINEAR POSSÍVEL DAS EQUAÇÕES DE D’ALEMBERT PARA O POTENCIAL ESCALAR DO CAMPO ELÉCTRICO E POTENCIAL VECTOR DA INDUÇÃO MAGNÉTICA. EXISTÊNCIA EVENTUAL DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS NÃO LINEARES PROPAGANDO-SE NO VÁCUO	178
1. <i>Generalização não linear da equação de D’Alembert para o potencial da velocidade</i>	178
2. <i>Efeitos de não linearidade em Electrodinâmica</i>	187
2.1. <i>Generalidades</i>	187
2.2. <i>Descrição quântica de certos processos não lineares</i>	188
2.2.1. <i>Interacção de dois fotões</i>	188
2.2.2. <i>Interacção de três fotões</i>	189
2.2.3. <i>Interacção de fotões múltiplos</i>	190
2.2.4. <i>Efeito Faraday</i>	190
2.2.5. <i>Efeito Kerr</i>	191
2.2.6. <i>Efeito Cotton-Mouton</i>	191

INTRODUÇÃO

Partindo do facto de que tanto a Hidrodinâmica como o Electromagnetismo são expressos em termos de Análise Vectorial foi possível, através da analogia existente entre as fórmulas de Webber da aceleração e da força de Lorentz-Heaveside, exprimir, em função de grandezas mecânicas, os campos \vec{E} e \vec{B} e partir daí para a expressão das Equações de Maxwell em termos dessas grandezas. Estas, foram assim reduzidas às equações do movimento de um meio físico (fluido) particular, o meio subquântico, que se supõe preencher totalmente o vazio. Supondo que \vec{E} e \vec{B} são grandezas proporcionais aos campos vectoriais dinâmicos $\vec{E}(\vec{\omega}, \vec{u})$ e $\vec{B}(\vec{\omega}, \vec{u})$, cujo significado é puramente mecânico ($\vec{\omega}$ é o vector turbilhão e \vec{u} a velocidade do meio contínuo designado por meio subquântico), o Teorema de Ampère do Electromagnetismo permite determinar a constante de proporcionalidade k_1 das relações $\vec{E} = k_1 \vec{E}$ e $\vec{B} = k_1 \vec{B}$. A aplicação das relações anteriores à interpretação da Lei de Biot-Savart conduziu à conclusão de que deve ter-se $k_1 = \frac{1}{2}$ e que a indução magnética é igual ao simétrico do vector turbilhão do movimento do meio subquântico, $\vec{B} = -\vec{\omega}$, tendo-se inferido ser o campo electromagnético um movimento desse meio. Partindo-se da analogia existente entre a força de interacção de correntes eléctricas rectilíneas, indefinidas, paralelas e a existente entre linhas de vórtices, foi possível determinar formalmente a densidade de massa do meio subquântico. Dado que alguns físicos admitem em Cosmologia a existência de fenómenos não lineares no vácuo, pôde obter-se uma generalização não linear das equações de D'Alembert a que satisfazem os potenciais dos campos \vec{E} e \vec{B} . Ficámos aqui limitados pela escassez de textos existentes sobre uma abordagem macroscópica da Electrodinâmica não linear do vácuo.

Obtivémos também uma interpretação hidrodinâmica da força electromotriz de um gerador de corrente constante ou alternada, e mostrou-se que um gerador de corrente eléctrica, corresponde a um ponto crítico do potencial complexo do campo eléctrico que origina a corrente. Reforçou-se, assim, a verosimilhança de ser o vazio um meio material análogo a um fluido, embora com propriedades específicas em relação aos meios fluidos usuais tratados em Mecânica dos Fluidos, dos quais temos conhecimento sensível e directo.

Admitindo a possibilidade de poderem propagar-se no vácuo ondas electromagnéticas satisfazendo a equações de onda não lineares, hipótese que parece consistente com a possibilidade de ser o vácuo um meio não linear, determinaram-se, sem necessidade de modificar as Equações de Maxwell, equações não lineares que generalizam as de D'Alembert. Paralelamente mostrou-se parecer possível, usando, o que não completamente necessário,

funções de variável complexa, verificar que a existência de um gerador de corrente eléctrica intercalado num circuito implica a existência de um ponto de ramificação do potencial complexo do campo eléctrico, e obter uma interpretação hidrodinâmica da força electromotriz.

Justificámos também o facto de os pontos críticos dos sistemas dinâmicos lineares associados á velocidade do fluido, cuja teoria nos parece dever conduzir a valores nulos do campo de velocidade (singularidades de um sistema dinâmico) serem de facto pontos onde a velocidade do fluido é infinita ou não nula, como de resto impõe a sua natureza física, e que são pontos críticos dos potenciais complexos do campo de velocidade ,no sentido em que se definem os pontos críticos de uma função de variável complexa.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO A CERTOS ASPECTOS DA HIDRODINÂMICA . AS EQUAÇÕES DE PRANDTL-GLAUERT DA HIDRODINÂMICA E DO ELECTROMAGNETISMO

Rotação média e função de Bernoulli

É possível introduzir em Hidrodinâmica uma função chamada pressão total definida pela relação

$$h = \frac{1}{g} \left(\frac{u^2}{2} + \Phi + \Pi \right) \quad (1)$$

Seja Π uma função cuja diferencial é $d\Pi = \frac{dp}{\rho}$ e que representa a energia potencial das forças de superfície. Mostrar-se-á que em corrente permanente ($\frac{\partial h}{\partial t} = 0$) a função h é constante ao longo de cada linha de corrente (Equação de Bernoulli). Vamos considerar a relação existente entre h e $\text{rot } \vec{u}$ e para isso usar a Equação de Euler, que traduz o movimento dos fluidos sem viscosidade:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \frac{\text{grad} p}{\rho} \quad (2)$$

Sendo \vec{u} a velocidade do fluido ρ a sua densidade p a pressão e \vec{F} a força por unidade de massa que actua sobre o fluido.

Se supusermos, o que ocorre numa ampla classe de escoamentos, que p é função exclusiva de ρ , isto é, que é $p = p(\rho)$ (escoamento barotrópico), tem-se:

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho} \quad (3)$$

função da qual já se tinha definido a diferencial.

Enquanto \vec{F} é uma densidade de forças mássicas, $\frac{\text{grad} p}{\rho}$ é a força de superfície por unidade de massa do fluido, como já dissemos. Se as forças mássicas forem só de natureza gravítica, a força \vec{F} que figura em (2) é necessariamente conservativa (irrotacional).

Voltando a (3), vamos definir de uma forma mais precisa a função Π :

$$\Pi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho(\rho)}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho(\mathbf{p})} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p'(\rho)}{\rho} d\rho = \Pi[\rho(\mathbf{p})] = \Pi(\mathbf{p}) \quad (4)$$

Em rigor dever-se-ia escrever $\Pi(\rho) = \Pi[\rho(\mathbf{p})]$ em vez de (4).

A definição da função entalpia específica pelo pffafiano $dH = TdS + \frac{d\rho}{\rho}$ conduz a ser:

$$\rho \cdot dh = \rho T dS + d\rho$$

Logo, vem $(\rho \cdot dh)_S = (d\rho)_S$, sendo, portanto: $(dh)_S = \left(\frac{d\rho}{\rho} \right)_S$

Significa isto que, se num processo isentrópico omitirmos o índice S , vem :

$$h = \int \frac{d\rho}{\rho} \quad (4')$$

A função anterior identifica-se com o potencial das forças de superfície dado por (3):

$$\Pi = \int \frac{d\rho}{\rho} \quad (4'')$$

Devemos atender a que h e Π são definidas aparte constantes aditivas. Supondo que os limites de integração em (4') e (3) se correspondem, vem:

$$h = \Pi \quad (5)$$

podendo dizer-se que num fluido sem viscosidade a entalpia específica se identifica, a menos de uma constante, com o potencial das forças de superfície por unidade de massa: logo, a sua diferença reduz-se a uma constante real arbitrária:

$$h = \Pi + \text{Constante} \quad (6)$$

Num processo isentrópico sofrido por um fluido, a variação de entalpia é igual à variação correspondente do potencial das forças de superfície (que nas transformações isentrópicas se identifica com a entalpia por unidade de massa) :

$$(\Delta h_S)_{\rho_0}^{\rho} = (\Delta \Pi)_{\rho_0}^{\rho}$$

É fisicamente possível ocorrerem situações onde seja $\rho = \rho(\mathbf{t}), \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{t})$. Se as forças volúmicas forem exclusivamente gravitacionais tem-se:

$$\vec{F} = -\text{grad}\Phi \quad (7)$$

$$\Phi = \rho g z \quad (8)$$

Logo:

$$\vec{F} = -\text{grad}(\rho g z) \quad (9)$$

A expressão da aceleração é:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{u} \quad (10)$$

e o seu desenvolvimento conduz à fórmula de Webber :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + ((\text{rot}\vec{u}) \wedge \vec{u}) \quad (11)$$

Substituindo em (2):

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + ((\text{rot}\vec{u}) \wedge \vec{u}) = \vec{F} - \frac{\text{grad}p}{\rho} \quad (12)$$

É com este aspecto que é geralmente apresentada a equação de Euler.

Seja \vec{u} uma solução do problema a resolver. Se o campo de forças volúmicas e o seu domínio satisfizerem a condições suficientes de regularidade, pode escrever-se na forma:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \text{grad}\varphi(x, y, z, t) + \text{rot}\vec{a}(x, y, z, t) \quad (13)$$

Vamos supor que \vec{F} é conservativo, verificando-se a igualdade:

$$\vec{F}(x, y, z, t) = -\text{grad}\Phi(x, y, z, t) \quad (14)$$

No caso mais geral de existirem rotações (campo não conservativo) temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\varphi + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\text{rot}\vec{u} \wedge \vec{u}) = -\text{grad}\Phi - \frac{\text{grad}p}{\rho} \quad (15)$$

Atendamos a que, de (3):

$$d\Pi = \frac{dp}{\rho}$$

vem:

$$\text{grad}\Pi = \frac{\text{grad}p}{\rho} \quad (3')$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + (\text{rot} \bar{\mathbf{u}}) \wedge \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{\text{grad} p}{\rho} \quad (16)$$

Ou seja:

$$\text{grad} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \phi + \Pi \right\} = -\text{rot} \bar{\mathbf{u}} \wedge \bar{\mathbf{u}} \quad (17)$$

Se o escoamento for irrotacional $\text{rot} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ou de Beltrami $(\text{rot} \bar{\mathbf{u}}) \wedge \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ (este último tipo de escoamento não nos vai interessar), vem:

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \phi + \Pi \right) = \mathbf{0} \quad (18)$$

A função entre parêntesis, que designaremos por $f(t)$, só pode, então, depender do tempo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \phi + \Pi = f(t) \quad (19)$$

Se f for integrável, seja $F(t)$ tal que:

$$f(t) = F'(t) + C^{te} \quad (20)$$

Designemos por ϕ uma nova função $\phi(t, x, y, z)$ satisfazendo a:

$$\varphi = \phi - F(t) \quad (21)$$

Substituindo (21) em (19), vem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi - F(t) \} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \Phi + \Pi = C^{te} \quad (22)$$

Obtivemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \Phi + \Pi = C^{te} \quad (23)$$

que é a Equação de Bernoulli generalizada.

Se neste caso o regime for estacionário vem a equação de Bernoulli:

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \Phi + \Pi = C^{te} \quad (24)$$

Façamos alguns comentários sobre esta última equação:

Ao longo de uma linha de corrente (24) é válida quer o escoamento seja ou não irrotacional, e representa a lei da conservação de energia para a unidade de massa do fluido. A equação (24) pode escrever-se de uma forma mais explícita, na qual $e = \frac{dE}{dm}$ é a energia por unidade de massa:

$$e = \frac{u^2}{2} + \Phi + \Pi \quad (25)$$

Note-se que a constante do segundo membro de (24) ou a grandeza E do primeiro membro de (25) podem tomar valores diferentes sobre linhas de corrente diferentes.

Se o escoamento não for conservativo ($\text{rot} \vec{u} \neq \mathbf{0}$), $e = e(x, y, z, t)$ depende do ponto onde se calcula e toma valores diferentes sobre linhas de corrente diferentes. Se o for, a energia $e(x, y, z, t)$ (energia total da unidade de massa) tem o mesmo valor em todos os pontos do fluido. Analogamente para a constante que figura na equação de Bernoulli generalizada.

Admitido (8) (forças volúmicas exclusivamente gravitacionais) obtém-se:

$$e = \frac{u^2}{2} + gz + \Pi \quad (26)$$

Por a velocidade do som ser dada por:

$$a = \sqrt{dp/d\rho}$$

com:

$$h = \Pi = \int \frac{dp}{\rho}$$

tem-se:

$$h = \Pi = \int a^2 d\rho / \rho \quad \text{com} \quad a = a(\rho)$$

Admitamos a existência conceptual de um certo meio físico barotrópico (isto é, para o qual se tem $p = p(\rho)$) que poderia ser sede de vibrações mecânicas transversais, identificáveis com as vibrações electromagnéticas num dieléctrico e onde seriam iguais as respectivas velocidades.

Então, admitida essa identificação (supor a velocidade do som igual à velocidade da luz), a velocidade

das vibrações electromagnéticas é dada por $v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ e ter-se-ia $a^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ sendo, portanto:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = a^2$$

vindo, por integração, $p = a^2 \rho + p_0$ ou, equivalentemente:

$$p = \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \right) \rho + p_0$$

que seria a relação de barotropia desse meio hipotético apresentado no Cap.II.

Voltemos às equações (12) e (3'):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \bar{u}) \wedge \bar{u} = -\text{grad} \Phi - \frac{\text{grad} \Pi}{\rho} \quad (27)$$

equação aplicável a uma massa fluida sem viscosidade, e suponhamos que não há forças de superfície.

O vector turbilhão é:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{u} \quad (28)$$

2. Conservação da massa e equação da continuidade

A equação da continuidade exprime a conservação da massa ou da carga. Se o escoamento for irrotacional vem, das relações:

$$\bar{u} = \text{grad} \phi \quad (29) \quad \text{e} \quad \bar{u} = \text{grad} \phi \quad (30)$$

já apresentadas, com ϕ, ϕ pelo menos de classe C'' :

$$\text{div} \bar{u} = \text{Lap} \phi = \frac{\xi - \frac{d\rho}{dt}}{\rho} \quad (31) \quad \text{e} \quad \text{div} \bar{u} = \text{Lap} \phi = \frac{\xi - \frac{d\rho}{dt}}{\rho} \quad (32)$$

Como $\frac{d\rho}{dt} = 0$ vem, das equações anteriores :

$$\text{Lap} \phi = \frac{\xi}{\rho} \quad (33) \quad \text{e} \quad \text{Lap} \phi = \frac{\xi}{\rho} \quad (34)$$

Nestas equações, ξ é o acréscimo de massa de fluido por unidade de tempo na unidade de volume do fluido e é devido à existência de fontes, sumidouros ou associações destes. Das equações de Poisson anteriores e da relação de barotropia vem:

$$\text{Lap} \phi = \frac{\xi}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (35)$$

sendo a velocidade do som dada por:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Substituindo em (35):

$$\mathbf{Lap}\varphi - \frac{\xi}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} \quad (36)$$

A esta equação, atendendo à expressão da velocidade do som, pode dar-se a forma:

$$\mathbf{Lap}\varphi - \frac{\xi}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} \quad (36')$$

No caso geral, tem-se $\Pi = \Pi[\rho(t)]$. Se há propagação do som ($\frac{dp}{d\rho} = a^2 \neq 0$) a relação que exprime

a barotropia do fluido $p = p(\rho)$ é invertível, existindo uma função $\rho = \rho(p)$ que é a sua inversa;

vamos substituí-la em $\Pi[\rho(p)]$, obtendo-se a função $\Pi = \Pi[p]$. Logo:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d\Pi}{dp} \frac{dp}{dt} \quad (37)$$

A expressão (3) é equivalente a:

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{1}{\rho} \quad (38)$$

Vem, por substituição em (37):

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad (39)$$

Substituindo (39) em (35') vem:

$$\mathbf{Lap}\varphi - \frac{\xi}{\rho} = -\frac{1}{a^2} \frac{d\Pi}{dt} \quad (40)$$

Se o fluido for incompressível ($a = \infty$), vem de (40) a relação (33):

$$\mathbf{Lap}\varphi = \frac{\xi}{\rho}$$

O escoamento de um fluido incompressível (33) fica completamente determinado pela solução desta equação sujeita a condições fronteiras que, no caso mais geral, variam no tempo e que são frequentemente a velocidade do fluido sobre uma superfície que ele banhe e que pode ser a fronteira do domínio ocupado pelo fluido. Sobre tal superfície a velocidade do fluido satisfaz a condições fronteiras

que, no caso mais geral, variam no tempo. Muitas vezes tais condições de fronteira consistem em ser dada a velocidade sobre a fronteira do domínio (Problema de Neumann).

De (21):

$$\varphi = \phi - F(t)$$

e de (33) conclui-se que é válido (34):

$$\text{Lap}\phi = \frac{\xi}{\rho}$$

A resolução do problema nos limites para (33) e (34) conduz aos potenciais $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ e $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$, vindo:

$$\bar{\mathbf{u}} = \text{grad}\phi = \text{grad}\varphi$$

A pressão pode ser calculada de (23) e de (8), vindo a Equação de Bernoulli generalizada:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathbf{g}\mathbf{z} + \Pi = C^{te} \quad (41)$$

Conhecido φ e a C^{te} , se (8) for escrita como equação integro-diferencial:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathbf{g}\mathbf{z} + \int_{p_0}^{p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)} \frac{dp}{\rho(p)} = C^{te} \quad (41')$$

No caso geral de um fluido compressível (40):

$$\text{Lap}\varphi - \frac{\xi}{\rho} = -\frac{1}{a^2} \frac{d\Pi}{dt}$$

dá lugar a uma equação às derivadas parciais em que ϕ (ou φ) $\frac{d\Pi}{dt}$, a^2 e ρ são escritas em função das derivadas de ϕ ou de φ , potenciais que satisfazem a (40).

3. Expressão de $\frac{d\Pi}{dt}$ em função das derivadas de φ (ou de ϕ). Determinação de uma forma equivalente da equação anterior

Da equação $\Pi = \Pi(\rho)$ vem:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d\Pi}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (42)$$

De (41):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathbf{g}\mathbf{z} + \Pi = C^{te}$$

tomando a constante do segundo membro nula, vem:

$$\Pi = -\frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{g}\mathbf{z} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (43)$$

O cálculo de Π e de $\frac{d\Pi}{dt}$ exige o conhecimento de φ . Desprezando $\mathbf{g}\mathbf{z}$ vem, se o escoamento for conservativo:

$$\Pi = -\frac{1}{2}|\mathbf{grad}\varphi|^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (44)$$

Logo:

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{grad}\varphi|^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \quad (45)$$

Atendendo a que é:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad} \quad (46)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad}\varphi)^2}{2}\right] - \mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{grad}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad}\varphi)^2}{2}\right] = \\ &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\mathbf{grad}\varphi)^2}{2}\right] - \mathbf{grad}\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{grad}\varphi - \mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{grad}\left[\frac{(\mathbf{grad}\varphi)^2}{2}\right] \end{aligned} \quad (47)$$

A expressão (47) pode escrever-se na forma :

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) - \bar{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) - \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) \quad (48)$$

Atenda-se a que é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) = \varphi_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \varphi_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \varphi_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \bar{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}$$

o que demonstra (48). Vamos agora substituir (48) em (40), que é:

$$\mathbf{Lap}\varphi = \frac{\xi}{\rho} - \frac{1}{a^2} \frac{d\Pi}{dt}$$

vindo:

$$\text{Lap}\phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\xi}{\rho} + \frac{1}{a^2} \left\{ 2 \text{grad}\phi \cdot \text{grad} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \text{grad}\phi \cdot \text{grad} \left[\frac{(\text{grad}\phi)^2}{2} \right] \right\} \quad (49)$$

Obtivemos uma generalização não linear da Equação de D'Alembert. Introduzindo nela as componentes de $\text{grad}\phi$ vem:

$$\begin{aligned} & \phi_{xx} \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2} \right) + \phi_{yy} \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2} \right) + \phi_{zz} \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2} \right) - 2\phi_{xy} \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} - 2\phi_{yz} \frac{\phi_y \phi_z}{a^2} - 2\phi_{xz} \frac{\phi_x \phi_z}{a^2} - \\ & - 2 \frac{\phi_x}{a^2} \phi_{xt} - 2 \frac{\phi_y}{a^2} \phi_{yt} - 2 \frac{\phi_z}{a^2} \phi_{zt} - \frac{\phi_{tt}}{a^2} = \frac{\xi}{\rho} \end{aligned} \quad (50)$$

Ou, equivalentemente:

$$\text{Lap}\phi - \frac{\text{grad}\phi \cdot \{(\text{grad}\phi) \cdot \text{grad}\} \text{grad}\phi}{a^2} = \frac{\xi}{\rho} \quad (50')$$

4. Interpretação hidrodinâmica de Π

O conhecimento da entalpia específica $h(\mathbf{p}, s)$, sendo \mathbf{p} a pressão e s a entropia por unidade de massa, determina completamente o estado termodinâmico de um sistema físico.

Do pfaffiano:

$$dh = Tds + vdp \quad (51)$$

com $v = \frac{1}{\rho}$ vem:

$$T(\mathbf{p}, \rho) = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p \quad (51-1) \quad \rho(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s} \quad (51-2)$$

De (51) vem:

$$\text{grad}h = T \text{grad}s + \frac{\text{grad}p}{\rho}$$

Logo:

$$(\text{grad}h)_s = \frac{\text{grad}p}{\rho} \quad (52)$$

de (4'') vem:

$$\text{grad}\Pi = \text{grad} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$$

Numa transformação para a qual seja $\rho = C^{te}$ vem da relação anterior:

$$(\text{grad}\Pi)_\rho = \text{grad} \left(\frac{p - p_0}{\rho} \right) = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

comparando com (52) vem:

$$(\text{grad}\Pi)_\rho = (\text{grad}h)_s \quad (53)$$

Logo:

$$(dh)_\rho = (dh)_s \quad (54)$$

Portanto, a função Π num fluido incompressível, atendendo a (4'') é:

$$\Pi = \frac{p - p_0}{\rho} \quad (55)$$

ou, mais simplesmente, por a entalpia só ser definida aparte uma constante aditiva:

$$\Pi = \frac{p}{\rho} \quad (55')$$

A relação (54) só diz respeito a variações isentrópicas da entalpia de um fluido compressível quando sujeito a uma pressão variando de p_0 a p . O carácter incompressível do fluido constitui uma restrição demasiado drástica para as conclusões que queremos obter pelo que (54) deve ser generalizada para transformações isentrópicas de fluidos compressíveis, o que nos leva a admitir, em vez de (54), uma relação válida em processos onde ρ varie:

$$d\Pi = (dh)_s \quad (56)$$

De (56) e (4'') vem:

$$h(p,s) - h(p_0,s) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \Pi(p) = \Pi(\rho) \quad (57)$$

Vamos fixar-nos no caso de ser $\Pi'(\rho) \neq 0$ num certo domínio, onde está então garantida a existência de uma função $\rho = \rho(\Pi)$ inversa de $\Pi = \Pi(\rho)$. A relação $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ conduz a:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{d\Pi} \frac{d\Pi}{d\rho} \quad (58)$$

De (3) vem, por substituição em (58):

$$a^2 = X(\Pi) = \rho \frac{d\Pi}{d\rho} = \frac{\rho(\Pi)}{\rho'(\Pi)} \quad (59)$$

De (45) concluímos que (59) exprime a velocidade do som em termos das derivadas de φ .

Vamos ver através de um exemplo que a determinação analítica de $X(\Pi)$ exige o conhecimento de $p = p(\rho)$.

4.1. Cálculo da velocidade do som no caso de uma transformação politrópica de um gás ideal e da sua expressão nas derivadas de φ

Neste caso tem-se:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k \quad (60)$$

Então:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} \left[p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k \right] = \frac{p_0}{\rho_0^k} k \rho^{k-1} \quad (61)$$

Calculemos Π dado por (3) a partir de (60) se for $k \neq 1$:

$$\Pi(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^p \frac{p_0}{\rho_0^k} k \rho^{k-2} d\rho = k \frac{p_0}{\rho_0^k} \left(\frac{\rho^{k-1}}{k-1} \right)_{\rho_0}^p = \frac{k p_0}{\rho_0^k} \frac{\rho^{k-1} - \rho_0^{k-1}}{k-1} \quad (62)$$

Substituindo (61) em (62) vem:

$$\Pi = \frac{a^2}{k-1} - \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{1}{k-1} \left(a^2 - k \frac{p_0}{\rho_0} \right) \quad (63)$$

Para demonstrar (63) vamos substituir nesta expressão a igualdade (61):

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0^k} k \rho^{k-1} - k \frac{p_0}{\rho_0} \right) = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0^k} \rho^{k-1} - \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \\ &= \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0^k} \rho^{k-1} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0^k} (\rho^{k-1} - \rho_0^{k-1}) \end{aligned}$$

Reobtivemos (62). De (63) vem:

$$a^2 = (k-1) \left(\Pi + \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \right) \quad (64)$$

Se for $k = \gamma = \frac{c_p}{c_v}$, sendo γ o índice adiabático, a transformação politrópica é isentrópica.

Substituindo em (64) Π pela sua expressão (44) que é:

$$\Pi = -\frac{1}{2} (\text{grad}\varphi)^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

vem:

$$a^2 = (1-k) \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad}\varphi)^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \right] \quad (65)$$

Determinámos neste caso a função $a^2 = X[\Pi(\varphi)]$.

Um escoamento contínuo homoentrópico e irrotacional fica deste modo conhecido, pois a integração de (50) sob condições fronteiras e iniciais apropriadas permite calcular φ dado $\bar{\mathbf{u}}$ pela relação $\bar{\mathbf{u}} = \text{grad}\varphi$. A equação de Bernoulli generalizada (41) com $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ permite calcular $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ e a relação de barotropia $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\rho)$ conduz à função $\rho = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$.

As equações (49) e (50) às quais satisfaz φ são não lineares e a obtenção de soluções analíticas assenta na sua linearização para uma corrente uniforme onde é introduzido um obstáculo. A corrente não perturbada (uniforme) deve ser suficientemente lenta para que nas condições fronteiras, iniciais e nas equações do movimento se possam desprezar os produtos, quadrados e potências de ordem superior das componentes da perturbação da velocidade e suas derivadas.

Obtém-se assim uma equação linear para φ válida para escoamentos subsónicos ($\mathbf{u} < \mathbf{a}$) e supersónicos ($\mathbf{u} > \mathbf{a}$).

5. Equação de Euler e Função de Bernoulli. Escoamentos estacionários

5.1. Generalidades

Para um fluido sem viscosidade a equação do balanço das quantidades de movimento é, como vimos, dado por (2):

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{\text{grad}\mathbf{p}}{\rho}$$

sendo como também já vimos (equação 4):

$$\Pi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\mathbf{p}(\rho)}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\mathbf{p}}{\rho(\rho)}$$

Um fluido diz-se elástico se existir uma função F tal que seja $F(\mathbf{p}, \rho) = 0$. Se a função F que caracteriza o fluido elástico satisfizer num certo domínio a $\frac{\partial F}{\partial \rho} \neq 0$ existe nesse domínio uma função $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\rho)$ e o fluido diz-se, como já vimos, barotrópico.

Se as forças mássicas forem exclusivamente gravitacionais vem:

$$\bar{\mathbf{F}} = -\text{grad}(gz) \quad (66)$$

A aceleração de uma partícula fluida é dada por:

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad})\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^2}{2}\right) + \text{rot}\bar{\mathbf{u}} \wedge \bar{\mathbf{u}} \quad (67)$$

De (2) e de (67) vem:

$$\bar{\mathbf{F}} - \frac{\text{grad}\mathbf{p}}{\rho} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \text{rot}\bar{\mathbf{u}} \wedge \bar{\mathbf{u}} \quad (68)$$

Consideremos agora a função de Bernoulli na forma:

$$h = \frac{1}{g}\left(\frac{u^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho}\right) \quad (69)$$

De (69) vem:

$$\begin{aligned} \text{grad}(gh) &= \text{grad}\left(\frac{u^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho}\right) = \\ &= \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \text{grad}(gz) + \text{grad}\int \frac{dp}{\rho} \end{aligned} \quad (70)$$

Logo de (68):

$$\text{grad}(gz) = \text{grad}(gh) - \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \text{grad}\int \frac{dp}{\rho} \quad (70')$$

Logo:

$$\bar{\mathbf{F}} = -\text{grad}(gz) = -\text{grad}(gh) + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \text{grad}\int \frac{dp}{\rho}$$

Logo:

$$\bar{\mathbf{F}} - \text{grad}\int \frac{dp}{\rho} = -\text{grad}(gh) + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad (71)$$

Substituindo (71) em (16) sendo esta última expressão :

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\phi + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \text{rot}\bar{u} \wedge \bar{u} = \bar{F} - \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} = -\text{grad}(gh) + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Vem:

$$\text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} = \bar{F} - \text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \text{rot}\bar{u} \wedge \bar{u} \quad (13)$$

Logo:

$$\bar{F} - \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} = \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\text{rot}\bar{u}) \wedge \bar{u} + \text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad (a)$$

Mas vimos de (71) que se tem:

$$\bar{F} - \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} = -\text{grad}(gh) + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad (b)$$

Logo de (13) vem, igualando os segundos membros de (a) e de (b) vem:

$$\text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\text{rot}\bar{u}) \wedge \bar{u} + \text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\text{grad}(gh) + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Logo:

$$(\text{rot}\bar{u}) \wedge \bar{u} + \text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\text{grad}(gh)$$

Portanto se o escoamento for permanente, é possível escolher um potencial das velocidades independente do tempo, vindo:

$$\text{grad}(gh) = -\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \wedge (\text{rot}\bar{u})$$

Ou seja:

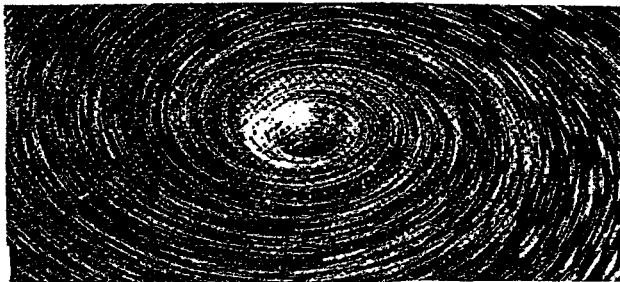
$$\text{grad}(gh) = -\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + 2\bar{\omega} \wedge \bar{u}$$

Se ρ for o mesmo em todos os pontos do fluido tem-se:

$$\text{grad} \int \frac{dp}{\rho} = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{\text{grad}p}{\rho}$$

vindo então:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + 2\bar{\omega} \wedge \bar{u} = -\text{grad}(gh) \quad (72)$$



Tubo vorticoso.

Visualiza-se a existência do tubo vorticoso no eixo do vórtice espiral, à medida que aumenta a circulação.

Se pudermos considerar g independente das coordenadas x, y, z , vem:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\text{rot} \bar{u}) \wedge \bar{u} = -g \cdot \text{grad} h \quad (72)$$

5. 2. Regime estacionário

Se em (72) fizermos $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ vem:

$$\text{grad}(gh) = \bar{u} \wedge \text{rot} \bar{u} \quad (73)$$

Portanto, se o escoamento for permanente, $\text{grad}(gh)$ é normal à superfície de Lamb no ponto onde é calculado. A taxa de variação de h é, portanto, máxima segundo a normal à superfície de Lamb (constituída por linhas de corrente e linhas de vórtice) que só existe se \bar{u} e $\text{rot} \bar{u}$ não forem paralelos. Se o escoamento for irrotacional ($\bar{u} = \text{grad} \phi$) ter-se-á $\text{grad}(gh) = 0$, sendo então h uma função exclusiva do tempo, $h = h(t)$ em todo o fluido. Se $\bar{\omega}$ for paralelo a \bar{u} não há superfície de Lamb.

A equação às derivadas parciais para um escoamento homoentrópico permanente sujeito a grandes perturbações, obtém-se de (50) tomando $\phi_{tt} = 0$ vindo, na presença de fontes, a equação (74):

$$\phi_{xx} \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2} \right) + \phi_{yy} \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2} \right) + \phi_{zz} \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2} \right) - 2\phi_{xy} \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} - 2\phi_{yz} \frac{\phi_y \phi_z}{a^2} - 2\phi_{xz} \frac{\phi_x \phi_z}{a^2} = \frac{\xi}{\rho} \quad (74)$$

Equivalentemente vem daqui a equação (49).

5. 2. 1. Linearização da equação do potencial das velocidades

Vamos supor que o fluido está imóvel num referencial absoluto Σ_0 ocupando um domínio ilimitado l-conexo por estar mergulhado no fluido um obstáculo C movendo-se nele com a velocidade \bar{V} em relação a Σ_0 . Seja Σ um referencial inercial solidário com C , logo movendo-se com a velocidade \bar{V} em relação ao fluido e a Σ_0 , dando o obstáculo C lugar a pequenas perturbações $\delta \bar{V} = (u, v, w)$ da velocidade uniforme não perturbada \bar{V} do fluido em relação a Σ_0 . Como C se move com velocidade \bar{V} em relação ao fluido e a Σ_0 , o fluido move-se em relação a C e a Σ_0 com a velocidade

$-\bar{V}$. Deslocando-se o corpo C com velocidade \bar{V} em relação a Σ_0 , uma grandeza G de natureza arbitrária medida no instante t e no ponto (x, y, z) do referencial Σ_0 tem o mesmo valor no instante $t + dt$ em $(x + V_x dt, y + V_y dt, z + V_z dt)$.

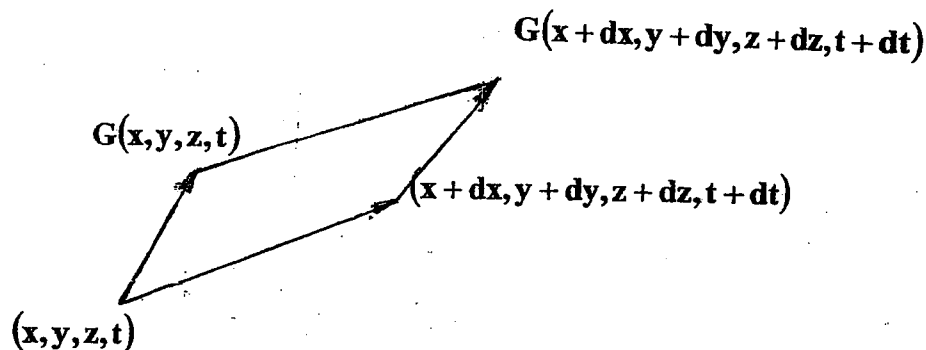


Fig. 1

Então tem-se:

$$G(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = G(x + V_x dt, y + dy, z + dz, t + dt) \quad (75)$$

Logo:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{G(x + V_x dt, y + V_y dt, z + V_z dt, t + dt) - G(x, y, z, t)}{dt} = 0$$

Portanto:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \bar{V} \cdot \text{grad}G = 0 \quad (76)$$

Logo:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\bar{V} \cdot \text{grad}G \quad (78)$$

Vem assim a relação operatorial:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\bar{V} \cdot \text{grad} \quad (79)$$

Se for $\bar{V} = (u, 0, 0)$ vem:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial x} \quad (80)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (81)$$

vindo, em geral:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \text{Lap} \quad (82)$$

A relação (80) permite substituir qualquer derivada parcial em ordem ao tempo por derivadas parciais em ordem às coordenadas de espaço; uma equação onde figuram $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{zz}, \varphi_{tt}$ pode ser reduzida a outra equação onde figuram apenas $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{zz}$ e de onde φ_{tt} foi expurgada. As suas soluções têm a forma $\varphi(x, y, z)$ e representam escoamentos estacionários no referencial Σ solidário com C .

Sejam $\vec{V}_\infty, p_\infty, \rho_\infty$ respectivamente, a velocidade, a pressão e a densidade de uma corrente uniforme; $\Sigma_0(O, x, y, z)$ um referencial com o eixo Ox alinhado segundo \vec{V}_∞ e C um corpo que se introduz na corrente inicialmente uniforme, podendo ter pequenos movimentos (escoamento não permanente), ou ser fixo (escoamento permanente) em relação ao referencial Σ solidário com C . No caso não permanente há a considerar três situações:

- a) O obstáculo C é deformável (o que sucede sempre nos casos reais, embora em certas situações as perturbações possam ser desprezáveis por serem pequenas).
- b) O corpo C é perfeitamente rígido, mas oscila pouco em torno de uma certa configuração tomada para referência. Este escoamento é não permanente e fracamente perturbado e deve ser uniforme a infinito.
- c) O corpo C é perfeitamente rígido e não oscila, dando lugar a um escoamento permanente.

Consideremos um escoamento irrotacional e homoentrópico, contínuo antes do instante em que nele se introduziu o corpo C . Este escoamento, por hipótese invíscido, continua indefinidamente homoentrópico e irrotacional (Teorema de Lagrange).

As hipóteses referidas permitem a linearização das equações (49) e (50) dos potenciais mediante a introdução de hipóteses adicionais restritivas.

O referencial $\Sigma_0(O, x, y, z)$ é o referencial inercial solidário com a corrente fluida vinda do infinito, que se desloca com a velocidade \vec{V}_∞ em relação ao referencial $\Sigma(\Omega, X, Y, Z)$, solidário com C : Σ é obtido de Σ_0 por uma translação de Σ , até O coincidir com o ponto $\Omega \in C$. O movimento em Σ é definido pelas velocidades lineares U_0, V_0, W_0 e pelas velocidades angulares p, q, r do corpo em torno dos três eixos X, Y, Z .

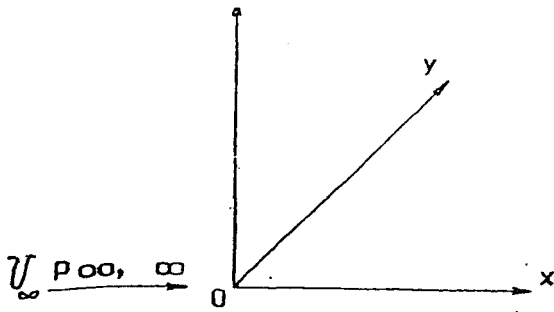


Fig2

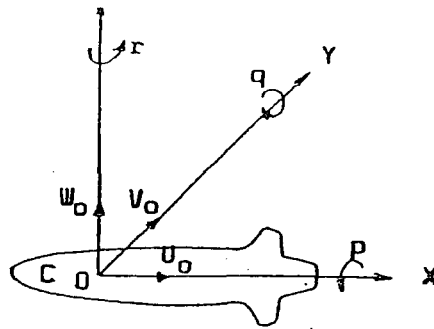


Fig3

Escoamento duma corrente uniforme sobre um corpo que dá origem a pequenas perturbações. As velocidades lineares U_0 , V_0 e W_0 e as velocidades angulares p , q e r definem o movimento do referencial $OXYZ$ fixo com o corpo C , relativamente ao referencial $Oxyz$ alinhado com a corrente \vec{U}_0 .

Comecemos por analisar a hipótese a) na qual o obstáculo C é pouco deformável, para que a perturbação $\delta\vec{V} = (u, v, w)$ da velocidade do fluido seja suficientemente pequena.

Na hipótese b) considera-se C rígido, oscilando em torno de uma posição de equilíbrio, sendo pequenas as perturbações sofridas pela velocidade devidas ao obstáculo. Em qualquer caso a linearização de (49) e de (50) é obtida em:

$$\varphi(x, y, z, t) = V_\infty x + \tilde{\varphi}(x, y, z, t)$$

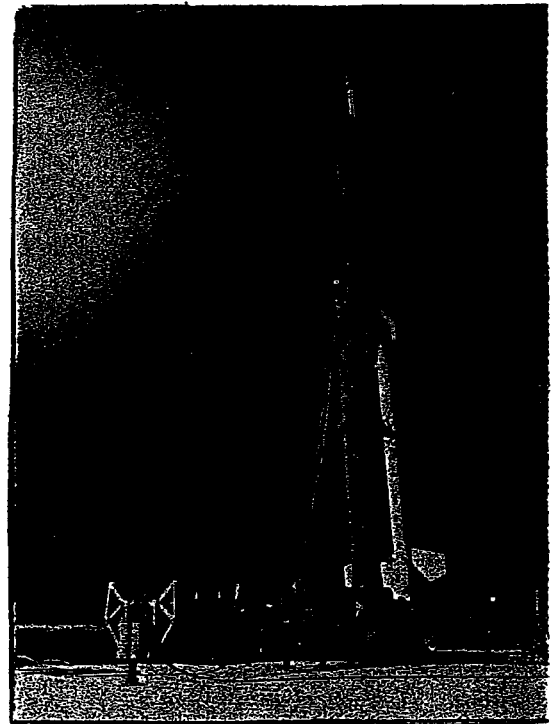
com:

$$\delta\vec{V} = \text{grad}\tilde{\varphi} \quad (83)$$

Então:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\infty + \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} = V_\infty + u \\ v &= u_y = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} \\ w &= u_z = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z} \end{aligned} \quad (84)$$

Por hipótese as grandezas adimensionais seguintes (cocientes de duas velocidades) são desprezáveis e l é um comprimento característico do corpo:



Lançamento de um foguete Nike-Apache para pesquisas

ionosférica,

$$\begin{array}{cccc}
(u - V_\infty)/V_\infty & v/V_\infty & w/V_\infty & \\
\tilde{\varphi}_u/V_\infty & & & \\
I\tilde{\varphi}_{xx}/V_\infty & I\tilde{\varphi}_{xy}/V_\infty & I\tilde{\varphi}_{xz}/V_\infty & I\tilde{\varphi}_{yy}/V_\infty \\
I\tilde{\varphi}_{xz}/V_\infty & I\tilde{\varphi}_{yz}/V_\infty & I\tilde{\varphi}_{zz}/V_\infty & I\tilde{\varphi}/V_\infty \\
I\tilde{\varphi}_{xz}/V_\infty & I\tilde{\varphi}_{yt}/V_\infty & I\tilde{\varphi}_{zt}/V_\infty &
\end{array} \quad (85)$$

Vamos usar a equação de Bernouli (24):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Pi + \frac{u^2}{2} = C^{te}$$

e aplicar esta equação a um ponto no infinito e a um ponto próprio qualquer do escoamento

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Pi + \frac{(V_\infty + u)^2 + v^2 + w^2}{2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_\infty + \Pi_\infty + \frac{V_\infty^2}{2}$$

Tomando $(\frac{\partial \varphi}{\partial t})_\infty = 0$ vem:

$$\Pi - \Pi_\infty = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{V_\infty^2 + 2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (86)$$

Sabemos que se um escoamento contínuo de um fluido invíscido for homoentrópico e irrotacional num certo instante permanece indefinidamente homoentrópico e irrotacional. vindo neste caso a equação de Bernoulli generalizada: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + h + \frac{u^2}{2} + gz = C^{te}$. Desprezando as forças mássicas vem:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + h + \frac{u^2}{2} = C^{te}, \text{ com } h = \Pi = \int \frac{dp(\rho)}{\rho}. \text{ Por ser } a^2 = \frac{dp}{d\rho}, h = \int a^2 \frac{d\rho}{\rho}, h \text{ e } a^2$$

podem exprimir-se exclusivamente em função de ρ , eliminando ρ entre estas duas equações vem:

$$a^2 = F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) = F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\text{grad}\varphi)^2\right)$$

Vamos fazer $a^2 = X(\Pi)$ nas expressões seguintes.

$$a^2 = a_\infty^2 + (\Pi - \Pi_\infty) \frac{d(a^2)}{d\Pi} = a_\infty^2 - \lambda \left(\frac{V_\infty^2 + 2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{2} - \varphi_u \right) \quad (87)$$

sendo:

Consideremos agora a expressão da velocidade do som no fluido:

$$a^2 = a_\infty^2 + (\Pi - \Pi_\infty) \frac{d(a^2)}{d\Pi} = a_\infty^2 - \lambda \frac{2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{2} - \lambda\varphi, \quad (87)$$

Sendo:

$$\lambda = \frac{d(a^2)}{dh} = \frac{d(a^2)}{d\Pi} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{d\Pi} = \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{d\Pi} \quad (87')$$

Atendendo a que é: $dh = d\Pi = \frac{dp}{\rho}$. Como fizemos $a^2 = X(\Pi)$ podemos escrever:

$$\lambda = \frac{d(a^2)}{d\Pi} = X'(\Pi) = \frac{d}{d\Pi} \left(\frac{dp}{d\rho} \right) = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{d\Pi} = \frac{d^2 p}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{d\Pi} = \frac{d^2 p}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \rho$$

Portanto substituindo a expressão anterior na expressão (87) de a^2 e o resultado obtido em em (74), expressões que vamos relembrar:

A expressão (74) é:

$$\varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2} \right) + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} \right) + \varphi_{zz} \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2} \right) - 2\varphi_{xy} \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} - 2\varphi_{yz} \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} - 2\varphi_{xz} \frac{\varphi_x \varphi_z}{a^2} = \frac{\xi}{\rho} \quad (74)$$

A expressão (87) é:

$$a^2 = a_\infty^2 + (\Pi - \Pi_\infty) \frac{d(a^2)}{d\Pi} = a_\infty^2 - \lambda \left(\frac{2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) - \lambda\varphi,$$

Atenda-se por fim à relação (87'):

$$\lambda = \frac{d(a^2)}{d\Pi} = X'(\Pi) = \frac{d^2 p}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \rho$$

De (87) e de (87') vem:

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{d^2 p}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \rho \left[\frac{2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{2} + \varphi \right]$$

Destas 4 equações vem:

$$(1 - M_\infty^2) \tilde{\varphi}_{xx} + \tilde{\varphi}_{yy} + \tilde{\varphi}_{zz} = \frac{1}{a_\infty^2} \tilde{\varphi}_{tt} + 2 \frac{M_\infty}{a_\infty} \tilde{\varphi}_{xt} + \frac{\xi}{\rho} \quad (89)$$

Consideremos a existência de um obstáculo C que no caso mais geral se supõe imerso no domínio D de um escoamento fluido; Seja $\Sigma(\Omega, X, Y, Z)$ (com $\Omega \in C$) um referencial suposto fixo em relação a C, ou na situação mais geral, móvel por translação rectilínea uniforme em relação a C e ao respectivo referencial solidário. Se o corpo C (e o referencial com o qual é solidário $\Sigma(\Omega, X, Y, Z)$) estiverem fixos em relação ao referencial $\Sigma_0(O, x, y, z)$, suposto inercial, solidário com o movimento médio do fluido em escoamento, não há movimento do fluido em relação ao obstáculo C, e podemos dizer que o

movimento do fluido é estacionário. Neste caso obtivemos a equação do potencial para movimentos transônicos ($M_\infty \approx 1$)

Para o correspondente potencial φ vem:

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \frac{1}{a_\infty^2}\varphi_{tt} + 2\frac{M_\infty}{a_\infty}\varphi_{xt} + \frac{\xi}{\rho} \quad (89')$$

$M_\infty = V_\infty/a_\infty$ é o número de Mach da corrente não perturbada. Se o corpo, C com o seu sistema de referência solidário $\Sigma(\Omega, X, Y, Z)$, ($\Omega \in C$), estiver animado de um movimento uniforme em relação ao referencial $\Sigma_0(O, x, y, z)$, solidário com o movimento médio do fluido em escoamento. Então existiria um movimento uniforme no tempo do fluido em relação a C, ou equivalentemente em relação a $\Sigma(\Omega, X, Y, Z)$; o *escoamento do fluido é permanente*.

Para escoamentos transônicos, ($M_\infty \approx 1$), isto é, para $M_\infty \approx 1$ ou, equivalentemente: $(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} = O(\varepsilon^2)$ e desprezando todos os termos de ordem maior ou igual a 2, tem-se:

$$(1 - M_\infty^2)\tilde{\varphi}_{xx} + \tilde{\varphi}_{yy} + \tilde{\varphi}_{zz} = \frac{M_\infty^2(\lambda + 2)}{V_\infty}\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_{xx} + \frac{1}{a_\infty^2}\tilde{\varphi}_{tt} + \frac{\xi}{\rho} \quad (90)$$

Excluindo o regime hipersônico, esta equação é válida para qualquer valor de M_∞ , sendo equivalente a (89) quando M_∞ se afasta de 1.

Já considerámos as equações dos escoamentos independentes do tempo. Vamos referir-nos aos escoamentos independentes do tempo.

