Universidade de Évora

Mestrado em Modelação

Estatística e Análise de Dados

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS IMPLÍCITAS EM CONTRATOS DE SEGURO DO RAMO VIDA

Dissertação realizada por:

Eugénio Manuel da Silva Meneses

O orientador:

Prof. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo

Évora

Abril 2011

Universidade de Évora

Mestrado em Modelação

Estatística e Análise de Dados

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS IMPLÍCITAS EM CONTRATOS DE SEGURO DO RAMO VIDA

Dissertação realizada por:

Eugénio Manuel da Silva Meneses

O orientador:

Prof. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo

Évora

Abril 2011

Conhece a Matemática
e dominarás o mundo.

Galileu Galilei

AGRADECIMENTOS

Para a elaboração da presente dissertação se tornar possível, foi necessária a colaboração de várias pessoas, o apoio da família, dos colegas e dos amigos.

Esta página é uma forma de exprimir os meus agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo, que na elaboração desta dissertação, com a sua orientação, me ajudou a ultrapassar dificuldades; e por todo o tempo, atenção, conselhos e assistência dispensados.

Á Sr.ª Sofia Santos, da VICTORIA – uma empresa do Grupo Segurador ERGO, pela disponibilidade e ajuda prestada na recolha de informação relativamente ao contrato "Victoria Garantia Rendimento".

Aos meus familiares, pela compreensão da ausência e pouco tempo disponibilizado, bem como por todo o carinho demonstrado durante este período.

À Patrícia pelo amor, carinho e amizade.

A todos os que de alguma forma colaboraram na elaboração deste trabalho, seja por facultarem bibliografia, apoio e orientação, seja pela disponibilidade dispensada; sem eles este estudo não teria sido possível.

O meu muito obrigado a todos!

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

RESUMO

Avaliação de opções financeiras implícitas em contratos de seguro do ramo vida

Com esta dissertação espera-se salientar a importância da existência de uma avaliação nos contratos de uma companhia de seguros. Pois a evolução actual indica que em matéria de regulação, de contabilidade, de necessidades dos clientes e dos mercados secundários de seguros de vida podem levar a uma tendência de fugir da concepção de contrato tradicional.

A maioria dos contratos de seguro do ramo vida contém um conjunto de garantias e de direitos que configuram opções implícitas. A prática tem mostrado consistentemente que estas opções podem ser muito valiosas e, portanto podem representar um risco significativo para as companhias de seguros. Assim, os preços e a gestão do risco destas opções são muito importantes. O principal objectivo desta dissertação é o de analisar a avaliação de opções implícitas em contratos de seguro do ramo de vida.

Na avaliação deste tipo de opções os modelos estocásticos e a modelação de variáveis relacionadas com o comportamento do tomador permitem uma avaliação mais adequada e transparente dos riscos subjacentes.

ABSTRACT

Evaluation of the implicit financial options in life insurance contracts

With this dissertation we hope to show the importance of the existance of an evaluation in the insurance companies contracts. For the current developments regarding regulation, accounting, customer needs, and secondary life insurance markets may lead to a trend away from tradicional contract.

Most life insurance contracts contain a set of guarantees and rights that, actually, represent implicit options. Experience consistently shows that these options can be valuable and, therefore, can indicate a significant risk for insurance companies. So, the prices and the risk management of these options are very important. The main objective of this dissertation is the analysis of the evaluation of the implicit options in life insurance contracts.

In assessing this sort of options, the stochastic models the modelling of variables related to the policyholder behaviour allow a more proper and transparent evaluation of the underlying risks.

CAPÍTULO 1

Introdução

A maioria dos contratos de seguro do ramo vida contém um conjunto de garantias (de retorno, de participação no excedente anual ou terminal, entre outros) e de direitos (de conversão, de ajustamento dinâmico dos prémios, de resgate, entre outros) que configuram na prática opções implícitas. A prática tem mostrado consistentemente que estas opções podem ser muito valiosas e, portanto podem representar um risco significativo para as companhias de seguros. Assim, os preços e a gestão do risco destas opções são muito importantes. O principal objectivo desta dissertação é o de analisar a avaliação de opções implícitas em contratos de seguro do ramo de vida.

A preocupação quanto ao risco associado a estas opções implícitas reflecte-se igualmente nas alterações ao nível da regulação em curso. Com efeito, as novas normas contabilísticas para a indústria seguradora (International Financial Reporting Standards (IFRS)) e de regulação (processo Solvência II, Swiss Solvency Test) impõem às seguradoras a avaliação dos derivados financeiros implícitos em contratos de seguro pelo seu valor justo.

As opções implícitas são um elemento-chave na concepção de produtos estruturados de seguro do ramo vida. Este inclui geralmente garantias relativamente às suas componentes, bem como direitos de modificar as condições do contrato durante a sua duração.

As necessidades actuais dos clientes e dos mercados secundários de seguros de vida tem, conduzido a uma tendência de afastamento da tradicional concepção do contrato com transferência total do risco para o tomador do seguro em direcção a políticas e novos produtos que combinam várias coberturas e fontes de retorno (por exemplo, anuidades variáveis e seguros do tipo unit-linked). Estes novos contratos irão conter menos garantias fundamentais, mas incorporam um conjunto de opções adicionais que se ajustam às necessidades das pessoas seguradas e ao preço que estas estão dispostas a pagar.

Neste contexto, as opções implícitas podem tornar-se bastante caras em termos de requisitos de capital. Em geral, a crescente aplicação da abordagem de valor justo e o reconhecimento de opções implícitas terá um impacto sobre a concepção dos contratos de seguro do ramo vida, especialmente para os produtos tradicionais.

Na avaliação deste tipo de opções os modelos estocásticos e os denominados stress tests assumem um papel fundamental, uma vez que geralmente levam a uma avaliação mais adequada e transparente dos riscos subjacentes. A mudança de uma abordagem determinística para uma abordagem estocástica permite captar de forma mais adequada as fontes de incerteza subjacente e a sua natureza dinâmica no tempo. A avaliação de opções implícitas em contratos de seguro envolve igualmente a modelação de variáveis relacionadas com o comportamento do detentor da apólice, por exemplo, a probabilidade de resgate.

A abordagem pelo valor justo proporciona maior transparência no sentido de que os riscos podem ser classificados correctamente por meio de preços justos e análise de cenários. Isso simplifica a identificação das linhas de produtos não rentáveis que tenham componentes de capital intensivo. Ainda neste domínio, cenários específicos para o sector de seguros de vida, tais como pandemias, invalidez e longevidade, podem diminuir consideravelmente a atractividade de um determinado produto.

A tendência para sistemas de gestão de risco baseada no conceito de valor justo oferece vantagens significativas para as companhias de seguros. A transparência permite uma maior e mais correcta classificação dos riscos reais da carteira, assim como reduz substancialmente a probabilidade de perdas. Os produtos modulares representam um passo importante para um projecto de contrato transparente que irá beneficiar tanto os tomadores como as seguradoras. Em particular, os riscos de opções implícitas tornam-se aparentes e mais facilmente tratáveis.

Esta dissertação está dividida em sete capítulos. No segundo capítulo pretende-se ilustrar uma breve cartografia dos tipos de opções implícitas em contratos de seguro do ramo vida. Nesta cartografia serão realçadas as opções sobre dividendos, politicas de crédito, entre outras. Também, neste capítulo, será elaborada uma pequena descrição das garantias mínimas de maturidade. O terceiro capítulo desta monografia tem como principal objectivo apresentar os conceitos mais relevantes no domínio dos contratos e mercados de opções. Tem também, como finalidade uma breve apresentação das questões operacionais relacionadas com o funcionamento dos mercados organizados. Pretende-se, neste capítulo, dar uma panorâmica geral sobre os principais tipos de contratos de opções que actualmente são negociados nas bolsas mundiais. Abordam-se, as opções sobre acções, as opções sobre índices de acções, as opções sobre taxas de juro e as opções sobre taxas de câmbio. Faz-se, também, uma abordagem aos elementos básicos do valor de uma opção. No quarto capítulo serão apresentados alguns modelos de avaliação de opções financeiras, nomeadamente, o modelo Black e Scholes, o modelo Binomial, entre outros. No quinto capítulo serão apresentados vários modelos de avaliação de opções implícitas em contratos de seguro do ramo vida. No capítulo seis irá fazer-se um estudo e uma posterior análise, tendo como base os modelos de avaliação de opções implícitas mencionadas anteriormente, a um contrato de seguro do ramo vida.

No último capítulo, serão apresentadas algumas conclusões, obtidas a partir do estudo e da análise elaborada no contrato de seguro do ramo vida.

CAPÍTULO 2

Cartografia dos tipos de opções implícitas em contratos de seguro do ramo vida

As opções implícitas são um elemento-chave na concepção de produtos estruturados de seguro do ramo vida. Este inclui geralmente garantias relativamente às suas componentes, bem como direitos de modificar as condições do contrato durante a sua duração.

As necessidades actuais dos clientes e dos mercados secundários de seguros de vida tem conduzido a uma tendência de afastamento da tradicional concepção do contrato com transferência total do risco para o segurador em direcção a políticas e novos produtos que combinam várias coberturas e fontes de retorno (anuidades variáveis, seguros do tipo unit-linked). Estes novos contratos conterão menos garantias fundamentais, mas incorporam um conjunto de opções adicionais que se ajustam às necessidades das pessoas seguras e ao preço que estas estão dispostas a pagar.

Neste contexto, as opções implícitas podem tornar-se bastante caras em termos de requisitos de capital. Em geral, a crescente aplicação da abordagem do valor justo e o reconhecimento de opções implícitas terá um impacto sobre a concepção dos contratos de seguro do ramo vida, especialmente para os produtos tradicionais.

Em comparação com os contratos de seguro de vida tradicional em euros, os contratos em unidades de conta têm interesse para as seguradoras, permitindo que este assuma um risco menor. Comercialmente, às vezes é difícil para os clientes aceitarem a falta de garantia do seu capital, ou mesmo o desempenho de seu contrato. Se em tempos de ascensão dos mercados financeiros, o desempenho dos contratos em unidades de conta é regra geral muito superior aquele obtido em contratos em euros, o risco de perda em caso de recessão acentuada do mercado pode levar a uma prevenção.

Vêem-se, aparecer por diversos anos, cada vez mais difundidas as opções adicionais sobre os contratos em unidades de conta permitindo assim, que o cliente invista as suas poupanças nos contratos em unidades de conta, enquanto oferece garantias sobre a propriedade do capital do cliente. Por precaução, muitos foram definidos para a morte do tomador. No entanto, podemos imaginar as garantias para os contratos em unidades de conta em caso de sobrevivência do tomador. São essas garantias que serão objecto de estudo de parte deste capítulo.

De seguida, será feita uma pequena abordagem aos contratos com garantias mínimas em caso de morte e posteriormente, neste capítulo, será feita uma síntese relativamente aos vários tipos de opções implícitas nos seguros do ramo de vida, com vista a uma maior e melhor compreensão destas.

2.1 Descrição das garantias mínimas de maturidade

Os contratos de seguro de vida em unidades de conta têm grande sucesso. Há vários anos, são utilizadas pelas seguradoras, especialmente porque têm muito menor risco do que os contratos tradicionais de euros, isto é, têm redução dos riscos associados e os requisitos regulamentares de solvabilidade são inferiores aos contratos em euros. Do ponto de vista dos clientes, a constatação é mais confusa, se o retorno esperado é muito maior do que o que se pode encontrar nos fundos em euros, a falta de garantia de performance, ou mesmo a garantia do capital investido, pode ser um impedimento ao investimento.

As seguradoras estão assim, a oferecer aos seus clientes novos produtos, permitindo-lhes investir em fundos de unidades de conta, e assim manter um perfil mais dinâmico da economia, proporcionando segurança suficiente para limitar impactos negativos em caso de crise nos mercados financeiros.

Esse desejo é reflectido pelo aparecimento de novas garantias em relação às unidades de conta que são, na verdade, opções pois o cliente é livre para acrescentar ou não o contrato de poupança. Isso permite oferecer um passo de vendas mais eficaz, proporcionando mais força e mais segurança. A longo prazo, podemos ver uma grande oportunidade para criar produtos de investimento de interesse, independentemente do sistema fiscal.

O desenvolvimento de produtos mais sofisticados de protecção financeira permitiria que as companhias de seguros se concentrem em garantias de concepção do produto ao invés de em função do sistema fiscal.

As garantias em caso de morte foram introduzidas em seguros comercializados em França, EUA, Canadá e outros mercados, sendo por isso muito comuns. O seu funcionamento e design são bem compreendidos, e já foram objecto de muitos estudos. As garantias em caso de vida são mais raras, e quase inexistentes no mercado francês, mas são comuns em alguns países estrangeiros. É portanto, útil considerar essas novas salvaguardas, que podem representar uma oportunidade atraente para as seguradoras francesas. No entanto, os riscos envolvidos na criação destas novas salvaguardas devem ser considerados no exercício de preços em particular, deve ser controlado do princípio ao fim. Para cumprir estes compromissos, as companhias de seguros estão a desenvolver novos métodos e a adoptar novos instrumentos, misturando técnicas tradicionais de seguros com ferramentas de modelação puramente financeiras, já amplamente adoptadas no mercado.

2.1.1 Produtos de seguros de vida em unidades de conta

Nos últimos anos, os produtos de poupança (seguros unit-linked, operações de capitalização) tem vindo a ocupar um lugar importante no mercado de seguro de vida. Contrariamente aos produtos tradicionais, estes contratos reduzem significativamente os riscos biométricos (mortalidade/longevidade) e posicionam-se claramente como produtos de investimento, aproveitando as preferências fiscais dos investidores para atrair uma maior clientela.

Os seguros ligados a fundos de investimento (ou unit-linked) são seguros de vida de capital variável em que o valor a receber pelo beneficiário depende, no todo ou em parte, de um “valor de referência” constituído por uma ou mais “unidades de participação”. Nestes contratos, o risco do investimento é assumido, ainda que só em parte, pelo tomador do seguro. Dito de outro modo, o seguro ligado a um fundo de investimento, ao contrário do que acontece no seguro de vida clássico, poderá não dar origem a qualquer rendimento, se não existir uma cláusula que garanta um rendimento mínimo, ou implicar a perda do dinheiro investido, se não existir uma cláusula que garanta o pagamento do capital investido.

Por sua vez, as operações de capitalização são contratos pelos quais o segurador se compromete a pagar um valor previamente fixado, decorrido um certo número de anos, em troca do pagamento de um prémio único ou fraccionado (periódico). Este valor pode ser determinado em função de um “valor de referência” e é pago ao subscritor ou ao portador do título da operação de capitalização na data do seu vencimento.

Ao contrário do que acontece no seguro de vida, a operação de capitalização não está ligada a um risco relacionado com a morte ou a sobrevivência da pessoa segura. Na operação de capitalização o segurador obriga-se a pagar um determinado valor no final do contrato, independentemente de qualquer evento ligado à duração da vida do subscritor. O risco coberto pelo segurador na operação de capitalização é um mero risco financeiro ou de investimento.

Por seu turno, no seguro de vida ligado a fundo de investimento, o risco é partilhado entre o segurador e o tomador do seguro ou transferido totalmente para o tomador do seguro (como acontece nos casos em que não existe capital garantido ou taxa de juro garantida). Para uma operação ligada a um fundo de investimento ser considerada operação de capitalização, tem de garantir o pagamento de um valor determinado.

Numa operação de capitalização, o contrato pode estar expresso em unidades de conta. Nestes casos, o montante a pagar ao beneficiário depende do valor de referência de uma ou mais unidades de conta, devendo o contrato incluir informação sobre a forma como é constituído o valor de referência, a forma e a frequência com que vai ser informado da evolução do valor de referência e da composição da carteira de investimentos, os direitos do tomador do seguro no caso de liquidação de um fundo de investimento ou de eliminação de uma unidade de conta, ou as condições de pagamento do valor de resgate e do valor de reembolso. Quando o cliente opta por investir num produto de poupança em unidades de conta, a quantia que paga é realmente transformada num número de unidades definido. O compromisso da seguradora é de aplicar sobre o número de acções do tomador, não o seu valor, que depende do desempenho do preço do suporte.

Se a economia de unidade de conta apresenta perspectivas de rendimentos significativamente superiores aos obtidos para os produtos em euros, a não ser a garantia contratual específica, sem segurança para o tomador que não podem ser determinadas na ausência de garantias. Além disso, para obter um mínimo de desempenho do seu investimento, ou mesmo em casos desfavoráveis, a recuperar depois da sua aposta inicial. Do ponto de vista da seguradora, no entanto, a transferência de grande parte do risco é de óbvio interesse. O Código dos Seguros também tem explicitamente em conta a redução dos riscos, a margem de solvência mínima legal de produtos da unidade de conta é de 1% do passivo, contra 4% para os bens em euros.

Depois de vários anos muito turbulentos (ou desastrosos) nos mercados financeiros, muitos clientes, mostram uma crescente relutância para assumir todo o risco. Daí a ideia de seguros corporativos, contratos de oferta de garantias associadas a unidades de prestação de garantia adicional para o cliente. Note-se que o acréscimo de garantias adicionais de modo algum é uma tarefa trivial, de facto, as mudanças devido à natureza do risco coberto podem afectar a classificação do produto em euros ou em unidades de conta. O impacto sobre os valores da margem de solvência de regulamentação deve ser tido em conta no estudo da rentabilidade de tais contratos.

O exemplo emblemático desse compromisso é o de uma "garantia de prémios acumulado pago sobre a morte do tomador." Se o tomador falecer antes do termo do contrato, a seguradora compromete-se a pagar ao beneficiário um montante igual ao máximo entre a conta de poupança por ocasião da morte e os prémios acumulados pagos pelo cliente.

2.1.2 Mercado de produtos unit-linked nos países anglo-saxónicos

Nos países anglo-saxões, existem incontáveis variedades de produtos com garantias de comercialização sob a forma de unidades de conta. As mais notáveis são os produtos de anuidades variáveis comercializados nos Estados Unidos. Estes produtos têm a característica de combinar um dos aspectos mais tradicionais de seguro de vida (pensões, rendimento na reforma) e um de seus aspectos mais modernos (produto de investimento em unidades de conta).

Os produtos de anuidade variável oferecem ao cliente a possibilidade de investir as suas economias em vários suportes (activos subjacentes), e dar-lhe a oportunidade de converter o seu capital numa pensão (anuidade), após um determinado período de espera.

Estas garantias são inovadoras em vários aspectos:

- Elas ajudam a rejuvenescer pensões, cuja importância tem vindo a diminuir consideravelmente no contexto da reforma dos sistemas de pensões. Isso está longe de ser trivial, pois comercialmente, permite que a seguradora diferencie os seus produtos provenientes de outros produtos de investimento tradicionais.
- Elas são frequentemente acompanhadas de cláusulas que garantem ao tomador um capital mínimo ou um retorno mínimo no final do contrato, visando evitar grandes perdas em caso de quedas dos mercados.

Outros tipos de produtos muito semelhantes às anuidades variáveis têm sido comercializados noutros países:

- No Canadá, os fundos segregados são produtos unit-linked com garantia do capital em caso de vida ou morte. O nome desses produtos vem do facto de que os prémios pagos ao tomador geralmente são investidos em fundos que são geridos pelo seu próprio segurador.

- No Reino Unido, os produtos unit-linked são similares aos produtos que podem ser encontrados em França. A maioria oferece uma garantia mínima em caso de morte, mas há mais garantias em caso de vida.
- Nos EUA, as anuidades equity-indexed oferecem produtos, tais como anuidades variáveis, no entanto o cálculo da poupança do cliente difere. O cliente tem participação efectiva num determinado índice. Por exemplo, uma taxa de participação de 80% sobre o índice resultaria num aumento de 8% da poupança se o índice subisse em 10%. Estes contratos são geralmente acompanhados por um rendimento mínimo garantido da poupança.

Estas garantias, mesmo para as novas seguradoras, são por vezes mal compreendidas pelo tomador do seguro e pela imprensa. É claro que é o preço destas garantias que está em questão. É de considerar a segurança adicional fornecida por alguns destes dispositivos, e de não esquecer que uma diminuição do risco tem um preço, cobrado directamente por meio de um prémio, ou indirectamente através de um pior desempenho na poupança do cliente. Em geral, isto é não compreender os princípios básicos da actividade seguradora, considerando-se erradamente que a cobertura de um risco só tem valor se o risco ocorrer. O debate é interminável e em qualquer caso, tais afirmações demonstram a complexidade do exercício de preços, que deve ser conciliada viabilidade técnica e financeira, por um lado, e a eficácia do discurso de vendas, por outro.

2.1.3 Garantias relacionadas com a unidade de conta em caso de sobrevivência

As garantias permitem que a seguradora ofereça mais opções, ou exactamente a venda aos seus clientes de uma segurança no seu investimento, no caso em que é realizado sobre os produtos em unidades de conta. Estas garantias são as mais tradicionais, em caso de morte. No entanto, é bastante possível prever as garantias mínimas em caso de vida do segurado.

2.1.3.1 Garantia GMAB

A garantia GMAB (Guaranteed Minimum Accumulation Benefit) traduz uma opção que que garante um Benefício Mínimo de Acumulação, após um período de espera definido pelas condições gerais do contrato, poupando o cliente, é comparado com o montante garantido se cair abaixo desse valor, a seguradora faz a diferença, desde que o tomador se comprometa a prorrogar o contrato.

Para o cliente é uma garantia de desempenho ao longo do tempo, portanto, considerado um suporte de segurança para o investimento em unidades de conta. Para a companhia de seguros, se o contrato prorrogado ficar mais tempo na carteira aumenta assim, a esperança do lucro obtido.

2.1.3.2 Garantia GMMB

A garantia GMMB (Guaranteed Minimum Maturity Benefit) oferece aos clientes de capital garantido, o termo sem prorrogação do contrato. Em geral, partidas em troca de uma participação de menos de 100% de apoio ao desempenho em caso de subida do activo subjacente, assim há uma diminuição no ganho esperado do cliente.

2.1.3.3 Garantia GMSB

A garantia GMSB (Guaranteed Minimum Surrender Benefit) representa uma opção que garante um Benefício Mínimo Garantido Surrender ao cliente, uma garantia mínima sobre o valor do contrato em caso de resgate antecipado da apólice. Os produtos comercializados no Canadá estão a oferecer este tipo de garantia, que oferece um valor em dinheiro equivalente ao montante dos prémios pagos. Esta garantia é quase idêntica à GMMB. Mas numa GMMB, esta garantia é apenas uma data antes da expiração do contrato, a GMSB, no entanto, pode ser exercido o critério do cliente em qualquer momento além do período de espera.

2.1.3.4 Garantia GMIB

A garantia GMIB (Guaranteed Minimum Income Benefit) de produtos vendidos em algumas anuidades variáveis oferece ao cliente uma opção de renda de acordo com determinadas condições durante a inscrição. Este é o GMIB, abreviatura de Benefício de Garantia de Renda Mínima, ou seja, rendimento mínimo garantido em caso de anuitização do capital acumulado.

Esta garantia permite aos clientes converter um valor de anuidade garantida, calculados através de uma tábua de mortalidade e de uma taxa de juro técnico definido quando o contrato for assinado.

2.1.4 Diferentes definições possíveis do montante garantido

Os diferentes tipos de garantias previstas na secção anterior são utilizadas para definir os benefícios a serem pagos e as datas em que serão pagos. Mas os aperfeiçoamentos podem ter sido tidos em conta na definição do contrato. Com efeito, os montantes garantidos utilizados para calcular os benefícios pagos podem ser avaliados de acordo com vários mecanismos distintos, dependendo os preços do cálculo escolhido pelo cliente.

- Garantia de Capital: é o mais clássico, é para garantir ao cliente um capital mínimo no período contratual considerado (ano, semestre). A forma mais comum é a "garantia de prémios acumulados pagos."
- Garantia de Rentabilidade: oferece ao cliente uma taxa mínima de retorno das suas poupanças.
- Estilo cliquet: garantia do maior valor. Neste caso a poupança é capitalizada à maior taxa registada entre a taxa mínima garantida e a taxa observada para a evolução do activo subjacente. Em geral, consideramos apenas os valores alcançados em determinados momentos (reset periods). Este curso permite reduzir as taxas de garantia e entretanto, o interesse para o cliente.

2.2 Tipos de opções implícitas

2.2.1 Opções de dividendos

O pagamento de dividendos faz parte da política estratégica, de investimento e financiamento das empresas, pelo que o seu valor depende em cada momento, entre outros factores, do retorno dos investimentos da seguradora, das taxas de mortalidade observadas e dos custos de funcionamento da actividade. Os dividendos podem ser pagos ao segurado em dinheiro, reduzindo os prémios a pagar no futuro, ou para comprar quantidades adicionais de qualquer cobertura, ou podem ser acumulados com juros por parte da seguradora. Neste último caso, tal pode representar riscos consideráveis para a seguradora, isto quando o contrato contém uma taxa de juro mínima fixa a ser aplicada aos dividendos acumulados.

Os tomadores podem participar directamente no excedente económico da empresa ou de acordo com um sistema equilibrado, com base em valores contáveis. Um valioso mecanismo de distribuição anual do excedente é o "ano a ano" ou garantia "cliquet-style". Neste caso, a política de reserva anual ganha um maior excedente de uma garantia mínima de juros ou de uma fracção gerada pela carteira de investimentos da seguradora. O excedente é determinado de modo diferente e podendo empregar um mecanismo de nivelamento. A comparação das garantias de juros e dos diferentes esquemas de distribuição de excedentes por vários países podem ser encontrada na Cummins, Miltersen e Persson (2004). Uma vez que o excedente é creditado à política de reserva, torna-se parte da garantia e portanto, aumenta o prazo de pagamento garantido. Os contratos que prevêem apenas uma garantia de vencimento sem a participação ao longo do tempo são muitas vezes referidos como tendo uma garantia "ponto a ponto". Usualmente, estes oferecem algumas garantias de pagamento de bónus terminais, se a carteira de investimentos da seguradora tiver uma performance suficientemente boa.

Em vez de acumular dividendos de maneira a ganhar o interesse, o tomador pode receber os dividendos pagos em dinheiro ou usá-los para reduzir os prémios. No caso do capital das opções paid-up, os dividendos são utilizados para aumentar os benefícios e o tomador tem que se submeter a um exame médico complementar ou despesas, que não tenha cobertura. O seguro suplementar consiste num benefício maior de morte e num valor em dinheiro. Em alternativa, os dividendos podem ser aplicados para a compra como um adicional seguro de anos possíveis, sem aumentar o pagamento do prémio. Devido à selecção adversa, muitas seguradoras exigem que essa opção de dividendos deva ser escolhida no início do contrato. Caso contrário, a seguradora pode exigir mais um exame médico para comprovar a segurabilidade dos tomadores, tendo de pedir essa opção durante a vigência do contrato. Além disso, o tomador pode ter o direito de escolher um mecanismo diferente de distribuição de dividendos.

2.2.2 Opções de pagamento de prémio

A maioria dos contratos de seguro de vida contém opções de prémio. Por exemplo, os seguros do tipo universal life permitem aos tomadores escolherem o momento e o montante dos pagamentos de prémios. Mas só enquanto há reservas suficientes, o que é conhecido como um prémio flexível de opção de pagamento. Mesmo que nem todos os tipos de contratos sejam flexíveis, como os seguros do tipo universal life, na maioria dos países europeus e em todo o território dos Estados Unidos, o direito de suspender o pagamento do prémio (opção paid-up) é uma opção exigida por lei. Nos Estados Unidos, esse direito é uma consequência das opções nonforfeiture que são obrigatórias para todos os contratos com valor em dinheiro.

Ao exercer as opções paid-up, o contrato não é rescindido, continua em vigor mas com benefícios reduzidos. O valor do benefício do seguro depende portanto, da política de reserva presente na data do exercício, que é usado como um prémio único de compra do mesmo tipo de seguro como o contrato original. Normalmente, uma taxa de entrega é subtraída da reserva. O direito é uma opção de venda sobre um contrato a termo em que o tomador se comprometeu a comprar títulos com prémios anuais com um preço de exercício de zero. Isto significa que o efeito da opção é trocar o contrato original por um novo contrato com benefícios reduzidos e sem o pagamento do prémio.

Além da opção paid-up, os contratos podem conter o direito de retomar o pagamento do prémio mais tarde, aumentando assim os benefícios anteriormente reduzidos (opção de retoma). Para recuperar o benefício de seguro original, o tomador pode pagar os prémios em atraso ou aumentar o tamanho inicial do prémio. Alternativamente, o tamanho do prémio original pode ser mantido sem pagar os prémios em dívida, o que levará a benefícios inferiores ao do contrato inicial. Em alguns contratos, a opção de retoma pode ser restrita a um determinado período de tempo depois de fazer o contrato paid-up. Se devido aos contratos paid-up, um tomador fizer um contrato deste tipo, por exemplo, as taxas de juro de mercado sobem, a opção para continuar a pagar os prémios oferece uma oportunidade de receber o aumento das taxas de juro garantido no contrato, que é uma call a um contrato forward, com o preço de exercício sendo o reembolso dos prémios. Outro tipo de opção de pagamento do prémio é o aumento do prémio dinâmico, onde os prémios são aumentados por uma percentagem fixada anualmente.

2.2.3 Opção surrender

Em contraste com a opção paid-up, a opção surrender termina o contrato e o tomador recebe o valor de resgate, que consiste na reserva matemática menos uma taxa de entrega com uma quantia fixa em dinheiro. No caso das apólices do tipo unit-linked, o benefício de entrega é o valor dos fundos acumulados, menos uma taxa de resgate. A reserva contém também a política de dividendos. A opção de resgate pode ser exercida em datas distintas de exercício, pelo que pode ser classificada como uma opção do tipo Bermudan de venda sobre o fluxo de caixa futuro de benefícios de seguro esperado, com um preço de exercício totalizando o valor de resgate.

Há risco financeiro inerente à opção surrender devido à possibilidade de muitos tomadores com valores altos de entrega exerceram a opção no momento em que as taxas de juros estão a subir. Além disso, a opção surrender tem um risco de seguro, no sentido de selecção adversa, se ocorrer a maior parte do resgate do contrato provoca um agravamento da situação de risco na carteira da seguradora.

2.2.4 Opção de validade flexível (Flexible expiration option)

Os dotes puros podem incluir a opção de validade flexível, que dá ao tomador uma oportunidade anual para rescindir o contrato antes do vencimento regular e para receber as reservas matemáticas acumuladas, incluindo as garantias de participação e de retorno sem pagar uma taxa de resgate. A opção pode ser exercida após a reserva matemática exceder o benefício de sobrevivência garantida pela primeira vez, ou durante os últimos cinco a dez anos da política, como é estudado por Dillmann (2001).