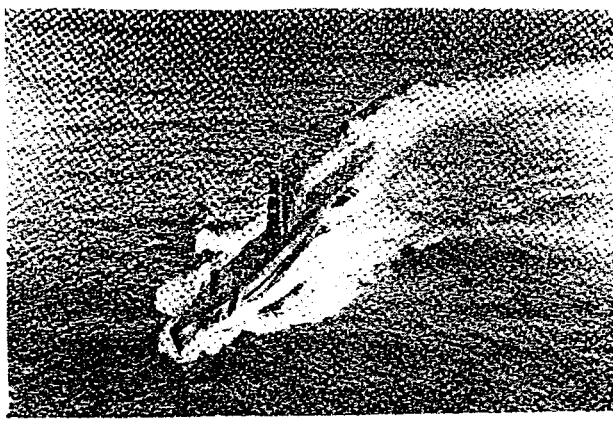
Se o corpo C (e o referencial $\Sigma(\Omega, X, Y, Z)$, ($\Omega \in C$) *solidário com C*) for obtido do referencial $\Sigma_0(O, x, y, z)$ solidário com o movimento médio do fluido em escoamento, por uma translação rectilínea uniforme, isto é, da forma $\Sigma(\Omega, X, Y, Z, \dots) = \hat{T}.\Sigma_0(O, x, y, z)$ sendo \hat{T} um operador linear da forma: $T_{ij} = a_{ij}t + b_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3$ então o escoamento é permanente no referencial Σ_0 .

No caso da equação (89) nas coordenadas x, y, z , tomando nela $\tilde{\varphi}_{tt} = \tilde{\varphi}_{xt} = 0$ vem a Equação de Prandtl-Glauert:

$$(1 - M_\infty^2)\tilde{\varphi}_{xx} + \tilde{\varphi}_{yy} + \tilde{\varphi}_{zz} = \frac{\xi(x, y, z)}{\rho} \quad (91)$$

Na ausência de fontes:

$$(1 - M_\infty^2)\tilde{\varphi}_{xx} + \tilde{\varphi}_{yy} + \tilde{\varphi}_{zz} = 0 \quad (92)$$



Fotografia de submarino na superfície.

Da relação (21), $\varphi = \phi - F(t)$ vem:

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = \frac{\xi(x, y, z)}{\rho} \quad (93)$$

Se $\xi = 0$:

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (93')$$

Além disso:

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = \frac{\xi(x, y, z)}{\rho} \quad (94)$$

Se for $\xi = 0$ vem:

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (94')$$

6.A equação de Prandtl-Glauert em Electrodinâmica

6.1. Campo electromagnético criado por uma distribuição de carga eléctrica em movimento uniforme

6.1.1. Radiação de uma carga pontual

Queremos calcular os campos devidos a uma carga pontual Q colocada no ponto genérico da sua trajectória definido pelo vector $\vec{w}(t)$: $\vec{w}(t) = \text{Posição de } Q \text{ no instante } t$.

Os potenciais retardados $\varphi^*(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)$, no ponto \vec{r} e no instante t , devidos à carga Q , não resultam da distribuição de Q no instante t , por as interacções se propagarem com velocidade finita, mas sim do estado de Q no instante t_R anterior a t , tal que $t_R = t - \frac{R}{c}$. Suponhamos que se trata de interacções no vácuo, com velocidade c . Se a carga Q , que começaremos por considerar pontual, emitir um fóton no instante t_R , desde a posição definida pelo vector $\vec{w}(t_R)$ sobre a sua trajectória, esse fóton alcança um ponto genérico $P(t) \in R^3$ cuja posição será definida pelo vector $\vec{R}(t)$. Teremos então:

$$\vec{R}(t) - \vec{w}(t) = \vec{c}(t - t_R)$$

O primeiro membro desta igualdade é o vector cujo módulo é a distância percorrida pelo sinal desde o instante t_R no qual a carga ocupa a posição $\vec{w}(t_R)$, até ao instante $t = t_R + \frac{R}{c}$ no qual o sinal ocupa a posição P definida pelo vector \vec{R} . Vamos chamar a $\vec{w}(t_R)$ *vector posição retardada de Q*; $\vec{r}(t)$ é o *vector posição retardada do fotão emitido por Q*.

Seja dada uma distribuição de carga eléctrica de densidade supostamente independente do tempo, $\rho(\vec{r}')$, definida em $D \subseteq R^3$, sendo obviamente D a região ocupada pelas cargas eléctricas potenciadoras, (abstemo-nos de entrar em pormenores à cerca do que se entende por suporte de uma função ou distribuição, ou sobre a eventual existência de distribuições de suporte superficial). Vamos supor para maior simplicidade que ρ é contínua. Cada uma das cargas diferenciais em \vec{r}' , ponto genérico de D , $dQ(\vec{r}')$, tem sobre um ponto potenciado $P \in R^3$ definido pelo vector \vec{r} , P pertencendo ou não a D , um efeito que é transportado com a velocidade finita $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ do ponto potenciante $P' \in D$ até ao ponto potenciado P, ao qual chega no instante t , por meio de um fotão emitido de Q no instante $t_R = t - \frac{R}{c}$, sendo $\vec{R} = P - P'$. Este sinal chega a P, num instante t posterior ao instante t_R em que partiu de $P' \in D$, efeito que é traduzido pelo potencial diferencial:

$$d\varphi^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ(\vec{r}')}{|\vec{R}(t) - \vec{w}(t_R)|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} d\mathcal{V}'$$

Escrevemos o elemento de volume com plica para indicar que ele se encontra no afixo de \vec{r}' ; daqui em diante omitiremos, para aligeirar a notação, a plica sobre o elemento de volume.

No cálculo do integral da expressão anterior deve ter-se em conta que no ponto P e no instante t as "parcelas" diferenciais que essa expressão diferencial representa, traduzem, como dissemos, o efeito da acumulação em P no instante t de todos os fotões emitidos pelas cargas em $P' \in D$,

nos instantes $t_R = t - \frac{|P - P'|}{c} = t - \frac{R}{c}$. No cálculo do referido integral a parcela diferencial

$d\varphi^*(\vec{r}, t)$, em P no instante t , é tanto menor quanto mais longe estiver de P o ponto P' onde se situa a carga $dQ(\vec{r}')$ emissora do fotão que chega a P em t , ou equivalentemente, quanto mais anterior a t for o instante em que se dá a emissão fotónica pela carga em P' . Examinemos o integral que nos dá o potencial:

$$\varphi^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} d\mathcal{V}' \quad (95)$$

No qual a densidade da distribuição depende para cada ponto potenciante do valor do tempo retardado t_R , sendo $\rho = \rho(\vec{r}', t_R)$, influenciando tanto menos no valor φ^* quanto mais longe estiver o ponto

potenciante do ponto potenciado, ou equivalentemente, quanto mais distante no tempo estiver o instante da emissão, t_R do instante da recepção t .

A expressão (95) sugere a independência de $\rho(\vec{r}', t_R)$ em relação a \vec{r} e assim ter-se-ia que o potencial retardado devido a uma carga pontual Q seria o mesmo que no caso estático é criado por uma carga pontual Q :

$$\varphi^* = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (96') \quad Q = \iiint_D \rho(\vec{r}', t_R) d\mathcal{V} \quad (96'')$$

Para calcular a carga total de uma distribuição de carga eléctrica, devemos integrar $\rho(\vec{r}', t)$ com $t = t_R = C^{te}$ isto é a tempo t_R constante sobre todo o espaço tendo t_R o mesmo valor para todos os pontos P' onde existam cargas eléctricas ($P' \in D$) que no instante $t_R = t - R/c$ emitam fotões atingindo o ponto P onde se quer calcular o potencial no instante t , isto é, para todos os pontos P' que num certo instante $t = t_R + R/c$ vão contribuir com fotões para o valor do potencial $\varphi^*(P, t)$. Equivalentemente contribuem para o potencial em P no instante t as cargas nos pontos P' para os quais, dado o ponto P onde se quer calcular o potencial, se tem $R = |P' - P|$, emitindo nos instantes $t' \equiv t_R = t - R/c$. Em (96'') a retardação $t_R = t - R/c$ obriga as "parcelas" do integral (96'') a darem conta dos diferentes valores de ρ nos diferentes instantes t_R , sucedendo o mesmo com o integral. O integral, (96''), não nos dá directamente o valor da carga, provando-se por considerações relativistas que lhe é proporcional.

Se a fonte está em movimento isso dá lugar a uma distorção da distribuição de cargas. Na Electrodinâmica de Maxwell, que é formulada em termos das densidades de carga e de corrente, considera-se uma carga pontual como o limite de uma carga extensa cuja extensão tende para zero. Como veremos, para uma partícula com extensão, se for $\vec{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ teremos:

$$\iiint_{R^3} \rho_e(\vec{r}', t_R) d\mathcal{V} = Q \left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}}{c} \right)^{-1} \quad (97)$$



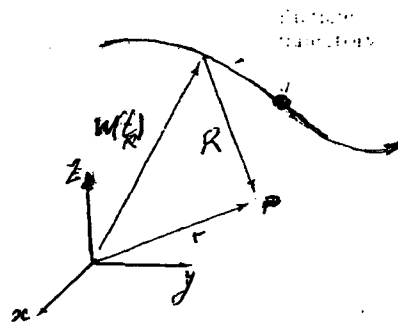


Fig.4

Consideremos um comboio em movimento com velocidade \bar{v} que, no instante da partida, emite um fóton. Quando o comboio percorreu a distância L com a velocidade \bar{v} levou o tempo t ; o fóton percorreu no mesmo tempo t a distância L' vindo:

$$\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

Logo:

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c}} = L \left(1 - \frac{v}{c} \right)^{-1} > L$$

Se o comboio se aproxima do observador parece-lhe mais longo devido ao factor $\left(1 - \frac{v}{c} \right)^{-1} > 1$; se se afasta parece-lhe mais curto por ser :

$$L' = \frac{L}{1 + \frac{v}{c}} < L$$

No caso geral, se a velocidade do comboio faz um ângulo θ com a linha de visão do observador do qual se aproxima, o excesso de distância percorrida pela luz é $L' \cos \theta$ vindo:

$$\frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

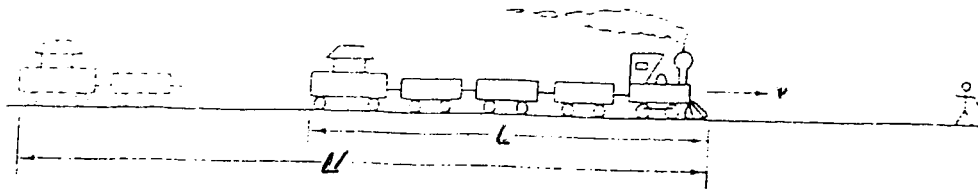


Fig.5

Logo:

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

O volume aparente do comboio é:

$$v' = \frac{v}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_r}{c}} = \frac{v}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (98)$$

Quando calculamos o integral (96), no qual o integrando é calculado num tempo retardado, o volume ocupado pela carga é modificado pela expressão (98) tal como o volume aparente do comboio. Em cada ponto devemos considerar o valor da densidade de carga não como ela é no presente (isto é no instante t) mas sim o valor que ela tinha no mesmo ponto no instante retardado t_R . Como o factor de correcção não faz referência à grandeza da partícula ter-se-á, para uma distribuição pontual ou extensa:

$$\iiint_{R^3} \rho_c(\vec{r}, t_R) dV = \frac{Q}{1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}}{c}}$$

que é a expressão (97).

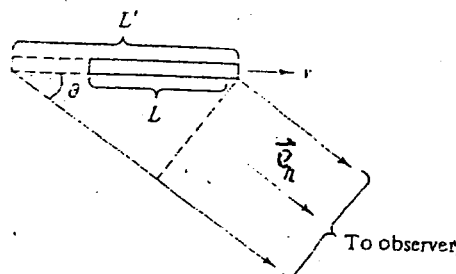


Fig.6

Analogamente se obtêm as relações para uma carga pontual:

$$\varphi^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r \left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}}{c}\right)} \quad (99)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{R^3} \frac{\rho_e(\vec{r}', t_R) \vec{v}(t_R)}{r} dV = \frac{\mu_0 \vec{v}}{4\pi r} \iiint_{R^3} \rho_e(\vec{r}', t_R) dV$$

Logo, atendendo a (97) vem:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}}{r \left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}}{c}\right)} = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi^*(\vec{r}, t) \quad (100)$$

Consideremos o campo electromagnético criado por uma distribuição volúmica de carga eléctrica de densidade ρ_e animada de um movimento de translação rectilínea uniforme de velocidade \vec{v} num meio dieléctrico homogéneo e isotrópico. Vamos designar a velocidade da luz no meio dieléctrico por

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ e a velocidade da luz no vácuo por } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}.$$

Tendo em conta o tempo que um sinal emitido pela carga, suposta pontual, leva desde esta até ao ponto potenciado, o campo eléctrico terá no ponto \vec{r} e no instante t a expressão:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} \frac{\rho_e \vec{e}_r dV}{r^2 \left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}}{c}\right)^2} \quad (101)$$

sendo $\rho_e = 0$ onde não há cargas. O versor do vector de posição do ponto potenciado é $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ e

$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é a velocidade do movimento da distribuição de carga. Esta distribuição em movimento cria, em qualquer ponto do espaço, um campo magnético que num referencial absoluto tem a expressão:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{R^3} \frac{\rho_e \vec{V} \wedge \vec{e}_r dV}{r^2 \left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{V}}{c}\right)^2} \quad (102)$$

Satisfazendo \vec{E} e \vec{B} à relação na qual \vec{u} é a velocidade da radiação :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad (103)$$

Pode provar-se que \vec{E} e \vec{B} satisfazem às equações de Maxwell:

$$\text{rot} \vec{H} = \rho_e \vec{V} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (103-1) \quad \text{div} \vec{D} = \rho_e \quad (103-2)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (103-3) \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (103-4)$$

O vector $\vec{J} = \rho_e \vec{V}$ é a densidade de corrente e verificam-se as relações constitutivas $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Os campos \vec{E} e \vec{B} podem ser determinados por intermédio de outros dois campos φ^* e \vec{A} denominados, respectivamente, potencial escalar do campo eléctrico e potencial vector da indução magnética. De (103-4) conclui-se que existe um campo \vec{A} tal que:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (104)$$

(ao contrário do que afirma Sommerfeld e segundo Stratton, ϵ_0 e μ_0 não parecem ser invariantes para as transformações inerciais).

Substituindo (104) em (103-3) vem:

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Então existe uma função φ^* tal que:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \varphi^* \quad (105)$$

Obtém-se assim a expressão geral de um campo eléctrico não estacionário:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi^* - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (106)$$

Como podemos fazer qualquer hipótese sobre as fontes de \vec{A} (isto é, sobre a sua densidade $\text{div} \vec{A}$) vamos supor (Lorentz) que se verifica :

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0 \quad (107)$$

De (103-3) e de (104) vem, recorrendo a $\vec{j} = \rho_e \vec{V}$ e a $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \rho_e \vec{V} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Logo:

$$\text{grad div } \vec{A} - \text{Lap } \vec{A} = \mu_0 \rho_e \vec{V} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (108)$$

De (107) vem :

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}$$

Substituindo em (108) vem, atendendo a (106):

$$\text{grad} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) - \text{Lap } \vec{A} = \mu_0 \rho_e \vec{V} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \varphi^* - \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right)$$

Logo:

$$\text{grad} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) - \text{Lap } \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = \mu_0 \rho_e \vec{V}$$

Por ser $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, vem:

$$\text{Lap } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \rho_e \vec{V} \quad (109)$$

De (103-2), $\text{div } \vec{D} = \rho_e$, de $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e de (106),

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi^* - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

vem:

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div} \left(\text{grad } \varphi^* + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

Logo:

$$\text{div } \vec{E} = -\text{Lap } \varphi^* - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \frac{\rho_e}{\epsilon}$$

Atendendo a (107):

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}$$

vem, por substituição na equação anterior:

$$-\text{Lap}\varphi^* + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = \frac{\rho_e}{\epsilon}$$

Logo:

$$\text{Lap}\varphi^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (110)$$

As soluções de (109) e de (110) estão relacionadas pela igualdade:

$$\vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \varphi^* \vec{V} \quad (111)$$

É possível, no caso concreto de uma distribuição de cargas de densidade constante ρ_e , deslocando-se com a velocidade constante \vec{V} , exprimir em (109) e (110) a segunda derivada em ordem ao tempo de qualquer potencial em função das suas segundas derivadas em ordem às coordenadas de espaço, analogamente ao que fizemos em Hidrodinâmica.

Consideremos uma função $G(x, y, z, t)$, suficientemente regular, traduzindo um efeito físico do movimento de uma distribuição de carga. O seu valor mantém-se invariante ao longo do tempo num sistema de referência Σ , solidário com a distribuição de carga, se o movimento desta for rígido, isto é, se não houver ao longo do tempo uma diluição ou concentração das cargas da distribuição. Neste sistema Σ , tem-se $\frac{dG}{dt} = 0$ vindo de:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}G = 0$$

a igualdade (78):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \text{grad}G$$

Se for $\vec{V} = (u, 0, 0) = C^{te}$ vem (ver (80)):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -u \frac{\partial G}{\partial x}$$

e (ver(81)):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

Substituindo em (109) e (110) vem:

$$\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right) \bar{A}_{xx} + \bar{A}_{yy} + \bar{A}_{zz} = -\mu\rho_e \bar{V} \quad (112)$$

e:

$$\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right) \Phi_{xx}^* + \Phi_{yy}^* + \Phi_{zz}^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (113)$$

Fazendo $\beta = \frac{\mathbf{u}}{c}$ vem:

$$(1 - \beta^2) \bar{A}_{xx} + \bar{A}_{yy} + \bar{A}_{zz} = -\mu\rho_e \bar{V} \quad (112')$$

$$(1 - \beta^2) \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (113')$$

Apêndice ao Capítulo I

Vamos supor que o fluido está imóvel num referencial absoluto Σ_0 . Consideremos uma corrente fluida com uma velocidade não perturbada \vec{V} , fluindo num domínio que é inicialmente simplesmente conexo D , e suponhamos que em D se introduz um obstáculo C , passando por isso o novo domínio do escoamento, $D-C$, a ser 1-conexo. Seja Σ um referencial inercial solidário com C , e Σ_0 um referencial inercial solidário com o movimento médio do fluido; podemos considerar que o fluido está em movimento em relação ao obstáculo C e ao referencial Σ , solidário com C , com a velocidade \vec{V} , e que o movimento de C e do referencial Σ , solidário com C em relação a Σ_0 , isto é em relação ao movimento médio do fluido, (Σ_0 é o referencial solidário com C com a velocidade \vec{V}). Simetricamente podemos supor que o obstáculo C e o referencial Σ se deslocam com a velocidade $-\vec{V}$ em relação ao movimento médio do fluido e ao referencial Σ_0 solidário com ele. Começaremos por não ter em conta a perturbação $\delta\vec{V}$ sofrida por \vec{V} devido à presença de C . O fluido move-se então com a velocidade \vec{V} em relação a Σ . Se o movimento do fluido, no domínio $D-C$, for expresso por equações diferenciais expressas nas coordenadas de Σ , solidário com C , em relação ao qual o fluido se move, as soluções destas E.D. dependem do tempo, e são da forma $\Phi(t, x, y, z)$; Se forem referidas às coordenadas de Σ_0 , que acompanha o fluido no seu movimento, as soluções das E.D. do movimento são estacionárias, isto é da forma $\Phi(x, y, z)$.

Seja G uma grandeza de natureza arbitrária, expressa por uma função $G(x, y, z)$, na qual figuram como argumento as coordenadas do referencial Σ_0 solidário com o movimento do fluido. A mesma função se referida ao referencial Σ em relação ao qual o fluido está em movimento, terá a forma $G(x, y, z, t)$ constatamos assim que por uma transformação inercial adequada do referencial adoptado podemos transformar um problema de dinâmica caracterizado por equações finitas do movimento dependendo de t num problema de estática, caracterizado por equações finitas independentes de t . Pode-se deste modo, por uma escolha adequada de referencial, descrever o movimento do fluido por funções que não dependem do tempo.

Vejamos como é possível efectuar a passagem:

Seja G uma propriedade qualquer do fluido, expressa pela função $G(x, y, z, t)$, das coordenadas do referencial Σ solidário com o obstáculo C . Em cada instante t o argumento de G é o ponto (x, y, z) que acompanha uma certa molécula do fluido, e que portanto acompanha o movimento médio do fluido, tendo as suas coordenadas em relação a Σ_0 (referencial solidário com o fluido) sempre o mesmo valor ao longo de todo o seu movimento. As coordenadas x, y, z em Σ , referencial solidário com o obstáculo C determinam a posição dessa molécula, em relação a Σ , logo em relação ao movimento global do fluido. Se quisermos referir as coordenadas de G em relação ao fluido em movimento, i . é em relação ao referencial Σ_0 , vamos supor que o movimento do fluido é suficientemente regular para que se possa considerar que as suas moléculas não sofrem, no caso mais geral, deslocamentos apreciáveis no espaço em relação a Σ_0 , estando imóveis em relação ao fluido, logo em relação a Σ_0 , e cada uma das moléculas do fluido é caracterizado em Σ_0 por um énpulo (x, y, z) invariante. A função G , representativa da propriedade G do fluido, toma então a forma $G(x, y, z)$, quer as coordenadas sejam relativas a Σ_0 ou a Σ e vai, no caso mais geral, assumir valores numéricos diferentes em pontos diferentes, os que são os sucessivos pontos geométricos ocupados pela molécula considerada ao longo do seu movimento. No caso mais geral de se ter $G(x, y, z, t)$, no referencial Σ , quando uma molécula é caracterizada pelo énpulo (x, y, z, t) relativo a Σ (referencial solidário com C) ou relativo a Σ_0 (referencial solidário com o fluido) sendo neste caso definida a posição da molécula pelo énpulo (x_0, y_0, z_0, t) (supõe-se $t = t_0$). Vamos supor que a molécula em questão é representada pelo énpulo (x, y, z, t) , e que se move desde (x, y, z, t) para o ponto $(x + V_x t, y + V_y t, z + V_z t, t + dt)$. Note-se que Σ move-se com a velocidade \vec{V} em relação a Σ_0 (\vec{V} é a velocidade do obstáculo em relação ao fluido; $-\vec{V}$ é a velocidade do fluido em relação ao obstáculo) A grandeza G sofre em princípio uma alteração do seu valor numérico, dada por:

$$dG = G(x + V_x t, y + V_y t, z + V_z t, t + dt) - G(x, y, z, t)$$

A taxa de variação temporal correspondente é:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})G$$

Quando uma molécula no instante t passa do ponto $P(x, y, z)$ para o ponto $P(x+dx, y+dy, z+dz)$, no instante $t+dt$ a função G varia por duas razões:

- a) Porque $G(x, y, z, t)$ é uma função de ponto e quando a molécula considerada ocupando o ponto geométrico (x, y, z) se desloca "instantaneamente" de um ponto para outro, (de facto com a

- velocidade \vec{V}) G assume nos pontos de partida e de chegada valores distintos embora a passagem de um ponto para outro se tivesse dado "instantaneamente";
- a função G , que é definida no ponto onde se encontra essa molécula muda por esse facto de valor numérico;
- b) Porque supondo a molécula a que se refere G instantaneamente em repouso em (x, y, z) , isto é em repouso nesse ponto durante o tempo dt , o simples facto de ter decorrido o tempo dt , sempre no mesmo ponto, implica que G assumia um novo valor numérico sem que o ponto onde é calculada se tenha deslocado.

Na teoria dos espaços de Riemann define-se o transporte paralelo de G quando for nula a derivada intrínseca de G . No caso particular dos espaços Euclidianos a derivada intrínseca reduz-se á derivada total, e o transporte paralelo no plano é reduz-se ao transporte paralelo trivial (Fig.1).

Vimos que \vec{V} é a velocidade de um obstáculo C , solidário com o referencial Σ , em relação ao referencial Σ_0 solidário com o fluido; $-\vec{V}$ é a velocidade do fluido (logo de Σ) em relação ao obstáculo (logo em relação a Σ_0). Já vimos que é:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})G$$

Suponhamos que um observador solidário com uma partícula do fluido em movimento está munido de um instrumento que lhe permite, em cada instante e em cada ponto da sua trajectória, conhecer o valor de G . Suponhamos que G sofre um transporte paralelo ao longo da sua trajectória: em dois pontos distintos dela, G toma o mesmo valor, isto é tem o mesmo sentido e o mesmo módulo os quais são determinados á custa da mesma métrica euclideana em R^3 que constitui uma métrica global (ver Fig.1). Mas G sendo função de ponto, quando esse ponto percorre ao longo do tempo uma trajectória dada, G não sofre no caso geral transporte paralelo: o seu valor numérico sofre variações de ponto para ponto, ao longo da trajectória.

Seja G uma propriedade do fluido, expressa por uma certa função de ponto e do tempo, $G(P,t)$, e suponhamos que G se mantém invariante quando o ponto P , coincidente ao longo do tempo com uma certa molécula do fluido em movimento, se desloca ao longo da sua trajectória, com a velocidade \vec{V} . O observador em P usando o instrumento de que está munido mede sempre ao longo da trajectória o mesmo valor de G : Portanto para o observador que segue a partícula tem-se $\frac{dG}{dt} = 0$. Substituindo este resultado na expressão de $\frac{dG}{dt}$ vem:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (\vec{V} \cdot \text{grad})G \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = \vec{V} \cdot \text{grad}$$

Se for $\vec{V} = (u, v, w)$, sendo para começar $v = w = 0$ a igualdade anterior toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Analogamente para as restantes variáveis.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \text{Lap}$$

Estas relações permitem substituir qualquer derivada parcial em ordem ao tempo por derivadas parciais em ordem às coordenadas de espaço: uma equação onde figurem $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{zz}, \varphi_{tt}$ pode ser expurgada de φ_{tt} transformando-se numa equação diferencial cujas soluções são independentes de t e portanto funções estacionárias, $\Phi = \Phi(x, y, z)$, traduzindo processos estacionários.

Consideremos a Equação não linear de D'Álembert para o potencial da velocidade de um escoamento conservativo:

$$\begin{aligned} & \varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2} \right) + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} \right) + \varphi_{zz} \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2} \right) - 2\varphi_{xy} \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} - 2\varphi_{yz} \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} - 2\varphi_{zx} \frac{\varphi_z \varphi_x}{a^2} - \\ & - 2 \frac{\varphi_x}{a^2} \varphi_{xt} - 2 \frac{\varphi_y}{a^2} \varphi_{yt} - 2 \frac{\varphi_z}{a^2} \varphi_{zt} - 2 \frac{\varphi_{tt}}{a^2} = \frac{\xi}{\rho} \end{aligned} \quad (a)$$

Atendendo a que é:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -u \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots$$

vindo em geral:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \text{Lap}$$

Vamos substituir os resultados anteriores na equação dependente do tempo do potencial, obtendo-se:

$$\varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2} \right) + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} \right) + \varphi_{zz} \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2} \right) - 2\varphi_{xy} \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} - 2\varphi_{yz} \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} - 2\varphi_{zx} \frac{\varphi_z \varphi_x}{a^2} = \frac{\xi}{\rho} \quad (b)$$

As soluções desta equação (b) são da forma $\Phi(x, y, z)$ e representam escoamentos estacionários no referencial Σ solidário com o obstáculo C. No referencial Σ_0 solidário com o movimento médio do escoamento fluido o potencial depende explicitamente do tempo, é da forma $\Phi(x, y, z, t)$ e satisfaz á equação (a).

Referências:

- [1]. Morgado, Cândido Manuel Passos , 1965/ 66. Lições da Cadeira de Mecânica Física. Edição da E.F.C.U.L

- [2]. Morgado, Cândido Manuel Passos, 1973. Escoamentos Cónicos em Corpos Fusiformes com Jactos Laterais. Tese de Doutoramento. Lisboa.

- [3]. Morgado, Cândido Manuel Passos, Manuel Rolão Santos. A Equação de Prandtl-Glauert em Escoamentos Planos de Fluidos Incompressíveis e Invíscidos e a sua análoga em Electrodinâmica Clássica (elaboração).

- [4]. Griffiths, David J., 1989. Introduction to Electrodynamics. 2nd ed. Prentice-Hall, Inc.

- [5]. Becker-Sauter, 1959. Teoría de la Electricidad. Tomo Primero. Artes gráficas Grijelmo, S.A. Orbitarte, 4. – Bilbao.

CAPÍTULO II

INTERPRETAÇÃO HIDRODINÂMICA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

A expressão de Webber para a aceleração, se for \vec{F} a força que actua sobre a unidade de massa do fluido é

$$\vec{F} = \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(u^2) + (\text{rot} \vec{u}) \wedge \vec{u} \quad (1)$$

sendo $\text{rot} \vec{u} = 2\vec{\omega}$ a vorticidade do movimento. Por se tratar de uma aceleração é suposto a igualdade anterior ser válida sobre qualquer trajectória de uma partícula do fluido), sendo:

$$\vec{\gamma} = -\text{grad}\phi^* \quad (2)$$

A entalpia por unidade de massa do fluido é (3-Cap.I) :

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho}$$

Na expressão de $\vec{\gamma}$, ϕ^* é o potencial escalar do campo de forças. Se ϕ for o potencial escalar do campo de velocidades, teremos a relação (29-Cap.I) :

$$\vec{u} = \text{grad}\phi$$

Pode provar-se que neste caso é (43-Cap.I):

$$\Pi = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + gz \right)$$

Desprezando as forças gravitacionais vem:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \right) \quad (2')$$

As equações (2) e (29-Cap.I) não são independentes. Para se verificarem simultaneamente, deve ser válida uma equação de compatibilidade entre elas, que passamos a determinar :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\phi + (\text{grad}\phi \cdot \text{grad}) \text{grad}\phi = -\text{grad}\phi^*$$

Logo:

Logo:

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi^*\right) + (\text{grad}\phi \cdot \text{grad})\text{grad}\phi = 0$$

Vamos determinar uma relação alternativa de compatibilidade entre os potenciais da velocidade e das forças aplicadas

Das relações:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{u} ; \vec{\gamma} = -\text{grad}\phi^* ; \vec{u} = \text{grad}\phi$$

Vem:

$$\text{grad}\phi^* = \text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + (\text{grad}\phi \cdot \text{grad})\text{grad}\phi$$

Usemos a expressão de Webber:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\text{rot}\vec{u} \wedge \vec{u})$$

vem, por ser nulo o rotacional de uma velocidade conservativa:

$$-\text{grad}\phi^* = \text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \text{grad}\left[\frac{1}{2}|\text{grad}\phi|^2\right]$$

Logo:

$$-\phi^* = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\text{grad}\phi|^2}{2} + f(t)$$

Supondo $f(t)$ absorvido em $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ a expressão anterior toma a forma:

$$\phi^* = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\text{grad}\phi|^2}{2}\right) \equiv -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \quad (i)$$

Consideremos a expressão já apresentada da entalpia específica:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \phi\right) \quad (ii)$$

Sendo ϕ o potencial das forças conservativas por unidade de massa actuando sobre o fluido, não necessariamente gravitacionais. Se o forem é $\phi = gz$. Se sobre o sistema fluido só actuarem forças gravitacionais existem situações nas quais estas podem desprezar-se bem como o respectivo potencial, por este ser uma função linear homogénea da aceleração da gravidade e da altitude do ponto considerado.

No entanto um potencial escalar de forças conservativas que só assume valores numéricos muito pequenos pode dar lugar a forças elevadas; depende esse facto da sua expressão analítica ter um

gradiente cujo módulo seja elevado.

Fixemo-nos numa situação na qual o potencial das forças conservativas é desprezável, podendo porém estas ter valores que não podem ser ignorados. Se o potencial ϕ é desprezável, a expressão da entalpia específica (que coincide com o potencial das forças de superfície por unidade de massa que actuam sobre o sistema fluido) toma a forma:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \quad (\text{iii})$$

É o caso de forças conservativas exclusivamente gravitacionais em domínios onde a altitude z varia suficientemente pouco para que se possa considerar constante e ter valor zero o potencial ϕ , que só é definido a menos de uma constante.

Da relação (i),

$$\varphi^* = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

E de (iii) vem:

$$\varphi^* = \Pi$$

Vamos apresentar uma dedução alternativa do mesmo resultado:

Proposição: *No escoamento irrotacional permanente ou não de um fluido sem viscosidade sob a acção de forças lúmicas conservativas de potencial desprezável, o potencial escalar da densidade volúmica das forças aplicadas é igual à entalpia por unidade de massa do fluido (ou equivalentemente a energia potencial das forças de superfície por unidade de massa deste).*

Obtem-se de novo a relação: $\varphi^* = \Pi$.

Concluimos que num escoamento irrotacional de um fluido invíscido o potencial escalar das forças volúmicas é igual à entalpia por unidade de massa do fluido:

$$\varphi^* = \Pi \quad (3)$$

Sendo o movimento irrotacional ($\vec{\omega} = \mathbf{0}$):

$$-\mathbf{grad}\varphi^* = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{grad}\phi + \mathbf{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \mathbf{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \quad (4)$$

Verifica-se:

$$\varphi^* = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right) \quad (5)$$

Consideremos agora o caso mais geral de um escoamento com vorticidade, conhecido como escoamento de Beltrami, no qual se verifica:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Vamos definir os seguintes campos de vectores:

$$\vec{E} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad (7)$$

$$\vec{B} = -2\vec{\omega} \quad (8)$$

A expressão (7) dá-nos a força que actua sobre a unidade de massa de um fluido sem viscosidade, em escoamento de Beltrami ou irrotacional, permanente ou não. Esta restrição dá lugar a que, em tais escoamentos, que têm vorticidade, este campo tenha a mesma expressão que é válida na ausência de vorticidade. A expressão (8) dá-nos, à parte o sinal, o vector turbilhão do mesmo fluido, num movimento deste tipo.

Consideremos a equação de Euler válida para fluidos sem viscosidade e vamos supor que o fluido cujo movimento traduz está sujeito a forças conservativas, de potencial φ^* , por unidade de massa. A equação de Euler, é:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\text{rot}\vec{u}) \wedge \vec{u} = -\text{grad}\varphi^* - \frac{\text{grad}p}{\rho}$$

Sendo:

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

Por ser: $d\Pi = \frac{dp}{\rho}$ vem:

$$+ \quad \text{grad}\Pi = \frac{\text{grad}p}{\rho}$$

Substituindo na equação de Euler vem:

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi^* + \Pi\right) = -(\text{rot}\vec{u}) \wedge \vec{u} \quad (i)$$

Portanto, por ser : $\Pi = \varphi^* = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2}$, vem:

$$\text{grad}\varphi^* = \text{grad}\Pi = 0 = -\vec{u} \wedge \text{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{u} \Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{u} = 0$$

Nesta relação φ^* é o potencial das forças volúmicas, e Π o potencial das forças de superfície.

A igualdade anterior diz-nos que :

A aceleração das partículas de um fluido sem viscosidade, sob a acção de forças conservativas reduz-se à aceração de Coriolis

Seja $\vec{F} = -grad\varphi^* = -grad\Pi$ a força hidrodinâmica dual da força de Lorentz actuando sobre uma carga eléctrica unitária positiva:

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = -grad\varphi^* = -grad\Pi$$

Portanto:

$$\vec{F} = \vec{u} \wedge \vec{B} = -2\vec{\omega} \wedge \vec{u} \quad (8')$$

Esta força é nãoconservativa e identifica-se com a força de Coriolis. Podemos obtê-la substituindo (7) e (8) em (1) obtendo-se uma expressão que é equivalente à da força de Lorentz-Heaveside actuando sobre a unidade de carga eléctrica positiva:

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \quad (9)$$

amos definir também o campo \vec{H} (η_0 é uma constante escalar) pela relação:

$$\vec{B} = \eta_0 \vec{H} \quad (9')$$

dual de:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (9'')$$

η_0 é a grandeza hidrodinâmica correspondente à permeabilidade magnética do vácuo. Vamos definir um campo vectorial $\vec{A} = -\vec{u}$, e um potencial escalar $\varphi^* = -u^2/2$, o qual, num escoamento permanente e na ausência de forças gravitacionais, ou na presença de forças conservativas de potencial escalar assumindo só pequenos valores, se reduz, aparte o sinal, à entalpia por unidade de massa. as grandezas $\vec{A} = -\vec{u}$; $\varphi^* = -u^2/2$ reduzindo-se a última destas grandezas, na ausência de forças volúmicas e de superfície, e à parte o sinal, à entalpia por unidade de massa. Começemos por considerar o caso mais geral de um escoamento não permanente.

Vem por substituição de $\vec{u} = -\vec{A}$ e $\varphi^* = -\partial\vec{u}/\partial t - u^2/2$ em:

$$\vec{F} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + (rot\vec{u}) \wedge \vec{u}$$

a relação:

$$\vec{F} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - grad\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \varphi^*\right) + (rot\vec{u}) \wedge \vec{u}$$

Conduz a :

$$\vec{F} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\left(\varphi^* - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + (rot\vec{A}) \wedge \vec{A}$$

$$\vec{F} = -\text{grad}\varphi^* + (\text{rot}\vec{A}) \wedge \vec{A}$$

Se o escoamento do fluido for irrotacional ou de Bernoulli, vem $\text{rot}(-\vec{u}) \wedge (-\vec{u}) = (\text{rot}\vec{A}) \wedge \vec{A} = 0$, ou seja, $\vec{\omega} \wedge \vec{u} = (\text{rot}\vec{A}) \wedge \vec{A} = 0$ e portanto obtem-se $\vec{F} = -\text{grad}\varphi^*$.

Examinemos a questão de uma forma mais detalhada. A grandeza \vec{B} é dada por: $\vec{B} = -2\vec{\omega}$ e postulamos que é $\vec{A} = -\vec{u}$, logo sendo $\vec{B} = -2\left(\frac{1}{2}\right)\text{rot}\vec{u} = -\text{rot}\vec{u} = \text{rot}\vec{A}$. Deste modo a última expressão da força \vec{F} toma a forma:

$$\vec{F} = -\text{grad}\varphi^* + \vec{B} \wedge \vec{A}$$

com $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$.

Esta expressão pode ser comparada, com a expressão conhecida que define um escoamento de Bernoulli: $\vec{B} \wedge \vec{A} = 0$. A situação na qual o campo de velocidades é irrotacional corresponde a um campo puramente eléctrico. Existindo outros campos aplicados conservativos de potencial escalar ϕ (como o gravitacional), tem-se :

$$\Pi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \phi\right)$$

Podemos portanto concluir que:

Proposição: O potencial escalar da aceleração num escoamento estacionário de um fluido sem viscosidade, $\varphi^* = -u^2/2$, reduz-se à energia cinética por unidade de massa, ou equivalentemente, à entalpia do fluido por unidade de massa.

A equação (8') toma então a forma :

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi^* \quad (10)$$

que é a relação hidrodinâmica correspondente á expressão geral do campo eléctrico não estacionário:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi^* \quad (11)$$

De (8), e de $\text{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega}$, conclui-se que a relação:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (12)$$

é uma identidade. Substituindo (12) e (9') em (8) vem: $\text{rot}\vec{A} = -\text{rot}\vec{u} = -2\vec{\omega}$.

Calculando o rotacional de ambos os membros de (12) e substituindo (12) em (8) vem, com

$$\vec{\omega}' = \text{rot}\vec{\omega}, \quad (12')$$

A relação

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}\text{rot}\vec{A} = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \text{Lap}\vec{A} = \text{rot}(-2\vec{\omega}) = -2\vec{\omega}' \quad (13)$$

$$\vec{\omega}' = \text{rot} \vec{\omega}, \quad (12')$$

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \text{Lap} \vec{A} = \text{rot}(-2\vec{\omega}) = -2\vec{\omega}' \quad (13)$$

Adoptando a condição de gauge (similar à dos campos eléctricos estacionários):

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (14)$$

e substituindo-a em (13) obtemos :

$$\text{Lap} \vec{A} = 2\vec{\omega}' \quad (15)$$

\vec{A} satisfaz a (15) se for independente do tempo ou uma função linear deste .

A equação (15) corresponde à equação da Magnetostática :

$$\text{Lap} \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (16)$$

Em (16), \vec{A} é o potencial vector de \vec{B} ($\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$).

Calculemos o rotacional de ambos os membros de (10):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{A}$$

ou seja :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\eta_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (17)$$

dual da equação de Maxwell:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (18)$$

De (8) e (9') vem :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (19)$$

dual de :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (20)$$

Calculando a divergência de ambos os membros de (7), que é :

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

vem:

$$\text{div} \vec{E} = \text{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \text{Lap} \left(\frac{u^2}{2} \right) \quad (21)$$

Da relação $\text{div} \vec{E} = f = \text{Lap} \phi^*$ e de (21), vem:

$$f = \text{Lap}\varphi^* = \text{div}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right) + \text{Lap}\left(\frac{u^2}{2}\right) :$$

Ou seja:

$$\text{grad}\varphi^* = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Podemos notar que:

O potencial escalar $\varphi^ = -u^2/2$ da aceleração num escoamento estacionário, reduz-se na ausência de forças aplicadas volúmicas ou de superfície, à energia cinética por unidade de massa, ou equivalentemente à entalpia por unidade de massa do fluido.*

Logo:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\text{Lap}\varphi + \text{Lap}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) \quad (22)$$

ou seja :

$$\text{div}\vec{E} = \text{Lap}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) \quad (23)$$

Se desprezarmos o potencial φ^* das forças conservativas, nomeadamente das gravitacionais vem:

$$\varphi^* = \Pi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right)$$

$$\text{div}\vec{E} = -\text{Lap}\varphi^* = -\text{Lap}\Pi \quad (24)$$

Seja $f = -\text{Lap}\varphi^* = -\text{Lap}\Pi$ a densidade volúmica das fontes \vec{E} . Então vem:

$$f = \text{Lap}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\right]$$

Obtivemos para densidade volúmica das fontes, à parte o sinal, o valor do laplaciano da energia por unidade de massa do fluido, dada pela equação de Bernoulli generalizada. Portanto, vem:

$$\text{div}\vec{E} = f \quad (25)$$

o que corresponde á equação do electromagnetismo:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho \epsilon}{\epsilon} \quad (26)$$

Portanto:

A divergência $\operatorname{div} \vec{E}$ da força que actua a unidade de massa de um fluido invíscido, só sujeito a forças aplicadas conservativas, $\vec{E} = \partial \vec{u} / \partial t + \operatorname{grad} (u^2 / 2)$, é a entalpia específica ou equivalentemente a energia cinética, por unidade de massa do fluido;

O dual hidrodinâmico do Campo Electrico, \vec{E} , é a força que actua sobre a unidade de massa de um fluido invíscido em escoamentos irrotacionais ou de Beltrami

Consideremos agora um fluido perfeito sem viscosidade sob a acção de forças exteriores conservativas e as equações de Euler:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) + (\operatorname{rot} \vec{u}) \wedge \vec{u} = F - \frac{\operatorname{grad} p}{\rho}$$

Se o escoamento for estacionário vem:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \vec{F} + \frac{\operatorname{grad} p}{\rho} = \vec{u} \wedge \operatorname{rot} \vec{u}$$

Por ser: $d\Pi = dp / \rho$ vem: $\operatorname{grad} \Pi = \operatorname{grad} p / \rho$. Se o fluido só estiver sujeito a forças conservativas, pode-se escrever $\vec{F} = -\operatorname{grad} \varphi^*$. Substituindo na equação anterior vem:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \operatorname{grad} \varphi^* + \operatorname{grad} \Pi = 2\vec{u} \wedge \vec{\omega}$$

Logo escrevendo $\vec{B} = -2\vec{\omega}$, $\vec{A} = -\vec{u}$ vem:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{A^2}{2} + \varphi^* + \Pi \right) = 2\vec{u} \wedge \vec{\omega} = -\vec{B} \wedge \vec{A} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

Ou seja:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{A^2}{2} + 2\varphi^* \right) \equiv \operatorname{grad} \left(\frac{A^2}{2} + 2\Pi \right) = 2\vec{u} \wedge \vec{\omega} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

Podemos concluir que no escoamento estacionário de um fluido sem viscosidade, o campo $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$ é conservativo. Se o escoamento for de Beltrami não há superfícies de Lamb.

Da equação (8) e de $\operatorname{rot} \vec{\omega} = \vec{\omega}'$, temos:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -\operatorname{rot} (2\vec{\omega}) = -2\vec{\omega}'$$

Se \vec{J}' for a densidade volúmica das fontes de \vec{H} , então:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J}' \quad (27)$$

Vindo de $\vec{B} = \eta_0 \vec{H}$ a expressão $\text{rot}\vec{H} = -\frac{2\vec{\omega}'}{\eta_0}$, da qual sai a relação $\vec{J}' = -\frac{2\vec{\omega}'}{\eta_0} = -\frac{2\text{rot}\vec{\omega}}{\eta_0}$.

Seja \vec{D} um campo vectorial proporcional a \vec{E} :

$$\vec{D} = k\vec{E} \quad (28)$$

expressão da qual o significado físico de k será clarificado mais tarde.

De (25) e (28) obtemos:

$$\text{div}\vec{D} = k.f \quad (29)$$

dual de

$$\text{div}\vec{D} = \rho_e \quad (30)$$

Vamos definir um vector \vec{J} pela relação:

$$\vec{J} = \vec{J}' - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (31)$$

Substituindo \vec{J}' , tirado de (31), em (27), obtém-se:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (32)$$

que é a equação hidrodinâmica dual da de Maxwell:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (33)$$

Substituindo a expressão (10) de \vec{E} em (25):

$$-\text{div}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \text{Lap}\varphi = f \quad (34)$$

Vamos adoptar a condição:

$$\text{div}\vec{A} + k\eta_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad (35)$$

análoga da condição de gauge de Lorentz da Electrodinâmica:

$$\text{div}\vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial\varphi^*}{\partial t} = 0 \quad (36)$$

Calculando $\text{div}\vec{A}$ de (35) vem $\text{div}\vec{A} = -k_1\eta_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Substituindo em (34), vem:

$$k_1\eta_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \text{Lap}\varphi = f \quad (37)$$

que é análoga da equação electromagnética:

$$\text{Lap}\phi^* - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (38)$$

Obtivemos a equação de D'Alembert com fontes (37), que rege a propagação do potencial ϕ com a

$$\text{velocidade do som } \mathbf{a} = (\mathbf{k}\eta_0)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\rho} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vamos substituir $\vec{\mathbf{B}} = \text{rot}\vec{\mathbf{A}}$ e a expressão (10) de $\vec{\mathbf{E}}$ em (33). Obtém-se:

$$\frac{\text{rotrot}\vec{\mathbf{A}}}{\eta_0} = \vec{\mathbf{J}} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad}\phi^* - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \right)$$

Então:

$$\text{grad div}\vec{\mathbf{A}} - \text{Lap}\vec{\mathbf{A}} = \eta_0 \vec{\mathbf{J}} - \mathbf{k}\eta_0 \text{grad} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) - \mathbf{k}\eta_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2}$$

De (35) vem: $\text{div}\vec{\mathbf{A}} = -\mathbf{k}\eta_0 \frac{\partial \phi^*}{\partial t}$. Substituindo na expressão anterior $\text{div}\vec{\mathbf{A}}$ pelo seu valor obtém-se

:

$$\mathbf{k}\eta_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \text{Lap}\vec{\mathbf{A}} = \eta_0 \vec{\mathbf{J}} \quad (39)$$

Dual de:

$$\text{Lap}\vec{\mathbf{A}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu \vec{\mathbf{J}} \quad (40)$$

Se for $\vec{\mathbf{u}} = C^{te}$ (movimento rectilíneo e uniforme), obtém-se as relações entre os potenciais vector e escalar para o Electromagnetismo e Hidrodinâmica, respectivamente. Como já vimos:

$$\vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{u}}$$

É possível demonstrar que os potenciais $\vec{\mathbf{A}}$ e ϕ^* devidos ao movimento rectilíneo uniforme de uma carga eléctrica pontual \mathbf{Q} com velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ estão relacionados entre si.

Uma carga \mathbf{Q} com movimento rectilíneo uniforme de velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ dá lugar aos potenciais:

$$\phi^*(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{Q}}{\left[\vec{\mathbf{r}} - \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{c} \right]_{t-\frac{r}{c}}} \quad (41)$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \left[\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{r}} - \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{c}} \right]_{t-\frac{r}{c}} \quad (42)$$

Dividindo membro a membro as igualdades anteriores vem:

$$\frac{\bar{A}}{\varphi^*} = \frac{\frac{\mu_0}{4\pi} Q \frac{\bar{v}}{\left[\bar{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{v}}{c} \right]_{t-\frac{r}{c}}}}{1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{v} 4\pi\epsilon_0 = \mu_0\epsilon_0 \bar{v} = \frac{\bar{v}}{c^2}$$

Logo:

$$\bar{A} = \frac{1}{c^2} \varphi^* \bar{v} \quad (43)$$

NOTA: os campos $\bar{F}, \bar{E}, \bar{H}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{A}$, estão relacionados com os campos vectoriais hidrodinâmicos $\bar{F}, \bar{E}, \bar{H}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{A}$ pelas relações de proporcionalidade $\bar{F} = k_1 \bar{F}$, $\bar{E} = k_1 \bar{E}$, $\bar{H} = k_1 \bar{H}$, $\bar{D} = k_1 \bar{D}$, $\bar{B} = k_1 \bar{B}$, $\bar{A} = k_1 \bar{A}$.