Assim, quanto mais tarde for a data de exercício, maior será o benefício pago ao tomador. Do ponto de vista financeiro, esta opção corresponde a uma opção de venda do tipo Bermudan sobre uma obrigação clássica (coupon bond) com preço de exercício igual ao benefício do tipo lump-sum. A obrigação corresponde ao cash flow da apólice denunciada pelo tomador, com benefícios esperados em caso de morte deduzidos dos prémios a pagar esperados (para apólices com prémios periódicos), como cupões e benefício esperado em caso de sobrevivência como valor de reembolso (face value). A opção é do tipo Bermudan uma vez que pode ser exercida anualmente na data de aniversário da apólice. Uma vantagem para o tomador é a de que as taxas de juros obtidos pela apólice provêm normalmente de investimentos a longo prazo, o que contrasta com a possibilidade de resgatar anualmente a apólice sem quaisquer encargos, que implica na verdade um investimento de curto prazo.

2.2.5 Opções de liquidação do contrato (Settlement options)

Os tomadores podem escolher entre diferentes opções de liquidação dos contratos, isto é, sobre a forma como os benefícios em caso de vida ou de morte são pagos. A maneira mais comum implica o pagamento dos benefícios do contrato de seguro num montante fixo e único e assim, encerrar a apólice, o que deixa a companhia de seguros sem qualquer obrigação adicional. As opções de rendimento de vida garantem ao beneficiário uma anuidade para a vida remanescente. Existem diversas variações deste tipo de opção. Por exemplo, as opções de renda garantida eram comummente oferecidas em produtos de seguros nos Estados Unidos e em esquemas de poupança para a reforma no Reino Unido, durante os anos 1970 e 1980. No vencimento do contrato, a reserva acumulada da apólice é convertida numa renda vitalícia, onde há uma taxa fixa garantida, o que corresponde a uma opção de call sobre uma obrigação clássica com cupões. O risco financeiro associado a esta opção surge devido a factores demográficos, às condições de mercado na data de exercício (taxas de juro a longo prazo e desempenho de capital), do tamanho da anuidade. Quando as taxas de juro a longo prazo começaram a cair na década de 1990, o valor das opções de renda garantida aumentou substancialmente. Este tipo de opção tornou-se motivo de preocupação especial quando a British Equitable Life deixou de realizar novos contratos devido a erros no pricing e insuficiência das reservas, entre outros problemas.

Em alternativa aos pagamentos únicos, os benefícios do seguro podem ser pagos ao beneficiário durante um período fixado em parcelas iguais (fixed-period option). O tamanho dos pagamentos depende da frequência, da duração do período de pagamento, e dos juros pagos pela seguradora sobre as reservas ainda não pagas. Muitas vezes, um pagamento mínimo é garantido. Se o juro recebido está acima da taxa garantida, a seguradora crédita o juro excedente à parcela aumentando assim o seu valor. Em geral, o beneficiário mantém a opção de retirar o valor actual de fluxos de caixa futuros após ter exercido a opção de período fixo (lump-sum settlement option).

Em vez de fixar o período, pode-se fixar o tamanho das parcelas sob a opção de montante fixo. O tamanho e a frequência dos pagamentos podem determinar o comprimento inicial do prazo de pagamento, que pode ser aumentado se a taxa de juro efectiva for além da taxa garantida.

2.2.6 Direito de renúncia (Right of objection)

Normalmente, o tomador tem o direito de oposição e de cancelar um contrato num determinado prazo após o início deste, sem incorrer em consequências financeiras. Por exemplo, em Portugal o tomador de um contrato de seguro do Ramo Vida, de acidentes pessoais ou de doença a longo prazo, dispõe de 30 dias, a contar da recepção da apólice, para expedir carta em que renuncia aos efeitos do contrato. Esta comunicação deve ser feita por carta registada e não tem que apresentar qualquer justificação. Em função do tipo de seguro que foi efectuado, haverá lugar à devolução de parte ou da totalidade das importâncias pagas.

Este direito pode resultar num risco financeiro para a companhia de seguros se os prémios forem, de imediato, investidos no mercado como a liquidação pode levar a uma perda de juros. Isto é particularmente preocupante no caso dos contratos em unidades de seguros de vida em que a liquidação de prémios reembolsável pode representar um risco substancial.

Além disso, os tomadores podem opor-se ao aumento dinâmico nos prémios.

2.2.7 Opção de Adiantamento (Policy loan)

Os tomadores de seguro podem pedir emprestado à seguradora parte do valor da apólice durante o período de cobertura do seguro. Se a taxa de juros cobrada pelos empréstimos, pela seguradora estiver próxima da taxa de juro de mercado, o risco financeiro para a empresa é limitado, mas pode ser substancial, se a taxa de juros foi fixada no início do contrato. Quando o tomador morre, o total de empréstimos e juros acumulados são subtraídas às reservas da apólice antes que os benefícios sejam pagos. Para evitar um resgate da apólice, os juros devem ser pagos pelo tomador se a soma do empréstimo, acrescido de juros, for inferior ao cash value da apólice. Muitas seguradoras oferecem de certa forma uma opção de adiantamento (empréstimo) automática para garantir que a apólice continua em vigor, que se torna efectiva quando os prémios deixam de ser pagos. Os prémios pendentes são retirados do cash value e tratados como um empréstimo garantido pela apólice.

2.2.8 Backdating da Apólice

A prática da backdating da apólice é muito comum nas empresas de seguros. Os contratos de seguro podem ser ter efeitos retroactivos de maneira a que a data da apólice seja anterior à data de subscrição real, geralmente até seis meses. Por exemplo, a idade mais próxima de aniversário é utilizada no cálculo de prémios e portanto, os prémios são reduzidos devido à menor idade utilizada para os cálculos. No entanto, os tomadores de seguro têm regra geral que pagar os prémios em atraso para o período retroactivo.

2.2.9 Opção de conversão

A opção de conversão é muitas vezes, oferecida no âmbito dos contratos de seguro e permite a conversão de uma apólice de seguro temporário num seguro dotal ou numa renda vitalícia. Em geral, para evitar o fenómeno de selecção adversa a seguradora limita o período de tempo em que esta opção pode ser exercida.

2.2.10 Seguros com prazo extensível (Extended-term insurance)

Nos seguros com prazo extensível, a seguradora usa as reservas da apólice para calcular a duração de um seguro temporário, de modo a ter o mesmo benefício de morte que o contrato original.

2.2.11 Opção lump-sum durante o período de pagamento da renda

A opção lump-sum dá ao beneficiário da renda o direito de receber, de uma só vez, os benefícios esperados da apolíce descontadas à taxa de juro técnica, antes do vencimento esperado da apólice.

2.2.12 Pagamentos complementares

Ao efectuar pagamentos adicionais, os tomadores podem aumentar a cobertura do contrato de seguro. O pagamento adicional corresponde a um prémio único de um novo contrato sem custos de aquisição. Alternativamente, as contribuições adicionais podem ser usadas para encurtar a duração dos contratos de seguro dotal, aumentando a reserva matemática. O prazo residual do contrato ajustado é então, determinado através de princípios actuariais. Nesse caso, as contribuições adicionais não aumentam o benefício em caso de morte mas resultam num maior valor para a poupança (cash value). Os pagamentos complementares são muitas vezes restritos a uma determinada percentagem do capital seguro devem exceder um montante mínimo e só são autorizadas depois de o contrato estar em vigor durante um certo período. Essa opção pode ser rentável para o tomador se a política de dividendos for mais favorável do que as taxas de juro praticadas no mercado, representando assim uma call option "hipoteca" sobre uma coupon bond.

2.2.13 Revalidação (Reinstatement)

As apólices que foram suspensas, reduzidas ou anuladas, por exemplo, por falta de pagamento dos prémios, podem ser revalidadas dentro de um período fixo, mediante o pagamento das importâncias devidas, com ou sem exame médico, consoante o tempo decorrido. Por exemplo, nos Estados Unidos, uma cláusula de período de carência geralmente dá ao tomador um adicional de 30 dias para pagar os prémios em dívida perante a própria apólice caducada. Alternativamente, uma prestação do empréstimo automático pode evitar o resgate da apólice enquanto existirem valores de caixa suficiente para cobrir os prémios. Os prémios em atraso durante o período de suspensão devem ser pagos. A opção para restabelecer um contrato em vez de comprar um novo, pode ser valiosa para o tomador se as condições do contrato antigo forem mais favoráveis, por exemplo, com relação às opções implícitas, do que os novos seriam.

2.2.14 Opção de extensão de cobertura

Existem várias opções que podem afectar a quantidade ou a natureza da cobertura de um contrato de seguro de vida. A cláusula de extensão da cobertura é uma cláusula que uma vez inserida em apólice de seguro, ou contrato de resseguro, garante a extensão do prazo de vigência, ou do âmbito da cobertura, diferentemente das condições gerais da apólice (em caso de seguro), ou garantindo que o ressegurador aceita acompanhar a responsabilidade da cedente na extensão da cobertura (em caso de resseguro).

2.2.15 Opção de extensão do prazo do contrato

Alguns contratos de seguro oferecem uma opção para prolongar o prazo do contrato por um período específico mantendo as condições iniciais. A opção pode ser exercida até ao vencimento e é concedida uma vez que o estado de saúde do tomador não piore. Pode haver outras restrições relativas à duração total do contrato e da idade do tomador na data de maturidade. Esta opção pode ser útil no caso em que os tomadores podem manter altas taxas de juros garantidos quando as taxas de juro do mercado são baixas.

Em geral, todos os tipos de contratos descritos caracterizam fundamentalmente as opções básicas, tais como as opções paid-up e opções surrender. No caso do seguro a longo prazo, típicas opções extras são a opção de conversão, a opção para fazer pagamentos adicionais para ajustar a cobertura em caso de morte, e o alargamento do prazo do contrato. Os contratos do tipo endowment (seguro dotal) oferecem muitas vezes opções de extensão de cobertura para os benefícios em caso de morte, aumento do prémio dinâmico e pagamentos adicionais. Contratos do tipo unit-link geralmente incluem opções semelhantes aos oferecidos em contratos tradicionais do tipo endowment. No entanto, o direito de cancelamento do contrato no prazo de um determinado período de tempo pode implicar riscos financeiros. Outras opções frequentemente oferecidas a este tipo de seguros são o alargamento do prazo do contrato de empréstimo e de política. Como no caso dos seguros a longo prazo, a opção de conversão permite que o tomador converta a unidade ligada ao contrato de seguro num contrato de seguro dotal com o mesmo nível de prémio e data de vencimento, enquanto os benefícios de morte e sobrevivência são ajustados em conformidade. O valor da carteira de referência na data de exercício é usado para calcular os benefícios ajustados. Contratos de vida inteira também possuem opções de cobertura de extensão, política de empréstimo, paid-up acréscimos, e seguro de termo alargado. O “vida universal” é o tipo de contrato mais flexível com relação a pagamento de prémios, que são flexíveis no tempo e tamanho. Outras opções frequentemente disponíveis num contrato de seguro de vida universal, são similares aos oferecidos num contrato de toda a vida.

CAPÍTULO 3

Tipos de opções financeiras

Este capítulo tem como finalidade apresentar os conceitos mais relevantes no domínio dos contratos e mercados de opções. Assim, serão abordados os conceitos de contratos de opções e as suas especificidades em relação a outros instrumentos financeiros. Posteriormente serão, analisadas as características dos contratos de opções negociados em bolsas organizadas. Serão também, apresentados os perfis de ganhos e perdas que as diferentes posições em contratos de opções permitem obter. Serão analisadas questões como a forma de negociação em mercados de opções, os seus sistemas de garantias e as formas de extinção de posições em opções.

No presente capítulo, pretende-se também dar uma panorâmica geral sobre os principais tipos de opções que actualmente são negociadas nas bolsas mundiais. Abordar-se-á as opções sobre acções, as opções sobre índices de acções, as opções sobre taxas de juro e as opções sobre taxas de câmbio. Serão também, alvo de alguma atenção as opções exóticas, negociadas, normalmente, de forma bilateral, em mercados over-the-counter.

Será ainda realizada, neste capítulo, uma análise dos principais factores que afectam o valor de uma opção e do modo como o fazem.

Todos os conceitos e análises referidos foram retirados de várias obras publicadas pela Associação da Bolsa de Derivados do Porto, entre os anos de 1994 a 1997.

Este capítulo têm como principal objectivo relembrar todos os conceitos e análises abordados com vista a uma futura análise do contrato "Victoria Garantia Rendimentos" concedido pela companhia Victoria Seguros de Vida S. A.

3.1 Conceitos e características fundamentais dos contratos de opções

3.1.1 Conceito

Um contrato de opções traduz-se num acordo pelo qual o comprador adquire o direito de comprar (opção de compra) ou de vender (opção de venda) uma quantidade específica de um determinado bem ou instrumento financeiro (activo de base) a um preço fixado (preço de exercício), numa data pré-fixada (opções de estilo europeu) ou durante o período que até aí decorre (opções de estilo americano), pagando por isso, um dado preço (prémio).

Da definição supra mencionada resulta que, dos contratos de opções, podem surgir dois tipos de direitos – um direito de compra ou um direito de venda – dando assim origem a dois tipos de opções básicas: as opções de compra (ou opções call) e as opções de venda (ou opções put).

As opções de compra fornecem ao seu detentor (o comprador) o direito de, numa data pré-fixada ou até mesmo nessa data, comprar um determinado activo, pelo preço de exercício. A contraparte deste contrato (o vendedor) fica com a obrigação de vender o activo ao preço de exercício, assim que o comprador exerça o seu direito.

Por seu lado, as opções de venda fornecem ao seu detentor (comprador) o direito de, numa data pré-fixada ou até mesmo nessa data, vender um determinado activo, pelo preço de exercício. A contraparte deste contrato (o vendedor) fica com a obrigação de comprar o activo, ao preço de exercício, quando o comprador exercer o seu direito.

Tabela 1 – Direitos e obrigações associados a uma posição em opções

OPÇÃO	POSIÇÃO	OBRIGAÇÕES	DIREITOS
Opção de comprar (call)	Comprador da call	Pagamento imediato do prémio.	Direito de comprar o activo ao preço pré-fixado.
	Vendedor da call	Obrigação de se, a contraparte o solicitar, vender o activo ao preço pré-fixado.	Recebimento imediato do prémio.
Opção de venda (put)	Comprador da put	Pagamento imediato do prémio.	Direito de vender o activo ao preço pré-fixado.
	Vendedor da put	Obrigação de se, a contraparte o solicitar, comprar o activo ao preço pré-fixado.	Recebimento imediato do prémio.

Na Tabela 1 encontram-se sintetizados os direitos e as obrigações associados a cada tipo de posição que se pode assumir com contratos de opções. Esta também faz ressaltar claramente a situação assimétrica, em termos de obrigações, em que se encontra as duas partes, naquilo que é a principal característica distintiva dos contratos de opções em relação aos outros tipos fundamentais de contratos a prazo (forwards e futuros) nos quais se vislumbra uma inegável simetria de obrigações entre as partes.

Efectivamente, um dos aspectos mais peculiares deste tipo de contratos é o estado de sujeição em que o vendedor se encontra relativamente aos direitos do comprador. Assim sendo, não será de estranhar que o vendedor só se disponha a celebrar um contrato deste tipo se receber uma determinada quantia que lhe compense tal situação. Esta compensação monetária é denominada de prémio e é, assim, o preço que o comprador paga ao vendedor pelo direito que adquire ao comprar um contrato de opções.

Da definição resulta, também que, pode fazer-se uma outra divisão ao nível dos tipos de opções, agora relacionada com a data ou o período de exercício do direito pelo comprador. Neste contexto, podem distinguir-se as opções de estilo europeu (ou opções europeias) das opções de estilo americano (ou opções americanas). No caso das primeiras, o direito do comprador apenas pode ser exercido numa data pré-determinada, denominada data de expiração (ou de maturidade, ou de vencimento) da opção; e no caso das opções americanas, o direito do comprador pode ser exercido numa data qualquer até à data de expiração.

3.1.2 Características fundamentais

- **Padronização**

Na actualidade, os contratos de opções podem ser negociados fora de bolsa, normalmente no mercado interbancário (opções OTC - Over-the-Counter), ou em mercados organizados, isto é, em bolsas especialmente organizadas e regulamentadas para a elaboração de transacções sobre opções, opções listadas ou padronizadas.

A negociação em mercados organizados apresenta dois tipos de vantagens relevantes: por um lado, permite potenciar a liquidez, pela via da padronização e da fungibilidade dos contratos e globalização da oferta e da procura; e por outro lado, possibilita a eliminação do risco de contraparte, mediante a interposição no negócio de uma terceira entidade, a Câmara de Compensação, que garante o cumprimento das obrigações inerentes aos contratos.

A desvantagem mais clara da negociação em mercados organizados resulta da própria padronização dos contratos, isto é, que a especificação dos mesmos pode não se encontrar em completa sintonia com as necessidades das partes. Já nos mercados OTC, é possível a "personalização" dos vários itens do contrato, adequando-os às necessidades específicas das partes.

A padronização que se visualiza nas opções listadas consubstancia-se no facto de todos os elementos inerentes ao contrato serem fixos à priori pela entidade gestora do mercado, à excepção do prémio a pagar pelo comprador ao vendedor. São assim definidos pela entidade gestora do mercado:

- os preços de exercício possíveis, a bolsa normalmente cria opções com preços de exercício que giram em torno do preço à vista do activo de base;
- a quantidade e a qualidade do activo subjacente, isto é, do activo sobre o qual recai o direito do comprador da opção;
- a forma de liquidação do contrato, por entrega física ou via liquidação financeira;
- o local da entrega, no caso de liquidação física;
- a data de vencimento ou de expiração;
- o cap prise, no caso das opções cap;
- a variação mínima dos prémios (tick size).

Assim sendo, o prémio é o único elemento fundamental do contrato a ser negociado entre as partes, sendo cotado, normalmente, em termos unitários, isto é, por cada unidade do activo objecto de contratação.

Combinando idênticas características ao nível de alguns dos elementos de padronização referidos, anteriormente é possível definir duas noções importantes nos mercados de opções: o de classe de opções e o de série de opções.

Uma classe de opções é organizada pelo conjunto de opções transaccionadas na mesma bolsa, sobre o mesmo activo e com as mesmas características quanto à natureza, estilo, quantidade e modalidade de entrega.

Uma série de opções designa o conjunto de opções pertencentes a uma mesma classe, que possuem o mesmo preço de exercício e têm a mesma data de expiração.

- **<u>Fungilidade</u>**

Tal como acontece nos mercados organizados de futuros, o elevado sucesso obtido pelos mercados organizados de opções está intrinsecamente ligado ao êxito conseguido na resolução de dois problemas: o do risco de incumprimento das obrigações e o da dificuldade de fazer cessar a vigência dos contratos.

A solução destes dois problemas passa, pelo aparecimento de uma terceira entidade, a Câmara de Compensação, que se interpõe entre os dois intervenientes no negócio. Assim sendo, sempre que um contrato de opções é celebrado, a Câmara de Compensação coloca-se entre o comprador e o vendedor, passando em relação a cada um deles, a constituir a outra parte do contrato, tudo se processando como se o vendedor o vendesse à Câmara de Compensação e o comprador o adquirisse a esta última entidade.

Desta forma, compradores e vendedores deixam de estar unidos por qualquer vínculo, uma vez que todos os seus direitos e deveres nascem face à Câmara de Compensação. Esta garante sempre, a cada parte, o cumprimento do contrato, independentemente de a contraparte o cumprir ou não, assim desaparecendo o risco de crédito.

O elevado grau de padronização e a interposição da Câmara de Compensação permitem que os contratos pertencentes a uma mesma série se tornem absolutamente iguais. Assim, fica assegurada a fungibilidade dos contratos de opções, tornando-os negociáveis.

Esta última característica dos contratos é extremamente valiosa, na medida em que permite que qualquer agente (comprador ou vendedor) possa facilmente anular as obrigações (e direitos) assumidos no mercado de opções: o comprador de uma call ou put pode anular a sua posição, simplesmente vendendo um contrato da mesma série; o vendedor de uma call ou put pode anular a sua posição, simplesmente comprando um contrato da mesma série.

Conclui-se assim, que para anular obrigações (e direitos) inerentes à compra venda de um contrato de opções, basta efectuar uma transacção inversa à inicial, embora sempre sobre a mesma série.

3.1.3 Perfis de ganhos e de perdas associados a uma posição em opções

- **<u>Opções calls</u>**

Considere-se a seguinte notação:

- S : cotação à vista da acção no momento t (por hipótese, a data de expiração);
- X : preço de exercício da opção;
- C : prémio da opção (por hipótese, pago no momento da transacção).

As conclusões apresentadas neste ponto são igualmente válidas para o caso de opções americanas na data de expiração e para opções sobre outros activos distintos das acções.

O comprador tem assim, um potencial ilimitado de lucros, com um risco limitado ao valor do prémio:

$$\text{lucro para o comprador da call } \begin{cases} S - X - C, & \text{se } S > X \\ -C, & \text{se } S \le X \end{cases}.$$

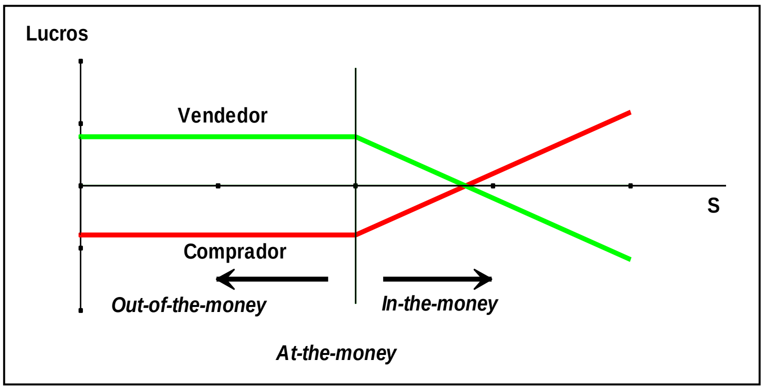
O vendedor da opção call tem a obrigação de vender um dado número de acções a um preço fixo, se o comprador decidir exercer o seu direito. Caso isso suceda, o vendedor terá um prejuízo igual à diferença entre o preço da acção e a soma do preço de exercício com o prémio recebido. Se o comprador não exercer, o vendedor terá um ganho igual ao valor do prémio.

Assim sendo, o vendedor fica exposto a perdas ilimitadas, com um ganho máximo limitado ao valor do prémio recebido:

$$\text{lucro para o vendedor da call } \begin{cases} C + X - S, & \text{se } S > X \\ C, & \text{se } S \le X \end{cases}.$$

O Gráfico 1 evidência o perfil de ganhos e de perdas para cada um dos intervenientes.

Gráfico 1 – Perfil de lucros do comprador e do vendedor da call



No gráfico anterior, surgem três novas noções valiosas no contexto da transacção de opções: opção out-of-the-money, opção at-the-money e opção in-the-money. O comprador só exerce a opção call se a cotação no mercado à vista do activo subjacente for superior ao preço de exercício da opção, já que só nessa situação o exercício do direito lhe é vantajoso, produzindo ganhos. Só nesse caso é que a opção call tem valor de exercício, aí diz-se que a opção está in-the-money.

Quando a cotação no mercado à vista do activo subjacente é inferior ao preço de exercício da opção, o direito não é exercido pelo comprador, já que tal actuação lhe traria prejuízos, nessa situação, a opção diz-se out-of-the-money.

Quando a cotação no mercado à vista do activo subjacente é igual ao preço de exercício da opção, o seu exercício é indiferente para o comprador, já que não produz quaisquer ganhos ou perdas: nesse caso, a opção está at-the-money.

- **<u>Opções puts</u>**

Considere-se, a seguinte notação:

- S : cotação à vista da acção no momento t (por hipótese, a data de expiração);
- X : preço de exercício da opção;
- P : prémio da opção (por hipótese, pago no momento da transacção).

As conclusões apresentadas, neste ponto são igualmente válidas para o caso de opções americanas na data de expiração e para opções sobre outros activos distintos das acções.

O comprador tem um potencial (quase) ilimitado de lucros, com um risco limitado ao valor do prémio:

$$\text{lucro para o comprador da put } \begin{cases} X - S - C, & \text{se } S < X \\ -C, & \text{se } S \geq X \end{cases}.$$

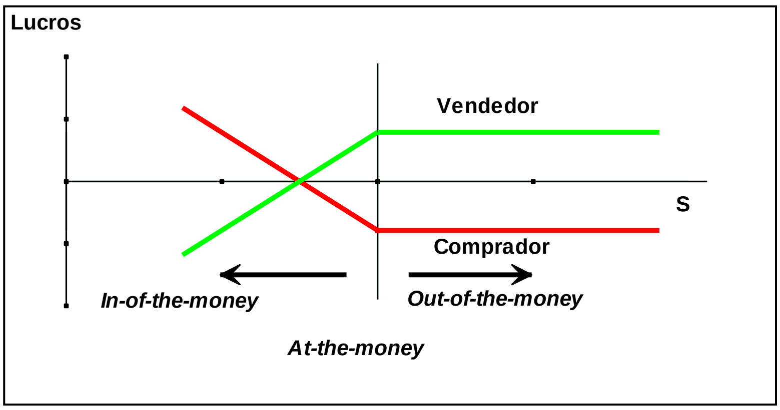
O vendedor da put tem o dever de comprar um dado número de acções a um preço fixo, se o comprador decidir exercer o seu direito. Caso isso suceda, o vendedor terá um prejuízo igual à diferença entre o preço de exercício e a soma da cotação à vista com o prémio recebido. Se o comprador não exercer, o vendedor terá um ganho igual ao valor do prémio.

O vendedor fica assim exposto a perdas (quase) ilimitadas, com um montante máximo de ganho limitado ao valor do prémio recebido:

$$\text{lucro para o vendedor da put } \begin{cases} C + S - X, & \text{se } S < X \\ C, & \text{se } S \geq X \end{cases}.$$

O Gráfico 2 evidência o perfil de ganhos e de perdas para cada um dos intervenientes.

Gráfico 2 – Perfil de lucros do comprador e do vendedor da put



O comprador só exerce a opção put se a cotação no mercado à vista do activo subjacente for inferior ao preço de exercício da opção. Só nessa situação, o exercício do direito produz algum ganho para ele. Nesse caso a opção put tem valor de exercício; diz-se, então, que a opção está in-the-money.

Quando a cotação no mercado à vista do activo subjacente é superior ao preço de exercício da opção, o seu exercício traria prejuízos ao comprador. Nessa situação, a opção está out-of-the-money.

Quando a cotação no mercado à vista do activo subjacente é igual ao preço de exercício da opção, o seu exercício não produz quaisquer ganhos ou perdas ao comprador. Neste caso, a opção está at-the-money.

3.2 Funcionamento dos mercados organizados de opções

3.2.1 Organização operacional

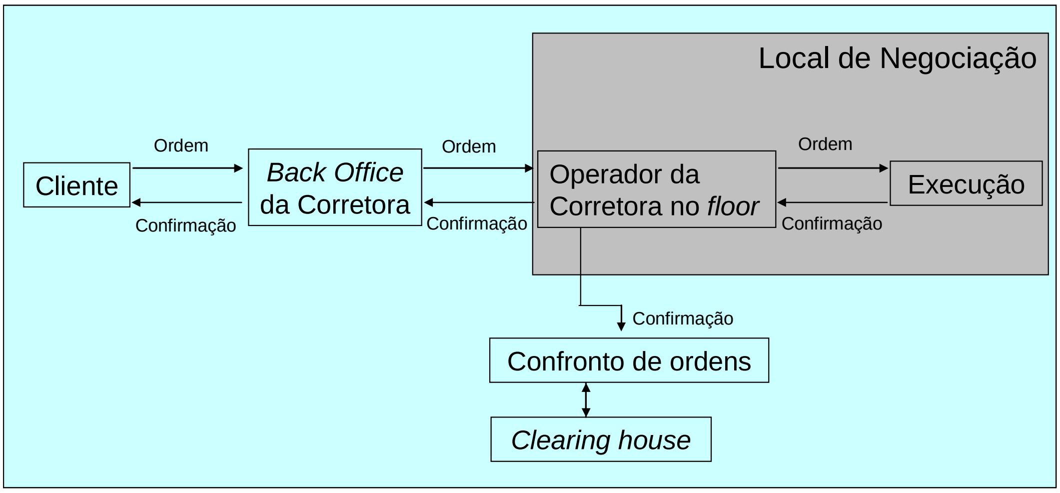
A aceitação generalizada da importância dos contratos de opções está intimamente ligada o modo como os mercados onde eles se transaccionam, se encontram organizados e regulamentados. Nesse sentido, tornam-se particularmente valiosas os pontos seguintes, onde se procede a uma breve descrição dos mecanismos operacionais destes mercados, ilustrando-se o modo como se abrem, compensam e liquidam posições nos mercados de opções.

3.2.1.1 Negociação e abertura/alteração de posições em opções

A execução de uma ordem de bolsa relativa à compra ou venda de opções é em tudo igual à homóloga para transacções à vista ou de futuros. As ordens só podem ser executadas pelas sociedades membros das bolsas, pelo que um determinado indivíduo, se desejar comprar ou vender opções, deverá dar as suas ordens através daquelas. As ordens de bolsa são executadas pelos representantes da sociedade em causa, como nos casos do mercado à vista, a ordem deverá especificar o tipo (compra ou venda), a quantidade de contratos a transaccionar e as restrições em termos de preço e de prazo.

Uma vez comprovada a ordem dada pelo cliente, ela é imediatamente transmitida ao(s) representante(s) da sociedade no floor e por eles executada (se a negociação se efectuar por sistema de viva-voz), seguindo o esquema apresentado na Figura 1 ou introduzida no sistema (se a negociação se efectuar por sistema automático). A Figura 1 foi elaborada com base na informação contida na obra da Associação da Bolsa de Derivados do Porto do ano de 1997.

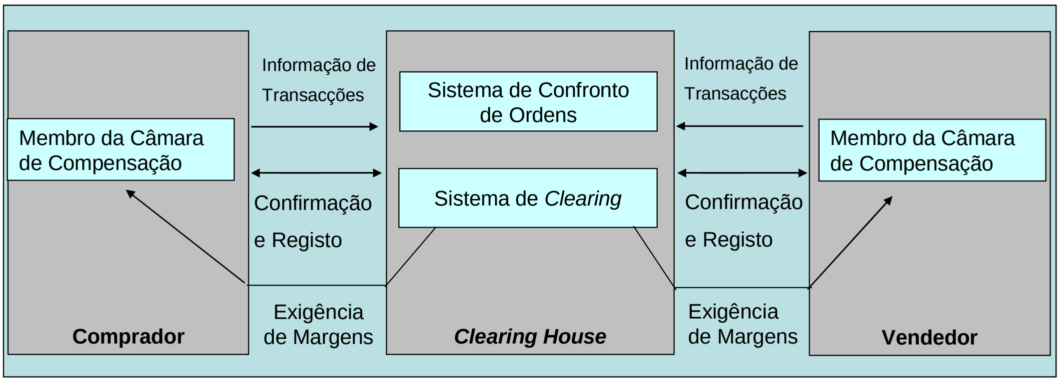
Figura 1 – Esquema do fluxo das ordens de bolsa num contrato de opções



3.2.1.2 Compensação

O confronto e registo das ordens são depois feitos pela bolsa, transmitindo pares de ordens à Câmara de Compensação, ou directamente por esta última. Uma vez que as transacções tenham sido inseridas no sistema de compensação, os membros da bolsa deixam de ter relações estabelecidas entre eles por força destes negócios, passando a clearing house a interpor-se como a segunda parte da transacção. A Figura 2 apresenta um esquema do processo de compensação. Esta figura foi elaborada com base na informação contida na obra da Associação da Bolsa de Derivados do Porto do ano de 1997.