CONCLUSÕES:

O exercício desenvolvido sugere as seguintes conclusões:

1 –Foi possível interpretar mecanicamente as equações de Maxwell, tirando proveito de analogias de formalismo matemático entre o Electromagnetismo e a Mecânica dos Fluidos. Poderíamos então dizer que, para além de certos conceitos físicos fundamentais, como a energia, e certos aspectos comuns a estes dois ramos da Física, é a generalidade das estruturas matemáticas sobre as quais se apoia o seu estudo a principal causa de similaridade. Sugere também a possibilidade de fundamentar a Mecânica dos Fluidos num conjunto de equações contendo quatro equações às derivadas parciais com a estrutura analítica das equações de Maxwell.

2 –As equações de Maxwell no vácuo são em si mesmas, equações do movimento desse meio material específico, e as diferenças qualitativas existentes entre o Electromagnetismo e a Mecânica dos Fluidos são o reflexo das diferenças qualitativas entre o vácuo, visto como meio material particular, e os meios físicos contínuos, de evidência directa e sensível, cujo movimento se estuda em Hidrodinâmica. A adopção da primeira interpretação implica, possivelmente, menor risco de erro.

As considerações aqui desenvolvidas, de carácter meramente especulativo evocam dois conceitos presentemente obsoletos: a “Hipótese do Éter”, e a “Pressão de Poincaré”. O facto de a luz se propagar no vácuo e a descoberta do seu carácter ondulatório, conduziu á suposição de estar o vácuo completamente preenchido por um fluido hipotético, o “éter”, infinitamente diluído, possuindo uma

capacidade ilimitada de penetrar em qualquer região do espaço. O éter seria assim o suporte das vibrações luminosas, que se descobriu serem transversais. Sabia-se, da Mecânica dos Meios Contínuos, que as vibrações mecânicas transversais só se propagam em meios rígidos e que os fluidos só podem ser sede de vibrações mecânicas longitudinais como o som . Estas propriedades eram consideradas contraditórias, independentemente das diferenças qualitativas entre a luz (de natureza electromagnética), e o som (de natureza mecânica), e esse facto foi considerado desabonatório da “Teoria do Éter”.

Notemos que a luz se propaga no vácuo com a velocidade que teria o som num fluido barotrópico de equação de estado :

$$p = c^2 \rho + p_0$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo e p_0 uma constante. A diferença qualitativa entre o vácuo e os fluidos usuais em Hidrodinâmica condiciona estreitamente a diferença entre a luz e o som .

A experiência de Michelson–Morlay levou por fim ao abandono definitivo da “Teoria do éter”. Esta experiência provou a inexistência do éter, enquanto forma de matéria qualitativamente idêntica aos meios físicos estudados em hidrodinâmica, e foi interpretada como provando ser o vazio a ausência de qualquer conteúdo material. A teoria quântica dos campos, constituiu, através da “energia do ponto zero”, E_0 , uma reabilitação parcial de alguns aspectos da antiga teoria do éter .

Tentaremos, em trabalhos posteriores, continuar o tratamento desta questão.

Vamos agora referir-nos á “Pressão de Poincaré”. Poincaré considerou que a carga negativa do electrão poderia ser vista como um “somatório” (integral) de cargas diferenciais que se deviam repelir entre si segundo a lei de Coulomb. Sendo o electrão uma partícula estável, então o vazio exterior a esta partícula deveria exercer sobre a sua superfície uma pressão que equilibrasse a repulsão referida, que foi designada por “Pressão de Poincaré”.

Consideremos agora aspectos mais actuais desta questão: a equação dos vectores próprios do operador Hamiltoniano de um oscilador harmónico linear com três graus de liberdade e frequência fundamental ω é:

$$\hat{H}/n\rangle = E_n /n\rangle$$

sendo n um inteiro não negativo. Os valores próprios de \hat{H} são dados pela expressão:

$$E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$$

A energia do estado fundamental é então $E_0 = 3\hbar\omega / 2$. Das expressões anteriores vem:

$$\left(\hat{H} - \frac{3}{2} \hbar \omega \right) |n\rangle = 0$$

O operador de contagem \hat{N} de um sistema quântico de n partículas tem a equação de vectores próprios:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

Podemos, portanto, fazer a identificação para um sistema quântico de n partículas dos operadores

$$\hat{N} \equiv \hat{H} - \frac{3}{2} \hbar \omega$$

sendo o valor próprio de \hat{H} correspondendo a $n=0$ partículas $E_0 \neq 0$.

Se o sistema tiver $n=0$ partículas (vácuo), então :

$$\hat{N}|0\rangle = 0|0\rangle = 0$$

O facto de ao vácuo corresponder uma energia não nula é interpretado como uma manifestação do carácter material deste e não da ausência total de matéria. DeBroglie considerava o vácuo como um meio material específico, a que chamava “meio sub-quântico”, exercendo uma força aleatória sobre os corpúsculos materiais nele mergulhados. Vamos agora referir o efeito Casimir.

Se colocarmos duas placas metálicas iguais em contacto perfeito no vácuo, entre elas não existe nenhuma forma de matéria ou de energia. Casimir previu, no entanto, que sendo o vácuo um meio material, deveria exercer sobre as superfícies das placas, dos lados opostos á superfície de contacto, uma certa força, dando lugar a uma compressão uma contra a outra das duas placas (Efeito Casimir). Esta força foi detectada e medida por Steven Lamoureux no Los Alamos National Laboratory.

Vamos terminar com uma citação, que nos parece a propósito, de Lewis Carrol em *Alice no País das Maravilhas*: “...e dessa vez desapareceu muito devagarinho, começando pela ponta da cauda e acabando no sorriso, que permaneceu ainda no ar por algum tempo depois dele já se ter ido embora. “Bem, já vi muitas vezes um gato sem um sorriso”, pensou Alice, “Mas nunca vi um sorriso sem um gato! Nunca vi nada de tão estranho na minha vida.”

.Referências:

- [1]. Enzo Levy, “Elementos de Mecânica do Médio Continuo”, Editorial Limusa-Wiley, S.^a México, 1971.
- [2]. Fediaevsky C., “Mecânica dos Fluidos”, Lopes da Silva Editora, Porto, 1978, pág.53, 72-74.
- [3]. Méssiah, Albert, “Mecânica Cuantica”, Tomo I, Editorial Tecnos, pág. 420-427, Spanish translation of Dunod edition , Paris
- [4]. Nunzio Tralli, “Classical Electromagnetic Theory”, McGrawHill, 1963, New York.

- [5]. Passos Morgado, C. M., “Escoamentos Cónicos em Corpos Fusiformes com Jactos Laterais” (PHD thesis), chap.I, 1973 Lisboa.
- [6]. Seife, Charles, “Zero, a biografia de uma ideia perigosa” Gradiva, 2001.

A equação hidrodinâmica correspondente a (5) é $\vec{\omega}' = \text{rot}\vec{\omega}$:

$$\text{Lap}\vec{A} = 2\vec{\omega}' \quad (17)$$

Com $\vec{A} = -\vec{u}$ (ver Cap.II). Logo:

$$\text{Lap}\vec{u} = -2\vec{\omega}' \quad (18)$$

Se for $\text{rot}\vec{\omega} = 0$ a equação anterior conduz $\text{Lap}\vec{u} = 0$.

3. Leis de Biot-Savart da Mecânica dos Fluidos

Consideremos um tubo de vórtices, de secção transversal S e um elemento de volume desse tubo $dv = dS \cdot dl$ sendo, na expressão anterior, dS um elemento infinitesimal de S e dl o diferencial da abscissa curvilínea ℓ sobre a linha axial L do tubo de vórtices, a qual é também uma linha de vórtices se $S = dS \rightarrow 0$.

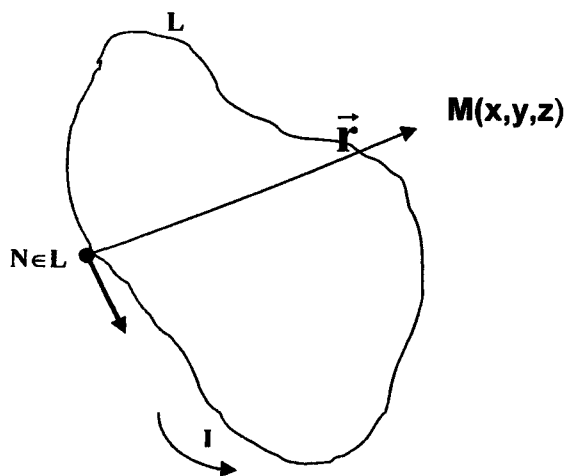


Fig. 1

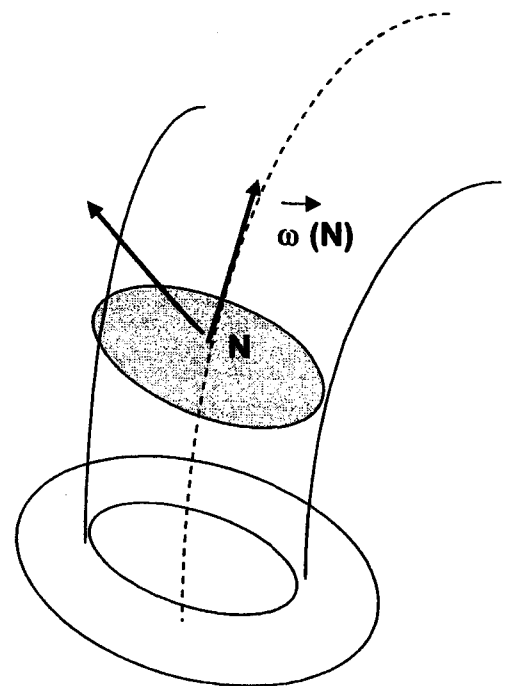


Fig. 2

Nestas notas só consideramos fluidos invíscidos. Se houver viscosidade os escoamento são

então regidos pela equação de Navier-Stokes, que é:

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \rho \bar{\mathbf{F}} - \text{grad} p + \mu \text{Lap} \bar{\mathbf{u}} \quad (20)$$

onde μ é a viscosidade cinemática (m^2/s em U.S.I.) e se verifica $\mu = \frac{\nu}{\rho}$ sendo ν a viscosidade dinâmica ($m \times s \times Kg^{-1}$) e ν a viscosidade cinemática.

Seja N um ponto de S de coordenadas (x_1, y_1, z_1) e $M(x, y, z)$ o ponto genérico de \mathbf{R}^3 .

Então o módulo de $\bar{\mathbf{r}} = \overline{NM}$ é:

$$r = \{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\}^{1/2} \quad (21)$$

Se for Γ a intensidade dos vórtices da linha L (de secção $\mathbf{S} = d\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{0}$) a lei de Biot-Savart da Mecânica dos Fluidos é:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{M}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \iiint_L \frac{\bar{\mathbf{r}} \wedge d\bar{\mathbf{l}}}{r^3} \quad (22)$$

sendo $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(M)$.

A solução de (17) na sua forma integral é, sendo $d\tau_N$ o elemento de volume do condutor centrado em N :

$$\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{2\bar{\omega}'}{r} d\mathbf{v}_N = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{(-2\mathbf{k}_1 \text{rot} \bar{\omega})}{r} d\mathbf{v}_N = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\text{rot} \bar{\mathbf{B}}}{r} d\mathbf{v}_N \quad (23)$$

com $\bar{\mathbf{A}} = -\bar{\mathbf{u}}$.

Da relação anterior (23) vem:

$$\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\text{rot} \bar{\mathbf{B}}}{r} d\mathbf{v}_N \quad (24)$$

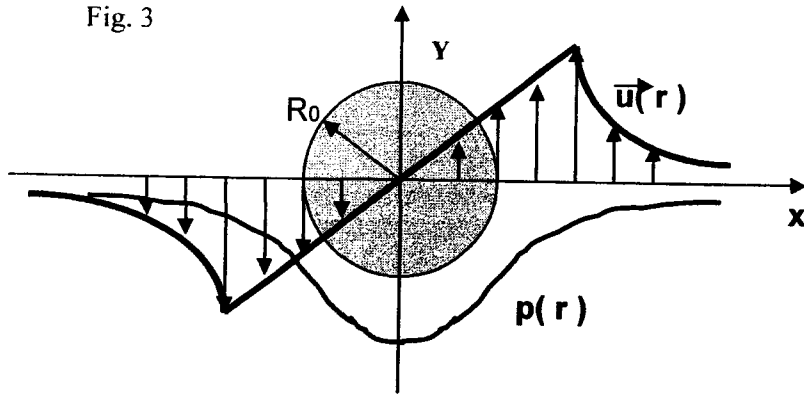
De (22), de (24) e de $\bar{\mathbf{u}} = -\bar{\mathbf{A}}$ vem a relação integral:

$$-\frac{\Gamma}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\bar{\mathbf{r}} \wedge d\bar{\mathbf{l}}}{r^3} d\mathbf{v}_N = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\text{rot} \bar{\mathbf{B}}}{r^3} d\mathbf{v}_N$$

Consideremos um tubo turbilhonário cilíndrico de secção circular recta de raio R_0 , e seja r a distância entre o ponto onde se calcula a velocidade do fluido, $\bar{\mathbf{u}}(r, R_0)$, e o eixo do tubo de vórtice suposto rectilíneo, tomado para eixo dos zz . Considerações elementares levam-nos neste caso a concluir que o campo de velocidade (ver Fig.3) é uma função contínua. A sua expressão, se a intensidade do vórtice for igual a Γ é:

$$\bar{\mathbf{u}}(r, \varphi) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{\mathbf{e}}_\varphi}{r} \quad (25)$$

Fig. 3



A função $\bar{u}(r)$ é contínua para um fluido ideal cujo rotacional tem a expressão:

$$\text{rot} \bar{u} = 2\bar{\omega} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r\bar{e}_\varphi & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & kr & 0 \end{vmatrix} \Big|_{r < R_0} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr) \bar{e}_z = \frac{\kappa}{r} \bar{e}_z \quad (26)$$

Atendamos a que se for $r \rightarrow 0$ vem $\text{rot} \bar{u} \rightarrow \infty$.

Como $\bar{\omega} = \omega(r)\bar{e}_z$ virá:

$$\bar{\omega} = \frac{\kappa}{2r} \bar{e}_z \quad \text{se } r < R_0 \quad (27)$$

Notemos que é:

$$\lim_{r \leq R_0 \rightarrow 0} \text{rot} \bar{u} = \infty \quad (28)$$

Façamos o mesmo cálculo para $\bar{u}(r, R_0)_{r < R_0}$. Vem, de (26):

$$\text{rot} \bar{u} = 2\bar{\omega} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(-\frac{1}{r^2} \bar{e}_z \right) = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \bar{e}_z \neq 0 \quad (29)$$

Como $\text{rot} \bar{u} = 2\bar{\omega}(r)$ pode concluir-se que $\bar{\omega}$ é descontínuo; a velocidade linear \bar{u} , para ser contínua sobre a superfície esférica referida, como decorre da natureza física do problema (a qual exclui a existência de uma força infinita actuando sobre qualquer partícula atravessando a superfície de raio R_0) deve satisfazer a:

$$\frac{\Gamma \bar{e}_z}{2\pi R_0^2} = \bar{K} = K \bar{e}_z \quad (30)$$

ou seja:

$$\Gamma = 2\pi K R_0^2 \quad (31)$$

Note-se que a existência de uma descontinuidade de limites laterais finitos em $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{t}, \dots)$ daria lugar, obviamente, à presença, na expressão da força que actua a referida partícula, de uma distribuição de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0)$.

Vamos agora relembrar o sentido do parâmetro Γ , o qual é a circulação da velocidade do fluido ao longo de um contorno de Jordan envolvendo um tubo de vórtices C no sentido antihorário:

$$\Gamma = \oint_{C^+} \bar{\mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} \quad (32)$$

sendo, sobre $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0$:

$$\bar{\gamma} = \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} \right)_{R_0} = \infty$$

Neste caso, uma partícula que atravessasse $r = R_0$ teria aí uma aceleração infinita, e tal facto nunca é observado. A condição de continuidade do campo de velocidade seria:

$$u(r, R_0^-) = KR_0 = \frac{\Gamma}{2\pi R_0} = u(r, R_0^+) \quad (33)$$

De (33) vem a relação (31).

Podemos notar que, para campos e domínios de definição destes suficientemente regulares, um campo vectorial $\bar{\mathbf{u}}$ satisfaz a um teorema de Helmholtz.

4. Relação entre as leis de Biot-Savart do Electromagnetismo e da Hidrodinâmica

Na Figura (3) estão esquematizadas as velocidades $u(r)$ e as pressões $p(r)$ no caso de um tubo de turbilhão cilíndrico de raio $R_0 > 0$. O ocorrido com as pressões só será analisado sumariamente. As equações de Euler admitem três integrais:

- Integral de Lagrange

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{u^2}{2} + \rho gz + p = C(t)$$

- Integral de Euler

$$\rho \frac{u^2}{2} + \rho gz + p = C$$

- Integral de Bernoulli

$$\rho \frac{u^2}{2} + \rho gz + p = C$$

Ao longo de uma linha de corrente a energia mecânica específica é constante. No integral de Euler C não depende do tempo e é constante em todos os pontos do fluido considerado. No integral de Bernoulli C é uma constante só ao longo da linha de corrente considerada. No integral de Lagrange, se o escoamento não for estacionário, o primeiro termo (onde figura a derivada em ordem ao tempo) traduz a variação de energia específica devida à aceleração. A pressão nos pontos impróprios (supostos de estagnação) é designada por p_∞ vindo:

$$p(r) = p_\infty - \frac{\rho u^2}{2} = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi r^2} \quad (r \geq R_o) \quad (34)$$

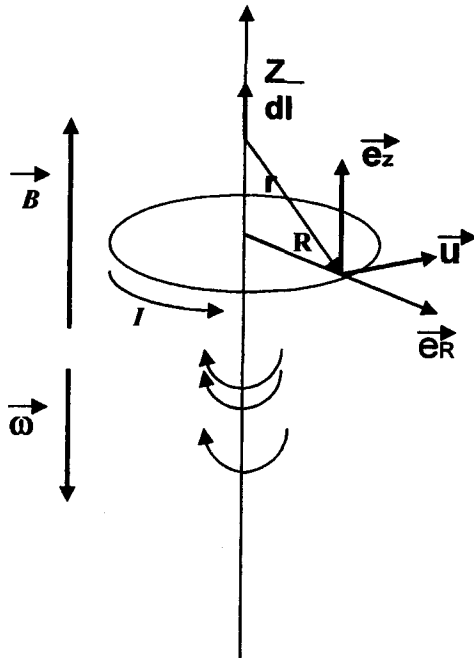


Fig. 4

Recorrendo à integração das equações de Euler obtém-se a expressão de $p(r)$ para $r < R_o$, o que permite concluir que, no meio físico interior e exterior ao tubo de turbilhão, se verifica a atracção pelo eixo deste de quaisquer materiais existentes, (respeitadas as devidas diferenças o fenómeno descrito evoca um pouco o ocorrido nos buracos negros com spin). Dos integrais de Euler e de Bernoulli conclui-se que nos pontos onde a velocidade é mais elevada, a pressão diminui.

5. Relação entre a indução magnética numa região do meio subquântico e a vorticidade do movimento deste

Consideremos a relação (4) no vácuo com I constante:

L é o condutor percorrido por I e $d\vec{\ell}$ um vector infinitesimal sobre L .

Suponhamos que se quer achar \vec{B} no centro de uma espira circular do raio r percorrida por essa corrente. Então, $d\vec{\ell} = r d\varphi \vec{e}_\varphi$, $\vec{r} = r \vec{e}_r$, e:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2 d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{2r} \vec{e}_z \quad (35)$$

A expressão anterior dá-nos a indução magnética no centro de uma espira circular devida a uma corrente eléctrica de intensidade I . A expressão que nos dá a indução, sobre uma circunferência de raio r , devida a uma corrente eléctrica de intensidade I percorrendo um eixo rectilíneo normal ao plano da circunferência e passando pelo seu centro é obtida de (35) substituindo r por $-r$, o que dá:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2r} \vec{e}_z \quad (36)$$

Consideremos agora o campo de velocidade \vec{u} devida a uma distribuição de vórtices no eixo dos zz , no sentido antihorário, de intensidade I , e façamos em (1') $\vec{B} = -2\mathbf{k}_1 \vec{\omega}$, relação que foi postulada no Cap.II.

A relação (4) que é a lei de Biot-Savart do Electromagnetismo é, como já vimos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Logo, de $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -2\mathbf{k}_1 \vec{\omega}$, vem:

$$\vec{B} = -2\mathbf{k}_1 \vec{\omega} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (37)$$

Portanto:

$$\vec{\omega} = -\frac{\mu_0}{8\pi \mathbf{k}_1} I \oint_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (38)$$

A lei de Biot-Savart da Hidrodinâmica é susceptível de ser expressa por duas relações:

$$\vec{\omega} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (39)$$

Esta equação dá-nos a velocidade angular induzida no centro de um toro por um escoamento rotacional cujas linhas de corrente se apoiam sobre ele. A expressão seguinte dá-nos a velocidade de um fluido na vizinhança exterior de um tubo de vórtices de intensidade Γ :

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (40)$$

De (38) e (39) vem:

$$-\frac{\mu_0 I}{8\pi k_1} = -\frac{\Gamma}{4\pi}$$

ou:

$$\Gamma = \frac{\mu_0 I}{2k_1} \quad (41)$$

A equação (39) mostra-nos que o vector turbilhão $\vec{\omega}$ é directamente proporcional à correspondente intensidade Γ do vórtice do meio subquântico correspondente ao campo magnético com o qual está relacionado sendo, portanto, igualmente proporcional à intensidade I da corrente eléctrica geradora do campo (e reciprocamente).

Recorrendo à igualdade vectorial:

$$\text{rot}(\tilde{\psi}\vec{e}_z) = (\text{grad}\tilde{\psi}) \wedge \vec{e}_z + \tilde{\psi}\text{rot}\vec{e}_z = (\text{grad}\tilde{\psi}) \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_z \wedge \text{grad}\tilde{\psi} \quad (42)$$

Vem:

$$\text{grad}\tilde{\phi} = -\vec{e}_z \wedge \text{grad}\tilde{\psi} \quad (43)$$

Obtivemos a expressão vectorial das condições de holomorfia do potencial complexo $\tilde{W} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ dos campos \vec{H} ou \vec{B} .

O potencial complexo de um turbilhão é:

$$W(Z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Para o campo \vec{B} é possível construir um potencial complexo da forma:

$$\tilde{W}(Z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

sendo:

$$B^c = B_x - iB_y = \frac{d\tilde{W}}{dZ}$$

o complexo correspondente ao vector real:

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y = \text{grad}\tilde{\phi} = -\vec{e}_z \wedge \text{grad}\tilde{\psi}$$

Com Γ dado por (41):

$$\Gamma = \frac{\mu_0 I}{2k_1}$$

Logo:

$$W(Z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi k_1} \ln Z \quad (44)$$

$$B^C = i \frac{\mu_0 I}{4\pi k_1} \frac{1}{Z} = i \frac{\mu_0 I}{4\pi k_1 r} e^{i\theta} \quad (45)$$

Portanto:

$$2\pi r |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi k_1 r} 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2k_1}$$

Logo:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi k_1} \frac{1}{r}$$

Portanto:

$$2\pi r |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2k_1}$$

Como pela lei de Ampère se deve ter $2\pi r B = \mu_0 I$ vem: $k_1 = \frac{1}{2}$; e da relação $\vec{B} = -2\vec{\omega}$ vem:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -2k_1 \vec{\omega} = -2 \frac{1}{2} \vec{\omega} = -\vec{\omega} \quad (46)$$

Concluimos que o vector turbilhão do meio subquântico, é igual, à parte o sinal, à indução magnética que lhe corresponde.

REFERÊNCIAS:

- [1]. Andrade, J.L., G. Lochak; *“Quanta, Grains et Champs”*, Librairie Hachette, 1969.
- [2]. De Broglie, L., J.L. Andrade e Silva; *“La réinterprétation de la mécanique ondulatoire”*, Gautier-Villars, 1971.
- [3]. de Broglie, L., *“Ondes Electromagnetiques et Photons”*; Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [4]. Fediaevski, L. Voitkaunski, Y. Faddéev; *“Mecânica dos Fluidos”*, Lopes da Silva Editora, Porto – 1979.
- [5]. Griffiths, *“Introduction to Electrodynamics”*; 2ª edição, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981 e 1989.
- [6]. Krasnov, N.E.; *“Aerodinâmica em perguntas e problemas”*; Editorial Mir, Moscú, 1985. Tradução em Espanhol pela Editorial Mir, 1989.
- [7]. Kraus/Fleisch, *“Electromagnetics with applications”*; McGraw-Hill International Editions, New-York, 1999.
- [8]. Rolão Santos, M., *“Interpretação Hidrodinâmica das Equações de Maxwell do Electromagnetismo”*, Jornadas de Engenharia de Telecomunicações e Computadores (J.E.T.C., Out 1999), I.S.E.L., Lisboa.
- [9]. Rolão Santos, M., *“Formulação Tensorial e em Formas Diferenciais Exteriores das Equações Hidrodinâmicas duais das Equações de Maxwell do Electromagnetismo”*, Jornadas de Engenharia de Telecomunicações e Computadores (J.E.T.C. , Out 1999), I.S.E.L., Lisboa.
- [10]. Sédov, L., *“Mécanique des Milieux Continus”*, Editorial Mir, Moscovo, 1973, tradução francesa pelas edições Mir, 1975.
- [11]. Telles Antunes, M.; *“Lições da Cadeira de Electricidade”*, Edição da Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa (AEFCL), 1961-1962.

CAPÍTULO IV

EQUIVALENTE HIDRODINÂMICO DE UM GERADOR DE CORRENTE ELÉCTRICA E DA SUA FORÇA ELECTROMOTRIZ

1. Movimentos rotacionais de um fluido

Vamos admitir que $\vec{\omega}$ não pode ser idênticamente nulo no seio do fluido. Se as linhas de corrente forem circunferências centradas na origem a velocidade do fluido em coordenadas polares situadas sobre o plano $z=0$, é:

$$\vec{u}(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\vec{e}_\theta}{r} \right) \quad (1)$$

Como para $r=0$ vem $u=\infty$, $\vec{\omega}$ não é idênticamente nulo em qualquer domínio que contenha a origem, não havendo aí, como dissemos a garantia de se verificar aí idênticamente $\text{rot } \vec{u} = \mathbf{0}$. No entanto por ser $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ a condição de integrabilidade de Stokes $\vec{u} \cdot \text{rot} \vec{u} = 0$ é sempre verificada, e sendo menos restritiva que a irrotacionalidade da velocidade, garante a existência de um potencial escalar de \vec{u} em todo o plano. A expressão (1) é a da velocidade de um vórtice pontual, isto é, no qual $\vec{\omega} = 0$ excepto num ponto ($r=0$), como veremos a partir de (9). O gradiente de uma função escalar em coordenadas cilíndricas é:

$$\text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (2)$$

Vamos ver que a velocidade (1) deriva do potencial:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (3)$$

Esta função tem na origem ($r=0$) um ponto singular, pois tal ponto é representável por uma infinidade contínua de pares $(0, \theta)$ (com $\theta \in \mathbb{R}$), não definindo aí, portanto, (3) um φ único para cada ponto do plano. A correspondência (3) não é função biunívoca do ponto de \mathbb{R}^2 , em qualquer domínio que contenha a origem. Vamos ver que (1) e (3) satisfazem a:

$$\vec{u} = \text{grad} \varphi \quad (4)$$

Substituindo (3) em (2) e atendendo a (4) vem:

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \theta \right) \vec{e}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (r \neq 0) \quad (4-1)$$

Fizemos uso das relações (1), (2), (3) e (4). Em (1) Γ é a intensidade do vórtice, dada por:

$$\Gamma = \int_{\gamma^+} \vec{u} \cdot d\vec{\ell} \quad (5)$$

γ^+ é um contorno de Jordan (linha simples fechada) envolvendo o ponto singular $r = 0$, percorrido no sentido anti-horário. Escolhendo para γ uma circunferência de raio r , (5) permite-nos calcular Γ :

$$\Gamma = 2\pi r u(r) \quad (6-1)$$

$$\vec{u} \cdot \text{rot} \vec{u} = 0 \quad (6-2)$$

Vamos agora calcular a distribuição $\text{rot} \vec{u}$. Como \vec{u} deriva de um potencial escalar tem-se, considerando o teorema de Stokes no plano:

$$\iint_S \text{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial S^+} \vec{u} \cdot d\vec{\ell} \quad (7)$$

sendo \vec{n} um vector unitário normal a S . De (7) e de (1) vem:

$$\iint_S \text{rot} \vec{u} \cdot \vec{e}_z dS = \int_{\partial S^+} \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot (r \vec{e}_\theta d\theta) = \Gamma \quad (7-1)$$

Então:

$$\text{rot} \vec{u} = \Gamma \vec{e}_z \delta(\vec{r}) \quad (8)$$

Logo:

$$\vec{\omega} = \frac{\Gamma}{2} \vec{e}_z \delta(\vec{r}) \quad (9)$$

$\vec{\omega}$ é uma distribuição de suporte concentrado (suporte reduzido a um conjunto finito ou numerável de pontos). De (1) e (8) vem a condição de integrabilidade (Stokes) do pfaffiano $\vec{u} \cdot d\vec{\ell}$, que é $\vec{u} \cdot \text{rot} \vec{u} = 0$ e que garante a existência de um potencial ϕ satisfazendo a (4). O potencial de \vec{u} é neste caso a função $\varphi_n(\mathbf{r}, \theta)$ com:

$$\theta \in [2n\pi, 2(n+1)\pi[\quad ; \quad n \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

sendo $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ o conjunto dos inteiros. φ_n são os ramos analíticos locais da função analítica global: (estas designações que foram importadas da teoria das funções de variável complexa estão aqui a ser aplicadas a funções reais de variável real):

$$\phi = \{\varphi_n(\mathbf{r}, \theta) | n \in \mathbb{Z}\} \quad (11)$$

O ponto crítico $r = 0$ é um ponto de ramificação de ϕ . (Qualquer vizinhança de $r = 0$ por menor que seja contém pontos pertencentes aos vários ramos unívocos e deriváveis ϕ_n). Na teoria das funções complexas de variável complexa os ϕ_n são chamados ramos holomorfos.

2. Força electromotriz

Vamos admitir que o campo eléctrico devido a um gerador de corrente eléctrica constante tem a expressão sugerida por (1) e pela lei de Ohm na sua forma vectorial, tendo -se:

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{k}{r} \vec{e}_\theta \quad (12)$$

hipótese que é tornada verosímil pelas conclusões a que conduz. O sentido físico de k em (12) é diferente do da constante k ($k = \frac{\Gamma}{2\pi}$) em (1) e será determinado posteriormente. Calculando o rotacional do campo eléctrico como fizemos com o campo de velocidade e substituindo na equação de Maxwell o campo eléctrico pela sua expressão dada por (12), vem:

$$\text{rot} \vec{E} = 2\pi k \delta(\vec{r}) \vec{e}_z \quad (12-1)$$

Logo:

$$\text{rot} \vec{E} = 2\pi k \cdot \vec{e}_z \delta(\vec{r}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13)$$

Integrando, vem:

$$\vec{B}(r, \theta, t) = -2\pi k \vec{e}_z \delta(\vec{r}) t + \vec{B}_0(r, \theta) \quad (14)$$

Confirmámos que fora do gerador o campo é magnetostático ($\vec{B} = \vec{B}_0$). Vamos calcular a circulação do campo eléctrico dado por (12) ao longo de contornos γ nos seguintes casos:

- γ deixa a origem O do lado de dentro;
- γ deixa O do lado de fora;
- γ passa por O .

Para adaptar ao Electromagnetismo os resultados da Hidrodinâmica atendemos a (4) e fazemos

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi^* \quad (15)$$

Então o potencial do campo eléctrico é:

$$\phi_n^*(r, \theta) = -k\theta, \quad \theta \in [2n\pi, 2(n+1)\pi], n \in \mathbb{Z} \quad (16)$$

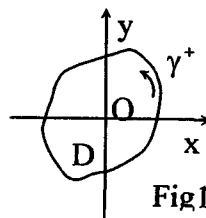
O conjunto destas funções é designado ϕ^* , e é um objecto matemático chamado, na teoria das funções complexas de variável complexa *função analítica global* e os seus ramos unívocos, (se forem analíticos

chamam-se *ramos ou funções analíticas locais da função analítica global*). Os ramos φ_n^* são obtidos dos ramos de ordem contígua por *continuação analítica directa* e dos restantes potenciais locais por *continuação analítica indirecta*.

O ponto $r = 0$ é *ponto de ramificação* de (11) e *polo simples* de (12) (usando aqui abusivamente para funções reais de variável real a linguagem adequada à teoria das funções de variável complexa). Usando a linguagem das funções reais de variável real efectivamente apropriada, diremos que é um ponto de descontinuidade infinita de (12), vindo:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\vec{E}(r, \theta)| = \infty$$

Vamos agora tratar da resolução das alíneas a), b) e c).



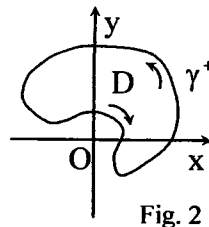
- O circuito de integração γ deixa dentro a origem do sistema de eixos que é o único ponto singular de \vec{E} ;
- O circuito de integração deixa O do lado de fora;
- O circuito de integração passa por O .

Em qualquer caso (fórmula de Barrow) tem-se:

$$\int_{\gamma^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_n^*(\theta_{in}) - \varphi_n^*(\theta_{fin}) \quad (17)$$

sendo $\theta_{in} = \theta_{fin}$. Como φ_n^* é unívoca em $\bar{D} = D \cup \gamma$, tem-se $\varphi_n^*(\theta_{in}) = \varphi_n^*(\theta_{fin})$, e vem:

$$\int_{\gamma^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (18)$$



No caso mais geral a origem é um ponto anguloso de γ . Então:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_n^*(\theta_{in}) - \varphi_n^*(\theta_{fin}) = \theta_n(\alpha) - \theta_n(\pi - \beta) = -\kappa\alpha + \kappa(\pi - \beta) = \kappa(\pi - \alpha - \beta) \quad (19)$$

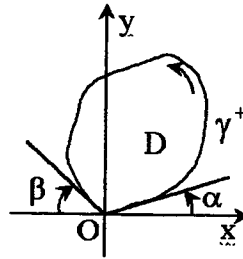


Fig 3

A circulação de \vec{E} em torno de γ quando o ponto singular está no interior do gerador, (Fig. 5) define a força electromotriz deste:

$$E = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

Examinemos as figuras (3) e (4) correspondentes à questão que temos vindo a tratar. Consideremos um gerador de corrente com os polos unidos por um condutor plano; para maior simplicidade, debitando corrente no circuito (Fig. 4) e notemos que o caso mais geral é descrito em c), (Fig. 3).

De (19) e (20) vem:

$$k = \frac{E}{\pi - \alpha - \beta} \quad (21)$$

Consideremos agora um gerador de corrente constante, com os polos ligados por um condutor plano.

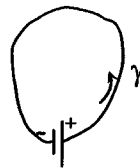


Fig. 4

A elevação de tensão sofrida no interior do gerador quando a carga conceptual unitária positiva entra nele pelo polo negativo e sai pelo polo positivo é a força electromotriz, E , proporcional ao passo da hélice. Se φ^* for um campo unívoco num domínio, tendo a origem como ponto interior então $\varphi_n^*(\theta_{in}) = \varphi_n^*(\theta_{fin})$ com

$$E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (k(\theta_{in} - \theta_{fin})) \quad (22)$$

Vindo, de (17) e de (20) que uma força electromotriz nula estando o gerador em funcionamento é fisicamente sem sentido. Portanto, o potencial do campo eléctrico de um gerador não é uma função unívoca

analítica mas uma colecção dessas funções. Usando a terminologia das funções complexas o potencial do campo eléctrico devido a um gerador é o equivalente para funções reais de um potencial complexo com as características de função analítica global com, pelo menos, um ponto de ramificação. Dado um gerador suposto pontual, alimentando um circuito plano, existem duas possibilidades quanto à posição do ponto singular:

- O ponto singular não coincide com o gerador (Fig. 5);
- O ponto singular coincide com o gerador (Fig. 6).

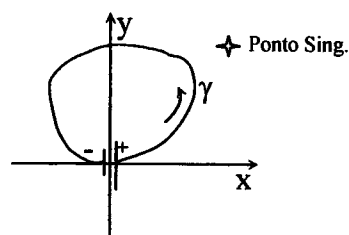


Fig. 5

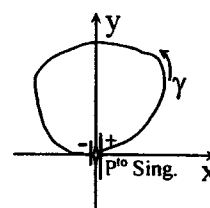


Fig. 6

No caso a) Fig.5, a f.e.m. do gerador tomaria valores diferentes, conforme o condutor (identificado com o circuito de integração) deixasse do lado de dentro ou de fora o ponto singular, o que não tem sentido por se tratar de uma característica física do gerador. Concluímos que o ponto singular coincide com o gerador pontual na origem dos eixos, e substituindo (21) em (12) vem:

$$\vec{E}(\mathbf{r}, \theta) = \frac{E}{\pi - \alpha - \beta} \frac{\vec{e}_\theta}{r} \quad (23)$$

com $\alpha + \beta \neq \pi$, $r \neq 0$. Obtivemos uma conclusão que é verosímil :

O campo eléctrico devido a um gerador de corrente eléctrica é proporcional à sua força electromotriz.

Pode-se demonstrar que os vários ramos analíticos de ϕ^* são da forma:

$$\varphi_n^*(\mathbf{r}, \theta) = -k(\theta + 2n\pi), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (24)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, 2\pi[\quad (25)$$

Então entre os elementos φ_n^* e φ_m^* de qualquer par de potenciais existe uma relação reflexiva, simétrica e transitiva (relação de equivalência). Em (24) o termo aditivo $2n\pi$ permite fazer a continuação analítica de φ_n^* a φ_m^* (directa se $m = n \pm 1$, indirecta se $m \neq n \pm 1$). Vamos considerar um circuito eléctrico γ (Fig. 7) e uma superfície cilíndrica de directriz γ e geratrizes normais ao plano de γ . Para a posição escolhida do

gerador o sentido positivo da orientação de γ é o sentido convencional da corrente eléctrica. A expressão de ϕ^* é:

$$\phi^* = \{\varphi_n^* = \kappa\theta' \mid 2n\pi \leq \theta' < 2(n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\} \quad (26)$$

e é representada graficamente por uma hélice cilíndrica que é topologicamente equivalente a uma recta. A lei de Ohm na sua forma elementar, $\varphi^* = \mathbf{IR} = \mathbf{I}\rho \frac{s}{A}$, sendo s a abcissa curvilínea sobre o condutor e A a sua secção recta indica-nos que φ^* é uma função linear homogénea de s , logo representada por uma recta, topologicamente equivalente a uma hélice cilíndrica. Intuitivamente vemos que esta está assente sobre um helicóide recto (superfície de parafuso) que é uma visualização da superfície de Riemann associada a ϕ^* .

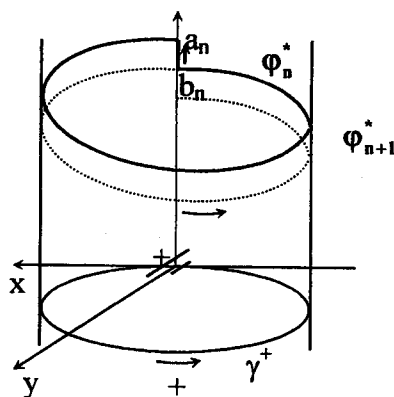


Fig. 7

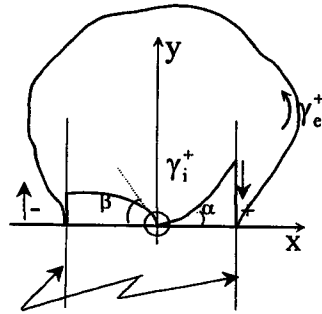
Note-se que \vec{E} não determina o ramo φ_n^* que representa o potencial para uma certa corrente eléctrica. Em termos do sentido convencional da corrente eléctrica, (supostamente constituída por cargas eléctricas positivas) conclui-se da Fig.7 que a carga positiva Q abandona o polo positivo do gerador com a energia Qa_n , a qual vai diminuindo ao longo do circuito por efeito Joule, tornando-se mínima e igual a Qb_n quando a carga Q atinge o polo negativo do gerador. Então este comunica-lhe a energia (sendo E a força electromotriz):

$$\Delta U = Q(a_n - b_n) = QE \quad (27)$$

que é cedida à carga Q pelo gerador e que lhe restitui o valor que possuía ao deixar o polo positivo deste. Num circuito eléctrico de secção constante A , sendo ρ a densidade volúmica de carga eléctrica e \vec{u} a velocidade desta, tem-se:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \rho u A \quad (28)$$

Como I, ρ, A são constantes ao longo do condutor vem também $u = \text{constante}$ pelo que a energia cinética é também constante. A variação da energia total da carga Q num ciclo é então nula: $\Delta U + \Delta T = 0$ (T é a energia cinética e U a energia potencial de cada carga em movimento). Portanto: O potencial global é representável por uma função (correspondência unívoca) sobre uma superfície de Riemann homeomorfa a um helicóide recto sendo um integral primário do movimento; a energia total (potencial+cinética) da unidade de carga.



Eléctrodos do gerador

Fig 6'

As considerações feitas a propósito da Fig.6 são aplicáveis à Fig.6'. As várias trajetórias possíveis dos electrões ou iões no interior do gerador não são possivelmente equiprováveis.

A origem $(0,0)$ se se aceitar (23), é um *pólo* do campo eléctrico e *ponto de ramificação* do potencial e comporta-se como uma fonte pontual da energia que o gerador de corrente cede aos electrões (ou iões) constituintes da corrente eléctrica, para que esta se mantenha.

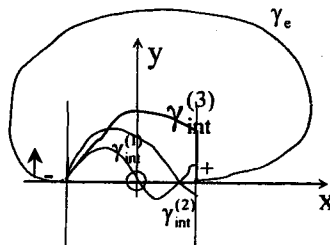


Fig. 8

Para maior simplicidade vamos abstrair do facto de trajetórias internas diferentes não serem equiprováveis.

O ângulo α da trajetória γ_i é designado por α_i , e o ângulo β da mesma trajetória por β_i .

Para uma corrente sinusoidal virá, em vez de (23):

$$\vec{E}(r, \theta, t) = \sum_i \frac{E}{\pi - \alpha_i - \beta_i} \frac{\vec{e}_\theta}{r} \cos(\omega t + \delta_i) \quad (29)$$

Se o campo eléctrico for par no tempo, $E(t)=E(-t)$, .

Se o campo eléctrico for policromático e se se puder, por exemplo, decompor em série de cosenos (função par no tempo), (29) dá lugar a:

$$\vec{E}(r, \theta, t) = \sum_n \sum_i \frac{E}{\pi - \alpha_{in} - \beta_{in}} \frac{\vec{e}_\theta}{r} \cos(n\omega t + \delta_{in}) \quad (30)$$

2.1. Interpretação da força electromotriz de um gerador através do teorema de Helmholtz

Este teorema exprime a possibilidade de se escrever um campo vectorial de classe C'' , definido num domínio ilimitado, e nulo no infinito, na forma:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* + \text{rot}\vec{a} \quad (31)$$

Tomando:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* + \vec{E}_0 \quad (32)$$

vem, sendo γ um circuito fechado e φ^* unívoca:

$$E = \oint_{\gamma} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} - \oint_{\gamma} d\varphi^* = \oint_{\gamma} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

Vamos supor que \vec{E}_0 é nulo fora do gerador e que φ^* é uma função (correspondência unívoca) definida; então concluímos que esse campo, chamado *campo aplicado* é responsável pela energia cedida pelo gerador de corrente às partículas que constituem a corrente eléctrica para a manter:

$$E = I(R + r) = \varphi_B^* - \varphi_A^* + Ir \quad (33)$$

R é a resistência exterior do circuito e r a resistência interna do gerador. A diferença de potencial entre os seus polos é (Fig. 9) $\varphi_B^* - \varphi_A^*$:

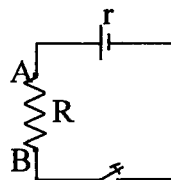


Fig. 9

Interromper o circuito equivale a fazer $R \rightarrow \infty$ ou $I \rightarrow 0$. Se o gerador estiver a funcionar tem-se:

$$\varphi_B^* - \varphi_A^* = \lim_{I \rightarrow 0} [IR(I)] = \lim_{R \rightarrow \infty} [RI(R)] \quad (33-1)$$

Pode portanto definir-se a f.e.m. do gerador como a diferença de potencial existente entre os seus polos quando estiver em funcionamento com o circuito interrompido (em circuito aberto).

2.2. Definição da f.e.m. em termos de uma potência

A lei de Ohm em circuito fechado é expressa por (29). Então a potência dissipada em todo o circuito é (Fig-10):

$$P = EI = I^2(R + r) = (\varphi_B^* - \varphi_A^*)I + I^2 r \quad (34)$$

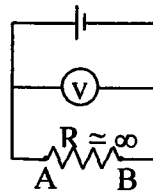


Fig. 10

Se $I = 1A$ vem $P = E$. Pode portanto definir-se a f.e.m de um gerador como a potência térmica dissipada no circuito fechado (isto é incluindo no gerador) quando a intensidade da corrente for $1A$.

3. Potencial complexo do campo eléctrico

Em Mecânica dos Fluidos o campo de velocidade de um escoamento plano estacionário, dado o isomorfismo algébrico existente entre o plano real e o corpo complexo, é representável, usando coordenadas polares no plano, pelo complexo (*velocidade complexa*):

$$\zeta(Z) = u(r, \theta) - iv(r, \theta) \quad (35-1)$$

derivável de um potencial complexo, holomorfo se o fluido for incompressível na ausência de fontes, sumidouros, vórtices ou associações destes,

$$W = \phi + i\psi \quad (35-2)$$

estando $\zeta(Z)$ relacionado com W , se este for estacionário, por:

$$\zeta(Z) = \frac{dW}{dZ} \quad (36)$$

Prova-se que onde W for holomorfa, W, ϕ e ψ são harmónicas:

$$\text{Lap}W = \text{Lap}\phi = \text{Lap}\psi = 0 \quad (37)$$

Em (32) é $z = rc^{i\theta} = x + iy$; ϕ é o potencial da velocidade e Ψ a função de corrente. As condições de holomorfia de Cauchy-Riemann em coordenadas polares escrevem-se:

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (38-1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (38-2)$$

sendo a velocidade dada por:

$$\vec{u} = \text{grad}\phi = -\vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi \quad (39)$$

Nas relações (38-1) e (38-2), a igualdade entre o 2º. e o 3º. membros traduz as condições de holomorfia. De (39) vem :

$$u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (38-1)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (38-2)$$

Como se verá vai obter-se uma *função* pluriforme, analítica para $z \neq 0$, tendo em $z = 0$ um ponto de ramificação. Trata-se de um vórtice pontual .

Consideremos (38-1) e (38-2):

$$u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}; u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Sabemos que é (3):

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Logo, por substituição desta expressão de ϕ na primeira das equações anteriores vem:

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \psi = \psi(r)$$

Passemos à segunda destas equações :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right) = \frac{d\psi}{dr} \Rightarrow \psi'(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Portanto, a *função de corrente* do campo eléctrico é:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (39)$$

De onde:

$$W(Z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \ln r) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\ln r + \frac{\theta}{(-i)} \right) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z \quad (40)$$

Obtivemos, como se esperava, o potencial de um turbilhão.

$$u^c = W' = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad (41)$$

u^c tem em $z = 0$ um polo simples. Note-se que por ser:

$$\text{Lap} \ln r = -2\pi\delta(\vec{r}) \quad (42)$$

conclui-se de (39) que:

$$\text{Lap}\psi = -\Gamma\delta(\mathbf{r}) \quad (43)$$

Das equações (1), (2) e (12) conclui-se que é:

$$\text{Lap}\varphi = 0 \quad (43-1)$$

Vindo:

$$\text{Lap}W = -i\Gamma\delta(\mathbf{r}) \quad (43-2)$$

O campo eléctrico, com valores no plano é associado à função escalar complexa (derivável do potencial $W^* = \varphi^* + i\psi^*$):

$$E^c(r, \theta) = E_x(r, \theta) - iE_y(r, \theta) \quad (44)$$

no qual φ^* é o potencial escalar de $\vec{E}(r, \theta)$ e $\psi^*(r, \theta)$ a respectiva *função de corrente*. E^c e W^* estão relacionados por:

$$E^c = -\frac{dW^*}{dz} \quad (45)$$

vindo então:

$$\mathbf{E}_r = -\frac{\partial\varphi^*}{\partial r} \quad (46-1)$$

$$\mathbf{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta} \quad (46-2)$$

As linhas $\phi^*(\mathbf{r}, \theta) = C^{te}$ são as equipotenciais; as linhas $\psi^*(r, \theta) = C^{te}$ são as linhas de força do campo, normais às equipotenciais. As funções ϕ^*, ψ^* e W^* podem ser obtidas de (3), (36) e (37), respectivamente, vindo:

$$\phi^*(\mathbf{r}, \theta) = -k\theta \quad (47)$$

$$\psi^*(\mathbf{r}, \theta) = -k \ln r \quad (48)$$

com:

$$k = \sum_i \frac{E}{\pi - \alpha_i - \beta_i} \quad (49)$$

sendo $\alpha_i + \beta_i \neq \pi$.

$$\text{Lap}\phi^* = 0 \quad (50)$$

De (48) vem:

$$\text{Lap}\psi^* = 2\pi k \delta(\vec{r}) \quad (51)$$

Logo:

$$\text{Lap}W^* = 2\pi i k \delta(\vec{r}) \quad (52)$$

As grandezas \vec{E}, ϕ^* e ψ^* estão relacionadas por:

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi^* = \vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi^* \quad (53)$$

Tal como sucede com ϕ dado por (3) e W dado por (41) as superfícies de Riemman associadas a ϕ^* e W^* são homeomorfas a um helicóide recto. Analogamente para ψ e ψ^* .