Figura 2 – Estrutura do processo de clearing



Tal como nos contratos de futuros, a Câmara de Compensação tem aqui um papel com tripla relevância:

a) leva a cabo o registo, a confirmação e o processamento de todas as transacções, em cada dia, produzindo uma relação, global e por membro, das posições em aberto;

b) pelo princípio da substituição, torna-se a contraparte de todas as transacções efectuadas: assim sendo, qualquer negócio é efectivamente elaborado e garantido pela clearing house. Este procedimento assegura a possibilidade de qualquer posição ser revertida sem qualquer referência à parte com quem o negócio foi originalmente fechado, isto é, permitindo a fungibilidade dos contratos pertencentes à mesma série e, com isso, facilitando enormemente a entrada/saída do mercado aos agentes económicos;

c) é através dela que se concretiza o sistema de liquidação física (quando o contrato possa ser extinguido dessa forma).

O êxito obtido pelos contratos de opções negociados nos mercados bolsistas está particularmente associado à liquidez permitida pela sua padronização e à segurança conferida à negociação pelo papel da Câmara de Compensação que assegura o cumprimento de todos os contratos, assumindo o papel de contraparte em cada um deles.

3.2.1.3 Sistemas de garantias

Uma vez que a Câmara de Compensação se interpõe como contraparte de cada posição de compra e de cada posição de venda, passando-se tudo como se todos adquirissem as opções à Câmara e todos as vendessem à mesma, natural será que esta entidade promova a constituição e ajustamento de um grupo de garantias de cumprimento, que a coloquem a salvo de qualquer situação de incumprimento, fundamentalmente por parte do vendedor, já que o comprador não é obrigado a exercer a opção.

Ao nível dos sistemas de garantias actuais nas principais bolsas internacionais, há a distinguir entre o tipo de opção usualmente transaccionado, em que o comprador tem de pagar o prémio na data da aquisição da opção, e o sistema de ajustamento das garantias (margining system) ao estilo dos contratos de futuros, inicialmente desenvolvido pela LIFFE (London International Financial Futures Exchange), aplicável aos contratos de opções sobre futuros, no qual tanto os compradores como os vendedores estão sujeitos ao depósito e ajustamento diário de garantias.

- **<u>Sistema usual: opções com prémio pago no momento da aquisição</u>**

Neste sistema, o comprador paga, inicialmente, o montante do prémio. Assim sendo, e como nunca está sujeito a uma perda superior a essa, nenhum pagamento posterior lhe é exigido.

Contrariamente, o vendedor da opção tem de prestar uma determinada garantia (uma fracção do valor do contrato), de modo a que diminuam os riscos da Câmara de Compensação, no caso de o comprador decidir exercer e o vendedor não cumprir.

Sendo certo que este princípio é bastante simples, não é menos certo que os sistemas de margining para opções podem ser bastante complexos e variar substancialmente de bolsa para bolsa, podendo, inclusive, dentro da própria bolsa, haver distintos requisitos consoante o tipo de posições.

3.2.1.4 Extinção de posições em opções

Uma posição assumida no mercado de opções pode ser extinta e com ela, os direitos e deveres inerentes, por uma de três formas: por reversão da posição antes da data de maturidade; por exercício pelo comprador na data de maturidade (opções europeias) ou até esta data (opções americanas); e ou por caducidade.

- **<u>Reversão de posições</u>**

A reversão constitui o modo mais usual da extinção de posições. Trata-se apenas de realizar uma operação inversa à inicialmente efectuada (e sobre a mesma série). Trata-se de uma forma necessária e importante de extinção:

- é mais fácil e menos dispendiosa que o exercício das opções, não exigindo o cumprimento de obrigações mais onerosas, como sejam o pagamento de preço de exercício ou a entrega de activos;
- é um meio fundamental para a actuação dos arbitragistas e dos especuladores, os quais, não estão interessados em levar até ao vencimento a posição adquirida;
- permite maior liquidez para o mercado, bem como atenua as oscilações de preços.

- **<u>Exercício das opções</u>**

Esta forma de extinção de posições em opções traduz-se na realização do direito aquirido pelo comprador da opção e envolve geralmente três fases:

1ª Fase – exercício propriamente dito: o comprador manifesta intenção de comprar/vender o activo subjacente (call/put);

2ª Fase – notificação: a Câmara de Compensação determina qual o vendedor da opção que será exercido, isto é, que satisfará o direito do comprador e notifica-o;

3ª Fase – liquidação: corresponde à realização da transacção inerente ao exercício, podendo envolver a troca de activos físicos (liquidação física) ou apenas a concretização de fluxos financeiros (liquidação estritamente financeira).

Os procedimentos inerentes às várias fases do processo de exercício, nomeadamente para as duas últimas, diferem significativamente de bolsa para bolsa.

- **Caducidade ou abandono**

A extinção de uma posição em opções pode ainda demonstra-se pelo não exercício da opção no prazo (ou na data) possível, ou seja, pelo seu abandono. De facto, após a expiração, são normalmente encerradas de forma automática todas as posições da série ainda em aberto e a opção deixa de ter qualquer valor, sendo por isso designada activo-desperdício ou wasting asset.

Deve notar-se, entretanto, que, em algumas bolsas, as posições (compradoras) in-the-money são exercidas automaticamente, sendo encerradas também automaticamente as posições (compradoras) out-of-the-money. Os compradores que não desejem exercer posições in-the-money ou queiram exercer as posições out-of-the-money devem, em tais casos, informar previamente a bolsa das suas intenções.

3.3 Tipos de contratos de opções

3.3.1 Acções individuais

Trata-se de contratos que fornecem ao comprador o direito de comprar ou vender uma determinada quantidade de acções numa determinada data, ou durante um período pré-fixado a um preço definido na data inicial de transacção.

Foi o primeiro tipo de contratos de opções sobre activos financeiros a surgir (1973, na Chicago Board of Trade) e com elevado êxito, tratando-se de um dos tipos de contratos de opções de maior sucesso a nível mundial, conjuntamente com os contratos sobre índices de cotações de acções, e cujas características genéricas, nomeadamente em termos de padronização, podem ser avaliadas.

3.3.2 Índices de cotações de acções

Além das opções sobre acções individuais, é também possível negociar opções sobre índices de cotações, introduzidas inicialmente pela Chicago Board of Trade, em 1983. O volume de negociação a nível mundial deste tipo de contratos é igualmente bastante elevado.

Dentro deste tipo de opções, pode distinguir-se entre as opções cash index e as opções sobre futuros de índices de cotações. Uma opção cash índex confere ao comprador o direito de comprar ou vender um determinado índice de cotações a um dado preço. Uma vez que é, obviamente, impossível entregar fisicamente um índice de cotações, quaisquer perdas ou ganhos no exercício são concretizados via entrega monetária (cash) e não via entrega do instrumento de base.

3.3.3 Taxas de câmbio

As características básicas de uma opção sobre uma determinada taxa de câmbio não são distintas das de qualquer outro tipo de opção. Uma opção sobre uma determina taxa de câmbio confere ao comprador o direito de comprar ou vender, no fim de ou durante um determinado período, uma quantidade fixa de determinada moeda em troca por uma quantidade específica de outra moeda, isto é, a uma taxa de câmbio fixa.

Este tipo de opções foi listado pela primeira vez em mercado organizado em 1983, pela Philadelphia Exchange e o seu volume de negociação é, na actualidade, igualmente elevado, apesar de neste tipo de activo, as opções exóticas (negociadas fora de bolsa) tenham também atingido um desenvolvimento bastante elevado.

Também aqui as opções podem ser classificadas como opções cash, isto é, opções em que o exercício requer ao comprador, em geral, a entrega de dinheiro por recebimento da quantidade de moeda correspondente, ou opções sobre futuros de taxa de câmbio, com as mesmas características das evidenciadas para o caso das opções sobre futuros de índices (com as devidas adaptações).

3.3.4 Taxas de juro

As opções sobre taxas de juro, ou, mais correctamente, as opções sobre instrumentos de taxa de juro fixa, surgem segundo duas classificações: por um lado, opções sobre taxas de juro de curto prazo versus opções sobre taxas de juro de longo prazo; por outro lado, opções cash versus opções sobre futuros. Deverá notar-se que as opções sobre taxas de juro de curto prazo são, maioritariamente, opções sobre futuros, enquanto as opções sobre taxas de juro de longo prazo recaem sobre uma grande variedade de instrumentos - uma obrigação, um índice de obrigações ou um contrato de futuros.

3.3.5 Mercadorias

Existem registos de que, no início do século XVII, havia contratos opcionais sobre grãos, especiarias e sal. Apesar desse facto, as opções sobre mercadorias, estão na actualidade menos divulgadas, em termos de mercados organizados, do que as opções sobre activos financeiros. Aliás, as opções sobre mercadorias podem ser consideradas os "parentes pobres" dos futuros sobre mercadorias porque só em 1980 foram introduzidos preços de exercício padronizados.

Existindo, actualmente, nas formas de opções cash ou de opções sobre futuros, são semelhantes, nas suas características, aos demais mencionados, com a diferença fundamental de serem contratos sobre bens físicos.

3.3.6 Opções exóticas

As opções exóticas são contratos derivados que de algum modo se distanciam das opções call e opções put padronizadas referidas anteriormente. Pretende-se, de seguida, realizar uma análise de opções não standartizadas, negociadas, em geral, directamente entre bancos e clientes, tendo como elementos fundamentais a flexibilidade em termos de características de contratos, a diversidade de perfis de risco/retorno que permitem obter e a atractividade dos preços.

Tendo em conta a infinidade de opções exóticas que podem ser criadas, serão apenas referenciadas as mais comuns. Esta análise será dividida em duas fases: na primeira fase, serão analisadas as chamadas opções path dependent e na segunda fase as opções path independent.

As primeiras são opções cujo valor, na data da maturidade, depende da evolução do preço do activo subjacente à duração de vida da opção. Também analisar-se-ão os tipos mais comuns de entre as opções path dependent, designadamente, as opções lookback, as opções average rate, as opções barrier e as cliques, ladders e shouts.

Estas últimas são aquelas cujo payoff final, ao contrário das anteriores, não depende do padrão seguido pelo preço à vista do activo subjacente durante o período de vida da opção.

Serão analisadas designadamente, as opções digital, as opções gap, as opções paylater, as opções compound, as opções chooser e as opções sobre vários activos ou preços.

3.3.6.1 Opções path dependent

- **Opções lookback**

A principal característica de uma opção lookback é o facto de o seu preço de exercício não estar estabelecido à partida, sendo só determinado na data de exercício. O preço de exercício é indicado a partir da evolução que o preço do activo sofreu ao longo do "lookback period". As opções lookback diferem entre si em função do modo como o preço de exercício é determinado. Esta questão irá ser analisada, sendo ilustrada com diversos tipos de opções lookback.

Opções lookback on the minimum

O preço de exercício efectivo na data de expiração de uma call on the minimum é definido, considerando a seguinte notação:

t - maturidade da opção

X_t - preço de exercício na data de maturidade

$S_1,\ S_2,\ ...,\ S_t$ - preço do activo subjacente em $1,\ 2,\ ...,\ t$

C_t - valor da call na maturidade

da seguinte forma,

$$X_t = min\left(S_1,\ S_2,\ ...,\ S_t\right).$$

O retorno final de um comprador de uma call deste tipo é o seguinte:

$$C_t = max\left(0,\ S_t - X_t\right).$$

A utilidade de uma lookback call on the minimum resulta do facto de permitir ao seu comprador adquirir o activo subjacente ao mínimo preço que ocorra no período de $\left(0,\ t\right)$, o lookback period.

Opções lookback on the maximum

Uma opção lookback put on the maximum permite ao seu comprador vender o activo subjacente ao preço máximo que tenha ocorrido ao longo do lookback period. O preço de exercício real na data de expiração de uma put on the maximum é determinado da seguinte forma:

$$X_t = max(S_1,\ S_2,\ ...,\ S_t).$$

O retorno final de um comprador de uma put deste tipo é o seguinte:

$$C_t = max(0,\ X_t - S_t).$$

Do mesmo modo que a lookback call, a lookback put normalmente expira in-the-money, excepto no caso de o máximo apenas ser atingido na expiração, situação em que a opção expirará sem valor.

Opções lookback on the average

O valor final de qualquer opção lookback é determinado através da análise da evolução passada dos preços do activo subjacente, calculando uma estatística definida. Até este momento, as estatísticas utilizadas foram o máximo e o mínimo. Em teoria, podem ser utilizadas várias estatísticas, como por exemplo, a média aritmética, a média geométrica e o desvio-padrão. Se a estatística for a média aritmética, então

$$C_t = max\left(S_t - \overline{A},\ 0\right)$$

$$P_t = max\left(\overline{A} - S_t,\ 0\right)$$

em que $\overline{A} = \sum_{i=0}^{t} S_i / t$.

Estes tipos de contratos são denominados lookbacks on the average no período $(0,\ t)$.

- **<u>Opções average-rate</u>**

As opções average-rate, também conhecidas por opções asian, são opções que incidem sobre a média, isto é, o preço de exercício está estabelecido à partida e é pela comparação entre este preço e a média dos preços do activo durante um determinado período que o comprador da opção vai decidir pelo seu exercício, ou não. O valor final deste tipo de opção é dado por:

$$C_t = max\left(\overline{A} - X,\ 0\right)$$

$$P_t = max\left(X - \overline{A},\ 0\right)$$

em que $\overline{A} = \sum_{i=0}^{t} S_i / t$.

- **Opções barrier**

Uma opção barrier é uma opção cujo retorno depende do facto de o preço do activo subjacente atingir uma meta pré-definida, durante a vida da opção. Existem vários tipos de opções barrier, que diferem apenas no que acontece à opção quando a meta é atingida. Por exemplo, se o valor da opção depender do facto, de o preço do activo subjacente ultrapassar determinado nível superior, é o caso de opções up-and-in ou up-and-out. Na situação inversa, isto é, se o valor da opção estiver dependente de ser atingida a uma barreira inferior, será o caso das opções down-and-in e down-and-out.

Opções down-and-out

São opções em que é discriminada uma barreira inferior. Se o preço do activo subjacente diminuir para níveis inferiores a essa barreira, durante a vida da opção, então a opção deixa de existir.