Nota

1. Noções sobre aplicações

Uma função ou aplicação $f: V \rightarrow W$ diz-se injectiva se sendo $\bar{u}, \bar{v} \in V$ a relação $f(\bar{u}) = f(\bar{v})$ implicar $\bar{u} = \bar{v}$. Equivalentemente f é injectiva se dados \bar{u}, \bar{v} com $\bar{u} \neq \bar{v}$, se tiver $f(\bar{u}) \neq f(\bar{v})$. Dito de outro modo f é injectiva se as imagens por f de vectores distintos forem distintas.

Uma aplicação $f: V \rightarrow W$ é sobrejectiva se $f(V)=W$, isto é se W for a imagem por f de V . Logo, se dado qualquer $\bar{w} \in W$ existe $\bar{v} \in V$ tal que $f(\bar{v}) = \bar{w}$ então f diz-se sobrejectiva.

Uma aplicação é bijectiva se for injectiva e sobrejectiva.

Uma aplicação é bicontínua se for contínua e invertível, tendo inversa contínua.

Uma aplicação diz-se um isomorfismo topológico ou um homeomorfismo se for bijectiva e bicontínua.

2. Noções sobre funções de variável complexa

Existe uma vinculação estreita entre as séries de potências e as funções complexas de variável complexa. Pode provar-se que qualquer série de Taylor define uma função holomorfa no interior do seu círculo de convergência e que, reciprocamente, toda a função holomorfa se pode desenvolver em série Taylor univocamente, sendo determinada pelos valores que a função e as suas derivadas tomam num ponto qualquer do seu domínio de holomorfia; sendo a série convergente no círculo máximo contido nesse domínio.

Deste modo concluímos que uma tal função se pode exprimir mediante uma única série de Taylor que a representa sempre no círculo máximo do seu domínio de holomorfia.

Se uma função $f(z)$ se pudesse desenvolver em duas séries diferentes de potências, absolutamente convergentes, em torno de $z=a$, a igualdade das somas dessas séries implicava a igualdade dos respectivos coeficientes no interior do círculo máximo contido na intercepção dos correspondentes círculos de convergência.

Dada a independência do *sistema completo de vectores*, (base vectorial) do espaço funcional, constituído pelas potências de $(z-a)$ se se tiver o duplo desenvolvimento:

$$f(z) = \sum_n A_n (z-a)^n = \sum_n B_n (z-a)^n$$

então no círculo de convergência comum às duas séries ter-se-á:

$$A_n = B_n$$

e, para qualquer z contido no referido círculo:

$$\sum_n (A_n - B_n)(z - a)^n = 0$$

Vimos assim que é $A_n = B_n$ para qualquer n . As duas séries que representam $f(z)$ puderam subtrair-se termo a termo por serem absolutamente convergentes e a igualdade entre coeficientes expressa na relação anterior garante a unicidade do desenvolvimento em série da função $f(z)$.

Suponhamos que $f(z)$ é identicamente nula num círculo de centro $z=a$. Então são também nulas as derivadas de $f(z)$ no círculo de convergência comum das duas séries, em particular em $z=a$.

Dado o desenvolvimento

$$f(z) = \sum_0^{\infty} A_n (z - a)^n$$

tem-se:

$$f^{(n)}(a) = A_n n! \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) = 0$$

o que implica serem conjuntamente nulos todos os coeficientes A_n .

Seja $b \neq a$ outro ponto do plano onde $f(z)$ seja monogénea e façamos o seu desenvolvimento em série em torno de b . Este segundo desenvolvimento tem um círculo de convergência em princípio diferente do do primeiro. Sejam ε e δ os raios de convergência, respectivamente, dos círculos de centros a e b , e suponhamos que a e b são escolhidos de modo a que estes círculos não sejam disjuntos. Neste caso as duas séries que representam $f(z)$ na intersecção dos seus círculos de convergência têm em cada um dos pontos desta a mesma soma.

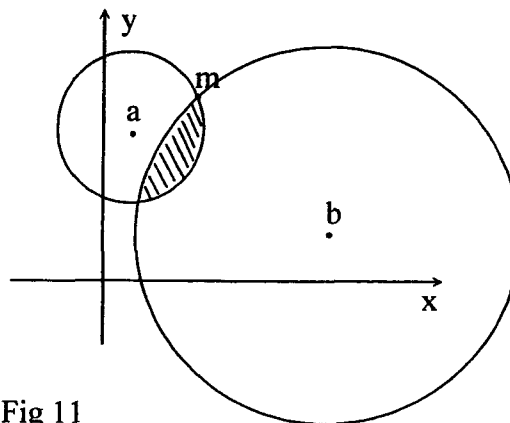


Fig 11

Prolongamento analítico

Existem séries de potências convergentes em toda a recta projectiva complexa e que, portanto, o são também no ponto impróprio desta. São chamadas funções inteiras e representam funções holomorfas. É o caso de e^z , $\text{sen } z$, $\text{cós } z$.

Para todas as outras funções não é possível, por meio de um só desenvolvimento em série de potências representar a função em todo o seu domínio de holomorfia, salvo se este for circular. Consideremos agora, p.ex. a função:

$$W = \frac{1}{1-z}$$

que é convergente num círculo aberto de centro na origem e raio 1, que é holomorfa na plano-esfera privada do ponto $z=1$. Desenvolvendo esta função em série de Mc-Laurin vem a série: $W = \sum_0^{\infty} z^n$. Notemos que

$W = \frac{1}{1-z}$ representa uma função definida para qualquer valor complexo diferente de 1, mas que só é holomorfa no interior de $|z| < 1$. Uma função definida, como neste caso, por uma combinação finita de operações algébricas efectuadas sobre z não é, em geral, holomorfa. A respectiva série de Taylor representa a parte holomorfa da função.

É possível provar que:

Se uma série de potências converge num círculo de centro $z=a$ e raio finito existe sobre a circunferência, pelo menos um ponto m no qual a função definida pela série não é monogénea.

Dados dois domínios abertos do plano D e D^* sendo $D \subset D^*$ ($D \neq D^*$) e uma função complexa f definida em D , chama-se *prolongamento* ou *extensão* de f a D^* a toda a função f^* de domínio D^* tal que:

$$\forall z \in D \cap D^* \quad f(z) = f^*(z)$$

Se não se fizerem outras exigências existe sempre uma infinidade de prolongamentos de f a D^* . O prolongamento da função f é sempre possível mas indeterminado.

Para que a solução seja única devemos impor condições adicionais a f e a f^* . Por exemplo, se f é holomorfa em D e se se pretende que f^* seja holomorfa em D^* , coincidindo com f em D , o problema nem sempre é possível mas caso o seja é sempre determinado.

Se f^* é holomorfa em D^* , coincidente com f em D , f^* é uma função holomorfa em D^* . O prolongamento analítico de uma função nem sempre é possível mas, quando o for, é sempre univocamente determinado.

Se f^* é holomorfa em D^* , coincidente com f em D , f^* é determinada univocamente pelos seus valores em D (ver Figs.12 e 13). Logo, se o prolongamento analítico existir é único.

É o Princípio da Unicidade da Extensão Analítica, que pode ser enunciado assim:

- Dados dois domínios abertos do plano, D e D^* , e uma função $f(z)$ holomorfa em D , só pode existir uma função $f^*(z)$ holomorfa em D^* que coincida com $f(z)$ em $D \cap D^*$.

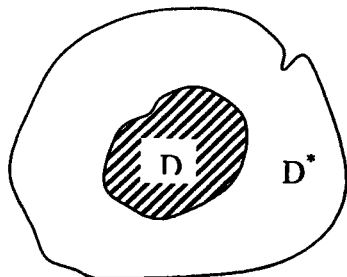


Fig 12

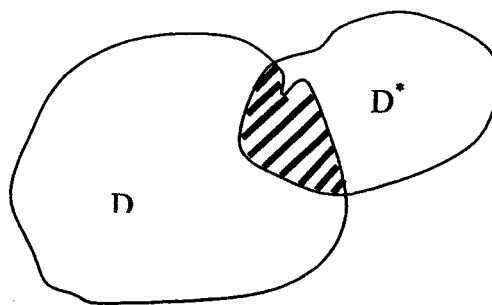


Fig 13

Uma tal função f^* fica determinada pelos valores que toma em $D^* \cap D$ que é um conjunto aberto contido em D .

Dadas duas funções f e f^* , holomorfas em domínios abertos do plano, D e D^* , diz-se que f^* é uma continuação ou extensão analítica indirecta de f a D^* quando existe uma colecção finita de funções holomorfas, $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$, cada uma das quais, a partir da segunda, é a continuação analítica directa da anterior, sendo a primeira f , ($f_1 = f$) e a última f_n , ($f_n = f^*$).

Em qualquer dos casos, os domínios D_1, D_2, \dots, D_n dessas funções (com $D_1 = D$ e $D_n = D^*$) (Fig.14) formam uma cadeia que é convergente num círculo aberto de centro na origem e raio 1.

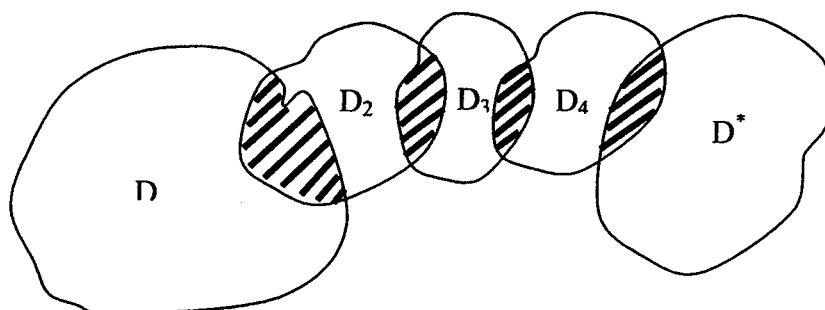


Fig 14

Continuação analítica de f a um ponto do plano é toda a continuação analítica de f a uma vizinhança desse ponto.

Deve distinguir-se *extensão analítica* de *continuação analítica*. A *continuação analítica* só é *extensão analítica* quando o segundo domínio contiver o primeiro (Fig.12). Pode provar-se que, enquanto o problema da continuação analítica directa só pode conduzir a um único resultado (dada a unicidade do prolongamento analítico) o mesmo não sucede com a continuação analítica indirecta.

Noção intuitiva de superfície de Riemann

Dada uma função f , a cada ponto do seu domínio corresponde um só valor z e um só valor $f(z)$. Se a função f não for unívoca, a cada ponto do plano corresponde um só valor z e vários $f(z)$.

Pode ser conveniente dispormos de uma superfície (superfície de Riemann) tal que a vários dos seus pontos corresponde um só valor de z e um só de $f(z)$. A superfície de Riemann mais simples que existe é a associada a $z = W^2$, e pode ser obtida como se segue:

Corta-se o plano complexo ao longo da parte positiva do eixo real; este corte vai unir os dois pontos de ramificação $z=0$ e $z = \infty$.

Coloca-se agora sobre esse plano outro igualmente cortado, ficando os dois planos unidos ao longo do corte efectuado (Fig 15).

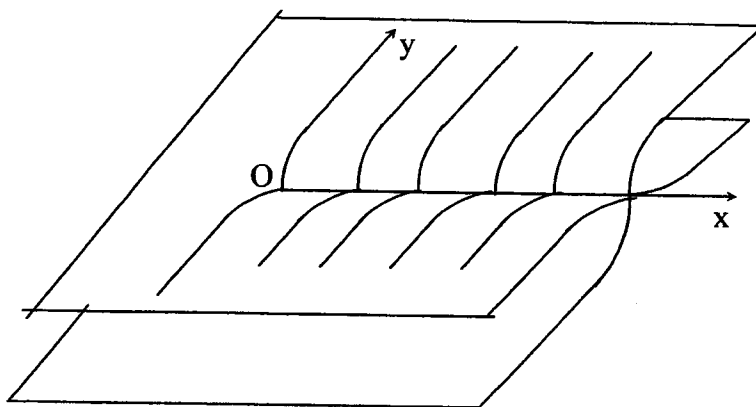


Fig 15

Uma definição exacta de superfície de Riemann é dispensável neste contexto.

Dados duas funções f e f^* definidas e holomorfas em domínios abertos D e D^* do plano, f é equivalente a f^* quando f^* for continuação analítica directa ou indirecta de f .

Função analítica global representada pela função holomorfa f é a classe de todas as funções holomorfas em domínios abertos do plano que são equivalentes a f , isto é, que são continuação analítica desta,

escrevendo-se $\phi = [f]$. Portanto, duas funções f e g holomorfas em domínios abertos, representam a mesma função analítica global ϕ , quando e só quando forem a continuação analítica uma da outra.

Ramos de uma função analítica global são as funções holomorfas que a representam.

Referências:

- [1]. Costa, Boldrini e Figueiredo Wetzler. “Álgebra Linear”, Editora Harbra, 1980.
- [2]. Hughs, W.F. and J.A Brighton. “Theory and Problems of Fluid Dynamics”, Schaum Publishing Co. New York, 1967.
- [3]. Moretti, Gino; “Métodos Matemáticos da Física”, Tomo 1, Imprenta y Casa Editora Coni, Buenos Aires, 1959.
- [4]. Resina Rodrigues, João; “Lições da Cadeira de Electromagnetismo, Edição AEIST 1976.
- [5]. R. Spiegel, Murray; “Theory and Problems of Complex Variables”, Schaum Publishing Co., New York 1964.
- [6]. Sebastião e Silva, J.; “Lições da Cadeira de Análise Superior”, Edição da AEFCL.
- [7]. Wayland, Harold; “Complex Variables Applied in Science and Engineering”, Van Nostrand 1970.

CAPÍTULO V

DESCRIÇÃO ANALÍTICA DOS ESCOAMENTOS PLANOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

1. escoamentos planos

Vamos aplicar o teorema de Helmholtz aos escoamentos planos de fluidos incompressíveis sem viscosidade.

Teorema(Helmholtz): Sob condições suficientes de regularidade do campo de vectores $\vec{u}(\mathbf{P})$ e do seu domínio de definição $\vec{u}(\mathbf{P})$ é a soma de um campo conservativo com um campo solenoidal:

$$\vec{u}(\mathbf{P}) = \text{grad}\varphi(\mathbf{P}) + \text{rot}\vec{a}(\mathbf{P}) \quad (1)$$

φ é chamado potencial escalar de $\vec{u}(\mathbf{P})$ e $\vec{a}(\mathbf{P})$ o seu potencial vector; estes potenciais são determinados univocamente (a menos de uma constante aditiva).

Se o domínio de definição de $\vec{u}(\mathbf{P})$ for ilimitado, então $\vec{u} \in C''$ e $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \infty} \vec{u}(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$, são condições suficientes para que esta decomposição seja possível.

Num escoamento plano de fluido incompressível, satisfazendo a velocidade a estas condições pode escrever-se \vec{u} na forma (1), com $\vec{a} = \psi \vec{e}_z$, sendo \vec{e}_z um vector unitário normal ao plano do escoamento tal que $(\mathbf{O}\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ seja uma base triortonormal em \mathbf{R}^3 e $(\mathbf{O}\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ a base do plano do escoamento. Começemos por calcular $\text{rot}\vec{a} = \text{rot}(\psi \vec{e}_z)$ fazendo uso da igualdade vectorial :

$$\text{rot}(\varphi \vec{f}) = (\text{grad}\varphi) \wedge \vec{f} + \varphi \text{rot}\vec{f}$$

com:

$$\varphi = \psi ; \vec{f} = \vec{e}_z$$

o que conduz a:

$$\vec{a} = \psi \vec{e}_z \quad (1')$$

Portanto:

$$\text{rot}\vec{a} = \text{rot}(\psi \vec{e}_z) = (\text{grad}\psi) \wedge \vec{e}_z + \psi \text{rot}\vec{e}_z = (\text{grad}\psi) \wedge \vec{e}_z$$

A expressão (1) pode então tomar a forma:

$$\bar{u} = \text{grad}\varphi + (\text{grad}\psi) \wedge \bar{e}_z = \text{grad}\varphi - \bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi \quad (2)$$

Da igualdade vectorial:

$$\text{rot}(\bar{f} \wedge \bar{g}) = \bar{f} \text{div}\bar{g} - \bar{g} \text{div}\bar{f} + (\bar{g} \cdot \text{grad})\bar{f} - (\bar{f} \cdot \text{grad})\bar{g}$$

com :

$$\bar{f} = -\bar{e}_z, \quad \bar{g} = \text{grad}\psi$$

vem:

$$\text{rot}\bar{u} =$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(-\bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi) &= -\bar{e}_z \text{Lap}\psi - \text{grad}\psi \text{div}(-\bar{e}_z) + (\text{grad}\psi \cdot \text{grad})(-\bar{e}_z) - [(-\bar{e}_z) \cdot \text{grad}]\text{grad}\psi = \\ &= -\bar{e}_z \text{Lap}\psi - \text{grad}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = -\bar{e}_z \text{Lap}\psi - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\psi = -\bar{e}_z \text{Lap}\psi \quad (2') \end{aligned}$$

Logo:

$$\text{rot}\bar{u} = 2\bar{\omega} = -\bar{e}_z \text{Lap}\psi \quad (3)$$

Se o escoamento for irrotacional vem:

$$\text{Lap}\psi = 0$$

De (1) vem:

$$\text{div}\bar{u} = \text{Lap}\varphi \quad (4-1)$$

$$\bar{u} = \text{grad}\varphi \quad (4-2)$$

Por ser $\bar{a} = \psi \bar{e}_z$ vem, de (1) a equação já apresentada (2):

$$\bar{u} = \text{grad}\varphi - \bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi$$

Logo:

$$\text{div}\bar{u} = \text{Lap}\varphi - \text{div}(\bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi) \quad (5)$$

O vector $-\bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi$ é tangente às linhas de corrente e, portanto, perpendicular às linhas equipotenciais; $\text{grad}\varphi$ também é perpendicular às linhas equipotenciais. Como as linhas equipotenciais são perpendiculares às linhas de corrente deve existir uma função $\alpha(x, y, z, t)$ tal que:

$$-\bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi = \alpha(x, y, z, t) \text{grad}\varphi \quad (5')$$

Se α for uma constante a relação anterior dá, por substituição em (2):

$$\bar{u} = \text{grad}[(1 + \alpha)\varphi] \quad (5'')$$

Logo, $\tilde{\varphi} = (1 + \alpha)\varphi$ é também um potencial possível do escoamento.

Vamos verificar que se em (5') for $\alpha = 1$, (5') exprime as condições de holomorfia da função $W(Z) = \varphi(Z) + i\psi(Z)$.

Se \bar{u} for um campo conservativo é possível escolher as funções φ, ψ de modo a ter-se:

$$\bar{u} = \text{grad}\varphi = (\text{grad}\psi) \wedge \bar{e}_z \quad (6)$$

Logo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_y = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{e}_y \right) \wedge \bar{e}_z = -\bar{e}_y \frac{\partial\psi}{\partial x} + \bar{e}_x \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Logo, vêm as condições de holomorfia de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (6-1); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (6-2)$$

Note-se que (5') se reduz a (6) se for $\alpha = 1$.

A equação da continuidade, na ausência de criação ou aniquilação de matéria é:

$$\text{div}\bar{u} = \frac{\xi}{\rho} \quad (6')$$

Se $\bar{u} = \text{grad}\varphi$ vem:

$$\text{Lap}\varphi = \frac{\xi}{\rho} \quad (7)$$

Se o débito $\frac{\xi}{\rho}$ for nulo vem:

$$\text{Lap}\varphi = 0 \quad (8)$$

De (6) vem:

$$\text{div}\bar{u} = \text{div}(-\bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi) \quad (9)$$

A igualdade (9) é satisfeita com:

$$\bar{u} = -\bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi \quad (9')$$

De (4-2) e da igualdade anterior vem:

$$\bar{u} = \text{grad}\varphi = -\bar{e}_z \wedge \text{grad}\psi = \text{rot}(\psi\bar{e}_z) \quad (9'')$$

Neste caso \vec{u} é conservativo (podendo então no caso de um fluido incompressível ser derivado de um potencial escalar ou de um potencial vector por uma escolha apropriada da função de corrente).

Existe portanto uma certa liberdade na escolha dos φ e dos ψ , analogamente com o que se passa no Electromagnetismo com os potenciais ϕ^* e \vec{A} . Consideremos as equações de Maxwell:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (10-1) \qquad \text{div}\vec{B} = 0 \quad (10-2)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (10-3) \qquad \text{div}\vec{D} = \rho \quad (10-4)$$

De (10-2) vem:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (11)$$

Substituindo em (10-1) vem:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{A}$$

Logo:

$$\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Portanto existe uma função φ^* tal que:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (12)$$

Sejam φ'^* e \vec{A}' satisfazendo a (12) para cada \vec{E} . Então tem-se:

$$\text{grad}\varphi' + \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \text{grad}\varphi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Logo:

$$\text{grad}(\varphi - \varphi') = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} - \vec{A}') \quad (13-1)$$

De (11) vem:

$$\vec{A}' - \vec{A} = \text{grad}\Lambda(x, y, z, t) \quad (13-2)$$

Λ é uma função qualquer derivável em ordem às coordenadas de espaço. Dado \vec{B} , (11) não determina \vec{A} univocamente. Seja \vec{A}' outra solução de (11) para um certo \vec{B} ; de (13-1) e (13-2) vem:

$$\text{grad}(\varphi - \varphi') = \text{grad} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Logo:

$$\varphi - \varphi' = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (13-3)$$

As transformações (13-2) e (13-3) formam um grupo (grupo de gauge). Esta questão já foi abordada, embora de um modo mais sintético, no Cap.III.

Num escoamento plano as linhas $\varphi = C^{te}$ intersectam ortogonalmente as linhas $\psi = C^{te}$ definindo no seu plano do escoamento uma quadrícula cujos elementos são chamados malhas de Beltrami.

De (2'):

$$\bar{\mathbf{u}} = \text{grad}\varphi - \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \text{grad}\psi$$

vem:

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}\psi = \text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi$$

Como as linhas $\psi = C^{te}$ são envolventes do campo das velocidades $\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}\psi = 0$, saindo o resultado da igualdade anterior .

Proposição: Se um escoamento plano de um fluido sem viscosidade for irrotacional e incompressível num domínio aberto simplesmente conexo o seu campo de velocidade pode ai ser derivado indiferentemente de um potencial escalar harmónico ou de uma função de corrente harmónica (a exigência de o domínio ser simplesmente conexo implica a que nele não existam fontes, sumidouros, turbilhões ou multipolos).

Consideremos a relação (2):

$$\bar{\mathbf{u}} = \text{grad}\varphi - \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \text{grad}\psi$$

que é o campo de velocidade num escoamento plano de fluido incompressível, válido em particular em escoamentos irrotacionais. Na ausência das singularidades referidas a equação da continuidade é:

$$\text{div}\bar{\mathbf{u}} = \text{Lap}\varphi = 0$$

Desta igualdade e de (2) vem:

$$\text{div}(-\bar{\mathbf{e}}_z \wedge \text{grad}\psi) = 0 \quad (14)$$

Partamos da relação vectorial:

$$\text{div}(\bar{\mathbf{f}} \wedge \bar{\mathbf{g}}) = \bar{\mathbf{g}} \cdot \text{rot}\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}} \cdot \text{rot}\bar{\mathbf{g}}$$

com $\vec{f} = \text{grad}\psi$, $\vec{g} = \vec{e}_z$:

$$\text{div}(\text{grad}\psi \wedge \vec{e}_z) = \vec{e}_z \text{rotgrad}\psi - \text{grad}\psi \cdot \text{rot}\vec{e}_z = 0$$

Se \vec{u} não depender do tempo, (14) dá lugar à igualdade já obtida (9'):

$$\vec{u} = -\vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi$$

2. Propriedades da função de corrente

Consideremos um escoamento 2-dimensional de velocidade $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$. Se o fluido for incompressível a equação da continuidade escreve-se $\text{div}\vec{u} = 0$, como já se viu.

O desenvolvimento desta equação dá:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Logo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (15)$$

A relação anterior, que exprime a incompressibilidade do fluido, é a condição necessária e suficiente para que o pfaffiano $d\psi = -vdx + udy$ seja exacto num domínio aberto simplesmente conexo. Existe então uma função ψ (função de corrente) da qual $d\psi$ é a diferencial exacta. Portanto (ver Figura 1):

$$\psi(x, y, t) - \psi(x_0, y_0, t) = \int_{P_0}^P (-vdx + udy) \quad (16)$$

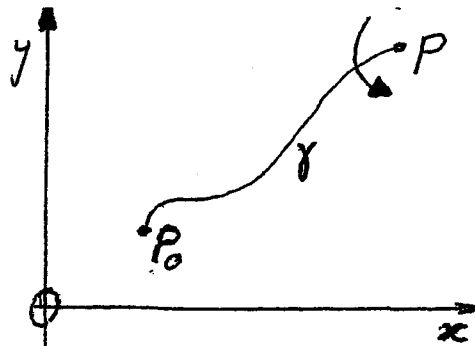


Fig.1

O integral é calculado ao longo de uma linha $\gamma \in C'$, orientada, ligando P_0 a P . A diferença $\psi - \psi_0$ é o caudal de fluido (volume por unidade de tempo) que atravessa γ , sendo positiva se esta linha é atravessada no sentido antihorário em relação a P . Consideremos a representação intrínseca de γ :

$$\gamma \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=x(s) \\ y=y(s) \end{array} \right. \Rightarrow \quad \vec{t} = x'(s)\vec{e}_x + y'(s)\vec{e}_y$$

Obtivemos o vector tangente unitário \vec{t} à curva. Seja \vec{n} o seu vector normal; designando por i o operador de rotação recta no sentido antihorário, tem-se:

$$\vec{n} = -i\vec{t} = -\vec{e}_z \wedge \vec{t} = -\vec{e}_z \wedge (x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y) = y'\vec{e}_x - x'\vec{e}_y$$

Portanto o caudal através de γ é:

$$\int_{P_0}^P \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{P_0}^P (-v dx + u dy) = \psi(P, t) - \psi(P_0, t)$$

O caudal é positivo se o fluido atravessa a linha γ no sentido anti-horário em relação a P e é negativo no caso contrário. Se a trajectória de integração for uma linha de corrente, o caudal que a atravessa é nulo por ser $\psi = C^{te}$ sobre uma tal linha.

Em certas situações $-v dx + u dy$ não é uma diferencial exacta, mas admite como factor integrante a densidade do fluido $\rho(x, y, t)$, definindo-se então uma função de corrente de massa pela diferencial exacta $d\psi = \rho(-v dx + u dy)$. Neste caso, o integral

$$\int_{P_0}^P d\psi$$

dá-nos a massa que por unidade de tempo atravessa a linha γ .

3. Potencial complexo

Proposição: *Se um escoamento plano de um fluido incompressível é irrotacional num domínio aberto*

simplesmente conexo o seu campo de velocidade pode aí ser derivado indiferentemente de um potencial escalar harmónico ou de um potencial vector harmónico (equivalentemente de um função de corrente harmónica) i.é., de (9'') e de (4-2) vem:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{grad}\varphi = \mathbf{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z \quad (17)$$

Logo:

$$\mathbf{Lap}\varphi = \mathbf{Lap}\psi = 0 \quad (18)$$

Então, se for $Z=x+iy$ o ponto genérico de $\mathcal{C} \cong \mathbb{R}^2$, a função

$$\mathbf{W}(Z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t)$$

que não dependerá de t em escoamentos estacionários, é holomorfa nesse domínio, verificando-se aí as condições de holomorfia de Cauchy – Riemman :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (19-1); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (19-2)$$

Estas condições implicam a incompressibilidade do fluido e são condições necessárias e suficientes para que $d\psi = -vdx + udy$, definida num conjunto aberto simplesmente conexo seja uma diferencial exacta.

Atendendo a que é $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{grad}\varphi$, vem:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (19-3); \quad \mathbf{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (19-4)$$

Partindo de $\mathbf{W}(Z)$ pode definir-se uma velocidade complexa $\zeta(Z, t)$ pela relação :

$$\zeta(Z, t) = \mathbf{u}(x, y, t) - i\mathbf{v}(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{W}(Z, t) \quad (20)$$

com $Z = x + iy$.

Daqui em diante só trataremos de escoamentos estacionários.

De (20) vem:

$$\zeta(Z) = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial Z} = \mathbf{u} - i\mathbf{v} \quad (21)$$

Este complexo corresponde ao vector real $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}\bar{\mathbf{e}}_x + \mathbf{v}\bar{\mathbf{e}}_y$.

Da teoria das funções holomorfas vem:

$$\infty \geq \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = |\zeta(Z)|^2 \geq 0 \quad (22)$$

Logo, excepto na vizinhança dos polos de ordem positiva ou negativa (os polos de ordem negativa são os zeros, que são pontos de estagnação do escoamento), a função :

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, y) \\ \psi = \psi(x, y) \end{cases}$$

é invertível.

Atendamos às equações já apresentadas para fluidos incompressíveis (33-Cap.I):

$$\mathbf{Lap}\varphi = \frac{\xi}{\rho}$$

De (3) vem:

$$\mathbf{Lap}\psi = -2\omega \quad (23)$$

De $\bar{\mathbf{a}} = \psi \bar{\mathbf{e}}_z$ vem:

$$\mathbf{Lap}\bar{\mathbf{a}} = -2\bar{\omega} \quad (24)$$

com $\bar{\mathbf{a}} = \psi \bar{\mathbf{e}}_z$. Se houver compressibilidade, as equações anteriores devem ser substituídas por:

$$\mathbf{Lap}\varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\xi}{\rho} \quad (25)$$

$$\mathbf{Lap}\psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2\omega \quad (26)$$

$$\mathbf{Lap}\bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{a}}}{\partial t^2} = -2\bar{\omega} \quad (27)$$

Nas equações (25), (26) e (27) é: $\mathbf{a} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. Estas equações reduzem-se a equações de Poisson se o

fluido foi incompressível ($\mathbf{a} = \infty$). De (25), (26) e de $\mathbf{W} = \varphi + i\psi$ vem:

$$\text{Lap}W - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\xi}{\rho} - 2i\omega \quad (28)$$

Se $a = \infty$ vem:

$$\text{Lap}W = \frac{\xi}{\rho} - 2i\omega \quad (29)$$

As soluções das equações (25), (26), (27) e (28) são os potenciais de Lienard-Wiechert avançados e retardados.

Definição 1: Uma função complexa de variável complexa diz-se monogénea num ponto se tiver derivada nesse ponto.

Definição 2: Se uma função complexa de variável complexa é monogénea em todos os pontos de um domínio aberto diz-se aí holomorfa.

Definição 3: Uma função $f(Z)$ é meromorfa no domínio aberto $D \subset \mathbb{P}\mathbb{C}$ quando for holomorfa em D privado dos pontos isolados que sejam pólos de $f(Z)$.

Teorema: Uma função $W(Z)$ meromorfa num domínio aberto $D \subset \mathbb{P}\mathbb{C}$ pode aí ser considerada o potencial complexo de um escoamento plano se admitir a decomposição (Germain, P):

$$W(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n - i\Gamma_n}{2\pi} \ln(Z - a_n) + \sum_k \sum_{n_k=-\infty}^{+\infty} c_{n_k} (Z - b_k)^{n_k} \quad (30)$$

4. Dedução de algumas relações envolvendo distribuições

i) Consideremos o potencial criado por uma distribuição singular de carga eléctrica consistindo na carga pontual unitária Q na origem de um sistema de eixos cartesianos. Então é:

$$\rho_e = Q\delta(\vec{r}) \quad (31)$$

A solução $\varphi^*(x, y, z)$ de

$$\mathbf{Lap}\varphi^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (32)$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é:

$$\varphi^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (33)$$

Substituindo (31) e (33) em (32) vem:

$$\mathbf{Lap}\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad (34)$$

ii) Consideremos o potencial criado por uma distribuição rectilínea indefinida, de cargas eléctricas, sendo λ a carga por unidade de comprimento no suporte da distribuição, que tomaremos para eixo dos zz . A densidade volúmica num sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é:

$$\rho_e = \lambda\delta(\vec{r}) \quad (35)$$

O potencial criado é:

$$\varphi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \quad (36)$$

Substituindo (35) e (36) em (32) vem:

$$\mathbf{Lap} \ln r = -2\pi\delta(\vec{r}) \quad (37)$$

Se atribuirmos ao plano $z=0$ a estrutura de plano complexo em que os pontos são identificados pelos complexos $Z = x + iy$, designando por $\delta(Z) = \delta(x + iy)$ a densidade de uma distribuição de carga consistindo na carga unitária positiva no ponto origem de Z , e atendendo a que a densidade da mesma distribuição é definida em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ por $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)$, concluímos que é:

$$\delta(Z) = \delta(x)\delta(y) = \delta(\vec{r}) \quad (38)$$

São satisfeitas as propriedades de definição de $\delta(Z)$.

$$\delta(Z) = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \neq 0 \\ +\infty & \text{se } Z = 0 \end{cases} \quad (39-1)$$

$$\iint_{R^2} \delta(Z) dx dy = 1 \quad (39-2)$$

A distribuição $\delta(Z - Z_0)$ é generalizável para $Z_0 = \infty$ pela expressão:

$$\delta(Z - \infty) = \delta\left(\frac{1}{Z}\right) \quad (40)$$

5. Singularidades pontuais do potencial complexo num escoamento plano

Vamos deduzir algumas relações envolvendo distribuições.

Consideremos o potencial criado por uma distribuição singular de carga consistindo na carga pontual Q colocada na origem do sistema de eixos. A sua densidade volúmica é:

$$\rho_e(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}) \quad (41)$$

A solução $\varphi^*(\mathbf{r})$ de:

$$\text{Lap}\varphi^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (42)$$

é:

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (43)$$

Substituindo (41) e (43) em (42) vem, por simplificação:

$$\text{Lap}\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad (44)$$

Consideremos o potencial devido a uma distribuição rectilínea indefinida de cargas eléctricas na qual λ é a densidade linear de cargas. A respectiva densidade volúmica é:

$$\rho_e = \lambda \delta(\vec{r}) \quad (45)$$

O potencial criado é:

$$\varphi^* = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \quad (46)$$

e deve satisfazer à equação:

$$\mathbf{Lap}\varphi^* = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad (47)$$

Substituindo (59) e (60) em (61) vem, simplificando:

$$\mathbf{Lap} \ln r = -2\pi\delta(\vec{r}) \quad (48)$$

Se atribuírmos ao plano xOy a estrutura de plano complexo, fazendo corresponder ao vector $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \in \mathbb{R}^2$ o complexo $Z = x + iy \in \mathbb{C}$, podemos escrever :

$$\delta(Z) = \delta(x)\delta(y) = \delta(\vec{r}) \quad (49)$$

A distribuição $\delta(Z)$ satisfaz às propriedades:

$$\delta(Z) = \begin{cases} +\infty & \text{se } Z = 0 \\ 0 & \text{se } Z \neq 0 \end{cases} \quad (49-1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(Z) dx dy = 1 \quad (49-2)$$

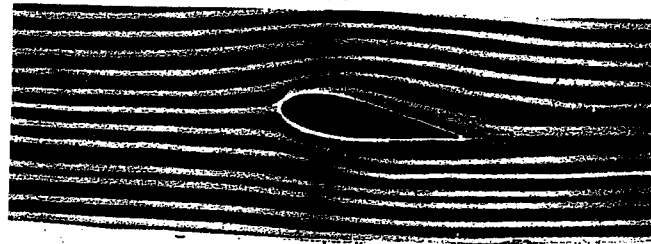
Estas propriedades e esta distribuição são extensíveis ao ponto impróprio $Z = \infty$ de $\mathbf{PC} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\delta\left(\frac{1}{Z}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } Z = \infty \\ 0 & \text{se } Z \neq \infty \end{cases} \quad (49-3)$$

$$\iint_{\mathbb{C}} \delta\left(\frac{1}{Z}\right) dx dy = 1 \quad (49-4)$$

Esta última expressão tem o significado seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0, \iint_{|z| > \frac{1}{\varepsilon}} \delta(Z) dx dy = 1$$



Escoamento sobre perfil.

6. Singularidades pontuais do potencial complexo da velocidade

6-1. Fonte pontual

Consideremos a expressão:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln Z \quad (50)$$

sendo $D = \frac{\xi}{\rho} \in \mathbb{R}$ o débito constante. Tomando $Z = r \exp(i\theta)$ vem:

$$W = \frac{D}{2\pi r} \exp(-i\theta) \quad (51)$$

Derivando, vem:

$$\zeta(Z) = \frac{D}{2\pi} \frac{1}{Z} \quad (52)$$

De (51) vem a expressão vectorial da velocidade:

$$\bar{u} = \frac{D}{2\pi r} (\cos \theta \bar{e}_x + \text{sen} \theta \bar{e}_y) = \frac{D}{2\pi r} \bar{e}_r \quad (53)$$

A função (50) tem dois pontos de ramificação logarítmica, em $Z = 0, \infty$.

De (53) vem:

$$|\bar{u}| = \frac{D}{2\pi r} \quad (54)$$

Calculamos o fluxo de \vec{u} através de uma circunferência de centro na origem.

$$\oint_{\gamma} \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \oint_{\gamma} |\vec{u}| ds = 2\pi r |\vec{u}| = D$$

Reencontramos (54).

Se for $D > 0$ trata-se de uma fonte: as suas linhas de corrente são semirectas emergindo da origem ($\text{div} \vec{u} \geq 0$) e as suas linhas equipotenciais circunferências de centro na origem; se $D < 0$ é um sumidouro pontual, com as suas linhas de corrente semirectas convergindo para a origem ($\text{div} \vec{u} \leq 0$) e as linhas equipotenciais circunferências de centro na origem.

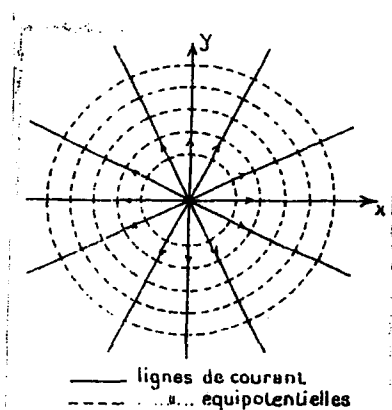


Fig2

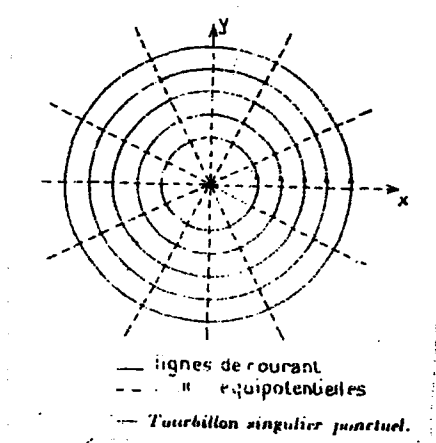


Fig3 .

De (50) vem :

$$\varphi = \frac{D}{2\pi} \ln r \quad (55-1)$$

$$\psi = \frac{D}{2\pi} \theta \quad (55-2)$$

φ deve satisfazer a:

$$\text{Lap} \varphi(\mathbf{r}) = D(\mathbf{r}) = \frac{\xi(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} \quad (56)$$

que é a Equação de Poisson (33-Cap1). Fazendo $D(\vec{r}) = D\delta(\mathbf{r})$ em (56) (D é uma constante):

$$\text{Lap} \varphi = D\delta(\vec{r}) = D\delta(Z) \quad (57)$$

Como o escoamento é sem vorticidade, a equação (3), $2\vec{\omega} = -\vec{e}_z \text{Lap} \psi$, reduz-se aqui a:

$$\text{Lap} \psi = 0 \quad (58)$$

De (55-2) e de (57) vem:

$$\text{Lap}\theta = 0 \quad (59)$$

6-2. *Turbilhão pontual*

Façamos em (50) $\mathbf{D} = -i\Gamma$:

$$\mathbf{W}(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z \quad (60)$$

Substituindo $Z = re^{i\theta}$ em (60) vem:

$$\mathbf{W}(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (61)$$

Vindo assim, por ser $\mathbf{W} = \varphi + i\psi$:

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (62-1)$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (62-2)$$

Da equação (56) que é:

$$\text{Lap}\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{D}\delta(\bar{\mathbf{r}})$$

e de (62-1) vem a relação já obtida (46) que é:

$$\text{Lap} \ln r = -2\pi\delta(\bar{\mathbf{r}})$$

Este movimento não tem vorticidade; da equação (3) $2\vec{\omega} = -\vec{e}_z \text{Lap}\psi$ vem a equação (58):

$$\text{Lap}\psi = 0$$

Vamos agora calcular a velocidade do escoamento derivando (60).

$$\begin{aligned}\zeta(Z) &= \frac{-i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{Z} = \frac{-i\Gamma}{2\pi r} e^{-i\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi r} (-\operatorname{sen}\theta - i \cos\theta)\end{aligned}$$

(63)

Logo:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\Gamma}{2\pi r} (-\operatorname{sen}\theta \bar{\mathbf{e}}_x + \cos\theta \bar{\mathbf{e}}_y) = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \bar{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (-y \bar{\mathbf{e}}_x + x \bar{\mathbf{e}}_y)$$

Calculemos

$$\bar{\mathbf{e}}_z \wedge \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{e}}_z \wedge (x \bar{\mathbf{e}}_x + y \bar{\mathbf{e}}_y) = x \bar{\mathbf{e}}_y - y \bar{\mathbf{e}}_x$$

Logo:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \bar{\mathbf{e}}_\theta \quad (64)$$

Tomando:

$$\bar{\omega} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \bar{\mathbf{e}}_z \quad (65)$$

vem:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\omega} \wedge \bar{\mathbf{r}} \quad (66)$$

O campo $\bar{\mathbf{u}}$ não tem componente radial e a equação (64) representa um escoamento invariante por rotação definido em todo o plano privado da origem, tal como sucede no caso das fontes e sumidouros. As suas linhas de corrente são circunferências de centro na origem, e as suas linhas equipotenciais semi-rectas emergindo da origem (ver Fig. 4).

Voltemos a (62-2) :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

e a (3):

$$2\bar{\omega} = -\bar{\mathbf{e}}_z \operatorname{Lap}\psi$$

Substituindo em (3) a relação (62-2) vem:

$$2\bar{\omega} = -\bar{\mathbf{e}}_z \operatorname{Lap}\left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r\right)$$

Atendendo a (48), que é:

$$\operatorname{Lap} \ln r = -2\pi\delta(\bar{\mathbf{r}})$$

e substituindo na expressão anterior, vem:

$$2\vec{\omega} = -\vec{e}_z \left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \right) \text{Lap}(\ln r) = -\vec{e}_z \frac{\Gamma}{2\pi} 2\pi\delta(\vec{r}) = \Gamma\delta(\vec{r})\vec{e}_z$$

Logo:

$$\vec{\omega} = \frac{\Gamma}{2}\delta(\vec{r})\vec{e}_z \quad (67)$$

O vector turbilhão é nulo excepto em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. De (3) e de (48) vem:

$$\text{Lap}\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Lap} \ln r = \frac{\Gamma}{2\pi} 2\pi\delta(\vec{r}) = \Gamma\delta(\vec{r})$$

Logo:

$$\text{Lap}\psi = \Gamma\delta(\vec{r}) \quad (68)$$

Temos estado a estudar o turbilhão pontual na origem. Em \mathbf{R}^3 o eixo dos zz pode ser visto como um tubo de vorticidade muito fino de intensidade Γ . Calculemos o valor médio de $\vec{\omega}$ num círculo de raio r e centro na origem:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{R^2} \frac{\Gamma}{2} \vec{e}_z \delta(\vec{r}) dx dy = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \vec{e}_z \quad (69)$$

Vamos verificar que cada partícula de fluido descreve em torno do eixo dos zz um movimento circular uniforme cuja velocidade angular é o valor médio de $\vec{\omega}$, $\langle \vec{\omega} \rangle$, no círculo de raio r e centro na origem

$$\vec{u} = \langle \vec{\omega} \rangle \wedge \vec{r} \quad (70)$$

Vamos substituir (69) em (70) :

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} r\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \vec{e}_\theta$$

Reencontramos (64).

O potencial complexo do escoamento de um fluido tem pontos de ramificação logarítmica onde houver singularidades pontuais do tipo fontes, sumidouros, turbilhões ou associações destes (multipolos); a respectiva velocidade complexa tem em tais pontos polos de primeira ordem que são pontos de descontinuidade infinita da velocidade vectorial real correspondente.

No caso de fontes, sumidouros e turbilhões $W(Z)$ é uma função analítica global com uma infinidade numerável de ramos holomorfos podendo obter-se qualquer deles excluindo do plano complexo a origem e um arco simples, ilimitado, qualquer, emergente desta (escolhe-se em geral o semieixo positivo dos xx). A superfície de Riemman associada é homeomorfa a um helicóide recto.

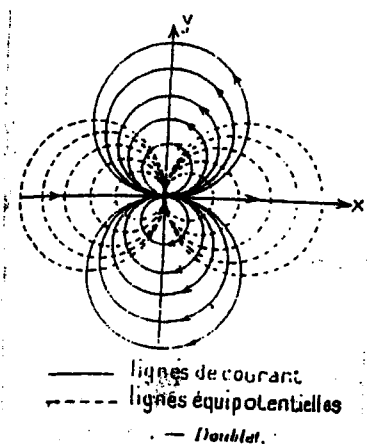


Fig.4

6.3. Superfície de Riemman de uma função analítica global

Uma função analítica global $W(Z)$ tem dois ou mais ramos unívocos distintos no mesmo domínio $D \subseteq \mathbb{C}$, dizendo-se que é formada por folhetos diferentes de domínios sobrepostos, D , cada um deles correspondendo a um ramo unívoco analítico de $W(Z)$ (ramos holomorfos de $W(Z)$).

Quando se passa de um desses ramos para outro mediante uma cadeia de funções, os respectivos folhetos “colam-se” uns aos outros e à sua reunião chama-se superfície de Riemman da função analítica global. Vamos dar agora uma definição exacta desta superfície:

Definição: Dado $\forall \alpha \in \mathbb{PC}$, chama-se germe de uma função analítica global em α ao vector :

$$(\alpha, c_1, c_2, c_2, \dots, c_n, \dots)$$

que se obtém associando a α uma sucessão qualquer (c_n) de números complexos tal que a série

$$\sum_0^{\infty} c_n \frac{(Z - \alpha)^n}{n!}$$

tenha raio de convergência não nulo. Então esta série define uma função holomorfa $f(Z)$ no domínio aberto D e em $\forall \alpha \in D$ o germe de $W(Z)$ é:

$$\{\alpha, f\} = (\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha), \dots, f^{(n)}(\alpha), \dots)$$

Demonstra-se que:

Proposição: Uma função holomorfa num domínio aberto D fica aí determinada por qualquer dos seus germes.

7. Singularidades pontuais do potencial das velocidades

7-1. Dipolo pontual fonte-sumidouro

Consideremos uma fonte F em Z_F e um sumidouro S em Z_S , sendo $Z_F - Z_S = \epsilon \exp(i\alpha)$. O potencial desta associação é:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln\left(\frac{Z - Z_F}{Z - Z_S}\right) = \frac{D}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{Z_S - Z_F}{Z - Z_S}\right) = \frac{D}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{Z - Z_S}\right) \quad (71)$$

Seja $D = D(\epsilon)$ uma função da distância ϵ entre o sumidouro e a fonte tal que:

$$0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon D(\epsilon)] = m < +\infty \quad (72)$$

Representando o momento dipolar por um vector teremos:

$$\vec{m} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon D(\epsilon)) \vec{n}$$

sendo o vector unitário $\vec{n} = \text{vers } \overline{F\vec{S}} = \vec{e}_x$. Se $\vec{n} = \text{vers } \overline{F\vec{S}} = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y$, o vector momento do dipolo tem m por valor algébrico e está orientado de modo a fazer um ângulo α com o eixo dos xx tendo o lado extremidade deste ângulo no primeiro quadrante. Este momento pode ser representado pelo complexo no terceiro quadrante:

$$\forall m \in \mathbb{R} : m_c = m e^{-i\alpha}$$

Consideremos o desenvolvimento:

$$\ln(1 - x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots \quad (73)$$

sendo:

$$x = \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{Z - Z_P} \quad (74)$$

e seja:

$$Z_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_P \quad (75)$$

Então:

$$\begin{aligned} W(Z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_\varepsilon(Z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{D(\varepsilon)}{2\pi} \right] \left[-\frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{Z - Z_P} + \left(\frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{Z - Z_P} \right)^2 - \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon D(\varepsilon)] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_P} - \frac{\varepsilon e^{2i\alpha}}{Z - Z_P} + \dots \right] = -\frac{1}{2\pi} \frac{m e^{i\alpha}}{Z - Z_0} \end{aligned}$$

Logo:

$$W(Z) = -\frac{m \exp(i\alpha)}{2\pi Z - Z_0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\bar{m}_c}{Z - Z_0} \quad (76)$$

Ou fazendo $m = \pi M_2$:

$$W(Z) = -\frac{M_2}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z - Z_0} \quad (76')$$

Se tomarmos $\alpha = 0$ (\bar{m} orientado segundo o eixo dos xx), vem:

$$W(Z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{Z - Z_0} \quad (77)$$

ou, atendendo á relação já postulada $m = \pi M_2$ vem:

$$W(Z) = -\frac{M_2}{2} \frac{1}{Z - Z_0} \quad (77')$$

Se tomarmos $Z - Z_0 = r \exp(i\theta)$, e se atendermos a que é $W = \varphi + i\psi$ vêm de (77) escrito na forma polar:

$$W(Z) = -\frac{m}{2\pi r} e^{-i\theta} \quad (78)$$

as expressões de φ e de ψ :

$$\varphi = -\frac{m \cos\theta}{2\pi r} \quad (79-1)$$

$$\psi = \frac{m \sen\theta}{2\pi r} \quad (79-2)$$

Sabemos que o potencial φ satisfaz a (57):

$$\text{Lap}\varphi = D(P)$$

Consideremos um dipolo fonte-sumidouro sobre o eixo dos xx no ponto P_0 deste eixo, com \bar{m} orientado segundo o vector \bar{FS} sobre o eixo dos xx . O potencial devido à fonte é:

$$\text{Lap}\varphi_F = \mathbf{D}(\mathbf{P}) = \mathbf{D}_0\delta(\mathbf{P} - \mathbf{F}) \quad (\mathbf{D}_0 > 0) \quad (80)$$

sendo \mathbf{D}_0 uma constante. Se o dipolo tiver o momento orientado como $\text{vers}\overline{\mathbf{F}\mathbf{S}} = \cos\alpha\overline{\mathbf{e}}_x + \text{sen}\alpha\overline{\mathbf{e}}_y$, (80) dará lugar a:

$$\text{Lap}\varphi_F = \mathbf{D}(\mathbf{P}) = \mathbf{D}_0 e^{i\alpha}\delta(\mathbf{P} - \mathbf{F}) \quad (81)$$

$$\text{Lap}\varphi_S = -\mathbf{D}(\mathbf{P}) = -\mathbf{D}_0 e^{i\alpha}\delta(\mathbf{P} - \mathbf{S}) \quad (\mathbf{D}_0 > 0) \quad (82)$$

com:

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbf{e}}_x; \quad \mathbf{S} = \mathbf{O} - \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbf{e}}_x$$

Logo:

$$\text{Lap}\varphi_F^\varepsilon = \mathbf{D}_0 e^{i\alpha}\delta\left(\mathbf{Z} - \frac{\varepsilon}{2}\right); \quad \text{Lap}\varphi_S^\varepsilon = -\mathbf{D}_0 e^{i\alpha}\delta\left(\mathbf{Z} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Portanto para a associação fonte-sumidouro o princípio da sobreposição dos potenciais dá:

$$\text{Lap}\varphi_\varepsilon = \text{Lap}(\varphi_S^\varepsilon + \varphi_F^\varepsilon) = -(\varepsilon\mathbf{D}_0(\varepsilon))e^{i\alpha} \frac{\delta\left(\mathbf{Z} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta\left(\mathbf{Z} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$$

Logo:

$$\text{Lap}\varphi = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon\mathbf{D}_0(\varepsilon)]e^{i\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta\left(\mathbf{Z} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta\left(\mathbf{Z} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = -me^{i\alpha}\delta'_x(\mathbf{Z}) = -me^{i\alpha}\overline{\mathbf{e}}_x \cdot \text{grad}\delta \quad (82')$$

Portanto:

$$\text{Lap}\varphi = -me^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \delta(\mathbf{Z}) \quad (83)$$

Logo de (76) vem:

$$\text{Lap}\left[-\frac{m \exp(i\alpha)}{2\pi(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)}\right] = -me^{i\alpha}\delta'(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)$$

Portanto:

$$\text{Lap}\left(\frac{1}{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0}\right) = 2\pi e^{i\alpha}\delta(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0) \quad (84)$$

Concluimos que a função $1/\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0$ não tem laplaciano único.

Note-se que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (Z - Z_0) = \delta'(\mathbf{x})\delta(y)$.

Atendamos à expressão (76) no caso considerado:

$$W(Z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_0} = -\frac{m}{2\pi r} \frac{e^{i\alpha}}{r} e^{-i\theta} = -\frac{m}{2\pi r} e^{-i(\theta-\alpha)}$$

Então de $W = \varphi + i\psi$ e de (76) vem:

$$\varphi = -\frac{m}{2\pi} \frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} \quad (85-1)$$

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{r} \quad (85-2)$$

Logo:

$$W(r, \theta) = -\frac{m}{2\pi} \left[\frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} - i \frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{r} \right] \quad (86)$$

Atendendo a (68):

$$\text{Lap}\psi = \Gamma\delta(\bar{r})$$

$$\text{Lap}W(Z) = -\frac{m}{2\pi} \text{Lap} \left\{ \frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} - i \frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{r} \right\} = -\frac{m}{2\pi} \text{Lap} \left[\frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} \right] + \frac{m}{2\pi} i \text{Lap} \left[\frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{r} \right] \quad (87)$$

Por ser (58):

$$\text{Lap}\psi = 0$$

Então de (82'):

$$\text{Lap}W(Z) = \text{Lap}\varphi = -me^{i\alpha}\delta'(x)\delta(y)$$

e de (87), vem:

$$\text{Lap} \left\{ -\frac{m}{2\pi} \left[\frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} \right] \right\} = -me^{i\alpha}\delta'(x)\delta(y) \quad (88)$$

$$\text{Lap} \left[\frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} \right] = -2\pi\delta'(x)\delta(y) \quad (89)$$

$$\text{Lap} \left[\frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{r} \right] = 0 \quad (90)$$

7-2. Dipolos de turbilhões

Consideremos dois turbilhões, de intensidades Γ e $-\Gamma$ respectivamente, em $Z_1 = \frac{\varepsilon}{2}e$ e em $Z_2 = -\frac{\varepsilon}{2}$, com $\varepsilon > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_2 = Z_0$.

Voltemos às expressões (72) e (76):

$$\mathbf{m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \mathbf{D}(\varepsilon)]$$

$$\mathbf{W}(Z) = -\frac{\mathbf{m}}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_0}$$

Podemos definir alternativamente o momento do dipolo pela expressão:

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{m}}{\pi} \quad (91)$$

Com o que (76) toma a forma:

$$\mathbf{W}(Z) = -\frac{\mathbf{M}_2}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z - Z_0} \quad (92)$$

Façamos em (72) $\mathbf{D} = -i\Gamma$, vindo:

$$\mathbf{m} = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \Gamma(\varepsilon)] = \pi \mathbf{M}_2 \quad (93)$$

Vamos definir o momento do dipolo de turbilhões pela relação:

$$\mathbf{m}' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \Gamma(\varepsilon)] = \pi \mathbf{M}_2' \quad (94)$$

Este momento pode ser expresso opcionalmente por $\mathbf{m}' = \mathbf{M}_2'$. Então:

$$\mathbf{W}(Z) = -\frac{i\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_0} = -\frac{i\mathbf{M}_2'}{2} \frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_0} \quad (95)$$

Se $\alpha = 0, Z_0 = 0$:

$$\mathbf{W}(Z) = -\frac{i\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{1}{Z} = -\frac{i\mathbf{M}_2'}{2Z} \quad (96)$$

De (95) vem:

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbf{R}, \text{Lap} \mathbf{W} &= -\frac{\mathbf{im}'}{2\pi} e^{i\alpha} \text{Lap} \left(\frac{1}{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0} \right) = -\frac{\mathbf{im}'}{2\pi} e^{i\alpha} (-2\pi) \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) = \\ &= \mathbf{im}' e^{i\alpha} \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) = \\ &= i\pi \mathbf{M}'_2 e^{i\alpha} \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) = \pi \mathbf{M}'_2 e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (97)\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\text{Lap} \mathbf{W} &= \pi \mathbf{M}'_2 \left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right] \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) = \\ &= \pi \mathbf{M}'_2 (-\text{sen} \alpha + i \cos \alpha) \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) = \text{Lap} \varphi + i \text{Lap} \psi\end{aligned}$$

Logo:

$$\text{Lap} \varphi = -\pi \mathbf{M}'_2 \text{sen} \alpha \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (98)$$

$$\text{Lap} \psi = \pi \mathbf{M}'_2 \cos \alpha \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (99)$$

Logo de (95) vem:

$$\mathbf{W}(\mathbf{Z}) = -\frac{\mathbf{im}'}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0} = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}}{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0} \quad (100)$$

Logo sendo $\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0 = r \exp(i\theta)$, vem:

$$\mathbf{W}(r, \theta) = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right)}}{r} = \varphi + i\psi \quad (101)$$

Logo:

$$\varphi = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right)}{r} = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{r} \quad (102)$$

$$\psi = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right)}{r} = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} \quad (103)$$

Donde:

$$\text{Lap} \varphi = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \text{Lap} \left[\frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{r} \right] = -\pi \mathbf{M}'_2 \text{sen} \alpha \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (104)$$

$$\text{Lap}\psi = -2\omega = \text{Lap}\left[-\frac{\mathbf{m}' \cos(\theta - \alpha)}{2\pi r}\right]$$

Portanto:

$$\text{Lap}\psi = -\frac{\mathbf{m}'}{2\pi} \text{Lap}\left[\frac{\cos(\theta - \alpha)}{r}\right] = \pi M_2' \cos \alpha \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) = -2\omega \quad (105)$$

Daquí:

$$\vec{\omega} = -\frac{\pi M_2'}{2} \cos \alpha \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) \vec{e}_z = -\frac{\mathbf{m}'}{2} \cos \alpha \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) \vec{e}_z \quad (106)$$

Consideremos a circulação de \vec{u} ao longo de um contorno de Jordan γ em torno do dipolo:

$$\oint_{\gamma} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{u} \cdot \vec{e}_z dx dy = \iint_S 2\vec{\omega} \cdot \vec{e}_z dx dy = -\frac{\mathbf{m}'}{2} \cos \alpha \iint_S \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy = 0$$

Logo, a circulação do campo de velocidade de um dipolo pontual de turbilhões ao longo de um contorno de Jordan que o envolva é nulo.

7-3. Dipolo fonte-sumidouro no ponto impróprio

Consideremos uma fonte e um sumidouro de igual intensidade sobre o eixo dos \mathbf{xx} , simetricamente dispostos em relação à origem, e tomemos o limite do potencial desta associação quando a distancia entre a fonte e o sumidouro tende para infinito. A fonte de intensidade \mathbf{D} está colocada em $\mathbf{Z} = -\mathbf{a}$ e o sumidouro de intensidade $-\mathbf{D}$ em $\mathbf{Z} = \mathbf{a}$. O potencial desta associação é:

$$W_a(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{D}}{2\pi} \ln\left(\frac{\mathbf{Z} + \mathbf{a}}{\mathbf{Z} - \mathbf{a}}\right) \quad (107)$$

Quando $\mathbf{a} \rightarrow \infty$ os pontos correspondentes da esfera de Riemman (fig.5) aproximam-se do pólo Norte da

esfera; no limite devemos encontrar aí um dipolo de imagem, que é a imagem sobre a esfera do dipolo de

momento \mathbf{M} situado no ponto impróprio de \mathbf{PC} . Escolhamos as coordenadas cartesianas ξ, η, ζ em \mathbf{R}^3 para o ponto genérico \mathbf{P} sobre a esfera de Riemman. Vamos centrar a nossa atenção no plano $\eta = 0$. Nesse plano a equação da circunferência é:

$$\xi^2 + \zeta(\zeta - 1) = 1 \quad (108)$$

com:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \quad (109)$$

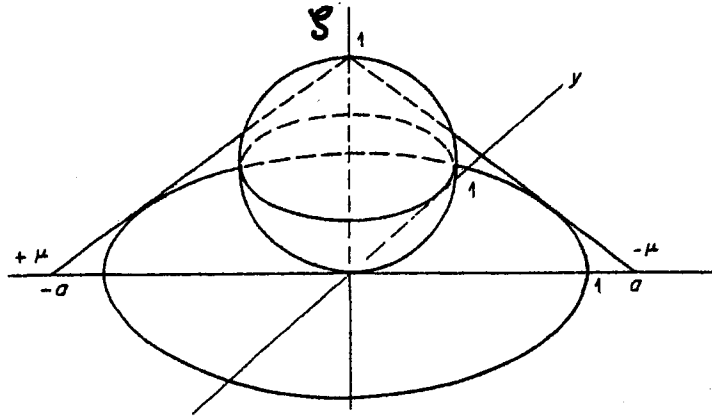


Fig.5

Tomando $x = \pm a$, $a \gg 1$, temos $\xi = \pm \frac{1}{a}$. Substituindo em (107) vem:

$$\begin{aligned} W_\xi(Z) &= \frac{D}{2\pi} \left\{ \ln\left(Z + \frac{1}{\xi}\right) - \ln\left(Z - \frac{1}{\xi}\right) \right\} = \frac{D}{2\pi} \left\{ \ln\left(Z + \frac{1}{\xi}\right) - \left[e^{i\pi} \left(\frac{1}{\xi} - Z \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{D}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\xi Z + 1}{\xi}\right) - \left[e^{i\pi} \left(\frac{1 - \xi Z}{\xi} \right) \right] \right\} = \frac{D}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) + \ln(\xi Z + 1) - i\pi - \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) - \ln(1 - \xi Z) \right\} = \\ &= \frac{D}{2\pi} [-i\pi + 1 + \xi Z - (1 - \xi Z)] = \frac{D}{2\pi} (-i\pi + 2\xi Z + O(\xi Z^3)) \end{aligned} \quad (110)$$

Vamos definir uma constante real:

$$U_0 = M_2 = \frac{1}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0} [\xi D(\xi)] \quad (111)$$

sendo o momento do dipolo definido pela relação já apresentada (91) e (72):

$$m = \lim_{\xi \rightarrow 0} [\xi D(\xi)] = \pi M_2 \quad (112)$$

De (110), (111) e (112) vem:

$$W(Z) = -i \frac{D}{2} + \frac{\xi D}{\pi} Z + \frac{D}{2\pi} O(\xi Z^3)$$

Passando ao limite quando $\xi \rightarrow 0$ vem:

$$W(Z) = M_2 Z - \frac{i}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} D(\xi)$$

Portanto vem, à parte uma constante aditiva:

$$W(Z) = M_2 Z \quad (113)$$

A equação (113) dá-nos o potencial complexo num escoamento uniforme paralelo ao eixo dos xx devido a um dipolo de momento M_2 situado no ponto impróprio. De (113) vem:

$$\zeta(Z) = u - iv = W'(Z) = M_2 = U_0$$

Como $\zeta(Z) = u = M_2 = U_0 \in \mathbf{R}$, vem $v = 0$; o escoamento faz-se segundo a direcção xx : sobre qualquer direcção paralela a este eixo o movimento do fluido é rectilíneo uniforme: um dipolo no infinito dá lugar a este movimento do fluido.

Voltemos à distribuição de Dirac de suporte no ponto impróprio $\delta\left(\frac{1}{Z}\right)$ definida pelas relações (49-3) e (49-4). Da equação (84) com $\alpha = 0$, vem:

$$\text{Lap}\left(\frac{1}{Z - Z_0}\right) = -2\pi\delta'(x - x_0)\delta(y - y_0) = -2\pi\frac{\partial}{\partial x}\delta(Z)$$

Efectuemos nesta expressão a inversão:

$$Z - Z_0 \rightarrow \frac{1}{Z - Z_0} \quad (114)$$

vindo:

$$\text{Lap}(Z - Z_0) = -2\pi\frac{\partial}{\partial x}\delta\left(\frac{1}{Z - Z_0}\right) \quad (115)$$

Esta igualdade será usada posteriormente.

7-4. Dipolo de turbilhões no ponto impróprio

O momento de um dipolo de turbilhões é:

$$M'_2 = \frac{1}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0} [\xi \Gamma(\xi)] \quad (116)$$

O momento de um dipolo fonte-sumidouro é, das relações (112) e de $D = -i\Gamma$:

$$M_2 = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon D(\varepsilon)] = \frac{1}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0} [-i\xi \Gamma(\xi)] = -\frac{i}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0} [\xi \Gamma(\xi)]$$

O momento do dipolo de turbilhões é:

$$M_2' = \frac{1}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0} [\xi \Gamma(\xi)] \quad (117)$$

Logo:

$$M_2 = -iM_2' \quad (118)$$

A equação do potencial complexo devido a um dipolo fonte-sumidouro é (113):

$$W(Z) = U_0 Z = M_2 Z$$

Obtém-se a equação do dipolo de turbilhões fazendo:

$$M'_2 = -iM_2 \Rightarrow M_2 = iM'_2 \quad (119)$$

Logo:

$$\forall M'_2 \in \mathbb{R} \quad W(Z) = iM'_2 Z \quad (120)$$

7-5. Quadripolo pontual fonte-sumidouro

Consideremos dois dipolos pontuais fonte-sumidouro de momentos $m e^{i\alpha}$ e $-m e^{i\alpha}$ (antiparalelos), colocados respectivamente em $Z = -\frac{\varepsilon}{2}$ e $Z = \frac{\varepsilon}{2}$. O potencial desta associação é:

$$W_{4,\varepsilon} = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{Z + \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{m}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{Z - \frac{\varepsilon}{2}} = -\frac{m e^{i\alpha}}{2\pi} \left[\frac{Z - \frac{\varepsilon}{2} - Z - \frac{\varepsilon}{2}}{Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right] = \frac{m(\varepsilon) e^{i\alpha}}{2\pi} \frac{\varepsilon}{Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

Logo:

$$W_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(\varepsilon)\varepsilon e^{i\alpha}}{2\pi} \frac{1}{Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon m(\varepsilon)] e^{i\alpha}}{2\pi Z^2}$$

Sabemos que (93):

$$m = \pi M_2$$

Logo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon m(\varepsilon)] = \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon M_2(\varepsilon)] = \pi M_4 \quad (121)$$

Então:

$$W_2 = -\frac{M_2}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z} \quad (122)$$

O momento do quadripolo é representável pelo tensor (se \vec{m}, \vec{M}_2 são vectores reais $\vec{\vec{M}}_4$ é um tensor de componentes reais):

$$\pi \vec{\vec{M}}_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \vec{e}_x \otimes \vec{m}(\varepsilon)] = \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \vec{e}_x \otimes \vec{M}_2(\varepsilon)] \quad (123)$$

Se necessitarmos de representar os momentos por vectores ou tensores complexos teremos:

$$\pi \vec{\vec{M}}_4^c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \vec{e}_x \otimes \vec{m}_c(\varepsilon)] = \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \vec{e}_x \otimes \vec{M}_2^c] = \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \vec{e}_x \otimes \vec{M}_2 e^{i\alpha}] \quad (124)$$

Logo:

$$W_4 = \frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z^2} \quad (125)$$

Da equação (29):

$$\text{Lap}W = \frac{\xi}{\rho} - 2i\omega = D - 2i\omega$$

com $\omega = 0$ vem, de (57) e de (58):

$$\text{Lap}W = D(x, y)$$

sendo, no caso de um dipolo fonte-sumidouro (83):

$$D(x, y) = -me^{i\alpha} \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

Este caso corresponde a (76):

$$W_2 = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_0} = -\frac{1}{2\pi} (\pi M_2) \frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_0} = -\frac{M_2}{2} \frac{e^{i\alpha}}{Z - Z_0} \quad (126)$$

Se $Z_0 = 0$ vem (89):

$$\text{Lap} W_2 = -m e^{i\alpha} \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) = -m e^{i\alpha} \delta'_x(x - x_0, y - y_0)$$

com $x_0 = y_0 = 0$ obtém-se a expressão referida:

$$\text{Lap} W_2 = -m e^{i\alpha} \delta'(x) \delta(y)$$

Vamos admitir que a constante M_2 é susceptível de variar com ε (método de variação das constantes) nas equações:

$$\text{Lap} W_2 \left\{ Z + \frac{\varepsilon}{2} \right\} = -m e^{i\alpha} \delta'_x \left(Z + \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (127)$$

$$\text{Lap} W_2 \left\{ Z - \frac{\varepsilon}{2} \right\} = -m e^{i\alpha} \delta'_x \left(Z - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (128)$$

Subtraindo membro a membro (127) e (128) vem:

$$\text{Lap} \left\{ W_2 \left(Z + \frac{\varepsilon}{2} \right) - W_2 \left(Z - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\} = -m e^{i\alpha} \left[\delta' \left(Z + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \delta' \left(Z - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \quad (129)$$

Toma-se o limite de ambos os membros quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e atende-se a que é:

$$W_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[W_2 \left(Z + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\alpha} \right) + W_2 \left(Z - \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\alpha} \right) \right] \quad (130)$$

como vamos provar. De facto, se admitirmos que o potencial complexo de qualquer multipolo é da forma:

$$W(Z; \alpha) = e^{i\alpha} f(Z) \quad (131)$$

como sucede com os dipolos, o potencial de uma associação de dois dipolos, um de momento orientado

segundo o vector $\vec{n} = \cos\alpha\vec{e}_x + \text{sen}\alpha\vec{e}_y$, e ao qual corresponde um potencial dado por (77) e o outro de momento orientado segundo $\vec{n}' = \cos(\alpha + \pi)\vec{e}_x + \text{sen}(\alpha + \pi)\vec{e}_y = -\cos\alpha\vec{e}_x - \text{sen}\alpha\vec{e}_y = -\vec{n}$, cujo potencial é (os momentos dos dois dipolos são antiparalelos):

$$W(Z; \alpha + \pi) = e^{i\alpha} f(Z) e^{i\alpha} = -W(Z; \alpha) \quad (132)$$

então, sendo $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\beta}$:

$$W_2\left(Z - \frac{\varepsilon}{2} e^{i(\alpha+\pi)}\right) = -W_2\left(Z - \frac{\varepsilon}{2} e^{i\alpha}\right) \quad (132')$$

A relação (130) pode escrever-se na forma:

$$\begin{aligned} W_4(Z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[W_2\left(Z + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\alpha}\right) + W_2\left(Z - \frac{\varepsilon}{2} e^{i(\alpha+\pi)}\right) \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[W_2\left(Z + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\alpha}\right) - W_2\left(Z - \frac{\varepsilon}{2} e^{i\alpha}\right) \right] \end{aligned}$$

Da expressão (92), com $Z_0 = 0$, que é:

$$W_2 = \frac{M_2}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z^2}$$

vem:

$$\begin{aligned} W_4 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{M_2}{2} e^{i\alpha} \left(\frac{1}{\left(Z + \frac{\varepsilon}{2}\right)} - \frac{1}{\left(Z - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \right) \right] = -\frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_2(\varepsilon)}{2} e^{i\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{Z - \frac{\varepsilon}{2} - Z - \frac{\varepsilon}{2}}{Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} e^{i\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[M_2(\varepsilon) \frac{-\varepsilon}{Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right] = e^{i\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon M_2(\varepsilon)] \cdot \frac{1}{Z^2} = \frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z^2} = -\frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{Z} \right) \end{aligned}$$

Logo:

$$W_4(Z) = \frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z^2} = -\frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{Z} \right) \quad (133)$$

obtivemos as expressões que pretendíamos.

Calculemos agora:

$$\text{Lap}W_4 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon m(\varepsilon))e^{i\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta' \left(Z + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \delta' \left(Z - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\varepsilon} = -\pi M_4 e^{i\alpha} \delta_{xx}''(Z) \quad (134)$$

sendo:

$$\forall M_2 \in \mathbb{R}, M_4 \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}; \quad \pi M_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon m(\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\pi [\varepsilon M_2(\varepsilon)]) \quad (135)$$

Generalizando para um multipolo de ordem 2^n vem:

$$\text{Lap}W_{2^n}(Z) = -M_{2^n} e^{i\alpha} \pi \delta_{x \dots x}^{(n)}(Z) \quad (136)$$

Para $n=2$ vem a expressão (134):

$$\text{Lap}W_4 = -M_4 e^{i\alpha} \pi \delta_{xx}^{(2)}(Z)$$

Vamos determinar uma relação de recorrência para os momentos: Seja M_m o momento de ordem $m = 2^n$. Então:

$$M_{2^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon M_{2^{n-1}}(\varepsilon)] \quad (137)$$

Logo:

$$M_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon M_2(\varepsilon)]$$

$$M_8 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon M_4(\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^2 M_2(\varepsilon)]$$

$$M_{16} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon M_8(\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^3 M_2(\varepsilon)]$$

Logo:

$$M_{2^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^{n-1} M_2(\varepsilon)] \quad (138)$$

Logo de (133) vem:

$$W_4 \left(Z + \frac{\varepsilon}{2} \right) - W_4 \left(Z - \frac{\varepsilon}{2} \right) = -\frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \left(\frac{1}{\left(Z + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2} - \frac{1}{\left(Z - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \left[\frac{Z^2 - \varepsilon Z + \frac{\varepsilon^2}{4} - Z^2 - \varepsilon Z - \frac{\varepsilon^2}{4}}{\left(Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2} \right] = \\
&= -\frac{M_4}{2} e^{i\alpha} \left(\frac{-2\varepsilon Z}{\left(Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2} \right) = -\frac{[\varepsilon M_4(\varepsilon)]}{2} e^{i\alpha} \left(\frac{-2Z}{\left(Z^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2} \right) \rightarrow -\frac{M_8}{2} e^{i\alpha} \left(\frac{-2}{Z^3} \right) = \frac{M_8}{2} e^{i\alpha} \frac{\partial^3}{\partial Z^3} \left(\frac{1}{Z} \right)
\end{aligned}$$

Logo:

$$W_8 = -\frac{M_8}{2} e^{i\alpha} \left(-\frac{2}{Z^3} \right) = \frac{M_8}{2} e^{i\alpha} \frac{\partial^3}{\partial Z^3} \left(\frac{1}{Z} \right) \quad (139)$$

Atendendo a que é:

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial Z^{n+1}} \left(\frac{1}{Z} \right) = -(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \dots (-n) Z^{-n-1} \quad (140)$$

vem:

$$\frac{\partial^3}{\partial Z^3} \left(\frac{1}{Z} \right) = -2Z^{-3} \quad (141)$$

Portanto:

$$W_{2^3} = \frac{(-1)^3}{2} M_8 e^{i\alpha} \left(\frac{-2}{Z^3} \right) = -\frac{(-1)^3}{2} M_{2^3} e^{i\alpha} \frac{-1 \cdot (-2)}{Z^3} \quad (142)$$

Vimos que:

$$W_2(Z) = \frac{(-1)}{2} M_2 \frac{1}{Z} \quad (n=1)$$

$$W_4(Z) = \frac{(-1)^2}{2} M_4 \frac{1!}{Z^2} \quad (n=2)$$

$$W_8(Z) = \frac{(-1)^3}{2} M_8 e^{i\alpha} \frac{\partial^3}{\partial Z^3} \left(\frac{1}{Z} \right) = \frac{(-1)^3}{2} M_{2^3} e^{i\alpha} \left(-\frac{2!}{Z^3} \right) \quad (n=3)$$

Generalizando:

$$W_{2^n}(Z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} M_{2^n} e^{i\alpha} \frac{(n-1)!}{Z^n} \quad (143)$$

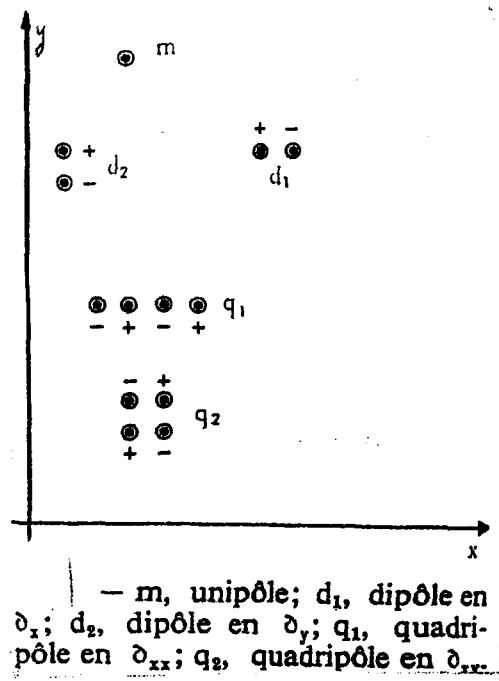


Fig.6

7-6. Multipolos no infinito

Obtêm-se das expressões dos multipolos em Z_0 , pela inversão $Z - Z_0 \rightarrow 1/Z - Z_0$ na expressão dos multipolos em Z_0 . Vimos que o potencial de um multipolo em Z_0 é dada, a menos de uma translação, por (143):

$$W_{2^n}(Z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{i\alpha} \frac{(n-1)!}{(Z - Z_0)^n}$$

satisfazendo a (136):

$$\text{Lap} W_{2^n}(Z) = -M_{2^n} \pi \delta_{x \dots x}^{(n)}(Z - Z_0)$$

Se o multipolo estiver no infinito:

$$W_{2^n}(\infty; Z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{i\alpha} (n-1)! (Z - Z_0)^n \tag{144}$$

$$\text{Lap} W_{2^n}(\infty; Z) = -M_{2^n} \pi \delta_{x \dots x}^{(n)}\left(\frac{1}{Z - Z_0}\right) \tag{145}$$

7-7. Escoamento num ângulo ou em torno de um ângulo

Sabemos que qualquer função da forma:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{C} : W(Z) = a_{-n} Z^{-n} \tag{146}$$

em particular com :

$$a_{-n} = \frac{(-1)^n}{2} e^{i\alpha} M_{2^n} \quad (147)$$

define para $n \geq 1$ um escoamento no ângulo $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{n}$ de lados materializados por paredes sólidas (Fig.7):

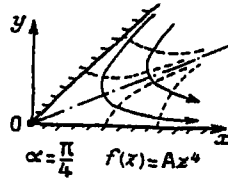


Fig.7

A transformação inversa de (146) é:

$$W(Z) = \left| \frac{Z}{a_{-n}} \right|^{-1/n} e^{-i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k=0,1,2,3,\dots,n-1) \quad (148)$$

e aplica:

$$\left[2k\pi, 2(k+1)\frac{\pi}{n} \right] \rightarrow [0, 2\pi[$$

$W(Z)$ é uma função analítica global com n ramos holomorfos, representável como função uniforme sobre

uma superfície de Riemann com n folhas, tendo em $Z=0$ um ponto de ramificação.

Se $n > 1$ a velocidade tem em $Z=0$ (vértice do ângulo) um ponto de estagnação. A expressão (148)

define, se for $0 \leq n < 1$, um escoamento na região $0 \leq \theta < \frac{\pi}{n}$, que é o complemento para 2π de

um ângulo de abertura $\delta = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\pi$ cujos lados são as paredes. Portanto:

- O potencial complexo de um escoamento de um fluido incompressível sem viscosidade num domínio limitado por um ângulo agudo $0 \leq \theta < \frac{\pi}{n}$ tem no vértice deste um ponto de ramificação; a correspondente velocidade complexa tem aí um pólo de ordem n .

Este escoamento é equivalente ao que seria devido, em $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, a um multipolo de ordem 2^n colocado no infinito.

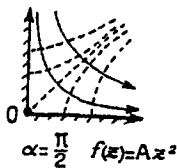


Fig.8

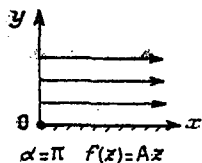


Fig.9

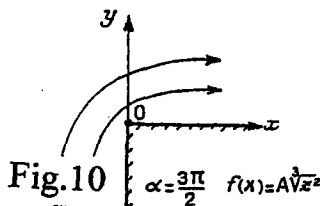


Fig.10

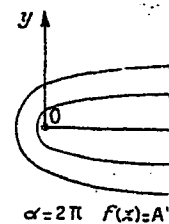


Fig.11

Écoulement satisfaisant à la fonction : $f(z) = \frac{a}{n} z^n$ avec $n = \frac{\pi}{\alpha}$.

7-8. Transformações conformes

Toda a função complexa de variável complexa, $W = f(Z)$, que conserva em cada ponto a razão entre as

distâncias é definida por uma função analítica. \bar{W} é igualmente definida por uma função analítica \bar{f} , e as duas funções f e \bar{f} , além de conservarem as distâncias, conservam o módulo dos ângulos mas não necessariamente o sentido de crescimento destes. Tais funções dizem-se *isogonais em sentido estrito*. Se conservarem o sentido dos ângulos dizem-se *isogonais*. Pode provar-se que:

- Toda a aplicação isogonal é definida por uma função analítica.

Teorema da isogonalidade: Uma função analítica $W = f(Z)$ é isogonal em qualquer ponto $Z = a$ onde seja $f'(a) \neq 0$.

Portanto, se C_1 e C_2 são duas curvas do plano dos zz , passando por $Z = a$, diferenciáveis neste ponto e formando aí um ângulo θ , as curvas imagens por f no plano dos ww formam no ponto $f(a)$ um ângulo θ tanto em módulo como em sentido (isto é em valor algébrico).

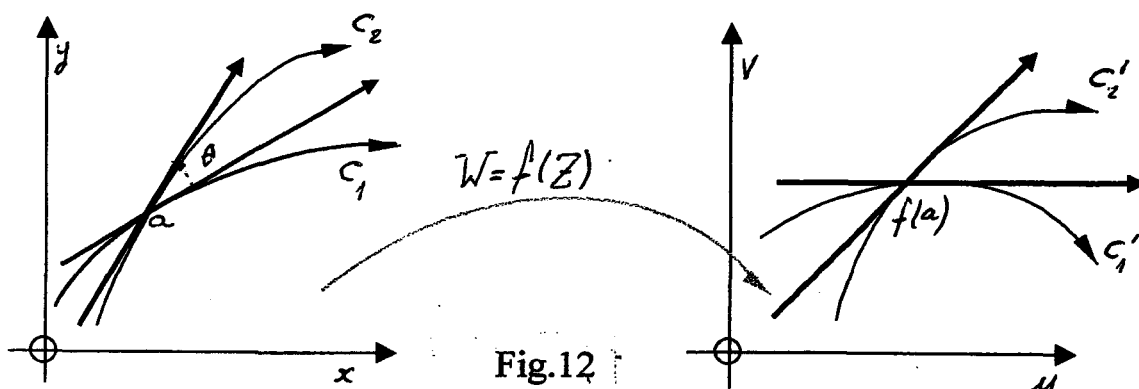


Fig.12

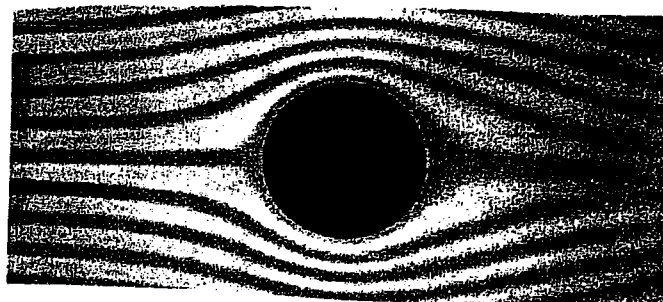
Definição: O teorema anterior implica que $f(Z)$, regular em $Z = a$ e com $f'(a) \neq 0$, define uma aplicação conforme numa vizinhança de $Z = a$.

Numa vizinhança de a suficientemente pequena o objecto Z e a imagem $f(Z)$ são semelhantes, pois no ponto $Z = a$, f além de conservar os ângulos conserva a razão dos comprimentos.

Prova-se que:

Proposição: Toda a aplicação conforme definida num domínio é aí expressa por uma função analítica.

Proposição: Toda a aplicação conforme definida num domínio é aí expressa por uma função analítica.



Visualização do escoamento em tórno de cilindro circular,

Fig. 13

7-9. Funções lineares inteiras.

Consideremos as funções da forma $W = aZ + b$. Entre elas há a distinguir várias classes:

1. $W = Z + b$. A interpretação geométrica desta transformação, se Z e W estiverem no mesmo plano, é de

uma translação. De facto, a cada número complexo pode fazer-se corresponder um vector, pelo que a soma de números complexos corresponde uma soma de vectores e reciprocamente. Portanto, obtém-se assim a expressão de um deslocamento paralelo dado em grandeza, direcção e sentido pelo vector \vec{b} . Cada domínio G do plano é congruente com o seu transformado $f(G)$, o qual pode obter-se de G por um deslocamento paralelo (translação).

2. $W = e^{i\varphi}Z$. Representa uma rotação de um ângulo φ e centro em $Z = 0$.

3. $W = rZ$. Representa uma semelhança (homotetia directa).

A transformação mais geral, $W = aZ + b$, pode ser obtida mediante estas três classes de transformações.

Para isso basta pôr $a = re^{i\varphi}$, $Z_1 = rZ$, $Z_2 = e^{i\varphi}$, $W = aZ + b$. Pode visualizar-se a transformação

$W = aZ + b$ fazendo:

$$W - b = re^{i\varphi}(Z - a)$$

Portanto, a transformação linear inteira mais geral ($W = aZ + b$) representa uma translação ($\varphi = 0$),

uma semelhança (homotetia directa) ($r > 1, \varphi = 0$), e uma rotação ($r = 1, \varphi \neq 0$).

7-10. A função $W = 1/Z$

Representa, como se viu na expressão (76') o potencial de um dipolo:

$$W_2(Z) = -\frac{M_2}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{Z - Z_0}$$

fazendo $M_2 = -2, \alpha = 0, Z_0 = 0$ nesta expressão:

$$W_2(Z) = \frac{1}{Z}$$

Para estudar esta função vamos introduzir coordenadas polares e escrever $Z = re^{i\varphi}$, $W = \rho e^{i\theta}$. A função

$W = 1/Z$ transforma-se em $\rho = 1/r, \theta = -\varphi$. Os pontos do plano para os quais é $r = 1$ são os pontos da

circunferência de centro em $Z = 0$ e raio $r = 1$. Se Z e W se situam sobre o mesmo plano, esta circunferência transforma-se em si mesma: ao ponto $r = 1, \varphi = \varphi_0$ corresponde o ponto $\rho = 1, \theta = -\varphi_0$. Dito de outro modo: ao ponto $x + iy$ ($x^2 + y^2 = 1$) a função $W = 1/Z$ faz corresponder o ponto $x - iy$ obtido por simetria em relação ao eixo real. Os ângulos não são respeitados, pois embora sejam conservados os seus módulos não o é a sua orientação.

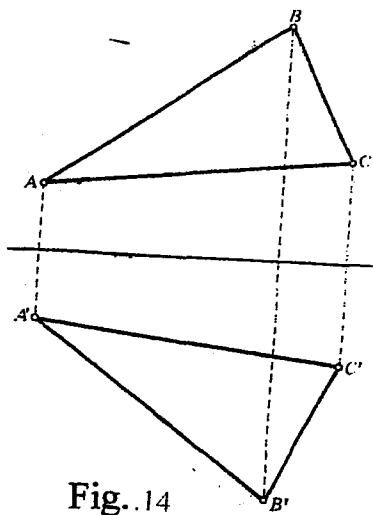


Fig. 14

A função $W = 1/Z$ é bicontínua (bijetiva, contínua, e com inversa contínua) de $\mathbb{C} - \{0\}$ sobre $\mathbb{C} - \{0\}$.

Esta função pode decompor-se em duas transformações aplicadas consecutivamente:

$$T_1 \equiv \{r_1 = r; \theta_1 = -\varphi\} \quad \text{e} \quad T_2 \equiv \{\rho = r_1^{-1}; \theta = \theta_1\}$$

T_1 é a simetria em relação ao eixo real: conserva as distâncias e inverte os ângulos; T_2 é a inversão em relação à circunferência unidade (transformação por raios recíprocos em relação à circunferência unidade ou simetria em relação à circunferência unitária): transforma o raio no seu inverso. A transformação T_2 deve conservar a razão das distâncias e inverter os ângulos, pois a composição T_1T_2 (ou T_2T_1) deve deixar invariante a razão das distâncias e conservar o sentido dos ângulos. Além disso, T_2 faz corresponder a todo

o ponto com $r_1 < 1$ (ponto interior ao círculo unidade) um ponto com $\rho > 1$ (ponto exterior a esse círculo). A circunferência unitária é transformada por T_2 em si mesma (daqui chamar-se simetria em relação à circunferência unidade).

8. Interpretação física da série de Laurent

Toda a função $W(Z)$ holomorfa no interior $\text{Int}D$ de uma coroa circular D de centro na origem é representável em $\text{Int}D$ pela série de Laurent:

$$W(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n Z^n \quad (149)$$

Do exposto pode concluir-se que, toda a função holomorfa em $\text{Int}D$ é o potencial complexo de um escoamento plano de um fluido incompressível, sem viscosidade, resultante da sobreposição de um número finito ou infinito de multipolos situados na origem ($n < 0$) ou no ponto impróprio ($n > 0$). Da teoria das funções complexas de variável complexa sabemos que:

- Se os termos de expoente negativo da série de Laurent (multipolos na origem) são todos nulos, $Z = 0$ é
- uma singularidade removível de $W(Z)$; se a série tem termos não nulos de expoente negativo, $Z = 0$ será um pólo ou uma singularidade essencial conforme o número destes termos for finito ou infinito.

Por exemplo, a função $W = \exp(1/Z)$ tem uma singularidade essencial em $Z = 0$, havendo aí uma infinidade de multipolos de todas as ordens possíveis.

Consideremos agora o transformado $\tilde{W}(Z)$ por inversão no plano complexo do potencial $W(Z)$ de uma fonte na origem. Da expressão (50):

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln Z$$

vem:

$$\tilde{W}(Z) = W\left(\frac{1}{Z}\right) = -\frac{D}{2\pi} \ln Z = -W(Z) \quad (150)$$

A inversão $Z \rightarrow 1/Z$ faz corresponder a cada fonte na origem um sumidouro de igual débito em $Z = \infty$ estando a fonte e o sumidouro nos dois pontos críticos ($Z = 0, Z = \infty$) da função logarítmica. Das igualdades (48) e (49) que conduzem a:

$$\mathbf{Lap} \ln Z = -2\pi\delta(Z) \quad (150')$$

vem, por inversão em \mathcal{C} :

$$\mathbf{Lap} \ln\left(\frac{1}{Z}\right) = -2\pi\delta\left(\frac{1}{Z}\right) \quad (151)$$

Mas:

$$\mathbf{Lap} \ln\left(\frac{1}{Z}\right) = -\mathbf{Lap} \ln Z = 2\pi\delta(Z) \quad (152)$$

Logo, igualando ambos os membros de (151) e de (152) vem:

$$\delta(Z) = \delta\left(\frac{1}{Z}\right) \quad (153)$$

A igualdade anterior só é possível em $Z \neq 0, \infty$ pois nesses pontos é:

$$\delta(0) = +\infty \quad ; \quad \delta\left(\frac{1}{0}\right) = \delta(+\infty) = 0$$

Logo:

$$\delta(0) - \delta\left(\frac{1}{0}\right) = +\infty \Rightarrow \delta(0) \neq \delta\left(\frac{1}{0}\right)$$

Além disso:

$$\delta(+\infty) = 0 ;$$

$$\delta\left(\frac{1}{+\infty}\right) = \delta(0) = +\infty$$

Logo:

$$\delta(+\infty) - \delta\left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

Tiramos daqui a mesma conclusão que para $\delta(0)$ e $\delta\left(\frac{1}{0}\right)$

Concluimos que a igualdade:

$$\delta(Z) - \delta\left(\frac{1}{Z}\right) = 0$$

só pode ser verdadeira para $Z \neq 0, \infty$ sendo, se for $Z = 0, \infty$:

$$\delta(Z) - \delta\left(\frac{1}{Z}\right) = \infty \quad (154)$$

portanto a expressão de **Lap ln Z** em **PC** é:

$$\mathbf{Lap \ln Z} = -2\pi \left[\delta(Z) - \delta\left(\frac{1}{Z}\right) \right] = \begin{cases} 0 & Z \neq 0, \infty \\ +\infty & Z = 0, \infty \end{cases}$$

Atendendo às propriedades de definição de $\delta\left(\frac{1}{Z}\right)$, vem:

$$\iint_{PC} \mathbf{Lap \ln Z} dS = 0$$

Concluindo:

$$\mathbf{Lap \ln Z} = -2\pi \left[\delta(Z) - \delta\left(\frac{1}{Z}\right) \right] \quad (155)$$

A expressão anterior é, portanto, a generalização de (150') a **PC**. Vem também:

$$\mathbf{Lap W} = \mathbf{D}_0 \left[\delta(Z) - \delta\left(\frac{1}{Z}\right) \right] \quad (156)$$

Fazendo $\mathbf{D}_0 = -i\Gamma_0$ em (156) vem:

do momento angular violada em \mathcal{C} pela introdução de turbilhões é restabelecida em \mathcal{PC} , pois cada turbilhão em \mathcal{C} implica a existência de um turbilhão da mesma intensidade no ponto impróprio $\infty \in \mathcal{PC}$. Vimos (Cap.IV) que os turbilhões eram equivalentes a correntes eléctricas ($\Gamma = \mu_0 \mathbf{I}$) normais a \mathcal{C} sendo, portanto, conservada em $\mathcal{PC} \times \mathbf{R}$ a intensidade eléctrica total ($\mathcal{PC} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$).

9. Aplicação das conclusões anteriores ao cálculo dos Laplacianos de alguns potenciais complexos

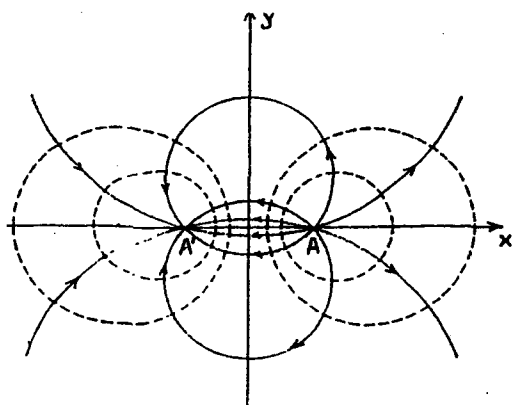
Comecemos por considerar o escoamento devido a uma fonte na presença de uma parede plana. O escoamento é definido pelo potencial :

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln(Z^2 - a^2) \quad (158)$$

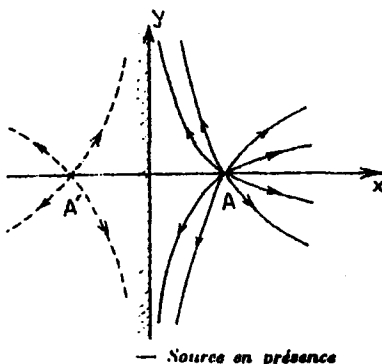
que corresponde à velocidade complexa :

$$\zeta(Z) = \frac{D}{\pi} \left(\frac{Z}{Z^2 - a^2} \right) \quad (159)$$

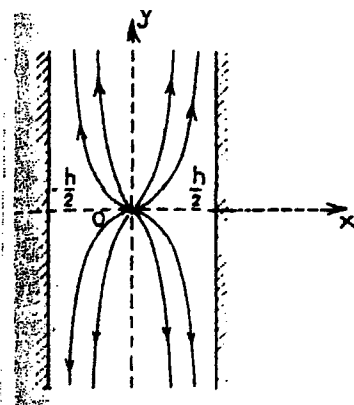
Estas expressões representam a sobreposição de duas fontes de igual intensidade colocadas nos pontos $Z = \pm a \in \mathcal{C}$ (Fig.15):



— Source et puits de même débit. Fig. 15



— Source en présence d'une paroi plane. Fig. 16



— Source entre deux parois. Fig. 17

Vamos ver que Oy é uma linha de corrente:

$$Oy \cong i\mathbf{R} \cong \left\{ Z = x + iy = |y| e^{\pm i \frac{\pi}{2}}; y \in \mathbf{R} \right\} \quad (160)$$

Vamos substituir (160) em (158) e atender a que é:

$$a = |a| e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$$

vindo:

$$W(Z; x = a) = \frac{D}{2\pi} \left\{ \ln \left[|y|^2 - |a|^2 \right] \pm i \frac{\pi}{2} \right\} \quad (161)$$

Vamos ver que Oy é uma linha de corrente:

$$Oy \cong iR \equiv \left\{ Z = x + iy = |y|e^{\pm i\frac{\pi}{2}}; y \in R \right\} \quad (160)$$

Vamos substituir (160) em (158) e atender a que é:

$$a = |a|e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

vindo:

$$W(Z; x = a) = \frac{D}{2\pi} \left\{ \ln|y|^2 - |a|^2 \right\} \pm i\frac{\pi}{2} \quad (161)$$

Logo:

$$\varphi(x = a, y) = \frac{D}{2\pi} \ln(|y|^2 - |a|^2) \quad (162-1) \quad \psi(x = a, y) = \pm \frac{D}{4} \quad (162-2)$$

Sobre a parede é $\psi = C^{te}$, pelo que esta é de facto uma linha de corrente. O potencial (159) define, na região $x > 0$, o escoamento de uma fonte em presença de uma parede plana: a imagem de uma fonte em relação a uma recta é uma fonte do mesmo débito no ponto simétrico em relação a ela.