Designe-se por Γ o período de paragem. Para indicar se a opção down-and-out ainda está activa será utilizada a seguinte função:

$$\iota(\Gamma > t) \equiv \begin{cases} 1; \text{ A barreira não foi atingida até } t\,(\Gamma > t) \\ 0; \text{ A barreira foi cruzada antes de } t\,(\Gamma \le t) \end{cases}.$$

O valor de uma call down-and-out na maturidade é determinado pelo seguinte payoff:

$$\iota(\Gamma > t)\, max(S_t - X,\ 0).$$

Se a barreira não for cruzada, $(\Gamma > t)$, então $\iota(\Gamma > t) = 1$ e o payoff é idêntico ao de uma opção ordinária. Se a barreira for ultrapassada, $(\Gamma \le t)$, então $\iota(\Gamma > t) = 0$, e o payoff da opção é zero, independentemente do nível de preço do activo subjacente, na data t.

Opções down-and-in

As opções down-and-in são opções que se tornam activas, apenas se o preço do activo subjacente atingir uma barreira inferior. Por consequência, o payoff da opção depende do facto da barreira ser ultrapassada pelo menos uma vez durante a vida da opção. O payoff de uma opção down-and-in só será igual ao de uma opção clássica se a barreira for ultrapassada.

Neste tipo de opções é possível utilizar uma função para indicar quando a opção está activa. Considere-se, então, a seguinte função:

$$\iota(\Gamma > T) \equiv \begin{cases} 0; \text{ A barreira não foi atingida até } t\,(\Gamma > t) \\ 1; \text{ A barreira foi cruzada antes de } t\,(\Gamma \le t) \end{cases}.$$

Considere-se uma opção call, com preço de exercício X e maturidade t. O payoff desta opção na maturidade é dado pela seguinte expressão:

$$\iota(\Gamma \leq t)\, max(S_t - X\,,\ 0).$$

Se a barreira for ultrapassada ao longo da vida da opção, $(\Gamma \leq t)$, então, $\iota(\Gamma \leq t) = 1$ e o payoff da opção é idêntico ao de uma opção normal. Se, pelo contrário, a barreira não é alcançada, $(\Gamma > t)$, então $\iota(\Gamma \leq t) = 0$ e o payoff da opção é igual a 0.

Considere-se, agora, o caso de uma opção put down-and-in, com preço de exercício X. O seu valor na maturidade t é definido por:

$$\iota(\Gamma \leq t)\, max(X - S_t\,,\ 0).$$

Opções up-and-out

Neste tipo de opções é especificada uma barreira superior. Se o preço do activo subjacente ultrapassar esta barreira durante a vida da opção, a opção desaparece.

Considere-se o caso de uma call up-and-out. O payoff na maturidade de uma call deste tipo é definido pela seguinte expressão:

$$\iota(\Gamma > t)\, max(S_t - X\,,\ 0).$$

Se a barreira não for ultrapassada, então $\iota(\Gamma > t) = 1$ e o payoff é igual ao de uma call normal. Se a barreira for ultrapassada, $\iota(\Gamma > t) = 0$ e o payoff da opção é igual a zero, independentemente do nível do preço do activo subjacente.

No caso das puts, a análise é idêntica à das calls. O payoff de uma put up-and-out na maturidade é dado por:

$$\iota(\Gamma > t)\, max(X - S_t\,,\ 0).$$

Opções up-and-in

Uma opção up-and-in é uma opção que não tem qualquer valor até que o preço do activo subjacente atinja uma barreira superior durante a vida da opção.

O valor de uma call up-and-in na maturidade é definido por:

$$\iota(\Gamma \leq t)\, max(S_t - X\,,\ 0).$$

Se a barreira é ultrapassada durante a vida da opção, então $\iota(\Gamma \leq t) = 1$ e o payoff é igual ao de uma call ordinária. Se a barreira não é ultrapassada, então $\iota(\Gamma \leq t) = 0$ e o payoff da opção é igual a zero.

O payoff de uma put up-and-in na maturidade é definido por:

$$\iota(\Gamma \le t)\, max(X - S_t,\ 0)\,.$$

- **<u>Cliques, ladders e shouts</u>**

Grande parte das opções exóticas apresentadas tem payouts que dependem de toda a evolução dos preços até à maturidade. Existe uma classe de opções que têm os seguintes payouts nas maturidades:

$$C = max(0,\ S_t - X\,,\ H - X)$$

$$P = max(0,\ X - S_t\,,\ X - H)$$

em que H é determinado de acordo com uma determinada regra. Se por exemplo, $H = X$, então a opção é uma opção ordinária. Se $H = max(S_i)$, então a call é um caso especial de uma call lookback on the maximum. Se H for o preço da acção em alguma data pré-estabelecidade, trata-se de uma opção one-click. Este contrato pode ser utilizando para efectuar uma cobertura de preço numa data particular. Se H for um nível pré-predeterminado, diferente de X, trata-se de uma opção one-rung-ladder. Se H é o preço spot em determinado momento escolhido pelo comprador então trata-se de uma opção shout.

3.3.6.2 Opções path independent

- **<u>Opções digital (ou opções binary)</u>**

Uma opção digital confere ao seu detentor o direito a receber um valor pré-estabelecido fixo se, na data de expiração, a opção estiver in-the-money, ou zero no caso contrário.

Opção digital call

Representando por $\overline{K}$ o valor pré-determinado fixo referido anteriormente, o payoff de uma digital call de estilo europeu na data de expiração será, então:

$$c = \begin{cases} \overline{K}, \text{ se } S_t > X \\ 0, \text{ se } S_t \le X \end{cases}.$$

Conforme é facilmente com provável, na data de maturidade, o comprador da call receberá o valor $\overline{K}$ se a opção estiver in-the-money, enquanto que, nos restantes casos, a opção expirará sem qualquer valor.

Note-se, ainda, que, ao contrário das opções ordinárias, o comprador nunca receberá mais do que $\overline{K}$, mesmo que a opção expire fortemente in-the-money. Não será, pois, de estranhar que, normalmente, estas opções tenham um preço (prémio) inferior às opções ordinárias sobre o mesmo activo e com as mesmas características (nomeadamente, preço de exercício e prazo de maturidade), já que o risco de perda para o vendedor é frequentemente inferior.

Opção digital put

O estudo de uma opção digital put é em tudo idêntico ao de uma opção digital call. Representando por $\overline{K}$ o valor pré-determinado fixo a receber pelo comprador no caso da opção se encontrar in-the-money, o payoff de uma digital put de estilo europeu na data de expiração virá:

$$p = \begin{cases} \overline{K}, \text{ se } S_t < X \\ 0, \text{ se } S_t \geq X \end{cases}.$$

Conforme é facilmente comprovável, na data de maturidade, o comprador da put receberá o valor $\overline{K}$ se a opção estiver in-the-money, enquanto que, nos restantes casos, a opção expirará sem qualquer valor.

Também neste caso o comprador da put nunca receberá mais do que $\overline{K}$, mesmo que a opção expire fortemente in-the-money. Não será, pois, de estranhar que, frequentemente, estas opções tenham um preço (prémio) inferior às puts ordinárias sobre o mesmo activo e com as mesmas características (nomeadamente, preço de exercício e prazo de maturidade), já que o risco de perda para o vendedor é, muitas vezes, inferior.

- **Opções gap**

Tal como as anteriores, uma opção gap define-se mediante o seu payoff na data de maturidade.

Opção gap call

Representando por $\overline{G}$ um valor pré-determinado fixo e diferente do preço de exercício, o payoff de uma gap call na data de maturidade vem:

$$c = \begin{cases} S_t - \overline{G}, & \text{se } S_t > X \\ 0, & \text{se } S_t \leq X \end{cases}.$$

Isto é, se, na data de maturidade, a opção se encontrar in-the-money, o comprador terá direito a receber um montante equivalente à diferença entre o preço à vista do activo de base e $\overline{G}$; no caso contrário, não haverá lugar a qualquer recebimento.

Opção gap put

Representando por $\overline{G}$ um valor pré-determinado fixo e diferente do preço de exercício, o payoff de uma gap put na data de maturidade vem:

$$p = \begin{cases} \overline{G} - S_t, & \text{se } S_t < X \\ 0, & \text{se } S_t \geq X \end{cases}.$$

Isto é, se, na data de maturidade, a opção se encontrar in-the-money, o comprador terá direito a receber um montante equivalente à diferença entre $\overline{G}$ e o preço à vista do subjacente; no caso contrário, não haverá lugar a qualquer recebimento.

- **<u>Opções paylater</u>**

Trata-se de opções em que o prémio só é pago pelo comprador na data de maturidade e caso se encontrem in-the-money. Nesta situação, o comprador é igualmente obrigado a exercer a sua posição, independentemente da opção se encontrar, ou não, suficientemente deep-in-the-money para permitir a obtenção de um resultado positivo mesmo com o pagamento do prémio. Por esta razão, designam-se também por opções contingent.

Estas opções providenciam um bom meio de cobertura de risco de fortes movimentos de preço a um custo inicial nulo. De facto, o prémio da opção é definido, quando a opção é subscrita, de tal forma que o valor inicial desta seja zero, vindo o prémio a ser pago apenas quando a opção expira in-the-money. Como se depreende facilmente destas condições, as opções paylater são sempre negociadas out-of-the-money.

Opção paylater call

Representando por K_c o valor pré-determinado do prémio, o payoff de uma paylater call na data de maturidade vem:

$$c = \begin{cases} S_t - X - K_c, & \text{se } S_t > X \\ 0, & \text{se } S_t \leq X \end{cases}.$$

Isto é, se na data de maturidade, a opção se encontrar in-the-money, tudo se passará como no caso de uma opção ordinária normal, o comprador recebe a diferença entre o preço à vista e o preço de exercício, exceptuando o facto de o comprador pagar nesta altura o prémio;

no caso contrário, tudo se passará como se a opção nunca tivesse existido, não existindo fluxos de qualquer ordem entre o comprador e o vendedor.

Opção paylater put

Representando por K_p o valor pré-determinado do prémio, o payoff de uma paylater put na data de maturidade vem:

$$p = \begin{cases} X - S_t - K_p, & \text{se } S_t < X \\ 0, & \text{se } S_t \geq X \end{cases}.$$

Isto é, se na data de maturidade, a opção se encontrar in-the-money, tudo se passará como no caso de uma opção put ordinária, o comprador recebe a diferença entre o preço de exercício e o preço à vista do subjacente, exceptuando o facto de o comprador pagar nesta altura o prémio; no caso contrário, tudo se passará como se a opção nunca tivesse existido, não havendo fluxos de qualquer ordem entre o comprador e o vendedor.

- **<u>Opções compound</u>**

Uma opção compound (opção sobre opção) confere, ao seu comprador, o direito de adquirir/vender por um preço pré-fixado, na/ou até à data de expiração, uma opção sobre um dado activo e com determinado preço de exercício, pagando para isso um determinado prémio.

Opções sobre uma call

Uma call com preço de exercício X e vencimento em t sobre uma call com preço de exercício X_1 e vencimento em t_1 dá ao seu comprador o direito de, mediante o pagamento de um determinado prémio, com o seu exercício, adquirir esta segunda opção de compra por X. Uma compound call com estas características (cc) terá, na data de maturidade, o seguinte payoff:

$$cc = \begin{cases} C(t) - X, & \text{se diferença positiva} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}.$$

Uma put com preço de exercício X e vencimento em t sobre uma call com preço de exercício X_1, e vencimento em t_1, dá ao seu comprador o direito de, mediante o pagamento de um determinado prémio, com o seu exercício, vender esta opção de compra por X. Uma compound put com estas características (pc) terá, na data de maturidade, o seguinte payoff:

$$pc = \begin{cases} X - C(t), & \text{se diferença positiva} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}.$$

Opções sobre uma put

Uma call com preço de exercício X e vencimento em t sobre uma put com preço de exercício X_1 e vencimento em t_1, dá ao seu comprador o direito de, mediante o pagamento de um determinado prémio, com o seu exercício, comprar esta última por X. Uma compound call com estas características (cp) terá, na data de maturidade, o seguinte payoff:

$$cp = \begin{cases} P(t) - X, & \text{se diferença positiva} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}.$$

Por sua vez, uma put com preço de exercício X e vencimento em t sobre uma put com preço de exercício X_1 e vencimento em t_1, dá ao seu comprador o direito de, mediante o pagamento de um determinado prémio, com o seu exercício, vender esta segunda opção de venda por X. Uma compound put com estas características (pp) terá, na data de maturidade, o seguinte payoff:

$$pp = \begin{cases} X - P(t), & \text{se diferença positivo} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}.$$

- **<u>Opções chooser</u>**

Uma opção chooser confere ao seu detentor o direito de, na data de maturidade, adquirir uma opção call ou uma opção put para uma data de expiração posterior. Trata-se, assim de uma variedade das opções compound.

Considere-se uma opção chooser (co) que expira no momento t e a que está subjacente uma opção call (c) com data de vencimento t_1 $(t_1 \geq t)$ e preço de exercício X_1 e uma opção put (p) com data de vencimento t_2 $(t_2 \geq t)$ e preço de exercício X_2. De acordo com a sua definição, o payoff da opção chooser na data de maturidade será:

$co = max\{c(t), p(t)\}$, onde $c(t)$ e $p(t)$ representam o valor (teórico) das opções subjacentes no momento da expiração da chooser.

De facto, na data de maturidade, o comprador da chooser optará por adquirir a opção subjacente que encerra maior valor teórico naquele momento.

3.4 Elementos básicos do valor de uma opção

3.4.1 Valor de uma opção

À semelhança dos activos financeiros clássicos, é possível distinguir, no caso das opções, dois tipos de conceitos, o preço de mercado e o valor teórico de uma opção. O preço de mercado de uma opção é obtido pela oferta e procura existente no mercado incorporando expectativas quanto ao comportamento futuro de diversas variáveis, enquanto o valor teórico é determinado por uma série de parâmetros que, de um ponto vista teórico, afectam de modo decisivo o valor da mesma.

No caso de um mercado ineficiente existirá um desvio entre o valor teórico (fair price) e o preço de mercado da opção, cujo sinal indicará se a opção está sobrevalorizada ou subvalorizada pelo mercado. Se o mercado de opções se comporta de modo eficiente, isto é, se os preços reflectirem todas as informações importantes para a formação de expectativas, o preço de mercado deverá ser igual ao valor teórico, nomeadamente por força da actuação dos arbitragistas.

O valor de uma opção pode ser decomposto em duas parcelas fundamentais, o valor intrínseco e o valor temporal.

O valor intrínseco corresponde ao ganho que o comprador de uma opção poderia realizar se exercesse a opção imediatamente. Assim, uma opção call terá valor intrínseco se o preço de exercício da opção for inferior ao preço do activo subjacente. O valor intrínseco de uma call pode ser definido como:

$$max\left(0,\ \text{preço do activo} - \text{preço de exercício}\right).$$

Já uma opção put terá valor intrínseco se o preço de exercício da opção for superior ao preço do activo subjacente. O valor intrínseco de uma put pode ser definido como:

$$max\left(0,\ \text{preço de exercício} - \text{preço do activo}\right).$$

Em muitos casos, verifica-se que o preço de mercado da opção é superior ao seu valor intrínseco. A diferença corresponde ao que se denomina por o valor temporal. Este valor reflecte a possibilidade dos preços do activo no mercado à vista se moverem, até à expiração, de forma vantajosa para o comprador da opção, isto é, conferindo maior probabilidade de exercício com êxito da opção. O valor temporal de uma opção pode, assim, ser considerado como o valor de uma especulação contínua sobre um movimento favorável de preços do activo subjacente.

É possível apresentar duas propriedades importantes a propósito do valor temporal de uma opção. Os Gráficos 3 e 4 reflectem que o valor temporal de uma opção é máximo quando se encontra at-the-money, evidenciando a relação entre a variação do valor temporal de uma opção (call e put, respectivamente) e a alteração no preço do activo subjacente.