Consideremos o escoamento de potencial:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln \operatorname{sen} \left(\frac{\pi Z}{h} \right) \quad (163)$$

A velocidade complexa correspondente é:

$$\zeta(Z) = \frac{D}{2h} \cot g \left(\frac{\pi Z}{h} \right) \quad (164)$$

$W(Z)$ é uma função analítica excepto em $Z = nh$ com n inteiro. Na vizinhança destes pontos, pondo $Z = nh + Z'$, vem:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{Z'}{h} \right) \pi \right] \approx \frac{D}{2\pi} \ln \left(\frac{\pi Z'}{h} \right) = \frac{D}{2\pi} \left[\ln Z' + \ln \left(\frac{\pi}{h} \right) \right] \approx \frac{D}{2\pi} \ln Z' + \frac{D}{2\pi} \ln \left(\frac{\pi}{h} \right)$$

A última parcela da soma é uma constante aditiva sem relevância física. A função $W(Z)$ anterior representa uma fonte no ponto $Z = nh + Z'$. O potencial devido ao conjunto de todas as fontes obtidas para os vários $n \in Z$ é:

$$W_1(Z) = \frac{D}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln(Z - nh) \quad (165)$$

Sabemos de (150') que:

$$\operatorname{Lap} \ln(Z - nh) = -2\pi\delta(Z - nh) \quad (166)$$

Logo:

$$\text{Lap}W_1(Z) = -D \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln(Z - nh) = D \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(Z - nh)$$

Tomando $W = W_1$ vem:

$$\text{Lap}W(Z) = \frac{D}{2\pi} \text{Lap} \ln \text{sen} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi(Z' + nh)}{h} = D \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(Z - nh)$$

Logo em PC :

$$\text{Lap}W(Z) = D \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\delta(Z - nh) - \delta\left(\frac{1}{Z - nh}\right) \right] \quad (167)$$

Partimos aqui do pressuposto de que a geometria (das superfícies de Riemman das funções analíticas globais que representam o potencial) é determinada ou condicionada pela distribuição de matéria e campos existente (fontes, sumidouros, turbilhões e multipolos) presentes. É a ideia de fundo da Relatividade Generalizada na qual é a distribuição de matéria e campos, através do tensor de energia-momento, que determina a curvatura do espaço-tempo.

10. Holomorfia e incompressibilidade

É possível provar que a derivada de uma função holomorfa ou da sua conjugada é uma função holomorfa.

Seja $\zeta(Z) = u - iv$ a velocidade complexa de potencial $W(Z)$, vindo então:

$$\zeta(Z) = \frac{dW}{dZ}$$

Seja $W(Z) = \phi(Z) + i\psi(Z)$ holomorfa. As condições de holomorfia são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Logo pode demonstrar-se que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\forall \phi, \psi \in C^{(\infty)} \quad W'(Z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \{$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Analogamente se provava que $\text{Lap}\psi = 0$.

Como é (relações (7) e (23)):

$$\text{Lap}\phi = \frac{\xi}{\rho}; \text{Lap}\psi = -2\omega$$

concluimos que o potencial da velocidade é harmónico, e atendendo ao facto de ser $\text{div}\vec{u} = \text{Lap}\phi = 0$

concluimos que o fluido é incompressível. Neste caso o escoamento não tem vorticidade por a função de corrente ser também harmónica.

11. Associação de uma fonte ou sumidouro com um turbilhão

O potencial desta associação é:

$$W(Z) = \frac{D - i\Gamma}{2\pi} \ln(Z - Z_0) \quad (168)$$

As respectivas linhas de corrente são espiraladas e o ponto $Z = Z_0$ é um ponto espiral.

*Notas complementares sobre topologia**

** Estas notas não são da responsabilidade do autor e destinam-se a um esclarecimento mais completo do leitor.*

1. Definição de espaços topológicos

Seja X um conjunto não vazio. Uma classe Γ de subconjuntos de X é uma topologia sobre X se, e só se satisfizer aos seguintes axiomas:

[O1] X e ϕ pertencem a Γ ;

[O2] A união de quaisquer conjuntos de Γ pertence a Γ ;

[O3] A intersecção de dois quaisquer conjuntos de Γ pertence a Γ .

Os elementos da classe $\Gamma \in X$ são chamados conjuntos abertos de X, ou simplesmente conjuntos abertos, e o par (X, Γ) é chamado um espaço topológico.

Como veremos mais adiante, chama-se conjunto fechado ao complementar de um conjunto aberto.

Os axiomas [O1], [O2], [O3] são equivalentes aos seguintes dois axiomas:

[O1*] A união de qualquer número de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

[O3] A intersecção de dois quaisquer conjuntos de Γ pertence a Γ .

Os elementos da classe $\Gamma \in X$ são chamados conjuntos abertos de X , ou simplesmente conjuntos abertos, e o par (X, Γ) é chamado um espaço topológico.

Como veremos mais adiante, chama-se conjunto fechado ao complementar de um conjunto aberto.

Os axiomas [O1], [O2], [O3] são equivalentes aos seguintes dois axiomas:

[O1*] A união de qualquer número de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

[O2*] A intersecção de qualquer número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

[O1*] implica que $\emptyset \in \Gamma$ por ser complementar de X que por hipótese pertence a Γ ; X pertence também a Γ por ser o complementar do conjunto de X :

a) $\cup \{G \in \emptyset \in \Gamma\} = \emptyset$. Significa que $\emptyset \in \Gamma$ pois uma união vazia de qualquer número de conjuntos é um conjunto vazio.

b) $\cap \{G \in \emptyset \in \Gamma\} = X$. Significa que $X \in \Gamma$, pois uma intersecção vazia de conjuntos de X pertence a X ou dito de outro modo, uma intersecção vazia de conjuntos de X é o próprio X .

Além disso, prova-se que:

Teorema: Seja $\{\Gamma_i : i \in I\}$ uma colecção qualquer de topologias sobre um conjunto X . Então a intersecção

$\cap_i \Gamma_i$ é também uma topologia sobre X .

2. Conjuntos fechados

Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $A \subseteq X$ diz-se *fechado* se e só se for o complementar de um conjunto aberto.

Fecho de um conjunto A , \bar{A} é a união de A com o conjunto dos seus pontos de acumulação A' ou do conjunto com a sua fronteira:

$$\bar{A} = A \cup A' = A \cup \partial A$$

Pode definir-se o *fecho de um conjunto A de X* como a intersecção de todos os conjuntos fechados de X que contêm A .

Se $\{F_i : i \in I\}$ é a classe de todos os conjuntos fechados de $X \supseteq A$ então $\bar{A} = \bigcap_i F_i$

.3. Subspaços e topologias relativas

Seja A um subconjunto não vazio de um espaço topológico (X, Γ) . A classe Γ_A de todas as intersecções de A com subconjuntos abertos de uma classe Γ_A constituída por conjuntos abertos de X é uma topologia sobre A, que é chamada *topologia relativa sobre A* ou uma *relativização da topologia Γ a A*, e o espaço topológico (A, Γ_A) é dito *um subspaço topológico de (X, Γ)* . Por outras palavras, um subconjunto $H \subseteq A$ é um conjunto aberto relativo de (A, Γ_A) , se e só se existe um subconjunto G, aberto segundo a topologia de (X, Γ) tal que :

$$H = G \cap A$$

Consideremos como um exemplo a topologia :

$$\Gamma = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

sobre $X = \{a, b, c, d, e\}$, e o subconjunto $A = \{a, d, e\} \subset X$. Observemos que :

$$\begin{aligned} X \cap A &= A; & \{a\} \cap A &= \{a\} & \{a, c, d\} \cap A &= \{a, d\} \\ \phi \cap A &= \phi & \{c, d\} \cap A &= \{d\} & \{b, c, d, e\} \cap A &= \{d, e\} \end{aligned}$$

Portanto a relativização de Γ a A é:

$$\Gamma_A = \{A, \phi, \{a\}, \{d\}, \{d, e\}\}$$

4. Definições equivalentes de topologias

Existem métodos alternativos de se poder definir topologias num conjunto. Com essa finalidade vamos agora usar as noções primitivas de *vizinhança de um ponto*, e *de fecho de um conjunto*.

Teorema: Seja X um conjunto não vazio e associemos a cada ponto $p \in X$ uma classe \hat{A}_p de subconjuntos de X satisfazendo aos seguintes axiomas:

[A1] \hat{A}_p é não vazia e p pertence a cada um dos membros de \hat{A}_p .

[A2] A intersecção de dois quaisquer elementos de \hat{A}_p pertence a \hat{A}_p .

[A3] Todos os sobreconjuntos de um elemento de \hat{A}_p pertencem a \hat{A}_p .

[A4] Qualquer elemento $N \in \hat{A}_p$ é um sobreconjunto de um elemento $G \in \hat{A}_p$ tal que para qualquer $p \in X$, $G \in \hat{A}_p$ com qualquer.

Então existe uma e uma só topologia Γ sobre X tal que \hat{A}_p é um sistema de vizinhanças de $p \in X$ contido em Γ , ($\hat{A}_p \subseteq \Gamma$). Neste caso \hat{A}_p diz-se **um sistema fundamental de vizinhanças de p** .

Chama-se **sistema total de vizinhanças de p** ($p \in (X, \Gamma)$) ao conjunto de todos os conjuntos abertos de (X, Γ) contendo p ; o sistema total de vizinhanças de p é fechado se os conjuntos que contém p são o fecho das vizinhanças (abertas) de (X, Γ) .

5. Bases e sub-bases

5.1. Base para uma topologia

Seja (X, Γ) um espaço topológico. Uma classe \hat{B} de conjuntos abertos de X ($\hat{B} \subseteq \Gamma$) é uma base para uma topologia em X se e só se:

(i) Todos os conjuntos abertos $G \in \Gamma$ são uma união de elementos de \hat{B} ,

Equivalentemente, $\hat{B} \subset \Gamma$ é uma base para Γ se e só se:

(ii) para qualquer ponto $p \in X$ e a um conjunto aberto G , ($p \in G \in X \cap \Gamma$) existe $B \subseteq \hat{B}$ tal que

$p \in B \subset G$.

Exemplo 1: Os rectângulos abertos no plano R^2 , limitados por lados paralelos aos eixos dos xx e dos yy , respectivamente, formam uma base \hat{B} para a topologia usual em R^2 . Seja $G \subseteq R^2$ um conjunto

aberto de R^2 e um ponto $p \in G \subseteq R^2$. Então existe uma bola aberta (neste caso um disco aberto) de centro em p e raio ε , $B_\varepsilon(p)$ cujos vértices estão situados na fronteira dessa bola, a qual satisfaz a:
 $p \in B \subset B_\varepsilon(p) \subset G \in \Gamma$. Portanto \hat{B} satisfaz a (ii).

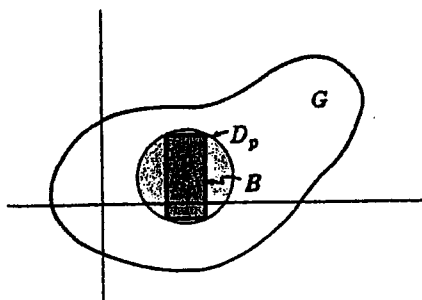


Fig. 18

Exemplo 2. Consideremos um espaço discreto (X, \tilde{D}) . Chama-se espaço discreto a todo o espaço topológico no qual todos os conjuntos são simultaneamente abertos e fechados. Então a classe $\hat{B} = \{\{p\} : p \in X\}$, de todos os subconjuntos de X é uma base para a topologia discreta \tilde{D} sobre X . Cada conjunto elementar $\{p\}$ é um aberto dado que para qualquer $A \subseteq X$, $A \cap \Gamma = A$. Além disso qualquer conjunto é uma união de conjuntos elementares. Qualquer outra classe \hat{B}^* de conjuntos de X é uma base para \tilde{D} se e só se for uma super-classe de \hat{B} , isto é :

$$\hat{B}^* \supset \hat{B}$$

5.2. Topologias geradas por classes de conjuntos.

Seja \hat{A} qualquer classe de subconjuntos de um conjunto não vazio X . Sabe-se que \hat{A} pode não ser uma base para uma topologia sobre X . Contudo \hat{A} gera sempre uma topologia sobre X .

5.3. Sub-base

Definição : Seja (X, Γ) um espaço topológico. Uma classe \hat{S} de conjuntos abertos de X $\hat{S} \subset \Gamma$ é uma sub-base para a topologia Γ sobre X se e só se, todas as intersecções finitas de elementos de \hat{S} formam uma base para X .

Vejamos um exemplo : A intersecção de duas faixas verticais e horizontais abertas no plano R^2 é um rectângulo aberto

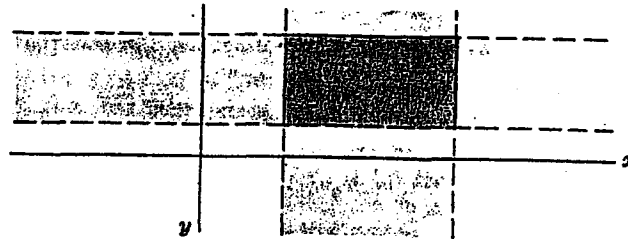


Fig. 19

Os rectangulos abertos formam uma base para a topologia usual sobre R^2 . De acordo com este facto, a classe \hat{S} de faixas infinitas abertas é uma sub-base para R^2

5.4. Referência a topologias geradas por classes de conjuntos

Seja \hat{A} uma classe qualquer de subconjuntos de um conjunto não vazio X . \hat{A} pode não ser uma base para uma topologia sobre X . Contudo \hat{A} gera sempre uma topologia sobre X , no seguinte sentido :

Teorema : Qualquer classe de subconjuntos de um conjunto não vazio X , é uma sub-base para uma única topologia Γ sobre X .

Vejamos um exemplo. Consideremos a classe \hat{A} de subconjuntos de $X = \{a, b, c, d\}$ definida por : $\hat{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$. As intersecções finitas de elementos de \hat{A} formam a classe :

$$\hat{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}, \{b\}, \phi, X\}$$

Note-se que $X \in \hat{B}$

Note-se que $X \in \hat{B}$, é por definição a intersecção vazia de elementos de \hat{A} (que não contem X). Tomando as uniões de todos os elementos de \hat{B} obtem-se a classe :

$$\Gamma = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{d\}, \{b\}, \phi, X, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}\}$$

que é a topologia sobre X gerada pela classe \hat{A}

5.5 .Compacticidade

Definição : Seja $\hat{A} = \{G_i\}$ uma classe de subconjuntos de X tal que para algum $A \subseteq X$ $A \subseteq \cup_i G_i$. Então \hat{A} é chamada **cobertura de A**. e essa cobertura é aberta se todos os seus conjuntos o forem. Além disso se a classe \hat{A} admitir uma sub-classe que também cubra A , isto é se :

$$\exists G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m} \in \hat{A} \quad \text{tal que : } A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

\hat{A} diz-seredutivel a uma cobertura finita ou que contém uma sub-cobertura finita.

Um exemplo :

Teorema de Heine-Borel.

Seja $A = [a,b]$ um intervalo fechado e limitado e seja $\{G_i\}$ uma classe de conjuntos abertos tal que $A \subseteq \cup_i G_i$. Então pode seleccionar-se dessa classe um número finito de conjuntos abertos , sejam $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m}$, tais que $A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$.

5.5.1. Conjuntos compactos

Nos cursos elementares de topologia define-se um conjunto compacto como um conjunto limitado e fechado, e demonstra-se o teorema de Heine-Borel, segundo o qual de qualquer cobertura aberta de um conjunto compacto se pode seleccionar uma sub-cobertura finita.

Em cursos mais avançados usa-se o teorema de Heine-Borel pra definir conjunto compacto, dizendo-se que um conjunto é compacto se de qualquer cobertura aberta que ele

admita-se que se pode seleccionar uma sub-cobertura finita, e demonstra-se que todo o conjunto compacto é limitado e fechado.

Portanto o - Teorema de Heine- Borel pode enunciar-se da seguinte forma :

Qualquer cobertura aberta de um intervalo limitado e fechado $A = [a, b]$, é redutível a uma cobertura finita.

5.5.2. Espaços localmente compactos

Definição : Um espaço topológico X é **localmente compacto** se e só se todos os pontos de X admitem uma vizinhança compacta.

Exemplo : Consideremos a recta real R com a topologia usual, cujos conjuntos abertos são os intervalos abertos. Notemos que cada ponto $p \in R$ é interior a um intervalo fechado $[p - \delta, p + \delta]$ e que pelo teorema de Heine-Borel um intervalo limitado e fechado é compacto. Portanto cada ponto $p \in R$ admite uma vizinhança compacta, sendo portanto R um conjunto localmente compacto. Mas R não é um conjunto compacto ; por exemplo a classe :

$$\hat{A} = \{ \dots (-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), \dots \}$$

Mas R não é um espaço compacto ; \hat{A} não admite uma sub-cobertura finita.

Proposição : Qualquer espaço compacto é localmente compacto.

5.5.3. Compactificação

Um espaço topológico X diz-se **mergulhado** num espaço topológico Y , se X é homeomórfico a um subespaço de Y (chama-se **homeomorfismo** ou **isomorfismo topológico** entre A e B quando entre A e B houver uma correspondência bijectiva e bicontínua). Se $Y \supseteq X$ é um espaço compacto então Y diz-se uma **compactificação** de X .

Frequentemente, mas nem sempre, a compactificação de um espaço X é obtida pela adjunção de um ou mais pontos a X , definindo-se então uma topologia apropriada no conjunto ampliado, que é já compacto, e que contém X como sub-espaço.

Exemplo 1 : Consideremos a recta real R com a topologia usual U . Juntemos-lhe dois novos pontos $+\infty$ e $-\infty$, obtendo assim um conjunto ampliado chamado recta acabada $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$. A relação de ordem em R pode ser extendida a \bar{R} , definindo

$-\infty < a < +\infty$ para $\forall a \in \mathbb{R}$. A classe de subconjuntos de $\bar{\mathbb{R}}$ da forma $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$; $[-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ constituem uma base para uma topologia U^* sobre $\bar{\mathbb{R}}$. Além disso $(\bar{\mathbb{R}}, U^*)$ é um conjunto compacto, que contém (\mathbb{R}, U) como sub-espaço ou seja é uma compactificação de (\mathbb{R}, U) .

Relembremos que o espaço localmente compacto (\mathbb{R}, U) é homeomórfica qualquer intervalo fechado $[a, b]$, que é compacto pelo Teorema de Heine-Borel.

As vizinhanças de raio ε de $\{-\infty\}$ são os conjuntos $V_\varepsilon(-\infty) = [-\infty, 1/\varepsilon[$; As vizinhanças de raio ε de $\{+\infty\}$ são os conjuntos $V_\varepsilon(+\infty) =]1/\varepsilon, +\infty]$.

A recta \mathbb{R} também pode ser compactificada por meio de um só ponto impróprio, ∞ tomando nome de recta projectiva real $PR = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

O exemplo seguinte vem esclarecer melhor uma questão já tratada a propósito da interpretação hidrodinâmica da série de Laurent.

Seja $C \cong \mathbb{R}^2$ considerado indiferentemente como o plano \mathbb{R}^2 ou como o plano complexo que lhe é algébricamente isomorfo, enquadrado pelo sistema de eixos ortonormais x, y . Este conjunto também é chamado plano-esfera.

Seja S^2 uma esfera com centro em $(0, 0, 1)$ e raio $r=2$. Por definição, a bola (em \mathbb{R}^2 é mais explícito dizer o complementar de um círculo de origem em $x=y=0$), de raio ε , e que é também chamado, menos propriamente, vizinhança de raio ε do ∞ , é designado por $V_\varepsilon(\infty) = \{(x, y) \in C : \sqrt{x^2 + y^2} > 1/\varepsilon\}$. Estamos a ver que se $\varepsilon \rightarrow 0$ a vizinhança vai abrangendo uma região cada vez menor do plano pois o seu raio cresce indefinidamente. O eixo dos z intersecta o polo Norte da esfera, e é para esse ponto de intersecção que tende a intersecção p' que une qualquer ponto do plano xy , $p(x, y) \in C$, quando ele se afasta indefinidamente da origem. A correspondência $p' = p'(p)$ chama-se uma projecção estereográfica do plano sobre a esfera, e é uma correspondência 1-1 excepto no polo Norte de S^2 , pois este polo é a projecção sobre S^2 de toda uma infinidade de pontos de C infinitamente afastados de $x=y=0$. A correspondência deixa aí de ser unívoca, e com maioria de razão 1-1. Deixando de ser unívoca deixa de ser uma função nesse ponto. Seria possível ver-se que o jacobiano da transformação $p'(p)$ se torna aí nulo. Então por definição o polo Norte da esfera S^2 é tomado para imagem do $\{\infty\}$ e por vezes identificado com ele.

A função $p'(p): C \rightarrow S^2$ é um homeomorfismo, de $C \rightarrow S^2 - N$, ou se preferirmos de $C \rightarrow S^2 - \{\infty\}$. A esfera S^2 que é um conjunto compacto é uma compactificação de C .

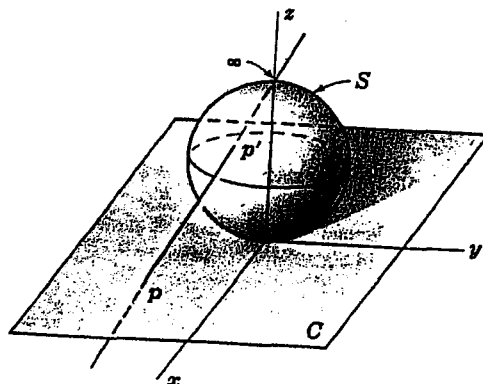


Fig. 20

Seja agora (X, Γ) um espaço topológico qualquer. Vamos chamar compactificação por um ponto de Alexandroff de (X, Γ) e designa-la-emos por $(X_\infty, \Gamma_\infty)$, á operação que vamos a seguir descrever :

- (1) Em $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ o ponto impróprio ∞ é distinto de qualquer ponto de X .
- (2) Γ_∞ consiste em conjuntos onde se engloba o complementar em X_∞ de qualquer conjunto fechado e compacto de X

Proposição : A classe Γ_∞ é uma topologia sobre X , e $(X_\infty, \Gamma_\infty)$ é uma compactificação de (X, Γ) .



Fig. 21

Referências:

- [1]. Baule, Bernard-1949. Tratado de Matemáticas Superiores para Engenheiros e Físicos, Editorial Labor, S.A., Barcelona-Madrid.
- [2]. Bouix,M.- 1964. Les Fonctions Généralisés ou Distribution, Masson, Paris.
- [3]. Campos, Luís Manuel Braga da Costa-1988. Análise Aplicada e Campos de Forças, Fundação Calouste Gulbenkian.
- [4]. Choquet-Brouhat ,Y.- 1973. Distributions, Theorie et Problemes, Masson , Paris.
- [5]. Comolet, R.-1969. Mécanique Experimentale des Fluides (Tome 1) Masson, Paris.
- [6]. Germain, P.-1962. Mécanique des Milieux Continues, Masson, Paris.
- [7]. Jessel, M-1973. Acoustique Théorique Propagation et Holophonie, Masson, Paris.
- [8] Lipschutz, Seymour; Theory and Problems of General Topology;-1965,Schaum's outline, Series New York.
- [9]. Morgado, Cândido Manuel Passos -1973. Escoamentos Cónicos em Corpos Fusiformes com Jactos Laterais, Tese de Doutoramento, Lisboa.
- [10]. Santos, M. Rolão – 1994. Estudo das Singularidades dos Potenciais Complexos em Escoamentos Planos de Fluidos Incompressíveis utilizando Distribuições, Engenho, Jan/Abr.
- [11]. Schwartz, Laurent-1957. Methodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, Hermann, Paris.
- [12]. Silva, Sebastião-1960. Lições da Cadeira de Análise Superior, A.E. da F.C.U.L.
- [13]. Wailand, Harold-1970. Variáveis complexas aplicadas à Ciência e à Engenharia, Van Nostrand R.C., New York – Cincinnati – Toronto – Melbourne.

CAPITULO VI

SISTEMAS DINÂMICOS E POTENCIAIS COMPLEXOS. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO NO PROBLEMA DE CAUCHY RELATIVO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE REGEM O MOVIMENTO DAS PARTÍCULAS DE UM FLUIDO

1.1. A questão do determinismo no movimento dos fluidos

Uma equação diferencial ordinária de ordem n na forma normal é do tipo:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \quad (1)$$

Introduzindo variáveis convenientes pode transformar-se esta equação num sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, também na forma normal. Vamos fazer:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \\ x_3 &= x'' \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

A equação diferencial (1) transforma-se no sistema de equações diferenciais de 1ª ordem na forma normal :

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

Um vector \vec{x} numa base $[\vec{e}_i; 1 \leq i \leq n]$ é representável abreviadamente, fixada a base do espaço, por uma matriz coluna (na notação que vamos usar representamos os vectores coluna com chavetas, e os vectores linha entre parêntesis rectos) :

$$\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Mas o que em rigor esta notação significa é:

$$\vec{x} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Vamos escrever (2) na forma:

$$x'_1 = f_1(t, \vec{x})$$

$$x'_2 = f_2(t, \vec{x})$$

.....

$$x'_n = f_n(t, \vec{x})$$

Sinteticamente:

$$\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{3}$$

Dado o vector $\vec{x}(t)$ tem-se por definição:

$$\int_{t_0}^t \vec{x}(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t x_k(t) dt \cdot \vec{e}_k = \left\{ \int_{t_0}^t x_1(t) dt, \int_{t_0}^t x_2(t) dt, \dots, \int_{t_0}^t x_n(t) dt \right\}$$

Vamos escolher para norma de um vector \vec{x} a expressão:

$$\|\vec{x}\| = \sum_{k=1}^n |x_k| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

vindo então:

$$\left| \int_{t_0}^t \vec{x}(t) dt \right| \leq \int_{t_0}^t |\vec{x}(t)| dt$$

Consideremos a sucessão de vectores:

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \dots$$

Esta sucessão tende para um certo limite \vec{x} segundo a norma adoptada se:

$$\lim_n \|\bar{x}_n - \bar{x}\| = 0$$

Note-se que a noção de limite está necessariamente ligada à topologia definida neste espaço vectorial, sem a qual não tem sentido, e está portanto ligada à norma adoptada no espaço vectorial de onde derivou essa topologia. Estas considerações só têm de facto sentido num espaço vectorial topológico, (isto é num espaço vectorial onde existe uma topologia compatível com a estrutura pré-existente de espaço vectorial).

Portanto uma sucessão de vectores tende para um certo vector, quando as componentes do vector genérico da sucessão tendem para as componentes homólogas do respectivo limite, se ele existir.

Voltemos á equação (3):

$$\bar{x}' = \vec{f}(t, \bar{x})$$

Diz-se que $f(t, \bar{x})$ satisfaz à condição de Lipschitz em relação a $\bar{x} \in R^n$ (note-se que esta condição depende da norma que foi adoptada), se existir uma constante A com o mesmo valor para qualquer t tal que:

$$\forall_{t \in R} \|f(t, \bar{x}_1) - f(t, \bar{x}_2)\| \leq A \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$$

É possível provar que se f for contínua e Lipschitziana a equação vectorial (3):

$$\bar{x}' = \vec{f}(t, \bar{x})$$

tem uma e uma só solução que satisfaz à condição inicial $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$.

Se uma função $\vec{f} \in C \Leftrightarrow \forall_{1 \leq i \leq n} f_i \in C$.

Dizer que \vec{f} é Lipschitziana significa que:

$$\|\vec{f}(t, \bar{x}) - \vec{f}(t, \bar{y})\| \leq A \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

Atendendo à norma que temos adoptado anteriormente :

$$\|\bar{y} - \bar{z}\| = \sum_{k=1}^n |y_k - z_k|$$

vem:

$$\|\bar{f}(t, \bar{y}) - \bar{f}(t, \bar{z})\| = \sum_{k=1}^n \|f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_k(t, z_1, z_2, \dots, z_n)\|$$

Podemos portanto garantir que \bar{f} é Lipschitziana se o forem todas as componentes de \bar{f} em relação às variáveis y_1, y_2, \dots, y_n , isto é, se for:

$$\begin{aligned} \|f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n)\| &\leq \sum_{i=1}^n A_i \|y_i - z_i\| = A_1 \|y_1 - z_1\| + A_2 \|y_2 - z_2\| + \\ &+ \dots + A_n \|y_n - z_n\| \end{aligned}$$

Dar a condição inicial $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ é dar o sistema de condições:

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{1,0} = \alpha_1 \\ x_2(t_0) &= x_{2,0} = \alpha_2 \\ &\dots \\ x_n(t_0) &= x_{n,0} = \alpha_n \end{aligned}$$

No caso geral das equações diferenciais de ordem p em R^n , de que temos tratado, não bastam n parâmetros escalares tomados como condições iniciais para definir o movimento posterior do ponto. São necessárias n^p condições; No caso da equação de ordem n a solução geral terá a forma:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots, C_{n^p})$$

Sendo a equação de segunda ordem, e por exemplo ser $n=3$, , por ser relativa ao movimento em R^3 de um ponto material, não bastam as n condições iniciais que nos dão a posição do partícula material nesse instante. Necessitamos de conhecer além delas os valores das três componentes da velocidade nesse instante inicial, o que vem a dar $n = 3^2$ componentes escalares

Portanto para a equação diferencial de ordem n na forma normal, sendo f contínua e Lipschitziana podem fixar-se à priori n valores independentes e afirmar que a possível solução geral contém além de t , n parâmetros independentes. A existência e unicidade da solução pode necessitar de outros parâmetros, isto é:

$$\bar{x} = \bar{\phi}(t, C_1, C_2, \dots, C_n, C'_1, C'_2, \dots, C'_k) \quad (4)$$

Podemos concluir que a condição de Cauchy-Lipschitz é apenas uma condição necessária de existência e unicidade da solução, fixando apenas o número mínimo de parâmetros dos quais deve depender a solução geral $\bar{\phi}$ para que o problema tenha solução única, não sendo no entanto uma condição suficiente de unicidade da solução.

Se a equação diferencial for de segunda ordem o número de constantes escalares é $n = 3^2 = 6$. Numa equação de ordem n em R^m a solução de uma equação de ordem k é m^k . Consideremos as equações fundamentais da dinâmica sintetizadas por:

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

com $\bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$; vamos supor, sem perda de generalidade, que se trata de partículas de um fluido todas a mesma massa m , e a mesma aceleração, estando cada uma sujeita à mesma força.

$$m\bar{x}'' = F_1(t, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$m\bar{x}''_2 = F_2(t, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3) \quad (5)$$

$$m\bar{x}''_3 = F_3(t, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3)$$

Este sistema de equações pode também transformar-se num sistema de equações de primeira ordem por uma mudança de variáveis:

$$x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2 \quad x_3 = y_3 \quad x'_1 = y_4 \quad x'_2 = y_5 \quad x'_3 = y_6$$

O sistema toma a forma:

$$y'_1 = y_4$$

$$y'_2 = y_5$$

$$y'_3 = y_6$$

$$y'_4 = \frac{1}{m} F_1(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$$

$$y'_5 = \frac{1}{m} F_2(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$$

A integração de (5) conduz ao sistema:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t, x_1, x_2, x_3, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0) \\ x_2(t) &= x_2(t, x_1, x_2, x_3, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0) \\ x_3(t) &= x_3(t, x_1, x_2, x_3, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0) \end{aligned} \quad (6)$$

Se \vec{F} for contínua e Lipschitziana o sistema(6), se for dado o número necessário de condições iniciais a satisfazer, tem uma e uma só solução que as verifica, se o problema de Cauhy tiver sido bem posto. Isto quer dizer que o movimento de cada partícula do fluido é univocamente determinado pela posição e pela velocidade que essa partícula tem num dado instante dado. No caso de um fluido, para cada partícula, a sua velocidade num certo instante é uma característica dessa própria partícula, e é possível efectuar a correspondência :

$$\{x_i(t)\} = U(t_0, t)\{x_i(t_0)\}$$

sem que no operador de evolução $U(t_0, t)$ figurem as coordenadas de Lagrange.

os parâmetros $\{x_i(t), t \in I \subseteq R\}$ são chamados coordenadas de Euler da partícula e permitem segui-la no seu movimento;

Os parâmetros $\{x_i^0 = x_i(t_0), 1 \leq i \leq n, t_0 \in I \subseteq R\}$ são chamadas coordenadas de Lagrange das partículas, e fazem parte do conjunto de condições iniciais que lhe determinam o movimento; a *cada*

partícula corresponde univocamente em cada instante t um e um só éuplo de coordenadas de Lagrange, $x_i(t)$ e a recíproca é também verdadeira: As coordenadas de Lagrange funcionam deste modo como marcadores das partículas do fluido. Em cada instante t , pré-supondo dados os $\{x_i'(t_0)\}$, fixos para cada partícula, existe uma correspondência 1-1 entre as coordenadas de Lagrange e de Euler, na qual as componentes da velocidade inicial $\{x_i'(t_0); 1 \leq i \leq 3\}$ não intervêm, sendo assim:

$$\forall_{t, t_0} \in I \subseteq R \quad J(t) = \frac{\partial [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]}{\partial [x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)]} \neq 0 \quad (7)$$

no domínio onde os $\{x_i^0\}$ são coordenadas de Euler possíveis da partícula, e também possível um possível sistema de coordenadas das mesmas partículas no movimento do fluido. Nesse domínio as equações (6) tomam a forma:

A relação (7) garante a invertibilidade do operador $U(t_0, t)$, sem a qual os dois sistemas de coordenadas de Lagrange e de Euler não poderiam ser sistemas de coordenadas genéricas possíveis em R^3 :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ x_2(t) &= x_2(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ x_3(t) &= x_3(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{aligned} \quad (8)$$

(8) são invertíveis, vindo:

$$\bar{x}(t) = U(t_0, t)\bar{x}(t_0) \Leftrightarrow \bar{x}(t_0) = U^{-1}\bar{x}(t) \quad (9)$$

Invertendo(8)vem:

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_1^0 [x_1(t), x_2(t), x_3(t)] \\ x_2(t_0) &= x_2^0 [x_1(t), x_2(t), x_3(t)] \\ x_3(t_0) &= x_3^0 [x_1(t), x_2(t), x_3(t_0)] \end{aligned} \quad (10)$$

A equação (7), $J \neq 0$, garantindo a invertibilidade de (8) e de (9) e o seu caracter recíproco, assegura portanto a esses sistemas de equações a natureza de sistemas de coordenadas sobre a variedade R^3 , inversas entre si no domínio de definição do movimento.

A equação (7) garante também a invertibilidade do operador de evolução $U(t_0, t)$

Sendo uma massa fluida S em movimento constituída por um número normalmente elevado de partículas essa massa pode ser representada por um só ponto de um espaço de fases apropriado ao fim em vista. Esse número, normalmente elevado, na impossibilidade de resolver para cada uma das partículas o problema da determinação do seu movimento para $t \geq t_0$, indica que a Mecânica estatística é a disciplina indicada para o tratamento desta questão. Um sistema de n partículas tem um espaço de fases com $6n$ dimensões, estando cada partícula associada a 3 dimensões de espaço, que lhe determinam a posição, e aos seus 3 momentos conjugados.

Vamos porém abstrair desse facto, e abordar o problema como se fosse possível integrar uma a uma as equações diferenciais do movimento de cada partícula.

Existem situações nas quais o ponto figurativo do sistema no espaço R^{6n} passa por pontos ditos singulares, correspondentes a instantes τ nos quais as condições impostas nos teoremas da existência e unicidade da solução que condiciona ou determina o movimento não são preenchidas. Vários casos podem ocorrer.

- a) O sistema S , caracterizado por $6n$ parâmetros, tende para uma posição não singular, então por um teorema de Painlevé, as suas coordenadas tendem para limites finitos e determinados. Não há então dificuldade em seguir o movimento do sistema.
- b) O sistema S tende para uma posição singular. Alguns dos $x_i(t)$ ou mesmo todos, podem tender para infinito, ou então para nenhum limite. As equações diferenciais não permitem em geral o conhecimento do movimento do sistema para $t \geq \tau$.
- c) S não tende para nenhuma posição limite a distância finita. Esta hipótese decompõe-se em três casos possíveis:
 - C1) Uma parte S' de S afasta-se para o infinito: não há então possibilidade de seguir o movimento de S
 - C2) Uma parte S' de S afasta-se para o infinito; outra parte, S'' tende para uma posição limite S_1 ; pode seguir-se S_1'' para $t \geq \tau$, se S_1'' não for uma posição singular de S''
 - C3) Certos pontos S' de S não tendem para o infinito, nem para nenhuma posição limite. É impossível determinar a posição de S para $t \geq \tau$.

1.2. Exemplos de casos singulares.

Consideremos um ponto constrangido a mover-se sobre uma recta R , sujeito à equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6x^{1/3}$$

As condições de analiticidade são preenchidas por $6x^{1/3}$ excepto na vizinhança de $x=0$, que é um ponto singular de ramificação desta expressão, pois em qualquer vizinhança de $x=0$, por menor que seja, há pontos pertencentes a três ramos unívocos diferentes ..

Em $x=0$ as condições exigidas pelo teorema da unicidade, sob condições iniciais dadas em $t_0 = 0$,

$x(0) = x'(0) = 0$ correspondem a três soluções:

- a) A solução de equilíbrio $x = x' = 0$;
- b) A solução $x = -t^3$
- c) A solução $x = t^3$

Neste caso as condições iniciais propostas não determinam uma só solução, e o problema diz-se por isso mal posto: um problema de condições iniciais e de fronteira diz-se bem posto quando em face das condições iniciais dadas, tem solução única que é função contínua dos dados das condições iniciais.

Podemos dar outro exemplo com interesse:

Consideremos um ponto móvel num plano cujo movimento é regido pelo sistema diferencial:

$$x''(t) = -(x+y)(x'^2 + y'^2) ; y''(t) = (x-y)(x'^2 + y'^2)$$

Este sistema admite como soluções os movimentos:

$$x(t) = \text{sen}[Ln(t_1 - t)] \quad ; \quad y(t) = \text{cos}[Ln(t_1 - t)]$$

Quando $t \rightarrow t_1$ vê-se que $\lim_{t \rightarrow t_1} Ln(t_1 - t) = -\infty$ e que as coordenadas x, y oscilam em $t \in [t_1, t]$, sem tender para nenhuma posição limite no instante t_1 . Não tem sentido continuar o estudo de um movimento, quando se sabe que a sua velocidade cresce indefinidamente, e do ponto de vista da Mecânica Clássica se aproxima e ultrapassa a velocidade da luz.

1.3. O determinismo mecânico

Do estudo precedente, conclui-se que em todos os casos susceptíveis de serem apresentados, o dado da posição inicial do ponto figurativo do sistema, constituído pela massa fluida, no espaço de fases correspondente, quer dizer, das posições e velocidades iniciais, dos pontos materiais do sistema, pode não determinar um movimento único. Nem sempre há determinismo mecânico se houver pontos singulares nas equações diferenciais que regem o movimento. Para que tal determinismo possa existir, as equações diferenciais que regem o movimento, bem como as condições iniciais e fronteiras às quais devem satisfazer as suas soluções, têm que estar sujeitas a certas restrições. Esse facto leva-nos a admitir que algo de análogo se pode passar não só com a física e a matemática, mas também com a biologia, e as ciências sociais, a história e a política.

De certo modo há de facto em cada instante um determinismo mecânico. Um tal principio permitiria afirmar que por exemplo no caso a) que vimos acima, poderia suceder que num dos movimentos a que nos referimos acima, se realiza sempre o mesmo, ou preferencialmente o mesmo, mas que as equações da dinâmica não podem justificar esse facto. No entanto se fosse possível determinar experimentalmente para diversos tipos de singularidades, qual dos movimentos possíveis tem maior probabilidade de se realizar, poder-se-ia fazer previsões exequíveis.

1.4. Algumas considerações

Adicionemos alguns comentários às considerações que já fizemos alguns comentários. Para caracterizar a evolução de um sistema material S , neste caso um fluido, estabelecemos um referencial comóvel $\Sigma_0(O, x, y, z)$ (chama-se referencial comóvel a um referencial que acompanha o movimento médio da matéria do Universo) ou que se desloque em relação a ele com movimento de translação rectilínea uniforme, munido de um relógio R_0 , que se admite em repouso em Σ_0 . Aos 4 parâmetros reais da tetrada (x, y, z, t) em $\Sigma_0 \cup R_0$, já vimos que são as coordenadas de Euler. Queremos especificar os acontecimentos passados com cada partícula de S ao longo da sua trajectória em R^3 quando t varia. Para isso vamos usar sondas que acompanham a partícula no seu movimento. O Laboratório L é por definição constituído por essas sondas e pode tereventualmente um movimento próprio em relação a $\Sigma_0 \cup R_0$. Vamos primeiro supor que L está em repouso em relação a $\Sigma_0 \cup R_0$. As medições efectuadas exprimem-se como funções $F = F(x, y, z, t)$ das coordenadas medidas no sistema de referência $\Sigma_0 \cup R_0$.

Já vimos que as coordenadas de Lagrange se exprimem em função das de Euler pelas equações(8) :

$$x_i(t) = x_i(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

$$x_2(t) = x_2(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

$$x_3(t) = x_3(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

Equivalentemente:

$$\bar{x}(t) = \bar{\phi}(t, \bar{x}_0)$$

Uma grandeza local Ψ pode escrever-se:

$$\Psi(t, \bar{x}) = \Psi[t, \bar{x}(\bar{x}_0, t_0, t)] = \Psi(t, t_0, \bar{x}_0)$$

2. Sistemas Dinâmicos

Chama-se sistema dinâmico a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem da forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

O sistema diz-se autónomo se as funções u_i não dependerem de t . Em notação sintética, o sistema anterior escreve-se:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}(\bar{x}, t) \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Vamos designar $\bar{u}(\bar{x}, t)$ ou, nos sistemas autónomos, $\bar{u}(\bar{x})$ por $A^t \bar{x}$, vindo:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A^t \bar{x}$$

Sendo A^t um operador de evolução que aplica $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ dado por:

$$A^t \bar{x}(\tau) = \bar{x}(t + \tau)$$

Chama-se **órbita do sistema dinâmico** ao conjunto de pontos de \mathbb{M} que o sistema sucessivamente ocupa quando t assume todos os valores possíveis.

2.1. Problema de Cauchy. Teorema da existência e unicidade

Seja $f(\bar{x}, \bar{\lambda})$ um campo vectorial em \mathbb{R}^n de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ com $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ numa vizinhança de $(0,0)$. Então existem $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tais que, para qualquer $\bar{\lambda}$ para o qual seja $\|\bar{\lambda}\| < \delta_2$, existe uma única solução de:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{\lambda}) \\ \bar{x}(0) = 0 \end{cases}$$

definida num intervalo $t \in]-\delta_1, +\delta_1[$ e $\bar{x}(t, \bar{\lambda}) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)$.

Chama-se ponto crítico, singular ou de equilíbrio, a qualquer ponto \bar{x}_0 no qual se tenha $\bar{u}(\bar{x}_0, t) = 0$.

Vamos de aqui em diante considerar só sistemas dinâmicos autónomos.

Definição 1: Diz-se que um ponto de equilíbrio \bar{x}_0 de $\dot{\bar{x}} = \bar{u}(\bar{x})$ é estável se dado $\varepsilon > 0$ for possível determinar um $\delta > 0$ que só dependa de ε tal que se $\|\bar{\zeta} - \bar{x}_0\| < \delta$ a solução $\bar{x}(t, \bar{\zeta})$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{u}(\bar{x}) \\ \bar{x}_0 = \bar{\zeta} \end{cases}$$

existe para $t > 0$ e:

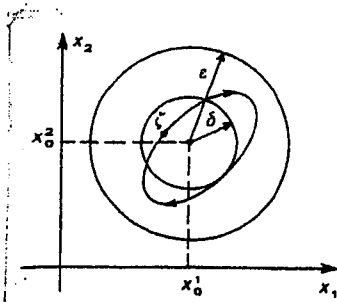
$$\|\bar{x}(t, \bar{\zeta}) - \bar{x}(t, \bar{x}_0)\| = \|\bar{x}(t, \bar{\zeta}) - \bar{x}_0\| < \varepsilon$$

Portanto, todas as soluções que tenham o ponto de partida suficientemente próximo de \bar{x}_0 são definidas para qualquer $t > 0$, e mantêm-se próximas deste ponto. Note-se que se trata de uma continuidade uniforme para $t > 0$ das soluções em relação às condições iniciais, se se tomar $\|\bar{x}\| = |\bar{x}|$.

Definição 2: Um ponto singular é instável se não satisfizer às condições da definição anterior: neste caso existe um $\varepsilon > 0$ e, pelo menos, uma solução do sistema que não permanece indefinidamente na bola $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \varepsilon$.

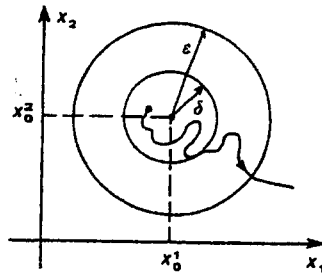
Definição 3: Um ponto de equilíbrio \bar{x}_0 de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x})$ é assintoticamente estável se for estável no sentido da Definição 1 e verificar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t, \zeta) = \bar{x}_0$$



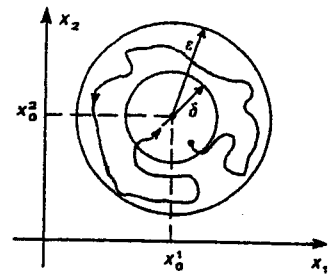
(a) Órbita fechada em torno do ponto de equilíbrio $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$

Fig1



(b) O ponto $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ é instável

Fig2



(c) Órbitas que nascem suficientemente próximas de $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ se aproximam deste ponto quando $t \rightarrow \infty$

Fig3

Consideremos de novo o sistema diferencial (1):

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}(\bar{x}, t)$$

no qual $\bar{x} = \{x, y\}$ é o ponto genérico do plano \mathbf{R}^2 .

Se a função \bar{u} não depender de t o sistema chama-se autónomo:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}(\bar{x}) \quad (2)$$

O campo de vectores \bar{u} é aqui definido por uma matriz real $\hat{A}^t(2 \times 2)$ de elementos

$a_{11} = a, a_{12} = b, a_{21} = c, a_{22} = d$ com:

$$ad - bc \neq 0 \quad (3)$$

(2) toma a forma:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \hat{A}^t \bar{x} \quad (4)$$

E tem a solução $x=y=0$ (ponto crítico ou singular do sistema dinâmico). O conjunto de funções $\hat{A}^t : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{M}$ para cada $t \in \mathbf{R}$, sendo \mathbf{M} o chamado espaço de fases do sistema constitui um grupo:

$$\hat{A}^t \hat{A}^s = \hat{A}^{t+s}$$

Estas funções são chamadas *aplicações durante o tempo t*.

Dada $\hat{A}^t : M \rightarrow M$, o par $\{M, \hat{A}^t\}$ é chamado fluxo; o conjunto de fluxos sobre M constitui um grupo a um parâmetro (t).

Seja $\bar{x}_0 \in M$ e \hat{A}^t uma aplicação durante o tempo t (chamada movimento de \bar{x}_0). Então é:

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \bar{x}(t) = \hat{A}^t \bar{x}_0 \in M$$

Quando t percorre a recta real, $\bar{x}(t)$ percorre uma linha de M chamada órbita do fluxo, de acordo com a definição já apresentada..