Gráfico 3 – Valor intrínseco e valor temporal de uma call

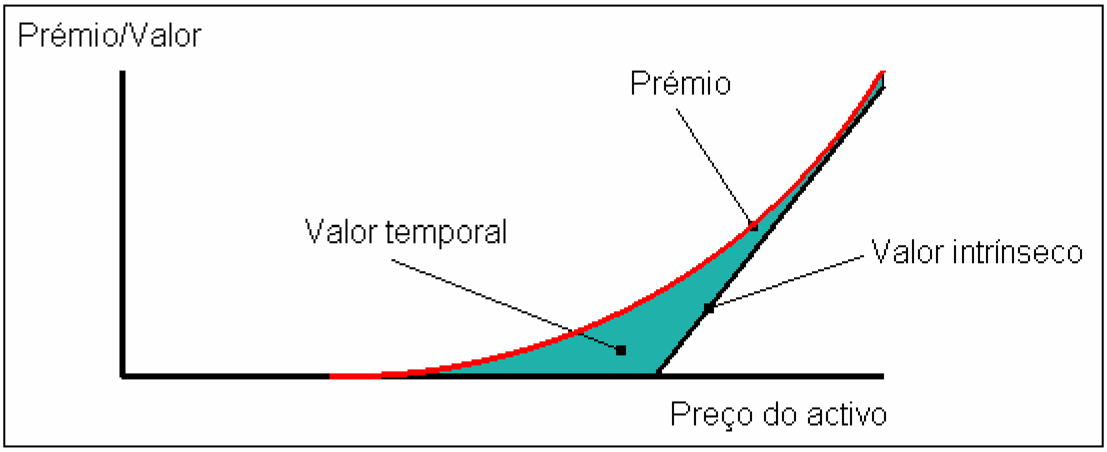
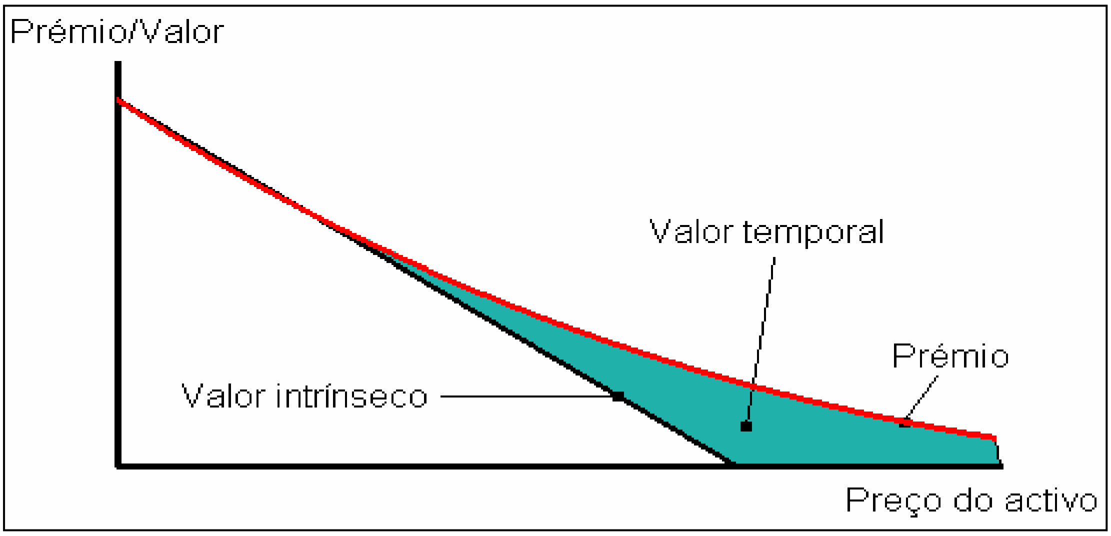


Gráfico 4 – Valor intrínseco e valor temporal de uma put

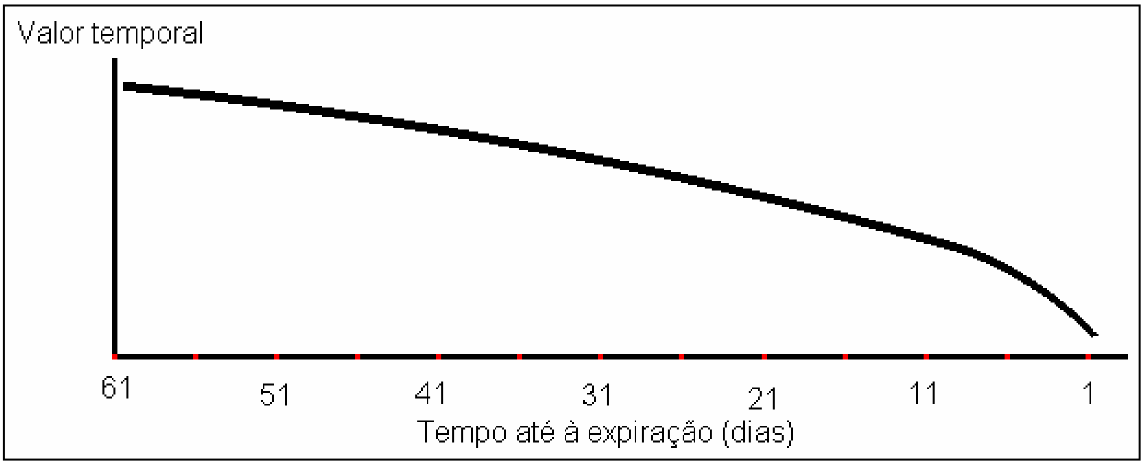


Deixando a questão da determinação teórica detalhada do valor temporal, é possível, em termos simplistas, considerá-lo como uma aposta no movimento futuro do preço do activo subjacente, sendo que o valor da aposta está relacionado com a probabilidade de o preço do activo subjacente ser superior ao preço de exercício para opções call out-of-the-money, e a probabilidade do preço do activo subjacente ser superior ao preço de exercício por um montante superior ao valor intrínseco para as opções call in-the-money (com o raciocínio simétrico a ser válido para opções put).

Considerando este valor da aposta, é evidente que a probabilidade do preço do activo exceder o preço de exercício na expiração será menor à medida que a opção se torne mais out-of-the-money. Assim, à medida que o preço do activo excede o preço de exercício, a probabilidade de mais acréscimos torna-se diminuta e o valor temporal da opção torna-se cada vez menor. Tendo em conta estes argumentos, pode afirmar-se que o valor temporal da opção será máximo quando a opção estiver at-the-money.

O Gráfico 5 evidência a segunda das propriedades mencionadas, o valor temporal de uma opção é tanto maior quanto mais tempo faltar até à expiração. De facto, quanto maior o tempo até à expiração, maior é a probabilidade de o preço do activo evoluir de tal forma que se venha a concretizar o exercício com lucro da opção. Naturalmente que na data de maturidade, tal probabilidade é já nula, pelo que o valor temporal de uma opção é igualmente nulo nessa data.

Gráfico 5 – Evolução do valor temporal de uma opção com o tempo



3.4.2 Factores determinantes do preço/valor de uma opção

Previamente à análise dos modelos de valorização de opções, torna-se necessário proceder a uma digressão em torno dos factores que determinam o preço/valor de uma opção, uma vez que estes constituem possíveis (e normais) inputs de tais modelos.

São geralmente apontados cinco factores que afectam o preço das opções (a que acresce um outro no caso do activo subjacente corresponder a acções ou a índices de cotações accionistas):

1. o preço corrente do activo subjacente;

2. o preço de exercício;

3. tempo até à expiração;

4. taxas de juro;

5. volatilidade do preço do activo subjacente;

6. dividendos distribuídos (opções sobre acções e sobre índices).

A Tabela 2 sumaria o conjunto de relações elementares acima enunciadas.

Tabela 2 – Factores determinantes do preço/valor de uma opção

Variável	Call Europeia	Put Europeia	Call Americana	Put Americana
Preço do activo	Sobe ↗	Desce ↘	Sobe ↗	Desce ↘
Preço do exercício	Desce ↘	Sobe ↗	Desce ↘	Sobe ↗
Tempo até à expiração	Sobe ↗	Sobe ↗	Sobe ↗	Sobe ↗
Taxa de Juro	Sobe ↗	Desce ↘	Sobe ↗	Desce ↘
Volatilidade	Sobe ↗	Sobe ↗	Sobe ↗	Sobe ↗
Dividendos	Desce ↘	Sobe ↗	Desce ↘	Sobe ↗

3.4.3 Limites de não arbitragem para os preços das opções

Tendo-se observado quais os factores que influenciam, teoricamente, o valor de uma opção e o modo como o fazem e antes de avançar para a análise e discussão de modelos que, integrando aquelas variáveis, permitem concluir sobre o valor teórico de uma opção, torna-se relevante ainda a determinação de limites superiores e inferiores para os preços das opções, os quais não dependem de pressupostos particulares acerca dos factores atrás mencionados.

Tal acontece pelo facto de se tratarem de limites de não arbitragem; se os preços das opções se situarem acima ou abaixo desses limites, haverá oportunidades de lucro isento de risco, que serão imediatamente aproveitadas por agentes, o que desencadeará forças no sentido de que os preços retornem aos seus limites, pelo que situações de desequilíbrio serão meramente momentâneas.

Para simplificar, analisar-se-á apenas o caso das opções sobre acções. No entanto, muitas das condições que vão ser discutidas são comuns a opções sobre outros activos e subjacentes às condições de arbitragem são basicamente os mesmos.

Nas análises a efectuar serão assumidos os seguintes pressupostos:

- Não há custos de transacção.

- Não há spread bid-ask e as transacções não afectam os preços.
- Todos os ganhos estão submetidos à mesma taxa de imposto.
- Não há depósito de margem nem restrições para efectuar short-selling.
- É possível emprestar ou pedir emprestado à taxa de juro sem risco.

Assume-se, também, como já foi supermencionado, que os agentes intervenientes no mercado levarão a cabo operações de arbitragem sempre que existam oportunidades para tal, o que significa que qualquer oportunidade de arbitragem desaparece rapidamente.

Será usada a seguinte notação:

S : preço corrente da acção;

X : preço de exercício da opção;

T : data de expiração;

t : tempo presente, $(T-t)$ expresso em anos;

S_T : preço da acção em T ;

r : taxa de juro sem risco para um investimento com maturidade em T ;

C : valor de uma opção de compra americana sobre uma acção;

P : valor de uma opção de venda americana sobre uma acção;

c : valor de uma opção de compra europeia sobre uma acção;

p : valor de uma opção de venda europeia sobre uma acção;

σ : volatilidade do preço da acção;

D : valor actual, no momento t, dos dividendos distribuídos pela acção entre t e T .

- **Limites para opções calls**

Condição A

O valor de uma opção call (americana ou europeia) é sempre igual ou superior a zero.

$$\begin{matrix} C > 0 \\ c > 0 \end{matrix} .$$

Na expiração, o portador de uma opção pode exercê-la ou deixá-la expirar. A opção será exercida se o preço de exercício for inferior ao preço da acção e, nesse caso, a opção vale o seu valor intrínseco $S-X$. Se o preço de exercício for superior ao preço da acção, a opção não é exercida e o seu valor é nulo. Antes da expiração, o valor intrínseco $S-X$ e a opção terá, ainda, algum valor temporal.

Condição B

Uma opção call (americana ou europeia) não pode valer mais do que a acção subjacente

$$\begin{aligned} C &< S \\ c &< S \end{aligned}.$$

Uma vez que uma call dá o direito de comprar uma acção por um preço de exercício que é maior do que zero, o valor da call não pode ser maior que o valor da acção. Se se verificar o contrário, existe uma oportunidade de arbitragem simples, comprar a acção e vender a call, encaixando a diferença de preços. Posteriormente, se a call for exercida pelo comprador, entrega-se a acção. Se a call não for exercida, obtém-se um lucro adicional que é o valor da acção.

Condição C

O valor de uma call americana é sempre superior ou igual ao seu valor intrínseco

$$C > S - X .$$

Se a opção é exercida quando $S > X$, o agente terá um lucro de $S - X$, logo a opção não pode valer menos do que este ganho imediato. Antes da expiração, a opção vale mais do que $S - X$ devido ao seu valor temporal. Na expiração, a opção vale o máximo de $S - X$ ou zero.

O valor de uma call europeia é sempre igual ou superior ao preço da acção subtraído do valor actualizado do preço de exercício

$$c \geq S - Xe^{-r(T-t)} - D .$$

Para comprovar esta relação, considerem-se dois portfolios:

Portfolio A: opção call europeia mais um montante de dinheiro igual $Xe^{-r(T-t)} + D$.

Portfolio B: uma acção, com preço de S (Tabela 3).

Tabela 3 – Preços correntes e valores na expiração dos dois portfolios

Valor do portfolio na expiração (V_T)			
Portfolio	Preço	$S_T < X$	$X \leq S_T$
A	$c + Xe^{-r(T-t)} + D$	$0 + X + De^{-r(T-t)}$	$(S_T - X) + X + De^{-r(T-t)}$
B	S	$S_T + De^{-r(T-t)}$	$S_T + De^{-r(T-t)}$
–	–	$V_{TA} > V_{TB}$	$V_{TA} = V_{TB}$

Sendo o valor do portfolio A sempre igual ou superior ao valor do portfolio B na expiração, o preço corrente do portfolio A terá de ser superior ou igual ao de B. Então,

$$c + Xe^{-r(T-t)} + D \geq S\,,$$

$$c \geq S - Xe^{-r(T-t)} - D\,.$$

Esta condição impõe limites mais estreitos ao valor das opções. O limite inferior do valor da opção depende do tempo até à expiração: quanto maior o tempo até à maturidade, menor o montante $Xe^{-r(T-t)}$ e portanto, maior o valor da opção – exactamente como decorre da condição E. De forma semelhante, quanto maior o valor, da taxa de juro r, menor será $Xe^{-r(T-t)}$ e maior será o valor da opção.

Condição D

Uma opção de compra (europeia ou americana) com um preço de exercício mais baixo deve valer pelo menos tanto, e normalmente mais, que uma opção similar com um preço de exercício superior.

$$\begin{aligned} C(S, X_1, T) &\geq C(S, X_2, T) \text{ se } X_2 > X_1 \\ c(S, X_1, T) &\geq c(S, X_2, T) \text{ se } X_2 > X_1 \end{aligned}\,.$$

Trata-se de uma implicação imediata da condição anterior. Uma vez que uma opção vale sempre pelo menos o seu valor intrínseco $S - X$ e se $S - X_1 > S - X_2$, então esta condição é necessariamente verdadeira.

Condição E

Uma opção de compra com maior tempo até à expiração deve valer pelo menos tanto, e normalmente mais, que uma opção similar com uma duração inferior.

$$C(S, X, T_1) \geq C(S, X, T_2) \text{ se } T_1 > T_2\,.$$

Esta restrição é evidente para opções americanas, uma vez que o detentor de uma opção deste tipo, com maturidade mais longa, tem todas as oportunidades de exercício do detentor de uma opção americana, com maturidade mais curta e, provavelmente, mais algumas. Como se observará mais adiante, a distribuição de dividendos até à maturidade pode fazer com que esta restrição de preços não seja válida para opções europeias.

Condição F

$$X_2 - X_1 \geq C(X_1) - C(X_2)\,.$$

Note-se que o payoff máximo da estratégia que consiste em comprar uma call com preço de exercício X_1 e vender uma outra com preço de exercício X_2 superior é efectivamente $X_2 - X_1$.