Chama-se posição de equilíbrio ou ponto fixo a todo o ponto que é ao mesmo tempo órbita:

$$\hat{A}^t \bar{x} = \bar{x}.$$

Voltemos à equação (4). Se for $b \neq 0$ vem, da primeira equação do sistema diferencial:

$$y = \frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x \quad (5)$$

Derivando ambos os membros desta equação vem:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

Sustituindo (6) na primeira equação do sistema (4), vem:

$$\frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt} = cx + d \left(\frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x \right)$$

Logo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a+d) \frac{dx}{dt} + (ad-bc)x = 0 \quad (7)$$

A equação característica é:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \quad (8)$$

e as suas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \quad (9)$$

$$\lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \quad (10)$$

Se for:

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) \neq 0$$

vem $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e a solução é:

$$\mathbf{x}(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \quad (11-1)$$

$$y(t) = A \frac{\lambda_1 - a}{b} e^{\lambda_1 t} + B \frac{\lambda_2 - a}{b} e^{\lambda_2 t} \quad (11-2)$$

Se $\Delta = 0$ vem $\lambda_1 = \lambda_2$ e a solução de (2) é:

$$\mathbf{x}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\lambda t}$$

$$y(t) = (B_1 + B_2 t) e^{\lambda t}$$

com $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ e só duas constantes independentes.

1. Se for $b=0$ vem:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Logo:

$$\mathbf{x}(t) = A e^{at}$$

Substituindo na segunda equação:

$$y(t) = B e^{at} + \frac{cA}{a-d} e^{at} \quad \text{se } a \neq d$$

ou:

$$y(t) = B e^{dt} + cA e^{dt} \quad \text{se } a = d$$

A solução geral de (4) tem a forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (12)$$

e entre cada duas constantes A_1, B_1 e A_2, B_2 apenas uma é independente. Deste modo o estudo da natureza do ponto crítico $(0,0)$ depende do comportamento dos valores das raízes características da equação.

O ponto crítico será:

1. Estável, se x, y permanecerem limitados quando $t \rightarrow +\infty$;
2. Assintoticamente estável, se $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$;
3. Instável, se $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Façamos na expressão de Δ :

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$$

a substituição:

$$p = a + d; \quad q = ad - bc$$

Então vem:

$$1.1. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$$

$$p > 0 \Rightarrow \text{Ponto Estável, Nodo Estável}$$

$$1.1.a. \lambda_1, \lambda_2 \text{ têm o mesmo sinal : } q = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \{$$

$$p < 0 \Rightarrow \text{Ponto Assintoticamente}$$

Estável,

Nó ou Nódulo Assintoticamente Estável.

1.1.a.1. Se λ_1, λ_2 têm o mesmo sinal e este for negativo o Nódulo chama-se *Atractor*.

1.1.a.2. Se λ_1, λ_2 têm o mesmo sinal e este for positivo chama-se *Fonte*.

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

$$1.1.b. \text{ Se } \lambda_1, \lambda_2 \text{ têm sinais opostos } q < 0 \{$$

Ponto de Sela

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$

Tomando a expressão geral de (4) dada por:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (13)$$

$$y(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

podemos notar que, para certos valores das constantes A_1, B_1 e A_2, B_2 é possível que

$x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, enquanto para outros valores das mesmas constantes $x(t)$ e $y(t)$ se tornam ilimitados. O ponto crítico é chamado *Ponto de Sela*.

2. Raízes reais e iguais. $\Delta = 0$: *Nódulo*.

A solução geral é:

$$\mathbf{x}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t} \quad (14)$$

$$\mathbf{y}(t) = (B_1 + B_2 t)e^{\lambda t}$$

2.1. Se $p > 0$ ($p = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$), vem $\lambda = \frac{a+d}{2} > 0$ e portanto em todas as órbitas (x, y) afasta-se indefinidamente do ponto crítico $(0,0)$ que é *instável*.

2.2. Se $p < 0$, $\lambda = \frac{a+d}{2}$ em todas as órbitas quaisquer que sejam os valores das constantes; o movimento aproxima-se indefinidamente de $(0,0)$ que é um *ponto crítico assintoticamente estável*.

3. Raízes complexas conjugadas $\Delta < 0$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

A solução geral de (4) tem a forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} (A_1 \cos \beta t + A_2 \text{sen} \beta t) \quad (15)$$

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} (B_1 \cos \beta t + B_2 \text{sen} \beta t)$$

Só duas destas constantes A_1, A_2, B_1, B_2 são independentes. Como as partes trigonométricas são limitadas, a natureza do ponto crítico $(0,0)$ é determinada pelo sinal da parte real das raízes:

$$\alpha = \frac{a+d}{2} = \frac{p}{2}$$

Se $\alpha > 0$ as trajectórias afastam-se do ponto crítico: *ponto espiral instável*.

Se $\alpha < 0$ aproximam-se desse ponto (estabilidade assintótica): *Ponto espiral assintoticamente estável*.

Se $\alpha = 0$ vem $\lambda_1 = \beta i$, $\lambda_2 = -\beta i$ e o movimento é periódico no tempo tendo como órbitas curvas fechadas contornando o ponto crítico estável $(0,0)$ que é chamado *Centro*.

Em resumo:

O sistema dinâmico é:

a. *Assintoticamente estável*, se as raízes do polinómio característico:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

forem reais e negativas ou se forem complexas e tiverem parte real negativa.

b. *Estável*, se forem $\lambda_1 = \beta i, \lambda_2 = -\beta i$.

c. *Instável*, se λ_1, λ_2 forem reais e pelo menos uma delas for positiva, ou se ambas forem complexas e tiverem parte real positiva.

Exemplo: Choque Frontal de Jactos.

Consideremos o potencial complexo:

$$W(Z) = \frac{1}{2}k(x^2 - y^2) + ixy. \quad (16)$$

com $Z = x + iy$. Então:

$$\varphi = \frac{1}{2}k(x^2 - y^2) \quad (16-1); \quad \psi = xy \quad (16-2)$$

Podemos constatar que $W(Z)$ satisfaz às condições de holomorfia o que implica que se trate de um escoamento conservativo de um fluido incompressível:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

De facto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}k(x^2 - y^2) \right] = \frac{\partial}{\partial y} (kxy) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \right] = -\frac{\partial}{\partial x} (kxy)$$

Calculemos a velocidade do escoamento:

$$\bar{u} = \text{grad}\varphi = kx\bar{e}_x - ky\bar{e}_y;$$

Como o escoamento é irrotacional é possível escolher funções φ e ψ (as duas funções dadas) para as quais é possível exprimir \bar{u} exclusivamente em termos de φ (ou alternativamente de ψ). No ponto $(0,0)$ é $\bar{u}(0,0) = \mathbf{0}$. Trata-se de um ponto de *estagnação do escoamento* e é, como veremos, um *ponto de sela*.

Podemos notar para já que as suas linhas de corrente são hipérbolas ($xy = C^{te}$).

Da expressão da velocidade vem:

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (i-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (i-2)$$

De (i-1) e de (i-2), vem:

$$\frac{dx}{x} = kdt \quad \frac{dy}{y} = -kdt$$

Logo:

$$x(t) = x_0 e^{kt} \quad (i-3)$$

$$y(t) = y_0 e^{-kt} \quad (i-4)$$

Então:

$$xy = x_0 y_0$$

(i-3) e (i-4) dão-nos a lei do movimento das partículas de fluido; x_0, y_0 são as coordenadas de Lagrange da partícula, e x, y as suas coordenadas de Euler.

Logo:

$$q = ad - bc = 0$$

$$p = a + d = k$$

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = k^2 - 0 = k^2$$

Trata-se de um *Ponto de Sela*.

3. Sistemas dinâmicos, fontes, sumidouros e turbilhões

Consideremos o potencial complexo de uma fonte pontual na origem:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln Z \quad (17)$$

Da qual vem:

$$\zeta(Z) = \frac{dW}{dZ} = \frac{D}{2\pi} \frac{1}{Z} = \frac{D}{2\pi} \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{D}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

Logo:

$$\vec{u} = \frac{D}{2\pi} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_y \right\} \quad (19)$$

Reobtivemos a configuração das linhas de corrente de uma fonte se $D > 0$ e de um sumidouro se $D < 0$.

O sistema diferencial é não linear:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (20-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{D}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (20-2)$$

Neste sistema $\bar{u} \rightarrow \infty$ se $(x,y) \rightarrow 0$. Na origem, que é um ponto crítico do sistema dinâmico (*Nodo instável* se $D > 0$, *Nodo instável assintoticamente estável* se $D < 0$).

O campo de vectores não se anula e torna-se aí infinito, tendo porém este ponto a propriedade de ser ponto crítico do mesmo tipo que a origem no sistema diferencial real:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D}{2\pi} x \quad (21-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{D}{2\pi} y \quad (21-2)$$

na qual se anula o campo de vectores. O sistema (21) é obtido do sistema (20) por uma transformação \hat{T} que vamos definir. O seu ponto crítico é uma fonte se $D > 0$, e um sumidouro se $D < 0$; atendamos também a que o sistema (21) corresponde à velocidade complexa:

$$\zeta(Z) = \frac{D}{2\pi} Z \quad (22)$$

obtida da velocidade correspondente a (18) :

$$\zeta(Z) = \frac{D}{2\pi} \frac{1}{Z}$$

por inversão. A esta operação no plano complexo corresponde a transformação no plano real:

$$x \rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$y \rightarrow \frac{y}{x^2 + y^2}$$

que deixa invariantes no plano $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ os pontos críticos e a natureza destes (note-se que sobre $x^2 + y^2 = 1$ os dois sistemas diferenciais coincidem).

Comecemos por analisar o potencial e o campo de velocidades de uma fonte pontual em $Z = 0$ (50-Cap.VI):

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln Z$$

e (52-Cap.VI):

$$\zeta(Z) = \frac{D}{2\pi} \frac{1}{Z}$$

Obtém-se a velocidade complexa devida a uma fonte no infinito pela transformação $Z \rightarrow 1/Z$ feita em W e em $\zeta(Z)$ a qual transfere o ponto crítico (ponto de ramificação logarítmica de W e pólo de $\zeta(Z)$) de $Z=0$ para $Z = \infty$. A natureza desse ponto crítico no sentido dos sistemas dinâmicos (*nodo*) é também conservada por inversão vindo:

$$W(Z) = -\frac{D}{2\pi} \ln Z; \quad \zeta(Z) = -\frac{D}{2\pi} \frac{1}{Z^2}$$

apenas se transformando o nodo estável em $Z = 0$ ($D < 0$) em nodo instável em $Z = \infty$ ($D > 0$) e reciprocamente.

A associação Fonte-Turbilhão pontual ou Sumidouro-Turbilhão pontual em $Z = 0$ dá lugar neste ponto a um ponto crítico tipo *ponto espiral* instável ou estável, respectivamente, tendo aí o seu potencial complexo um ponto de ramificação logarítmica e a respectiva velocidade um polo de segunda ordem (zero de ordem $n = -2$).

O turbilhão pontual dá lugar a uma singularidade tipo *centro*. A um turbilhão pontual em $Z = 0$ (*centro*) corresponde outro turbilhão no ∞ (que é também um *centro*) de intensidade igual e oposta. Esta singularidade goza de propriedades análogas às do caso anterior.

Usámos aqui o facto de a inversão $Z \rightarrow 1/Z$ constituir um homeomorfismo de \mathbf{PC} sobre \mathbf{PC} , respeitando portanto a natureza dos pontos críticos e das linhas integrais de sistemas dinâmicos equivalentes, relativos a campos de vectores representados por complexos, quando a transição entre os complexificados dos sistemas diferenciais respectivos se faz por inversão em \mathbf{PC} , transformando zero em infinito e reciprocamente.

Vamos agora analisar a associação Fonte-Turbilhão e Fonte-Sumidouro. O seu potencial é:

$$W(Z) = \frac{D - i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Corresponde-lhe a velocidade:

$$\begin{aligned} \zeta(Z) &= \frac{D - i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{Z} = \frac{D - i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \\ &= \frac{D - i\Gamma}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{Dx - \Gamma y - i(Dy + \Gamma x)}{2\pi(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Dx - \Gamma y}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (23-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma x + Dy}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (23-2)$$

Corresponde-lhe o sistema diferencial real linear homeomorfo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D}{2\pi} x - \frac{\Gamma}{2\pi} y \quad (24-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi} x + \frac{D}{2\pi} y \quad (24-2)$$

Logo:

$$a = \frac{D}{2\pi}; b = -\frac{\Gamma}{2\pi}, c = \frac{\Gamma}{2\pi}, d = \frac{D}{2\pi}$$

Portanto:

$$q = \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc = \frac{D^2 + \Gamma^2}{4\pi^2}$$

$$p = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = a + d = \frac{D}{\pi}$$

$$\Delta = p^2 - 4q = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = \frac{D^2}{\pi^2} - 4 \frac{D^2 + \Gamma^2}{4\pi^2} = -\frac{\Gamma^2}{\pi^2} < 0$$

Trata-se de um *ponto espiral*. Vejamos em que condições ele é estável ou instável:

$$\lambda_1 = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\frac{D}{\pi} + i\frac{\Gamma}{\pi}}{2} = \frac{D + i\Gamma}{2\pi}; \quad \lambda_2 = \frac{D - i\Gamma}{2\pi}$$

Corresponde-lhe a solução:

$$x(t) = Ae^{\frac{Dt}{2\pi}} \cos\left(\frac{\Gamma}{2\pi} t + \theta_0\right); \quad y(t) = Be^{\frac{Dt}{2\pi}} \text{sen}\left(\frac{\Gamma}{2\pi} t + \theta_0\right)$$

Se $D < 0$ trata-se da associação de um turbilhão com um sumidouro e é um ponto espiral assintoticamente estável; se $D > 0$ é uma associação de um turbilhão com uma fonte e é um ponto espiral instável. Se $\Gamma < 0$ a espiral é percorrida no sentido horário; se $\Gamma > 0$ é percorrida no sentido anti-horário.

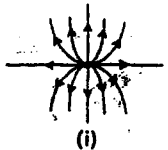
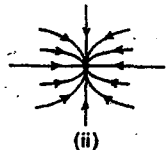
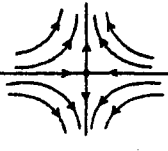
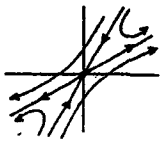
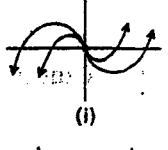
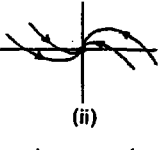
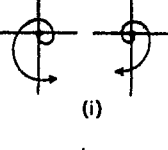
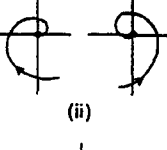

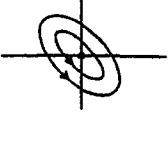
Raízes λ_1 e λ_2	Natureza do ponto crítico	Esboço da órbita		Estabilidade
$\Delta > 0$ $\begin{cases} \lambda_1 > \lambda_2 > 0 & (i) \\ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 & (ii) \end{cases}$	nóculo (impróprio)			instável assintoticamente estável
$\Delta > 0, \lambda_1 < 0 < \lambda_2$	ponto de sela			instável
$\Delta = 0$ $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 > 0 & (i) \\ \lambda_1 = \lambda_2 < 0 & (ii) \end{cases}$	nóculo			instável assintoticamente estável
$\Delta < 0$ $\begin{cases} \lambda = \alpha \pm \beta i \\ \alpha > 0 & (i) \\ \alpha < 0 & (ii) \end{cases}$	ponto espiral			instável assintoticamente estável
$\Delta < 0, \alpha = 0$	centro			estável

Fig.4

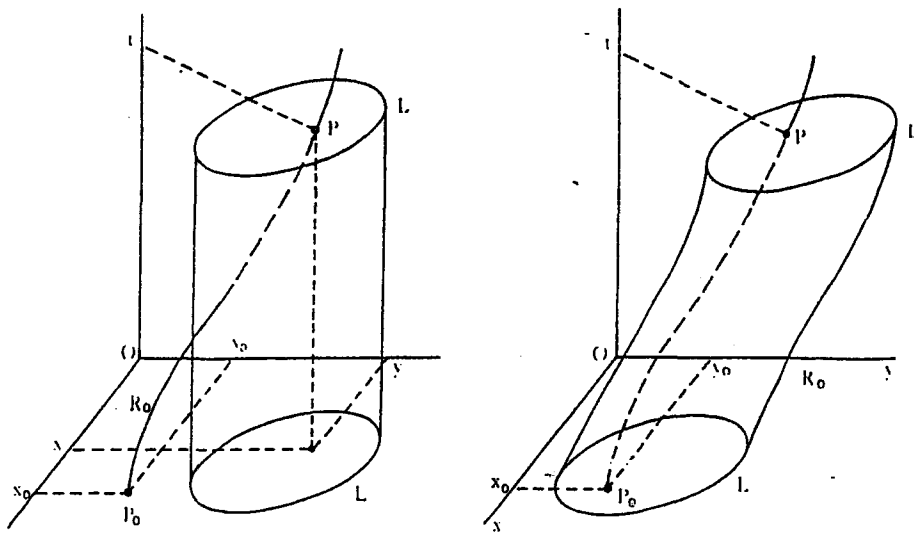


Fig.5

Referências:

- [1]. Arnold, V. 1974, Équations Différentielles Ordinaires, Editions Mir. Moscou.
- [2]. Bassanezi, Rodney Carlos, Wilson, CastroFerreira Jr. 1988, Equações Diferenciais com Aplicações. Editora Harbra Ltd. Cap. V, pp. 321-340.
- [3]. Destouches, Jean-Louis, 1948, Principes de la Mécanique Classique , pp.39-42 C.N.R.S. Éditeur, Paris.
- [4]. Jessel, M. , 1973, Acoustique Théorique, propagation et holoфонie, Masson et Cie.

CAPÍTULO VII

CONSIDERAÇÕES SOBRE O VÁCUO E O CAMPO ELECTROMAGNÉTICO SUGERIDAS PELAS FÓRMULAS DE BLASIUS DA HIDRODINÂMICA

1. Introdução. Escoamentos planos de um fluido incompressível

Consideremos a equação de Laplace em \mathbb{R}^2 :

$$\text{Lap}\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$$

Seja $Z=x+iy$ a variável complexa em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Seja dada uma função de $Z, W=f(Z)$ qualquer,

$$W = f(x + iy) \quad (1)$$

Se W for harmónica o mesmo sucede a φ e a Ψ . Neste caso $W(Z)$ é holomorfa, por se verificarem as condições de Cauchy-Riemann que, em coordenadas cartesianas, são:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (2-2)$$

As equações $\varphi(x,y) = C^{te}$ e $\psi(x,y) = C^{te}$ definem congruências no plano (O,x,y) nas quais as curvas φ intersectam ortogonalmente as curvas ψ definindo nesse plano uma quadrícula constituída por quadriláteros ditos *malhas de Beltrami*. Se $\varphi(x,y)$ for o potencial escalar do campo de velocidade do movimento plano do fluido e $\psi(x,y)$ a função de corrente, tem-se, sob condições suficientes de regularidade da velocidade $\vec{u}(x,y)$ e do seu domínio de definição, que suporemos serem sempre verificadas:

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{a} \quad (3)$$

É o teorema de Helmholtz, no qual φ é dito o *potencial escalar de \vec{u}* e \vec{a} *potencial vector de \vec{u}* ; $\vec{a}^*(x,y)$ é dado por:

$$\vec{a} = \psi\vec{e}_z \quad (4)$$

O espaço \mathbb{R}^3 está aqui referido à base cartesiana ortonormal $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e o z que figura em \vec{e}_z na expressão da base não é o complexo $x+iy$ mas a terceira coordenada cartesiana neste espaço.

De (3) e (4) vem:

$$\bar{\mathbf{u}} = \text{grad}\varphi - \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \text{grad}\psi \quad (5)$$

que exprime, tal como (3), sendo válida (4), o teorema de Helmholtz.

Ao vector real:

$$\bar{\mathbf{u}} = u_x \bar{\mathbf{e}}_x + u_y \bar{\mathbf{e}}_y \quad (6)$$

faz-se corresponder a *velocidade complexa*:

$$\zeta(Z) = u_x - iu_y \quad (7)$$

sendo então

$$\zeta(Z) = \frac{d\bar{Z}}{dt} \quad (8)$$

$\zeta(Z)$ é o conjugado complexo de dZ/dt . A relação entre ζ e $W(Z)$ é:

$$\zeta = \bar{W}'(Z) \quad (9)$$

Prova-se que, no caso geral, se tem num escoamento plano incompressível a equação de Poisson:

$$\text{Lap}W = D - 2iw = \frac{\xi}{\rho} - 2iw \quad (10)$$

sendo ρ a densidade de massa do fluido, $D = \sum_k D_k$ o débito total volúmico das fontes ($D_k > 0$) e sumidouros ($D_k < 0$), e $\Gamma = \sum_k \Gamma_k$ a intensidade total dos vórtices presentes ($\Gamma_k > 0$ no sentido anti-horário e $\Gamma_k < 0$ no sentido horário). Prova-se que uma fonte pontual em $Z = a$ de débito D é traduzida pelo potencial complexo (note-se que D representa aqui um número e não uma função, como em (10)):

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln(Z - a) \quad (11)$$

dando origem à velocidade complexa:

$$\zeta(Z) = \frac{D}{2\pi} \frac{1}{Z - a} \quad (12)$$

Tomando $Z - a = r \exp(i\theta)$, e por ser $\ln Z = \ln|Z| + i\theta$, obtêm-se as expressões:

$$\zeta(Z) = \frac{D}{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad (13)$$

Por ser:

$$\varphi = \frac{D}{2\pi} \ln r \quad (14-1)$$

$$\psi = \frac{D}{2\pi} \theta \quad (14-2)$$

com:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = \delta(x)\delta(y) = \delta(x + iy) = \delta(Z) \quad (15)$$

vem, de (13) e (14):

$$\mathbf{Lap}\varphi = D\delta(\vec{r}) \quad (16)$$

Como se trata de uma fonte em $z = a$ e não há turbilhões presentes, é $\Gamma = 0$ em (10); logo, por (15) vem:

$$\mathbf{Lap}W(Z) = D\delta(Z) \quad (17)$$

De (10) vem:

$$\mathbf{Lap}\psi = \frac{D}{2\pi} \mathbf{Lap}\theta = 0 \quad (18)$$

Logo $\mathbf{Lap}\theta = 0$; no caso de uma fonte pontual de um fluido incompressível e no complemento desta, W, ϕ e ψ são funções harmónicas. Comparando (17) com (10) notamos em (10) a falta do termo $(-2i\omega)$ por se tratar de uma fonte e não existir nenhum turbilhão.

Se o fluido fosse compressível (velocidade do som $a = \sqrt{dp/d\rho}$ finita) (10) seria substituída por:

$$\mathbf{Lap}W - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = D - 2i\omega \quad (19)$$

Logo viria de (1) e (19):

$$\mathbf{Lap}\varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = D \quad (19')$$

$$\mathbf{Lap}\psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2\omega \quad (19'')$$

As equações (19') e (19'') substituiriam, respectivamente, as equações de Poisson para fluidos incompressíveis, que derivam directamente de (10), e que são:

$$\mathbf{Lap}\varphi = D \quad (20')$$

$$\mathbf{Lap}\psi = -2\omega \quad (20'')$$

W só é harmónica e holomorfa, e φ e ψ só são harmónicas para fluidos incompressíveis na ausência de fontes, sumidouros, turbilhões e multipolos destes.

Logo: $W(Z)$ é então holomorfa e harmónica onde não houver tais singularidades. Os turbilhões não contribuem para φ que é harmónica onde não houver fontes, sumidouros ou multipolos e as fontes não contribuem para ψ que é harmónica na ausência de turbilhões.

1.1. Potencial complexo do escoamento devido a uma fonte pontual

Prova-se que uma fonte pontual em $Z = a$ de débito D corresponde ao potencial complexo:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln(Z - a) \quad (21)$$

Então, tomando $Z - a = r \exp(i\theta)$ vem:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} (\ln r + i\theta) \quad \forall r > 0, \theta \in \mathbf{R} \quad (22)$$

Comparando com (1) vem:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{D}{2\pi} \ln r \quad \forall r > 0 \quad (23-1)$$

Por outro lado:

$$\psi(r, \theta) = \frac{D}{2\pi} \theta \quad \forall \theta \in \mathbf{R} \quad (23-2)$$

Fazendo $D = -i\Gamma$ a expressão (21) conduz a:

$$W(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - a) \quad (24)$$

Logo:

$$\zeta(Z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{Z - a} \quad (25)$$

1.2. Aplicação à Electrostática da teoria das funções complexas de variável complexa

Vamos associar ao campo eléctrico vectorial real:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \quad (26)$$

o escalar complexo

$$E = E_x - iE_y \in \mathcal{C} \quad (27)$$

que pode ser visto como um vector do espaço vectorial 1-Dimensional sobre o corpo \mathcal{C} . Se \vec{E} for irrotacional é derivável de um potencial complexo $\dot{W}(Z)$ pela relação:

$$E^c = -W^*(Z) \quad (28)$$

$$W^* = \varphi^* + i\psi^* \quad (29)$$

verificando-se então sempre a igualdade:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* \quad (30)$$

Se \vec{E} for um campo harmónico não estacionário tem-se:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (31)$$

com $\vec{r} = (x, y, z)$. Substituindo na equação de Maxwell:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (32)$$

vem:

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (33)$$

(no vácuo ou num dieléctrico \vec{E} e \vec{B} então em fase). A dependência explícita de \vec{B} em relação ao tempo implica que seja $\text{rot}\vec{E} \neq 0$.

No caso de um campo eléctrico irrotacional dependente do tempo teremos:

$$\mathbf{E}^c = -\frac{\partial \bar{W}(\mathbf{Z}, t)}{\partial \mathbf{Z}}$$

Se \mathbf{W}^* depender do tempo, o mesmo sucede a φ^* e ψ^* . Se o campo for estacionário e irrotacional, o que sucede no referencial onde as cargas geradoras do campo estão em repouso, verifica-se a equação (no vácuo):

$$\text{Lap}\varphi^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (34)$$

Note-se que onde for $\rho_e \neq 0$, $\mathbf{W}^*(\mathbf{Z})$ não é holomorfa nem harmónica. Logo numa tal região não é possível determinar uma “função de corrente” pelas condições de holomorfia de Cauchy-Riemann. No entanto, se o suporte da distribuição de carga tiver um 3-volume nulo, (caso de uma carga distribuída numa linha ou superfície) é possível determinar ψ^* . Consideremos a expressão geral de um campo \vec{E} não estacionário,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (35)$$

sendo $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ (se numa região do espaço existir um campo eléctrico dependente do tempo existe sempre simultaneamente um campo magnético). Então tem-se:

$$\text{div}\vec{E} = -\text{Lap}\varphi^* - \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{A} \quad (36)$$

Da condição de gauge de Lorentz no vácuo:

$$\operatorname{div} \bar{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0 \quad (37)$$

tira-se $\operatorname{div} \bar{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}$ e substitui-se em (36).

Chama-se suporte de ρ (ρ é uma função ou função generalizada) ao fecho do conjunto de pontos onde é $\rho \neq 0$. O conjunto de pontos onde é $\rho(P) = 0$ chama-se núcleo de ρ :

$$\operatorname{Ker} \rho = \{P \in \mathbb{R}^3 : \rho(P) = 0\}$$

Vem da substituição da expressão de $\operatorname{div} \bar{A}$ em (36):

$$\operatorname{Lap} \varphi^* - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (38)$$

Para o potencial vector \bar{A} vem:

$$\operatorname{Lap} \bar{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \bar{j} \quad (39)$$

Consideremos agora o equivalente electrodinâmico de (5):

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi^* + \operatorname{rot} \bar{a}^* = -\operatorname{grad} \varphi^* - \bar{e}_z \wedge \operatorname{grad} \psi^* \quad (40)$$

onde figura a “função de corrente” ψ^* de \bar{E} , no caso de \bar{E} ter valores no plano (xOy). Neste caso tem-se:

$$\bar{a}^* = \bar{e}_z \psi^* \quad (41)$$

Calculemos a divergência de ambos os membros de (40):

$$\operatorname{div} \bar{E} = -\operatorname{Lap} \varphi^* - \bar{e}_z \wedge \operatorname{grad} \psi^* \quad (42)$$

Pela lei de Gauss:

$$-\operatorname{Lap} \varphi^* - \operatorname{div}(\bar{e}_z \wedge \operatorname{grad} \psi^*) = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (43)$$

Onde for $\rho_e \neq 0$, W^* é holomorfa e harmónica sendo também harmónicas φ^* e ψ^* .

A igualdade (40) pode escrever-se na forma (35). Então tem-se ($\bar{a}^* = \psi^* \bar{e}_z$):

$$\operatorname{rot} \bar{a}^* = \operatorname{rot}(\psi^* \bar{e}_z) = \bar{e}_z \wedge \operatorname{grad} \psi^* \quad (44)$$

vindo (34):

$$\operatorname{Lap} \varphi^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

A relação (29) pode escrever-se, atendendo às condições de holomorfia, (logo onde for $\rho_e = 0$):

$$E_x = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial y} = -\operatorname{Re} W'(Z) \quad (45-1)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \operatorname{Im} W'(Z) \quad (45-2)$$

Notemos que é:

$$W'(Z) = \text{Re}W'(Z) + i\text{Im}W'(Z) = -E_x + iE_y \quad (46)$$

Onde for $\rho_e \neq 0$ tem-se, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y \partial x}; & \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (47)$$

Logo:

$$\text{Lap}\varphi^* = 0$$

$$\text{Lap}\psi^* = 0$$

A primeira destas equações já tinha sido obtida para uma região onde fosse $\rho_e = 0$ derivando a segunda das condições de holomorfia de W^* .

Da igualdade entre o primeiro e o terceiro membros de (40),

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* + \vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi^*$$

se \vec{E} depender explicitamente do tempo e não for irrotacional (campo \vec{E} associado a uma radiação),

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (48)$$

com $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, vem:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi^* \quad (49)$$

Logo o potencial vector da indução magnética é determinado pela “função de corrente” do campo eléctrico, à parte uma “constante aditiva”, que é uma função independente do tempo:

$$\vec{A}(t, x, y, z) = -\vec{e}_z \wedge \int \text{grad}\psi^* dt + \vec{A}(x, y, z)$$

Se \vec{E} for irrotacional verifica-se (30) e podem escolher-se funções φ^* e ψ^* tais que:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* = \vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi^* \quad (50)$$

concluimos que neste caso existem funções φ^* e ψ^* que verificam a igualdade:

$$-\text{grad}\varphi^* = \vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi^* \quad (51)$$

Notemos que (30) pode escrever-se na forma:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^* + \text{rot}\vec{a}^* \quad (52)$$

com $\vec{a}^* = \vec{e}_z \psi^*$. A função vectorial \vec{a}^* é chamada *potencial vector do campo eléctrico*. Se \vec{E} for irrotacional poder-se-á escrever equivalentemente a (29):

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi^* = \text{rot}\vec{a}^* \quad (53)$$

Voltemos agora à expressão (29) do potencial complexo $W^* = \phi^* + i\psi^*$. Então:

$$\text{Lap}W^* = \text{Lap}\phi^* + i\text{Lap}\psi^*$$

De $\vec{a}^* = \vec{e}_z \psi^*$ vem $\psi^* = \vec{e}_z \cdot \vec{a}^*$. Logo é: $\text{Lap}\psi^* = \vec{e}_z \cdot \text{Lap}\vec{a}^* \equiv \text{Lap}(\vec{e}_z \cdot \vec{a}^*)$. Logo:

$$\text{Lap}W^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} + i\vec{e}_z \cdot \text{Lap}\vec{a}^* \quad (53')$$

Note-se que se \vec{a}^* estiver dirigido segundo \vec{e}_z se tem $\vec{e}_z \cdot \vec{a}^* = a^*$, vindo:

$$\text{Lap}\psi^* = \text{Lap}a^* \quad (54)$$

Logo:

$$\text{Lap}W^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} + i\text{Lap}\psi^* \quad (55)$$

Em Hidrodinâmica, se for $\vec{u} = \text{rot}\vec{a}$ temos $\text{Lap}\vec{a} = -2\vec{\omega}$, ($\text{div}\vec{a} = 0$). Procedendo por analogia vamos definir um pseudo-vector “turbilhão electromagnético” pela relação:

$$\text{Lap}\vec{a}^* = -2\vec{\Omega} \quad (56)$$

com $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$. Então (53') dá lugar a:

$$\text{Lap}W^* = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} - 2i\Omega \quad (57)$$

Esta equação é a análoga da equação hidrodinâmica (10). Se o campo electromagnético depender do tempo (57) deve ser substituída por:

$$\text{Lap}W^* - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 W^*}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} - 2i\Omega \quad (58)$$

De (56) vem a relação:

$$\text{Lap}\psi^* = -2\Omega \quad (59)$$

se não houver dependência temporal (58) decompõe-se em:

$$\text{Lap}\phi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (60)$$

$$\text{Lap}\psi^* - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = -2\Omega \quad (61)$$

(61) é equivalente a:

$$\mathbf{Lap}\vec{a}^* - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{a}^*}{\partial t^2} = -2\vec{\Omega} \quad (62)$$

Podemos comparar estes resultados com as equações (19) (19') e (19'').

1.3. Campo eléctrico devido a uma distribuição uniforme rectilínea indefinida e independente do tempo de carga eléctrica.

A expressão deste campo, em coordenadas polares, no plano normal ao suporte da distribuição é:

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} \quad (63)$$

na qual λ é a densidade linear de carga. Trata-se de um campo irrotacional relacionado por (30) com o potencial escalar:

$$\phi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \quad (64)$$

Para $r > 0$ existe uma “função de corrente do campo eléctrico”, ψ^* , relacionada com ϕ^* pelas condições de Cauchy-Riemann, dada por:

$$\psi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \theta \quad \theta \in \mathbf{R} \quad (65)$$

De (63) e (64) vem:

$$\mathbf{div}\vec{E} = -\mathbf{Lap}\phi^* = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \mathbf{Lap} \ln r$$

com:

$$\mathbf{Lap} \ln r = -2\pi\delta(\vec{r})$$

vindo, assim:

$$\mathbf{div}\vec{E} = -\mathbf{Lap}\phi^* = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (66)$$

De (64) e (65) vem o potencial complexo:

$$\forall r > 0, \theta \in \mathbf{R} \quad W^* = \phi^* + i\psi^* = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r + i\theta) \quad (67)$$

Por ser $\ln Z = \ln r + i\theta$ vem de (67):

$$W^*(Z) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln Z \quad (68)$$

Este potencial é holomorfo em $Z \neq 0$, e tem em $Z = 0$ um ponto de ramificação logarítmica (Supõe-se que $W^*(Z)$ tem valores na recta projectiva complexa que, munida da distância euclideana $d(Z_1, Z_2) = |Z_1 - Z_2|$ constitui um espaço métrico localmente compacto, compactificado pela adunção de um só ponto impróprio, a recta projectiva complexa, $PC = C \cup \{\infty\}$, existindo e sendo então determinado o $\lim_{Z \rightarrow 0} W^*(Z)$. Então:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \lim_{Z \rightarrow 0} W^*(Z) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \lim_{Z \rightarrow 0} \ln Z = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \lim_{Z \rightarrow 0} (\ln|Z| + i\theta)$$

Em PC faz-se a identificação:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \pm \infty \pm i\theta = \infty$$

vindo assim:

$$\exists \lim_{z \rightarrow 0} W(Z) = \infty$$

Se se considerar que $W(Z)$ tem valores num espaço topológico compacto com vários pontos impróprios não existe o limite anterior, no sentido de este não ter um valor único.

1.4. Potencial complexo da indução magnética devida a uma corrente eléctrica rectilínea indefinida.

O potencial complexo de $\vec{B}, \tilde{W}(Z)$ está relacionado com este vector, se \vec{B} for irrotacional, pelas expressões:

$$\mathbf{B}^c(r, \theta) = B_x - iB_y = \frac{d\tilde{W}}{dZ} \quad (69)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y = \text{grad} \tilde{\phi} \quad (70)$$

com $\tilde{\phi} = \text{Re } \tilde{W}(Z)$. Notemos que $\tilde{\phi}$ não existe quando for $\text{rot} \vec{B} \neq 0$, caso em que também não existe \tilde{W} .

Neste caso não existem $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{W}$.

Como \vec{B} é solenoidal ($\text{div} \vec{B} = 0$) o seu potencial complexo,

$$\tilde{W}(Z) = \tilde{W}(x + iy) = \tilde{\phi}(x, y) + i\tilde{\psi}(x, y) \quad (71)$$

é holomorfo e harmónico onde exista; $\tilde{\phi}$ (potencial escalar de \vec{B} e parte real de \tilde{W}) e $\tilde{\psi}$ (parte imaginária de \tilde{W}) são então aí funções harmónicas. Vamos analisar o caso do campo magnético

criado por uma corrente eléctrica rectilínea e indefinida de intensidade I normal ao plano onde se avalia \vec{B} . Neste caso, usando coordenadas polares nesse plano é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (72)$$

Por ser então $\text{rot}\vec{B} = 0$ se $r \neq 0$, há a garantia de existir $\tilde{\varphi}(r, \theta)$ tal que se tenha:

$$\vec{B} = \text{grad}\tilde{\varphi} \quad (73)$$

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) temos:

$$\text{grad}\tilde{\varphi} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z} \vec{e}_z \quad (74)$$

De (72) e (74) vem então:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Integrando:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\mu_0 I \theta}{2\pi} \quad (75)$$

Para $r > 0$, $\tilde{W}(r, \theta) = \tilde{\varphi}(r, \theta) + i\tilde{\psi}(r, \theta)$ é holomorfa, e as condições de holomorfia são:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta} \quad (76-1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r} \quad (76-2)$$

Substituindo (75) em (76-1) e (76-2) obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta} = 0 \quad (77-1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\mu_0 I}{2\pi} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r} \quad (77-2)$$

Logo:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(r)$$

Portanto:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \quad (78)$$

Substituindo (75) e (78) em (71) vem, atendendo a que é $Z = r \exp(i\theta)$, o potencial complexo de \vec{B} é dado por:

$$\tilde{W}(Z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\theta + i \ln r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} i \left(\frac{\theta}{i} + \ln r \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} i (\ln r - i\theta) \quad (79)$$

Ou seja:

$$\tilde{W}(Z) = i \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln Z \quad (80)$$

Logo:

$$\overline{\tilde{W}}(Z) = -i \frac{\mu_0 I \ln Z}{2\pi} \quad (81)$$

As funções $W(Z)$ e a sua conjugada são holomorfas e têm um ponto de ramificação logarítmica em $Z = 0$. Da relação (69), vem:

$$B^C = B_x - iB_y = \tilde{W}'(Z) \Rightarrow \overline{B^C} = B_x + iB_y = \overline{\tilde{W}'}$$

De (81) e da relação anterior vem a expressão:

$$B^C = -i \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{Z} \quad (82)$$

1.5. Força de interação entre duas correntes eléctricas rectilíneas indefinidas paralelas

Neste caso cada corrente sofre a acção do campo magnético produzido pela outra: a corrente de intensidade I_2 sofre a acção do campo magnético devido a I_1 e reciprocamente. Vamos representar a intensidade I_1 por um vector \vec{I}_1 do qual I_1 é o valor algébrico em relação a um vector unitário \vec{n} , escolhido, e proceder análogamente com I_2 :

$$\vec{I}_i = I_i \vec{n} \quad i = 1, 2.$$

O campo magnético H devido a I_1 em coordenadas polares num plano normal aos dois condutores é:

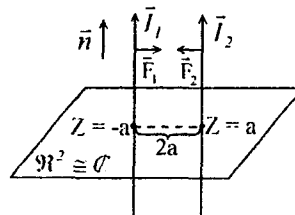
$$\vec{H} = \frac{\vec{I}_1 \wedge \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (83)$$

Na situação da Fig.1 a corrente I_2 está sujeita à indução:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{I}_1 \wedge \vec{r}}{r^2} \quad (84)$$

A expressão da força exercida pela corrente \vec{I}_1 sobre a carga $dQ_2 = I_2 dt$ da 2ª corrente é:

Fig.1



$$d\vec{f} = dQ_2 \vec{v}_2 \wedge \vec{B} = \frac{dQ_2}{dt} d\vec{l}_2 \wedge \vec{B} = \vec{I}_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B} \quad (85)$$

Substituindo \vec{B} em (85) pela sua expressão (84) vem:

$$\vec{f} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{I}_2 \wedge \vec{I}_1 \cdot \vec{r}}{r^2} l_2 \quad (86)$$

A força que a unidade de comprimento do primeiro circuito exerce sobre a unidade de comprimento do segundo é $\vec{F} = \vec{f} / l_2$ e de (86) vem:

Como \vec{I}_2 é normal a \vec{r} ($\vec{I}_2 \cdot \vec{r} = 0$) vem, da expressão anterior:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r^2} \vec{r} \quad (87)$$

Logo concluímos que correntes eléctricas do mesmo sentido se atraem e de sentidos contrários se repelem.

2. Cálculo dos esforços globais em Mecânica dos Fluidos pelas fórmulas de Blasius

Pretendemos calcular o esforço exercido por um fluido de densidade ρ sobre uma parede banhada por ele. Quando falamos de pressão ou esforço sobre um arco de curva, referimo-nos à que é exercida pelo fluido sobre uma superfície cilíndrica de altura unitária, cuja directriz é esse arco de curva e cujas geratrizes são ortogonais ao plano desta. Se o arco AB da Fig.2 for uma linha de corrente fechada, a força e o momento complexos são dados pelas expressões:

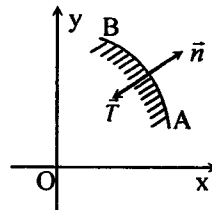


Fig.2

$$F^c = i \frac{\rho}{2} \oint_{(c)} \left(\frac{dW}{dZ} \right)^2 dZ \quad (88)$$

$$M^c = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C Z \left(\frac{dW}{dZ} \right)^2 dZ \quad (89)$$

C é a curva AB . Segundo as convenções adoptadas para a orientação das trajectórias, os integrais devem ser calculados no sentido anti-horário se o fluido do qual se estuda a acção estiver no exterior da região limitada por C , e no sentido horário se estiver no interior.

Consideremos um par de vórtices de intensidades Γ e $-\Gamma$ situados, respectivamente, nos pontos $Z = a$ e $Z = -a$. O potencial da velocidade do escoamento respectivo é:

$$W(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{Z-a}{Z+a} \right) \quad (90)$$

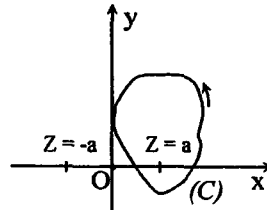


Fig.3

ao qual corresponde a velocidade complexa:

$$\zeta = u_x - iu_y = \frac{dW}{dZ} = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{Z+a}{Z-a} \right) \left(\frac{2a}{(Z+a)^2} \right) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{2a}{Z^2 - a^2}$$

Então vem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dZ} \right)^2 &= \\ &= -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{(Z-a)^2} - \frac{1/a}{Z-a} + \frac{1/a}{Z+a} + \frac{1}{(Z+a)^2} \right\} \end{aligned}$$

Vamos integrar ao longo da curva contornando o ponto $z = a$. O resíduo da função $(dW/dZ)^2$ em

$Z=a$ é $-\Gamma^2/4\pi^2 a$. Então:

$$F^c = \frac{i\rho}{2} 2\pi i \left(-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a} \right) \quad (91)$$

Logo:

$$\vec{F} = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi a} \vec{e}_x \quad (92)$$

Analogamente se obtém:

$$M^C = 0 \quad (93)$$

vindo então:

$$\vec{M} = 0 \quad (94)$$

Concluimos que dois vórtices pontuais do mesmo sentido se atraem. O resultado obtido é independente da linha de corrente (c) escolhida: Tomando para contorno (c) uma circunferência de centro $Z = a$ vê-se que o fluido exerce uma força repulsiva por unidade de comprimento de (c) e que para manter o turbilhão na posição $Z = a$ fixa é preciso exercer uma força finita sobre este que, se estiver situado na vizinhança de uma parede plana, é repellido por ela. Efectuando os mesmos cálculos para o momento vem $M = M^C = 0$.

Vamos agora utilizar as fórmulas de Blasius para calcular a interacção entre turbilhões de intensidades diferentes ($\Gamma_1 \neq \Gamma_2$) e obter daí as expressões análogas para fontes de débitos diferentes ($D_1 \neq D_2$).

Consideremos então um turbilhão pontual em $Z = -a$ de intensidade Γ_1 e outro de intensidade Γ_2 em $Z = a$. O potencial complexo do conjunto é:

$$W(Z) = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi} \ln(Z+a) - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \ln(Z-a) = -\frac{i}{2\pi} [\Gamma_1 \ln(Z-a) + \Gamma_2 \ln(Z+a)] \quad (94)$$

Derivando vem:

$$W'(Z) = -\frac{i}{2\pi} \left[\frac{\Gamma_1}{Z+a} + \frac{\Gamma_2}{Z-a} \right] \quad (95)$$

Atendendo a que é:

$$\frac{1}{Z^2 - a^2} = \frac{1/2a}{Z-a} - \frac{1/2a}{Z+a}$$

vem, por substituição na expressão de $W'(Z)^2$:

$$W'(Z)^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{\Gamma_1^2}{(Z+a)^2} + 2\Gamma_1\Gamma_2 \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{Z-a} - \frac{1}{Z+a} \right] + \frac{\Gamma_2^2}{(Z-a)^2} \right\} \quad (96)$$

Substituindo em (88) vem:

$$F^c = \frac{i\rho}{2} \left(-\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi^2 a} \right) 2\pi i = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a} \quad (97)$$

Logo:

$$\vec{F} = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a} \vec{e}_x \quad (98)$$

Se for $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ vem:

$$\vec{F} = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi a} \vec{e}_x \quad (99)$$

Concluimos que turbilhões do mesmo sentido se repelem e de sentidos diferentes se atraem. Fazendo $\Gamma = iD$ nas expressões da força (98) ou (99) obtêm-se as forças de interação entre fontes ou sumidouros:

$$F^C = -\frac{\rho D_1 D_2}{4\pi a} \quad (100)$$

$$\vec{F} = -\frac{\rho D_1 D_2}{4\pi a} \vec{e}_x \quad (101)$$

Se for $D_1 = D_2 = D$, vem:

$$F^C = -\frac{\rho D^2}{4\pi a} \quad (102)$$

$$\vec{F} = -\frac{\rho D^2}{4\pi a} \vec{e}_x \quad (103)$$

Concluimos que as fontes se atraem bem como os sumidouros; e que uma fonte e um sumidouro se repelem. Fazendo $D = -i\Gamma$ em (90) vem:

$$W(Z) = \frac{D}{2\pi} \ln \frac{Z-a}{Z+a} \quad (104)$$

A linha (c) é um contorno fechado qualquer, descrito no sentido anti-horário envolvendo $z = a$ e deixando de fora $z = -a$. Os elementos de redução do tursor dos esforços são obtidos de (100), (101), (102) e (103) fazendo nessas expressões a substituição $D = -i\Gamma$ vindo então as relações (97), (98), (99), (93-1) e (93-2).

Vem também:

$$M^C = 0 \quad (105)$$

e:

$$\vec{M} = 0 \quad (105')$$

Concluimos que o tursor dos esforços é equivalente a um vector único; que duas fontes ou dois sumidouros se atraem e que uma fonte e um sumidouro se repelem sendo sempre a força de interação inversamente proporcional à distância. Obtivemos equivalentemente a ação do fluido

sobre uma fonte pontual: se uma fonte debita na vizinhança de uma parede plana, a acção do fluido tende a aproximar a fonte da parede; para a manter fixa em $Z = a$ deve-se exercer sobre ela uma força oposta à dada por (101).

Sabemos que cargas eléctricas do mesmo sinal se repelem (em particular se forem iguais) tal como dois turbilhões do mesmo sentido (em particular se tiverem a mesma intensidade):

De (63) podemos concluir que a força de interacção entre duas distribuições electrostáticas, uniformes, rectilíneas, indefinidas e paralelas de carga eléctrica, à distancia $r = 2a$, é dada por:

$$F = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (106)$$

Notemos que cargas eléctricas do mesmo sinal se repelem bem como turbilhões do mesmo sentido. Neste último caso a respectiva força, como já vimos, é dada por (98):

$$F = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a}$$

Logo, se for possível identificar as expressões (98) e (106) poderemos eventualmente concluir que as referidas distribuições de carga eléctrica, de densidades λ_1 e λ_2 dão lugar a vórtices de intensidades respectivamente Γ_1 e Γ_2 :

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a}$$

Se for $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ vem:

$$\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi a} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (107)$$

Logo:

$$\Gamma = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_0 \rho}} \quad (108)$$

e portanto vêm as equações já apresentadas, respectivamente (97) e (98):

$$F^C = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a}$$

$$\vec{F} = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi a} \vec{e}_x$$

Pode concluir-se que:

$$M^C = 0 \quad (109)$$

$$\vec{M} = 0 \quad (109')$$

De (63) conclui-se que a força de interação entre duas distribuições electrostáticas uniformes, rectilíneas, indefinidas de densidades λ_1 e λ_2 , à distância $r = 2a$, por unidade de comprimento de cada uma delas, é igual à força de interação entre duas linhas de turbilhões de intensidades Γ_1 e Γ_2 se se verificar:

$$\Gamma_1 = \pm \lambda_1 \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \rho}}; \quad \Gamma_2 = \pm \lambda_2 \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \rho}}$$

Sinteticamente:

$$\Gamma_k = \pm \lambda_k \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \rho}} \quad (k = 1, 2) \quad (110)$$

Vamos admitir que os potenciais complexos da velocidade, $W(Z)$, e do campo eléctrico, $W^*(Z)$, têm o mesmo tipo de ponto crítico (ponto de ramificação logarítmica) na mesma posição ($Z = o$) do plano, existindo a relação:

$$\frac{W}{W^*} = K(\epsilon_0, \rho) \quad (111)$$

na qual ρ é a densidade de massa do meio subquântico e K uma função .

De (23) e (68) vem:

$$K(\epsilon_0, \rho) = \frac{-\frac{i\Gamma}{2\pi}}{-\frac{2\pi}{\lambda}} = i\epsilon_0 \frac{\Gamma}{\lambda} = \pm i \frac{\epsilon_0}{\lambda} \left(\lambda \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \rho}} \right) = \pm i \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\rho}} \quad (112)$$

Logo:

$$\Gamma = \frac{\lambda K}{i\epsilon_0} = -\frac{i\lambda K}{\epsilon_0} \quad (113)$$

Atendendo a que é $\mathbf{D} = -i\Gamma$, vem:

$$\mathbf{D} = -\frac{\lambda K}{\epsilon_0} \quad (114)$$

Portanto:

$$K(\epsilon_0, \rho) = -\epsilon_0 \frac{\mathbf{D}}{\lambda} \quad (115)$$

As intensidades Γ_1 e Γ_2 apresentam uma ambiguidade de sinal, tendo Γ_1 e Γ_2 o mesmo sinal se o mesmo suceder com λ_1 e λ_2 .

Equivalentemente a (112) tem-se:

$$\Gamma = K(\rho, \epsilon_0) \frac{\lambda}{i\epsilon_0} = -iK(\epsilon_0, \rho) \frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad (114)$$

Consideremos duas distribuições de carga eléctrica rectilíneas uniformes, estáticas, de densidade λ_1 e λ_2 em $Z = -a$ e $Z = a$, respectivamente. O potencial complexo dessa associação é:

$$W(Z)^* = K(\epsilon_0, \rho) \left[-\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(Z+a) - \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(Z-a) \right] = -\frac{K(\epsilon_0, \rho)}{2\pi\epsilon_0} [\lambda_1 \ln(Z+a) + \lambda_2 \ln(Z-a)]$$

Derivando, obtém-se:

$$W'^* = -\frac{K(\epsilon_0, \rho)}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_1}{Z+a} + \frac{\lambda_2}{Z-a} \right]$$

$$\begin{aligned} W(Z)^{\prime 2} &= \frac{K(\epsilon_0, \rho)^2}{4\pi^2} \left[\frac{\lambda_1^2}{(Z+a)^2} + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(Z-a)(Z+a)} + \frac{\lambda_2^2}{(Z-a)^2} \right] = \\ &= \frac{K^2}{4\pi^2} \left[\frac{\lambda_1^2}{(Z+a)^2} + \frac{\lambda_1\lambda_2/a}{Z-a} - \frac{\lambda_1\lambda_2/a}{(Z-a)^2} + \frac{\lambda_2^2}{(Z-a)^2} \right] \end{aligned}$$

Logo substituindo em (88), vem:

$$F^C = \frac{i\rho}{2} \frac{K^2}{4\pi^2\epsilon_0} \oint_{(C)} [\dots] dZ = i \frac{\rho}{2} \frac{K^2}{4\pi^2\epsilon_0} 2\pi i \frac{\lambda_1\lambda_2}{a}$$

Simplificando, vem:

$$F = F^C = -\frac{\rho K^2 \lambda_1 \lambda_2}{4\pi\epsilon_0^2} \quad (115)$$

com

$$K = \pm i \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\rho}}$$

vindo, portanto:

$$F = F^C = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{com } r=2a$$

Fazendo em (115) a substituição:

$$D_1 = \pm \frac{i\lambda_1}{\sqrt{\epsilon_0\rho}}; \quad D_2 = \pm \frac{i\lambda_2}{\sqrt{\epsilon_0\rho}}$$

obtém-se:

$$F = F^C = -\frac{\rho D_1 D_2}{4\pi a} = -\frac{\rho D_1 D_2}{2\pi r} \quad \text{com } r = 2a \quad (116)$$

Analogamente,

$$M = M^C = 0 \quad (117)$$

3. Interação de correntes eléctricas

Vamos recorrer à expressão (84) da indução magnética devida a uma corrente I_1 na situação esquematizada na Fig.3, que conduz a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{I}_1 \wedge \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r^2} \vec{e}_\theta \quad (118)$$

(81) dá-nos o conjugado do potencial complexo da indução magnética devida a aI_1 :

$$\widetilde{W}_1 = -i \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln Z$$

Se I_1 está em $Z = -a$, vem:

$$\widetilde{W}_1 = -i \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln(Z + a) \quad (119)$$

Se I_2 está em $Z = a$:

$$\widetilde{W}_2 = -i \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln(Z - a) \quad (120)$$

Para a sobreposição das duas singularidades tem-se o potencial:

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 = -i \frac{\mu_0}{2\pi} [I_1 \ln(Z + a) + I_2 \ln(Z - a)] \quad (121)$$

Logo:

$$\vec{B}^C = \mathbf{B}_x + i\mathbf{B}_y = \widetilde{W}(Z) = -\frac{i}{2\pi} \mu_0 \left[\frac{I_1}{Z + a} + \frac{I_2}{Z - a} \right] \quad (122)$$

O potencial da velocidade para um conjunto de dois turbilhões de intensidades Γ_1 em $z = -a$ e Γ_2 em $z = a$ é dado por (90):

$$W(Z) = -\frac{i}{2\pi} \{ \Gamma_1 \ln(Z + a) + \Gamma_2 \ln(Z - a) \}$$

Por analogia com (111) vamos supor que existe uma função K^* tal que:

$$\frac{W}{\widetilde{W}} = K^*(\mu_0, \rho) \quad (123)$$

Então, respectivamente das expressões (90) e (121) vem a igualdade equivalente a (123):

$$W(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{Z-a}{Z+a}\right)$$

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 = -i\frac{\mu_0}{2\pi} [\mathbf{I}_1 \ln(Z+a) + \mathbf{I}_2 \ln(Z-a)]$$

$$-\frac{i}{2\pi} [\Gamma_1 \ln(Z+a) + \Gamma_2 \ln(Z-a)] = K^* \cdot \left(-i\frac{\mu_0}{2\pi}\right) [\mathbf{I}_1 \ln(Z+a) + \mathbf{I}_2 \ln(Z-a)]$$

Portanto \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 estão relacionadas com Γ_1 e Γ_2 pela expressão:

$$\Gamma_i = \mu_0 K^*(\mu_0, \rho) \mathbf{I}_i \quad (124)$$

Se admitirmos que uma corrente eléctrica I dá lugar na região vazia circundante (em Γ_i figuram, respectivamente, a permeabilidade magnética μ_0 e a permitividade eléctrica ϵ_0 do vácuo) a um vórtice livre do meio subquântico, as expressões (124) traduzirão um fenómeno físico efectivo e não apenas uma analogia ocasional de formalismo matemático.

A serem correctas as hipóteses feitas e as conclusões a que chegámos parece verosímil que o campo electromagnético se identifique com um movimento do meio subquântico.

Do exposto podemos concluir que duas correntes eléctricas paralelas indefinidas de intensidades I_1 e I_2 exercem, uma sobre a outra, a mesma força de interacção que duas linhas de turbilhões, paralelas e indefinidas, de intensidades Γ_1 e Γ_2 , dadas por (124). Substituindo (124) em (98) vem a expressão:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\rho\mu_0^2 K^{*2}(\mu_0, \rho) \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2}{4\pi a} \vec{\mathbf{e}}_x \quad (125)$$

A expressão (87) é:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2}{2a} \vec{\mathbf{e}}_x$$

Para se identificarem os valores algébricos das forças que figuram em (125) e (87) basta tomar:

$$\rho\mu_0 K^{*2} = -1 \quad (126)$$

vindo então:

$$K^* = \pm \frac{i}{\sqrt{\rho\mu_0}} \quad (127)$$

Obtivemos a expressão explícita de duas funções $K^*(\mu_0, \rho)$ satisfazendo às especificações impostas.

A variável ρ que figura em (127) e que desaparece na expressão da força de interacção (87) parece interpretável como a densidade de massa do meio subquântico.

Referências :

- [1] . Germain, P.; *Mecanique des Milieux Continus*, 1962, Massont et C^{ie} Editeurs, Paris.
- [2] . Palacios J.; *Electricidad y Magnetismo*, 1959, Editorial Espasa-Calpe, S.A., Madrid.
- [3] . Peixoto, J.P.; *Lições da Cadeira de Meteorologia*, F.C.U.L., 1972.

CAPITULO VIII

UMA GENERALIZAÇÃO NÃO LINEAR POSSÍVEL DAS EQUAÇÕES DE D'ALEMBERT PARA O POTENCIAL ESCALAR DO CAMPO ELÉCTRICO E POTENCIAL VECTOR DA INDUÇÃO MAGNÉTICA. EXISTÊNCIA EVENTUAL DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS NÃO LINEARES PROPAGANDO-SE NO VÁCUO.

1. Generalização não linear da equação de D'Alembert para o potencial da velocidade

Em Cosmologia admite-se a não linearidade do vácuo e portanto a possibilidade de propagação nesse meio de ondas electromagnéticas não lineares. Esboçamos aqui uma hipotética teoria de tais ondas, baseada na concepção de De Broglie do meio subquântico e nas analogias que temos estabelecido entre o Electromagnetismo e a Hidrodinâmica.

Comecemos por considerar a equação (49-Cap.I):

$$\text{Lap}\varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\xi}{\rho} + \frac{1}{a^2} \left\{ 2\text{grad}\varphi \cdot \text{grad} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \text{grad}\varphi \cdot \text{grad} \left[\frac{(\text{grad}\varphi)^2}{2} \right] \right\}$$

Nesta equação φ é o potencial escalar da velocidade \vec{u} do escoamento de um fluido invíscido. Admitimos que o meio subquântico adquire trajectórias gozando de propriedades particulares na presença de um campo electromagnético, as suas suas linhas integrais, e calculemos o gradiente de ambos os membros da mesma equação:

$$\text{Lapgrad}\varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{grad}\varphi = \text{grad} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) + \frac{1}{a^2} \left\{ \text{grad} \left[2\text{grad}\varphi \cdot \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] + \text{grad} (\text{grad}\varphi) \cdot \text{grad} |\text{grad}\varphi|^2 \right\}$$

(1)

Pelo Teorema de Helmholtz é: $\vec{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{a}$, com $\vec{a} = \psi\vec{e}_z$. Desta última expressão vem:

$$\text{rot}\vec{a} = -\vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi = \text{grad}\psi \wedge \vec{e}_z \quad (2)$$

Logo, equivalentemente, vem a equação (2-Cap.VI):

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi - \vec{e}_z \wedge \text{grad}\psi$$

Se o fluido invíscido for incompressível verifica-se necessariamente a relação:

$$\text{grad}\varphi = \text{rot}\vec{a}, \quad \text{com: } \vec{a} = \psi\vec{e}_z$$

Equivalentemente:

$$\mathbf{grad}\varphi = -\bar{\mathbf{e}}_z \wedge \mathbf{grad}\psi \quad (3)$$

É como vimos a formulação vectorial das condições de holomorfia do potencial complexo $W(\mathbf{Z}) = \varphi(\mathbf{Z}) + i\psi(\mathbf{Z})$, válida no caso de haver incompressibilidade:

$$\mathbf{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{\mathbf{e}}_y$$

Repitamos esses cálculos:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{\mathbf{e}}_x \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + \bar{\mathbf{e}}_y \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{\mathbf{e}}_y$$

Então vêm, respectivamente, as relações (19-1-Cap.VI) e 19-2-Cap.VI):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

A equação (1) é não linear. Obtivemos uma generalização não linear da equação de d'Alembert exclusivamente fundamentada na física de Newton e que, portanto em principio, só tem que ser covariante para o grupo de Galileu, podendo ainda o ser para outros grupos de transformações. A ela deve satisfazer o potencial escalar φ do campo de velocidade do meio subquântico, quer haja ou não irrotacionalidade do movimento deste. Se o escoamento não for irrotacional tem-se, como já se viu, $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{grad}\varphi + \mathbf{rot}\bar{\mathbf{a}}$.

Fixemo-nos no caso do escoamento conservativo, vindo $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{grad}\varphi$. Neste caso o campo $\bar{\mathbf{u}} = -\bar{\mathbf{A}}$ tem rotacional nulo, sendo $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{rot}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$. Logo, a serem correctas as hipóteses iniciais, são válidas as equações (49-Cap.I) e (2) e admitida a hipótese de ser o campo electromagnético um movimento do meio subquântico teremos $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{k}_1\bar{\mathbf{A}}$, logo $\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{k}_1\bar{\mathbf{u}}$. Um campo electromagnético pode propagar-se por ondas não lineares se satisfizer à equação obtida de (1) fazendo as substituições $\mathbf{grad}\varphi = \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{k}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}$.

$\mathbf{a} = \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$, $\mathbf{grad}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = -\eta_0\bar{\mathbf{J}}_m$, $\mu_0 = \mathbf{k}_1\eta_0$. Portanto:

$$\mathbf{k}_1^{-1}(\mathbf{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2}) = -\eta_0\bar{\mathbf{J}}_m - \mu_0\epsilon_0\mathbf{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-2}\bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mathbf{grad}\left[\mathbf{k}_1^{-3}\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\} \quad (4)$$

Logo:

$$\mathbf{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0\bar{\mathbf{J}} - \mu_0\epsilon_0\mathbf{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mathbf{k}_1^{-2}\mathbf{grad}\left[\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\} \quad (4')$$

Portanto, um campo electromagnético pode propagar-se por ondas não lineares e ser solução da equação de D'Alembert:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \bar{\mathbf{J}} \quad (5)$$

Note-se que este formalismo parece dar conta de possíveis ondas não lineares em meios lineares isotrópicos, para os quais se tenha $\bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{H}}$ com $\mu \in \mathbf{R}$) se satisfizer à condição suplementar:

$$\text{grad} \left\{ k_1^{-1} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{A}}^2) - k_1^{-2} \text{grad} \left[\bar{\mathbf{A}} \cdot \text{grad} \left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2} \right) \right] \right\} = \mathbf{0} \quad (6)$$

A equação à qual satisfaz o potencial φ da velocidade $\bar{\mathbf{u}}$ do meio subquântico é (27-Cap.I). Mas, neste caso, é $\bar{\mathbf{u}} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\bar{\mathbf{a}}$; ($\bar{\mathbf{a}} = \psi \bar{\mathbf{e}}_z$) como já vimos, e a determinação de $\bar{\mathbf{u}}$ não pode ser feita exclusivamente à custa de φ (fluido compressível) devendo o seu cálculo exigir o conhecimento de $\bar{\mathbf{a}}$ ou, equivalentemente, de ψ . Vimos que, havendo incompressibilidade do meio subquântico e na ausência de singularidades deste, se tinha:

$$\text{grad}\varphi = \text{rot}\bar{\mathbf{a}} \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}} = \psi \bar{\mathbf{e}}_z$$

equação da qual saía a igualdade (3) (condição de holomorfia de $\varphi + i\psi$):

$$\text{grad}\varphi = \text{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z$$

Substituindo (3) em (1) vem:

$$\begin{aligned} & \text{Lap}(\text{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z) = \text{grad} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) + \\ & + \frac{1}{a^2} \text{grad} \left\{ k_1^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^2}{2} \right) + k_1^{-2} \text{grad} \left[(\text{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z) \cdot \text{grad} \left(\frac{(\text{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z)^2}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

As equações (1) e (7) são aspectos diferentes da mesma equação quando se referirem a regiões do espaço-tempo onde o meio subquântico se puder considerar incompressível, sendo então o potencial complexo da sua velocidade (em escoamento plano) holomorfo (relação (3)). Se houver compressibilidade é então $\text{grad}\varphi \neq \text{rot}\bar{\mathbf{a}}$ ou seja $\text{grad}\varphi \neq \text{grad}\psi \wedge \bar{\mathbf{e}}_z$, deixando de ser válida a equação (3). O potencial da velocidade do meio subquântico $\mathbf{W}(\mathbf{Z}) = \varphi(\mathbf{Z}) + i\psi(\mathbf{Z})$ deixa de ser holomorfo.

A hipótese que fizemos de ser o campo electromagnético um movimento do meio subquântico vai permitir-nos, daqui em diante, substituir sempre que nos seja cómodo as grandezas hidrodinâmicas relativas ao meio

subquântico pelas grandezas electromagnéticas correspondentes. Notemos que esta equação só é válida em escoamentos conservativos.

Esta equação na sua forma hidrodinâmica escreve-se:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\text{grad}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) - \frac{1}{a^2} \text{grad}\left\{2\bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad}\left[\bar{\mathbf{A}} \cdot \text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\} \quad (8)$$

Atenda-se a que no caso estacionário linear se tem, com $\omega = 0$ ou $\omega \neq 0$ (Equação (17-Cap.IV), por ser $\bar{\mathbf{B}} = -2\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}' = \text{rot}\bar{\omega}$, com $k_1 = 1/2$:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} = 2\bar{\omega}' = 2\text{rot}\bar{\omega} = -\text{rot}\bar{\mathbf{B}} = -\eta_0 \text{rot}\bar{\mathbf{H}} \quad (9)$$

e que no caso linear não estacionário é:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = 2\text{rot}\bar{\omega} = -\frac{1}{k_1} \text{rot}\bar{\mathbf{B}} = -\frac{\eta_0}{k_1} \text{rot}\bar{\mathbf{H}} \quad (10)$$

o que conduz a:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{\eta_0}{k_1} \text{rot}\bar{\mathbf{H}} \quad (11)$$

De $\bar{\mathbf{B}} = \eta_0 \bar{\mathbf{H}}$, se for η_0 uma constante vem:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\text{grad}\text{div}\bar{\mathbf{A}} + \text{Lap}\bar{\mathbf{A}}$$

Portanto:

$$\text{grad}\text{div}\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2}$$

Note-se que $\text{rot}\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}'$ (27-Cap.II), o que conduz a que a equação (10) se possa escrever (sendo $\bar{\mathbf{J}}'$ uma densidade de corrente de massa):

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{\eta_0}{k_1} \bar{\mathbf{J}}'$$

A equação anterior tem como generalização não linear a equação (8). A equação (10), à qual deve satisfazer $\bar{\mathbf{A}}$ para dar conta de escoamentos com vorticidade, deve ter uma densidade de corrente de massa função do vector turbilhão:

$$-\eta_0 \bar{\mathbf{J}}' = -k_1 \text{rot}\bar{\mathbf{H}} = -k_1 \frac{\text{rot}\bar{\mathbf{B}}}{\eta_0} = k_1 \frac{2\bar{\omega}}{\eta_0}$$

o que conduz a:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mathbf{k}_1 \frac{\text{rot}\bar{\mathbf{B}}}{\eta_0} - \text{grad}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) - \frac{1}{a^2} \text{grad}\left\{2\bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad}\left[\bar{\mathbf{A}} \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\} \quad (12)$$

com:

$$\lim\left\{\frac{1}{a^2} \text{grad}\left\{2\bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad}\left[\bar{\mathbf{A}} \cdot \text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\}\right\} = 0$$

na aproximação linear.

Se o campo electromagnético é de facto consequência de um movimento do meio subquântico, vamos para esse meio fazer a substituição $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{k}_1^{-1} \bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}} = \text{rot}\bar{\mathbf{A}}$, e virá, no vácuo, como já vimos (4):

$$\mathbf{k}_1^{-1} (\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2}) = -\mu_0 \bar{\mathbf{J}} - \mu_0 \epsilon_0 \text{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-2} \bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mathbf{k}_1^{-3} \text{grad}\left[\bar{\mathbf{A}} \cdot \text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\}$$

sendo $\bar{\mathbf{J}} = \rho_e \bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ a velocidade da configuração de cargas geradora do campo e $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

Além disto teremos, na aproximação linear:

$$\lim\left\{\frac{1}{c^2} \text{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-2} \bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad}\left[\mathbf{k}_1^{-3} \bar{\mathbf{A}} \cdot \text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\}\right\} = 0$$

As equações (12) e (4') foram obtidas na condição de $\bar{\mathbf{A}}$ e de $\bar{\mathbf{A}}$ serem irrotacionais. Para as generalizarmos para escoamentos com vorticidade e se considerarmos contido em $\mu_0 \bar{\mathbf{J}}$ o termo contendo o vector turbilhão vem (15-Cap.II):

$$\mathbf{k}_1^{-1} (\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2}) = -\mu_0 \bar{\mathbf{J}} - \mu_0 \epsilon_0 \text{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-2} \bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mathbf{k}_1^{-3} \text{grad}\left[\bar{\mathbf{A}} \cdot \text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\} \quad (13)$$

Note-se que, na aproximação linear homogénea isotrópica, é $\bar{\mathbf{D}} = \epsilon \bar{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{P}}$ vindo, no vácuo ($\epsilon = \epsilon_0$), $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$. Para a equação (6) deve ter-se, na aproximação linear:

$$\text{Lim}\left\{\mu_0 \epsilon_0 \text{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-2} \bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad}\left[\mathbf{k}_1^{-3} \bar{\mathbf{A}} \cdot \text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\}\right\} = 0$$

Sabemos que se uma carga pontual Q ou uma configuração rígida de cargas de valor total Q , com movimentos respectivamente rectilíneo uniforme e de translação rectilínea uniforme, de velocidade $\bar{\mathbf{v}}$, dão lugar a um campo electromagnético no qual $\bar{\mathbf{A}}$ e ϕ^* estão relacionados por (43-Cap.II):

$$\vec{A} = \frac{\Phi \cdot \vec{v}}{c^2}$$

sendo, no caso de uma carga pontual:

$$\rho_e = Q\delta(\vec{r} - \vec{v}t) \quad (14)$$

Atendendo a (15-Cap.II), com $\vec{\omega}' = \text{rot}\vec{\omega}$ vem, para um escoamento linear estacionário:

$$\text{Lap}\vec{A} = 2\vec{\omega}' = 2\text{rot}\vec{\omega} \quad (\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z)$$

com $\vec{A} = \psi\vec{e}_z$:

$$\text{Lap}\psi = 2\text{rot}\vec{\omega} \cdot \vec{e}_z \quad (15)$$

No caso não estacionário linear tem-se:

$$\text{Lap}\vec{A} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 2\text{rot}\vec{\omega} = \vec{\omega}' \quad (16)$$

$$\text{Lap}\psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2\text{rot}\vec{\omega} \cdot \vec{e}_z = -2\text{rot}\vec{\omega} \cdot \vec{e}_z \quad (17)$$

A generalização não linear dependente do tempo da equação anterior é:

$$\text{Lap}\psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2\text{rot}\vec{\omega} + \frac{1}{a^2} \left\{ 2\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \text{grad}\psi \cdot \text{grad}\left[\frac{|\text{grad}\psi|^2}{2}\right] \right\} \quad (18)$$

sendo, na aproximação linear:

$$\text{Lim} \left\{ \frac{1}{a^2} \left\{ 2\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \text{grad}\psi \cdot \text{grad}\left[\frac{|\text{grad}\psi|^2}{2}\right] \right\} \right\} = 0$$

Note-se que o termo $-2\vec{\omega}$ que figura em (18) através do seu rotacional mostra que esta equação tem em conta a vorticidade.

Consideremos a expressão geral do campo eléctrico não estacionário (11-Cap.II):

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

A equação:

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \quad (19)$$

tem sempre solução $\vec{a}(\mathbf{x}, y, z, t)$ desde que $\text{grad}\phi$ seja integrável. Substituindo (19) em (11-Cap.II), vem:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{a}) \quad (20)$$

Considerando \vec{a} absorvido em \vec{A} vem:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (21)$$

Um campo electromagnético é caracterizado por um par φ^*, \vec{A} ; se for não estacionário pode escolher-se um potencial φ^* independente do tempo, com o que vem de (11-Cap.II) e de (19) a relação (21). Do exposto conclui-se que, por uma escolha apropriada de \vec{A} , o campo \vec{E} pode ser determinado unicamente por este vector.

Se \vec{A} for irrotacional ($\vec{B} = \mathbf{0} \leftarrow$ Campo electrostático) existe uma função ϕ_1^* tal que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{grad} \phi_1^* \quad (22)$$

Substituindo em (11-Cap.II), vem:

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi^* + \phi_1^*) = -\text{grad} \phi_2^*$$

com $\phi_2^* = \varphi^* + \phi_1^*$. Trata-se de um campo irrotacional que pode ou não ser electrostático, conforme depender ou não do tempo.

Voltemos à equação (49-Cap.I) e suponhamos que o escoamento é estacionário, existindo uma corrente uniforme de velocidade $\vec{U}_0 = U_0 \vec{e}_x$ que encontra no seu trajecto um obstáculo fusiforme que lhe produz uma pequena perturbação irrotacional e estacionária \vec{u} .

Fig1

O potencial satisfaz a (49-Cap.I), com o potencial φ substituído por $\phi(\mathbf{x}) = U_0 x + \varphi(\mathbf{x})$, sendo $\vec{u} = \text{grad} \varphi$ a perturbação adicionada à velocidade \vec{U}_0 para se obter a velocidade efectiva do fluido na proximidade do obstáculo, com $\lim_{P \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}, y, z) = 0$.

É possível demonstrar que, por linearização da equação (49-Cap.I), no caso estacionário, se obtém a Equação de Prandtl-Glauert (linear) à qual satisfaz φ :

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \frac{\xi}{\rho} \quad (23)$$

sendo $\xi = 0$ onde não houver fontes, sumidouros, turbilhões, multipolos ou associações destes. Tratando-se do escoamento em torno de um obstáculo é $\xi = 0$ na região de \mathbf{R}^3 que este ocupa, obtendo-se a equação homogénea:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (24)$$

As equações (23) e (24) são Newtonianas e, portanto, devem ser covariantes para o grupo de Galileu; são também covariantes para um grupo de transformações obtidas das de Lorentz substituindo a velocidade da luz pela do som, o qual não tem interesse físico. O potencial ϕ também satisfaz a (23) e (24).

É possível concluir que se numa região do vácuo existir um campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 e se nessa região se deslocar uma configuração rígida de carga eléctrica de densidade volúmica ρ_e , no sentido negativo do eixo dos xx, com velocidade $\vec{u} = u\vec{e}_x$, existe fora do obstáculo o potencial estacionário $\phi(\mathbf{x})^* = -E_0x + \phi_1^*(\mathbf{x})$, com:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1^*(\mathbf{x}) = 0$$

verificando-se as equações:

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (25)$$

com $\rho_e = 0$ onde não houver carga, vindo:

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (26)$$

ϕ_1 satisfaz as mesmas equações.

Se em lugar do vácuo houver um dieléctrico, em vez de figurar $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ em (25) e (26) figura

$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ nestas equações.

Note-se que a linearização das equações da hidrodinâmica conduzindo a (23) e (24) é uma operação de filtragem, pressupondo condições fronteiras suficientemente favoráveis, que permite obter uma solução analítica aproximada do problema à custa de perdas de informação sobre ele, passando-se o mesmo para a linearização das expressões analíticas das condições fronteiras. As correspondentes equações da

Electrodinâmica, (25) e (26) são intrinsecamente lineares traduzindo exactamente os fenómenos físicos e não sendo o resultado de qualquer aproximação.

Em Electrodinâmica Clássica é possível deduzir a equação (25):

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

Sendo $\phi = \phi_0 + \phi_1$, relação na qual ϕ_0 é o potencial do campo eléctrico na ausência da distribuição de cargas de densidade ρ_e e ϕ_1 o acréscimo sofrido pelo potencial do campo devido a essa distribuição de cargas de densidade volúmica $\rho_e \cdot \phi_1$ satisfaz a:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\phi_1)_{xx} + (\phi_1)_{yy} + (\phi_1)_{zz} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (27)$$

O potencial vector do campo eléctrico satisfaz a:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\bar{A}_{xx} + \bar{A}_{yy} + \bar{A}_{zz} = -\mu_0 \bar{J} \quad (28)$$

com $\bar{J} = \rho_e \bar{v}$, sendo \bar{v} a velocidade (de translação rectilínea uniforme) da configuração rígida de cargas eléctricas geradora do campo. Recorrendo a uma equação do Cap.II, $\bar{A} = -\bar{u}$ e à condição de irrotacionalidade do campo tem-se, no vácuo (tomando $\bar{A} = \bar{A}$):

$$\bar{A} = -\bar{u} = -\text{grad}\varphi \quad (29)$$

Nesta equação pode notar-se que se \bar{u} fosse sempre irrotacional $\bar{B} = \text{rot}\bar{A}$ seria sempre zero, o que só sucede nos campos Electrostáticos, isto é, avaliados por um observador no referencial inercial onde a distribuição ρ_e esteja em repouso.

De facto, $\bar{B} = -2\mathbf{k}_1 \bar{\omega}$ indica-nos que a existência de um $\bar{B} \neq \mathbf{0}$ implica a existência de vorticidade no movimento do meio subquântico. Em (27) φ é a perturbação do potencial da velocidade do meio subquântico devida à presença de campos electromagnéticos; Se for adicionada a ϕ_0 , que é o potencial da velocidade do meio subquântico na ausência de campos (supusemos o seu movimento irrotacional) obtém-se o potencial ϕ do movimento do meio em causa na presença de campos:

$$\phi = \phi_0 + \varphi \quad (30).$$

De (30), com $\phi_0 = \mathbf{0}$ vem:

$$\phi = \varphi \quad (31)$$

A equação (4') teve como pressuposto que o escoamento do fluido (o meio subquântico) seja irrotacional ($\bar{\omega} = \mathbf{0}$) e conduz a um $\bar{B} = \mathbf{0}$ ($\bar{B} = -2\mathbf{k}_1 \bar{\omega} = -\bar{\omega}$). Note-se que o facto de ser $\bar{B} = \mathbf{0}$ implica que \bar{A} seja irrotacional mas não impede que possa depender do tempo. No caso geral de ser $\bar{B} = \bar{B}(x, y, z, t) \neq \mathbf{0}$, na

decomposição de Helmholtz de $\vec{u}(x, y, z, t) \neq 0$, tem-se a soma de um termo conservativo com um termo solenoidal. Neste caso, para ter em conta a situação geral, a densidade de corrente que figura em (4') deve ser uma função de $\vec{\omega}$:

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{a} \quad (34)$$

ou, equivalentemente:

$$\vec{B} = \text{grad}\Omega + \text{rot}\vec{a}^* = \text{rot}\vec{A} \quad (35)$$

Para ter em conta na equação (4') o movimento rotacional do meio subquântico, a densidade \vec{J} que figura nesta equação deve depender, como referimos, do termo $2\text{rot}\vec{\omega}$. Na impossibilidade de determinar \vec{a} e \vec{a}^* vamos atender à relação (11-Cap.II) e determinar \vec{E} por meio desta relação, recorrendo a uma escolha conveniente de φ^* e \vec{A} . Tem-se:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}; \quad \varphi^* = 0 \quad (36)$$

2. Efeitos de não linearidade em Electrodinâmica

2.1. Generalidades

No tratamento linear da propagação da luz admite-se a existência de uma relação linear entre o campo eléctrico aplicado a um meio material e a resposta desse meio, que é a polarização:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (37)$$

Sendo, num meio linear, \vec{P} proporcional a \vec{E} vamos definir um parâmetro X_e que figura em $\vec{P} = \epsilon_0 X_e \vec{D}$, e que é chamado *susceptibilidade eléctrica*. De (37) vem:

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \vec{E} \quad (38)$$

Seja $k_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ a constante dieléctrica do meio, e $X_e = k_e - 1$ a sua susceptibilidade eléctrica. Então, a relação anterior toma a forma:

$$\vec{P} = \epsilon_0 X_e \vec{E} \quad (39)$$

Se o meio for não linear, a susceptibilidade eléctrica pode expandir-se numa série de Mac-Laurin:

$$X_e = \sum_{n=1}^{+\infty} X_{en} E^n \quad (40)$$

Substituindo em (39) vem, sendo $\vec{n} = \frac{\vec{E}}{E}$:

$$\bar{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \mathbf{X}_e \bar{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{X}_{en} \mathbf{E}^n \bar{\mathbf{n}} = \epsilon_0 \mathbf{X}_{e1} \bar{\mathbf{E}} + \epsilon_0 \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{X}_{en} \mathbf{E}^n \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{P}}_L + \bar{\mathbf{P}}_{NL} \quad (41)$$

Sendo:

$$\bar{\mathbf{P}}_L = \epsilon_0 \mathbf{X}_{e1} \bar{\mathbf{E}} \quad (42-1) \quad \bar{\mathbf{P}}_{NL} = \epsilon_0 \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{X}_{en} \mathbf{E}^n \bar{\mathbf{n}} \quad (42-2)$$

Se fizermos $\mathbf{P}_k = \epsilon_0 \mathbf{X}_{ek} \mathbf{E}^k$, vem:

$$\bar{\mathbf{P}}_L = \bar{\mathbf{P}}_1 \quad (42'-1) \quad \bar{\mathbf{P}}_{NL} = \sum_{n=2}^{+\infty} \bar{\mathbf{P}}_n \quad (42'-2)$$

Os coeficientes \mathbf{X}_{en} do desenvolvimento de $\bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{E}})$ descrevem completamente a resposta $\bar{\mathbf{D}}$ do meio à excitação $\bar{\mathbf{E}}$. Entre os fenómenos resultantes do termo de segunda ordem em (41) há a considerar a *geração do segundo harmónico*, a *mistura de três ondas*, a *rectificação óptica*, e a *amplificação paramétrica* verificando-se a anulação de \mathbf{P}_2 se o sistema material admitir centro de simetria, deixando então os fenómenos referidos de serem observados. O termo \mathbf{P}_3 dá lugar à *mistura de quatro ondas*, à *dispersão Raman*, à *conjugação óptica de fase*, à *dispersão Brillouin* e ao *efeito Kerr*.

Pode ser conveniente escrever o índice de refração na forma:

$$\frac{1}{\mathbf{n}^2} = \frac{1}{\mathbf{n}_0^2} + \sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i \mathbf{E}_i + \sum_{i,j=1}^q \mathbf{k}_{ij} \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \quad (43)$$

Os tensores \mathbf{k}_i e \mathbf{k}_{ij} reflectem a simetria dos cristais deste meio anisotrópico e as suas componentes são chamadas coeficientes electro-ópticos, respectivamente lineares e quadráticos. Normalmente é suficiente tomar em (43), $p=q=1$.

2.2. Descrição quântica de certos processos não lineares

2.2.1. Interação de dois fotões

Um fotão de energia adequada, quando atravessa um meio óptico, pode eventualmente ser absorvido e provocar a ionização de um átomo desse meio; e um átomo pode também ionizar-se por absorção de dois fotões quando a soma das energias destes igualar a sua energia de ionização. É a absorção e ionização por dois fotões.

Considere-se um meio óptico com um nível de energia $\Delta E = 2h\nu_1$ acima do seu nível fundamental E_0 . Se esse meio for atravessado por uma onda de frequência ν_1 pode passar para o estado excitado, $E_0 + \Delta E$, por absorção simultânea, pelos seus átomos, de dois fotões, cada um deles com a energia $h\nu_1$. A probabilidade deste acontecimento é proporcional à intensidade luminosa incidente. O meio óptico absorve fotões de frequência ν_1 , embora esta frequência não esteja contida no seu espectro de absorção.

O processo descrito pode ser generalizado quando duas ondas de frequências diferentes ν_1 e ν_2 se propagam em meios físicos apropriados. Pode então ocorrer a absorção conjunta de dois fótons, um de cada uma das ondas, ficando o meio óptico num estado excitado de energia $E_0 + h(\nu_1 + \nu_2)$, sendo E_0 a sua energia fundamental inicial.

Quando a soma das energias dos dois fótons excitantes for superior à energia de ligação de um electrão do meio óptico ao correspondente átomo ou molécula, a absorção por esse electrão dos dois fótons referidos dá lugar à ionização desse átomo ou molécula (ionização por dois fótons).

Quando três ondas de luz se propagam através de um meio anisotrópico podem gerar-se novas ondas cujas frequências resultam da combinação das frequências originais.

No processo de *geração do segundo harmónico* dá-se a fusão de dois fótons de frequência ν_1 num fóton de frequência $\nu_2 = 2\nu_1$. Esta conversão só é eficiente quando as duas ondas tiverem a mesma velocidade de propagação. O processo de geração do segundo harmónico é usado para transportar a emissão laser do infravermelho para a zona do visível.

No processo de *geração de frequência soma*, um fóton de frequência ν_1 e um fóton de frequência ν_2 são convertidos num fóton de frequência $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$. É uma generalização do processo de geração do segundo harmónico. No processo de *geração da frequência diferença*, um fóton de frequência ν_1 e outro de frequência ν_2 são convertidos num fóton de frequência $\nu_3 = \nu_1 - \nu_2$. A rectificação óptica é um caso particular deste processo com $\nu_1 = \nu_2$, vindo $\nu_3 = 0$.

Outro processo não linear envolvendo três fótons é a *amplificação paramétrica*. Neste caso, um electrão de um meio não linear apropriado é iluminado por uma onda (dita de bombardeamento) suficientemente intensa, de frequência ν_3 e decai emitindo uma onda de frequência ν_1 (onda de sinal), e outra de frequência $\nu_2 = \nu_3 - \nu_1$.

2.2.2. Interação de três fótons

Quando duas ondas luminosas se propagam através de um meio não linear pode verificar-se a geração de novas ondas cujas frequências resultam da combinação das frequências iniciais.

No processo de *geração do segundo harmónico*, dá-se a fusão de dois fótons de frequências ν_1 , iguais, originando-se um fóton de frequência $\nu = 2\nu_1$, sendo esta conversão eficiente só quando as duas ondas tiverem velocidades de propagação próximas. Este processo é usado para deslocar a emissão laser infravermelho para a banda do visível. No processo de *geração da frequência soma*, um fóton de frequência ν_1 funde-se com um fóton de frequência ν_2 criando-se um fóton de frequência $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$. No processo de *geração da frequência diferença*, um fóton de frequência ν_1 e um fóton de frequência ν_2 são convertidos

num fóton de frequência $\nu_3 = \nu_1 - \nu_2$. Um caso particular deste processo é a *rectificação óptica*, na qual é $\nu_1 = \nu_2$, vindo $\nu_3 = 0$.

Outro processo não linear envolvendo três fótons é a chamada *amplificação paramétrica*. Neste caso, se um meio não linear adequado for iluminado por uma onda (*onda de bombardeamento*) suficientemente intensa, de frequência ν_3 , decai, depois de a absorver, emitindo uma onda de frequência ν_1 (*onda de sinal*) e depois outra de frequência $\nu_2 = \nu_3 - \nu_1$. Tanto a onda de sinal como a de frequência ν_2 são amplificadas à custa da potência da onda de bombardeamento.

2.2.3. Interação de fótons múltiplos

Existe, neste caso, uma grande variedade de combinações possíveis. Uma delas é a *multiplicação de frequências*, na qual, n fótons de frequências $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ interactuam com os átomos ou moléculas do meio óptico criando-se um fóton de frequência $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$. É o caso da *geração do terceiro harmónico* $\nu_2 = 3\nu_1$ e do *quarto harmónico*, $\nu_2 = 4\nu_1$.

Outros processos não lineares são a *absorção* e a *ionização por electrões múltiplos*. No primeiro caso, n fótons de frequências $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ são simultaneamente absorvidos por um meio não linear, passando do seu estado inicial, não excitado, E_0 , para o estado excitado $E_0 + \Delta E$, com $\Delta E = h(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n)$. No *processo de ionização*, ΔE é superior à energia de ligação dos electrões, o que produz a ionização dos átomos ou moléculas.

2.2.4. Efeito Faraday

Faraday, em 1854 estudou a transmissão da luz polarizada segundo um plano na presença de um campo magnético. Verificou que quando a direcção de transmissão era oblíqua em relação às linhas de força do campo se produzia uma rotação do plano de polarização. Se H_p é a componente do campo segundo a direcção de transmissão e se L é o perímetro do percurso o ângulo de rotação é dado por:

$$\theta = CH_p L$$

Este fenómeno é chamado efeito Faraday e a constante C é chamada constante de Verdet.

2.2.5. Efeito Kerr

É um efeito electroóptico de segunda ordem. Em 1876 J. Kerr demonstrou que muitas substâncias isotrópicas sob a acção de um campo eléctrico se comportam como um cristal uniaxial com o eixo óptico dirigido segundo as linhas de força. Se forem n_0 o índice de refração da substância na ausência de campo e n_p e n_s os índices de refração segundo direcções respectivamente paralela e perpendicular ao campo tem-se:

$$n_p - n_s = \lambda_0 K E^2$$

sendo K a constante de Kerr e E o campo eléctrico aplicado. Verifica-se neste caso a lei de Havelock:

$$n_p - n_s = 2(n_s - n_0)$$

Existe um efeito electro-óptico de primeira ordem (Efeito Pockels): certos cristais anisotrópicos apresentam um nítido aumento de birefrangência, proporcional a E , sob a acção de um campo eléctrico.

2.2.6. Efeito Cotton-Mouton

Em 1905 Cotton e Mouton descobriram um efeito magneto-óptico semelhante ao efeito Kerr. A diferença de índices $n_p - n_s$ é proporcional a E^2 mas a sua constante de proporcionalidade é pequena em relação à do efeito Kerr.

3. Equações de propagação de ondas em meios não lineares

Consideremos um meio físico com as relações constitutivas: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Atendamos à expressão:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

da qual vem:

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \vec{E} = \epsilon_0 X_e \vec{E} = \epsilon_0 (k_e - 1) \vec{E} \quad (44)$$

sendo $X_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$ a susceptibilidade eléctrica e $k_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ a constante dieléctrica do meio.

Partamos da equação de Maxwell (18-Cap.II) aplicada a um meio de permeabilidade magnética μ :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Calculamos o rotacional de ambos os seus membros:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$$

Logo:

$$\text{grad div } \vec{E} - \text{Lap } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$$

Atendendo a (33-Cap.II):

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

e a (26-Cap.II):

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}$$

vem:

$$\frac{\text{grad } \rho_e}{\epsilon} - \text{Lap } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Atendendo a que $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, vem:

$$\frac{\text{grad } \rho_e}{\epsilon} - \text{Lap } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

Logo:

$$\frac{\text{grad } \rho_e}{\epsilon} - \text{Lap } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{E})}{\partial t^2}$$

Portanto:

$$\text{Lap } \vec{E} - \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{P}_L + \vec{P}_{NL}) \quad (45)$$

Se se verificar a lei de Ohm, vem:

$$\text{Lap } \vec{E} - \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{P}_L + \vec{P}_{NL}) \quad (46)$$

Das expressões (42-1) e (42-2), respectivamente,

$$\vec{P}_L = \epsilon_0 X_e \vec{E} = \epsilon_0 X_e \vec{E} \vec{n} \quad (47-1)$$

$$\vec{P}_{NL} = \epsilon_0 \sum_{n=2}^{+\infty} X_{en} \vec{E}^n \vec{n} \quad (47-2)$$

(sendo $\vec{n} = \frac{\vec{E}}{E}$) e da equação (46), vem:

$$\text{Lap } \vec{E} - \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \epsilon_0 X_e \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu \epsilon_0 \vec{n} \sum_{n=2}^{+\infty} X_{en} n(n-1) E^{n-2} \quad (47)$$

Logo:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{E}} - \mu\epsilon_0(1 + X_e)\frac{\partial^2\bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{\mathbf{E}}}{\partial t} = \mu\epsilon_0\bar{n}\sum_{n=2}^{+\infty} X_{en}n(n-1)\mathbf{E}^{n-2} \quad (48)$$

Substituindo (36):

$$\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

em (48), vem:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} + \mu\epsilon_0(1 + X)\frac{\partial^3\bar{\mathbf{A}}}{\partial t^3} + \mu\sigma\frac{\partial^2\bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = \mu\epsilon_0\bar{n}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^n\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t}\right)^{n-2}$$

e integrando em ordem ao tempo:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu\epsilon_0(1 + X)\frac{\partial^2\bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} = \mu\epsilon_0\bar{n}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^{n+1}\int\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t}\right)^{n-2}dt + \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (49)$$

sendo $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ a constante de integração. Vamos supor que a equação anterior é generalizável ao vácuo, sendo:

$$\epsilon = \epsilon_0, \mathbf{k}_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1, X_e = \epsilon_0(\mathbf{k}_e - 1) = \mathbf{0}, \bar{\mathbf{J}} = \sigma_0\bar{\mathbf{E}}$$

(49) toma a forma:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = \mu_0\sigma_0\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} + \mu_0\epsilon_0\bar{n}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^{n+1}\int\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t}\right)^{n-2}dt + \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (50)$$

Voltemos à equação (4'), feita a hipótese de o meio subquântico se comportar como um fluido para os efeitos pretendidos. Atendendo a (36) vem, fazendo $\bar{\mathbf{J}} = \sigma_0\bar{\mathbf{E}} = -\sigma_0\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t}$:

$$\text{Lap}\bar{\mathbf{A}} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = \mu_0\sigma_0\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\text{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}\cdot\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mathbf{k}_1^{-2}\text{grad}\left[\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right]\right\}$$

Igualando os segundos membros de (50) e de (4') vem, atendendo a (36):

$$\begin{aligned} & \mu_0\sigma_0\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} + \mu_0\epsilon_0\bar{n}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^{n+1}\int\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t}\right)^{n-2}dt + \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \\ & = \mu_0\sigma_0\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\text{grad}\left\{2\mathbf{k}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}\cdot\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \mathbf{k}_1^{-2}\text{grad}\left[\bar{\mathbf{A}}\cdot\text{grad}\left(\frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \bar{n} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-1)^{n+1} \int \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)^{n-2} dt + \Theta(x, y, z) = \\ = -\mu_0 \epsilon_0 \text{grad} \left\{ 2k_1^{-1} \bar{A} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - k_1^{-2} \text{grad} \left[\bar{A} \cdot \text{grad} \left(\frac{\bar{A}^2}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

Obtivemos a condição de compatibilidade das equações (4') e (50), à qual, admitidas as hipóteses feitas, devem satisfazer as ondas electromagnéticas não lineares no vácuo. Foi assim possível baixar de uma unidade a ordem da equação diferencial à qual satisfaz \bar{A} .

Substituindo em (4') a relação (43-Cap.II), que é:

$$\bar{A} = \frac{1}{c^2} \phi \bar{v}$$

vem a equação à qual deve satisfazer ϕ :

$$\frac{1}{c^2} \bar{v} \cdot \left(\text{Lap} \bar{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \right) = -\frac{\mu_0}{c^2} \bar{v} \cdot \bar{J} - \frac{\mu_0 \epsilon_0}{c^2} \bar{v} \cdot \text{grad} \left\{ 2k_1^{-1} \bar{A} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - k_1^{-2} \text{grad} \left[\bar{A} \cdot \text{grad} \left(\frac{\bar{A}^2}{2} \right) \right] \right\}$$

Referências:

- [1]. Ditchburn, R.W., 1982. Óptica, Cap. 16, Editorial Reverte, Barcelona.
- [2]. Ferreira, Mário, 2003. Óptica e Fotónica, Cap. 19, pp. 379 a 383. LIDEL Lisboa, Porto, Coimbra.
- [3]. Morgado, Cândido Manuel Passos, 1965/66. Lições da Cadeira de Mecânica Física. Edição da F.C.U.L.
- [4]. Morgado, Cândido Manuel Passos, 1973. Escoamentos Cónicos em Corpos Fusiformes com Jactos Laterais. Tese de Doutoramento, Lisboa.
- [4]. Morgado, Cândido Manuel Passos, Manuel Rolão Santos. A Equação de Prandtl-Glauert em Escoamentos Planos de Fluidos Incompressíveis e Invíscidos e a sua análoga em Electrodinâmica Clássica (em elaboração).