- **Limites para opções puts**

Seguidamente apresentam-se restrições semelhantes para o valor das puts. Uma vez que o raciocínio a desenvolver em algumas dessas restrições é muito semelhante ao evidenciado para as opções calls, não se apresentam explicações adicionais, excepto quando tal se mostre estritamente necessário.

Condição A

$$\begin{aligned} P &\geq 0 \\ p &\geq 0 \end{aligned}.$$

Condição B

$$\begin{aligned} P &\leq X \\ p &\leq X \end{aligned}.$$

Condição C

$$\begin{aligned} P &\geq X - S \\ p &\geq D + Xe^{-r(T-t)} - S \end{aligned}.$$

Para comprovar a condição C para puts europeias, considerem-se dois portfolios:

Portfolio C: Uma put europeia e uma acção.

Portfolio D: Um montante de dinheiro igual a $D + Xe^{-r(T-t)}$.

Se $S_T < X$, a opção do portfolio C é exercida em T e o portfolio passa a valer $X + De^{r(T-t)}$. Se $S_T > X$, a opção put expira sem valor e o portfolio vale $S_T + De^{r(T-t)}$, em T.

Portanto, o portfolio C vale:

$$max\left(S_T + De^{r(T-t)}, X + De^{r(T-t)}\right), \text{ em } T.$$

Assumindo que o dinheiro é investido à taxa de juro sem risco, o portfolio D vale $X + De^{r(T-t)}$, em T. Então o portfolio C vale sempre tanto ou mais que o portfolio D em T.

Para não existirem oportunidades de arbitragem, o portfolio C tem de valer tanto ou mais que o portfolio D hoje. Então,

$$p + S \geq Xe^{-r(T-t)} + D$$
$$p \geq Xe^{-r(T-t)} - S + D.$$

Condição D

$$P(S, X_2, T) \geq P(S, X_1, T), \text{ se } X_2 > X_1$$
$$p(S, X_2, T) \geq p(S, X_1, T), \text{ se } X_2 > X_1.$$

Condição E

$$P(S, X, T_2) \geq P(S, X, T_1) \text{ se } T_2 > T_1$$
$$p(S, X, T_2) \geq p(S, X, T_1) \text{ se } T_2 > T_1.$$

Condição F

$$X_2 - X_1 \geq P(X_2) - P(X_1) \text{ se } X_2 > X_1.$$

- **<u>Paridade entre o valor de uma call e o valor de uma put</u>**

Torna-se importante a dedução de uma relação entre o valor de uma call e o valor de uma put, que resulta de argumentos de não arbitragem aos utilizados para as restrições atrás apresentadas. É uma relação extremamente importante porque vai permitir determinar o valor de uma put a partir do valor de uma call com características semelhantes em termos de activo de base, preço de exercício e tempo até à expiração. Por outro lado, abre oportunidades à criação de calls e puts sintéticas se tal se mostrar vantajoso para o agente.

Para mostrar a relação existente entre o valor de uma call e o valor de uma put, conhecida por paridade put/call, admitam-se, as seguintes hipóteses:

- as opções são europeias;
- o activo de base são acções sem dividendos durante a vida da opção;
- o mercado é perfeito e não existem custos de transacção.

Considerem-se, então, dois portfolios:

Portfolio A: uma opção call europeia e um montante de dinheiro igual a $Xe^{-r(T-t)}$.

Portfolio B: uma opção put europeia e uma acção.

Ambos os portfolios valem $max(S_T, X)$ na data de expiração das opções: note-se que as opções em causa, uma vez que são europeias, não podem ser exercidas antes da data de expiração. Os portfolios têm, portanto, um valor idêntico hoje. Isto significa que:

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$
$$-c = -S - p + Xe^{-r(T-t)}$$

compra call = compra acção + compra de put + financiamento de $Xe^{-r(T-t)}$

$$c = S + p - Xe^{-r(T-t)}.$$

Esta relação é conhecida como paridade put/call e mostra que o valor de uma call europeia com um determinado preço de exercício e data de expiração pode ser deduzido a partir do valor de uma put europeia com o mesmo preço de exercício e data de expiração, e vice-versa.

CAPÍTULO 4

Modelos de Avaliação de Opções Financeiras

As equações diferenciais estocásticas são basicamente equações diferenciais com um termo estocástico adicional. O termo determinístico, que é comum às equações diferenciais ordinárias, descreve o comportamento dinâmico "médio" ou seja as perturbações aleatórias que influenciam esse fenómeno.

Neste capítulo será feita uma breve abordagem a alguns modelos estocásticos com maior relevância para esta monografia, com vista a obter o calculo do valor justo do contrato a aplicar ao modelo de avaliação de opções financeiras de seguros do ramo de vida, na futura analise do contrato "Victoria Garantia Rendimentos" fornecido pela companhia Victoria Seguros de Vida S. A.. Esses modelos serão: o modelo Black e Scholes, o modelo Binomial, o modelo Cox, Ingersoll e Ross, o método de simulação de Monte Carlo, o movimento browniano geométrico, o método de máxima verosimilhança e o método dos momentos generalizados. Todas as informações referentes aos modelos estocásticos foram obtidas a partir de Black e Scholes (1973), Cox, Ross e Rubinstein (1979), Silva e Neto (2002), Hansen (1982), Associação da Bolsa de Derivados do Porto (1997), entre outros.

4.1 Modelo Black e Scholes

Black e Scholes (1973) foram os primeiros a perceber que poderiam formar uma carteira livre de risco composta por opções e acções. O que lhes permite a criação desta carteira é o facto do preço da acção e da opção serem afectados pela mesma fonte de incerteza, o movimento da acção.

Para chegar à equação diferencial que resulta no preço da opção, Black e Scholes partem de algumas premissas:

- o preço da acção segue um movimento browniano geométrico com σ constante;
- é permitida a venda a descoberto dos activos;
- não há custos de transacção ou impostos;
- todos os activos são perfeitamente divisíveis;
- não há dividendos durante o prazo da opção;
- a taxa livre de risco é constante independentemente do prazo;
- e não existem condições de arbitragem.

Partindo da equação do movimento browniano geométrico, para o movimento de uma acção

$$dS_t = uS_t dt + \sigma S_t dz_t$$

chegar à correspondente equação diferencial de uma opção de compra, c, aplicando-se o Lemma de Itô:

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial S} uS + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S dz .$$

Tomando posições contrárias na acção e na opção de compra, constroem uma carteira Π que elimina a incerteza do processo de Wiener. Eliminada a incerteza, o retorno deve ser igual a taxa livre de risco, r:

$$d\Pi = r\Pi dt .$$

Esta carteira Π tem a seguinte composição:

- venda de uma opção de compra $(-c)$;
- compra de $+\frac{\partial c}{\partial S}$ acções.

Portanto, a variação dt pode ser representada por:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r\Pi dt .$$

Substituindo-se Π e eliminando-se dt chegam à equação diferencial

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rc .$$

No caso da opção de compra, têm-se as seguintes condições de contorno:

$c = max(S - X\, ,\, 0)$ para $t = T$, na data de vencimento, se $c = 0$ então $S = 0$, $c \sim S$ quando $S \to \infty$.

A solução do problema, dado que σ e r são constantes, é dada por:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

onde

$$d_1 = \frac{ln(S / X) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

S - valor à vista do activo objecto;

X - preço de exercício;

r - taxa de juros anualizada (capitalização contínua);

e - algarismo neperiano = 2,71828...;

σ - desvio padrão anual da taxa contínua de retorno do activo objecto;

T - tempo em anos até o vencimento da opção.

$N(d)$ - é a função de probabilidade acumulada da distribuição normal, ou seja, representa a probabilidade da variável aleatória x ser igual ou inferior a d.

$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\,.$$

O modelo de B&S pode ser ajustado, de maneira a se considerar variações na taxa livre de risco, dentro do período de vigência da opção ou absorver o impacto da distribuição de dividendos.

4.2 Modelo Binomial

- **<u>Os pressupostos</u>**

Começando por analisar o modelo no contexto em que foi originalmente formulado, assumem-se verificadas as seguintes hipóteses:

- opção call europeia sobre acções;
- o mercado onde se transacciona é dotado de profundidade e eficiente;
- não existem custos de transacção, depósitos de margens e impostos;
- é possível a realização de operações de short selling sem quaisquer limites;
- o activo de base é perfeitamente divisível;

- as taxas de juro activa e passiva são idênticas e é possível emprestar ou contrair empréstimo de qualquer montante;
- o preço (S) do activo de base (acção) evolui segundo um processo binomial multiplicativo, assumindo em cada período imediato um de dois valores, com probabilidades q e $(1-q)$.

O modelo com um período

Da última hipótese apresentada resulta que, sendo S o valor presente da acção, no período seguinte será:

- $u \times S$, com probabilidade q;
- $d \times S$, com probabilidade $(1-q)$

onde:

- u representa o movimento multiplicativo à alta;
- d representa o movimento multiplicativo à baixa.

Denomina-se por q a taxa de juro dos activos isentos de risco (taxa de juro isenta de risco) e por $\hat{r} = 1+r_i$, deverá ter-se, $u > \hat{r} > d$; com u e r superiores a 1 (de outro modo, os agentes não procurariam activos com risco) e d inferior a 1, de outro modo, a acção em causa seria o próprio activo isento de risco.

Suponha-se agora, a existência de uma opção de compra europeia (C) sobre este activo, com preço de exercício X. No vencimento, ela poderia ter um de dois valores, consoante a evolução do preço à vista da acção subjacente:

- $Cu = max(0,\, u \times S - X)$;
- $Cd = max(0,\, d \times S - X)$.

O valor da opção evoluiria, pois, da forma retratada na Figura 3:

Figura 3 – Evolução do preço da acção subjacente

$$
C \begin{cases} Cu \text{ com probabilidade } q \\[2em] Cd \text{ com probabilidade } 1-q \end{cases}
$$

Admita-se agora, que se constrói uma carteira composta por uma posição curta na opção de compra (venda de uma opção de compra) e por uma posição longa nas acções (compra de H acções), ou vice-versa, em que H representa o rácio de cobertura da posição em opções. Para a "aquisição" deste portfolio, são necessários fundos no valor de $H \times S - C$ (diferença entre o valor de compra das acções e o prémio recebido pela venda da call).

A evolução do valor desta carteira dependerá do comportamento do preço das acções e das opções no período seguinte Figura 4.

Figura 4 – Evolução do valor do portfólio

$$
H \times S - C \; e^{i\theta} \begin{cases} H \times uS - Cu \text{ com probabilidade } q \\[2em] H \times dS - Cd \text{ com probabilidade } 1-q \end{cases}
$$

Só existirá um valor de H para o qual o valor da carteira (payoff) no final do período será único, isto é, tal que,

$$H \times uS - Cu = H \times dS - Cd \, ,$$

donde:

$$H = \frac{Cu - Cd}{(u-d) \times S} \tag{4.1}$$

A carteira assim constituída é isenta de risco, devendo ter uma rentabilidade idêntica à dos outros activos nessa condição:

$$H \times S - C \; = \frac{H \times uS - Cu}{\hat{r}} = \frac{H \times dS - Cd}{\hat{r}} \, .$$

De onde resulta que,

$$C = \frac{\hat{r}\times H\times S - H\times uS + Cu}{\hat{r}} = \frac{1}{\hat{r}}\left[H\times S\times\left(\hat{r}-u\right)+Cu\right].$$

Substituindo agora, H pela expressão (4.1), vem:

$$C = \frac{1}{\hat{r}}\left[\frac{Cu-Cd}{u-d}\times\left(\hat{r}-u\right)+Cu\right].$$

Rearranjando obtém-se:

$$C = \frac{1}{\hat{r}}\left[Cu\times\frac{\hat{r}-d}{u-d}Cd\times\frac{u-\hat{r}}{u-d}\right].$$

Finalmente tomando:

$$\mathrm{p} = \frac{\hat{r}-d}{u-d}.$$

Logo

$$1-p = 1-\frac{\hat{r}-d}{u-d} = \frac{u-\hat{r}}{u-d}.$$

Obtém-se a expressão que permite obter o valor teórico de opção call europeia com 1 período até ao vencimento:

$$C = \frac{1}{\hat{r}}\left[p\times Cu+\left(1-p\right)\times Cd\right], \tag{4.2}$$

com:

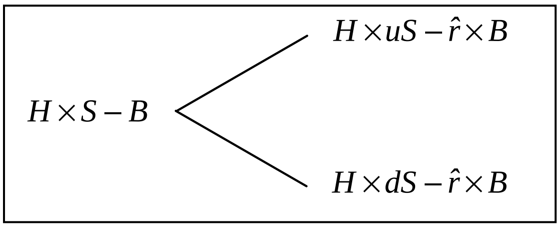
- $Cu = max\left[0,\ uS - X\right]$;
- $Cd = max\left[0,\ dS - X\right]$.

Designando por B o valor do montante aplicado no activo isento de risco (valor negativo se for um financiamento) e admitindo que se deseja replicar o payoff da compra de uma call, deveria ter-se:

$$C = H\times S - B$$

Esta situação traduz a réplica da compra de opção call através de uma posição longa em acções e curta no activo isento de risco, isto é, uma opção call "sintética", cuja evolução seria a retratada na Figura 5:

Figura 5 – Evolução do valor da call sintética



Para que $H \times S - B$ seja equivalente a C, deverá ter-se H e B tais que:

- $H \times uS - \hat{r} \times B = Cu$;
- $H \times dS - \hat{r} \times B = Cd$.

De onde,

$$H = \frac{Cu - Cd}{(u - d) \times S} \text{ e } B = \frac{d \times Cu - u \times Cd}{\hat{r} \times (u - d)}.$$

A terminar a referência à aplicação do modelo binomial ao caso de uma opção com um período até ao vencimento, deverá ainda notar-se que:

- a probabilidade q não intervém na fórmula de avaliação da acção;
- C não depende do risco do mercado, mas apenas do carácter aleatório da evolução dos preços do activo subjacente;
- C não depende da atitude dos investidores face ao risco, pois não inclui nenhum factor a ele associado.

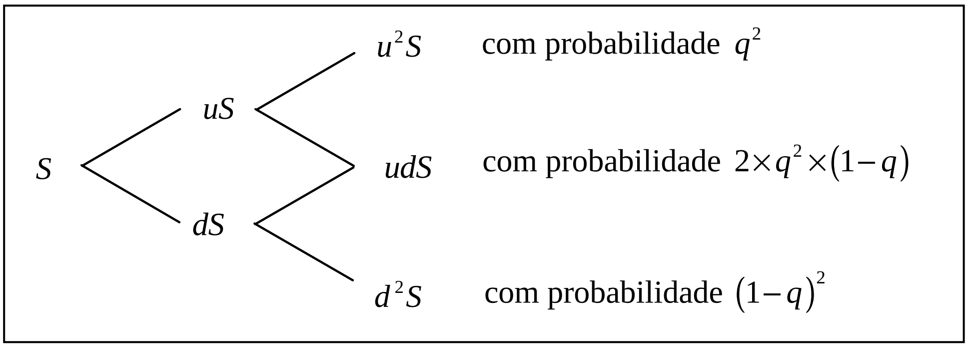
Neste contexto, pode supor-se uma situação de neutralidade do investidor perante o risco. Podemos supor então, que o investidor é neutro perante o risco. Sob tal hipótese, o rendimento esperado da acção deveria ser igual à taxa de rentabilidade do activo isento de risco. Prova-se que, nessas circunstâncias, $q = p$:

- $q \times uS + (1 - q) \times dS = \hat{r} \times S$;
- $q = \dfrac{\hat{r} - d}{u - d} = p$.

O modelo com dois períodos

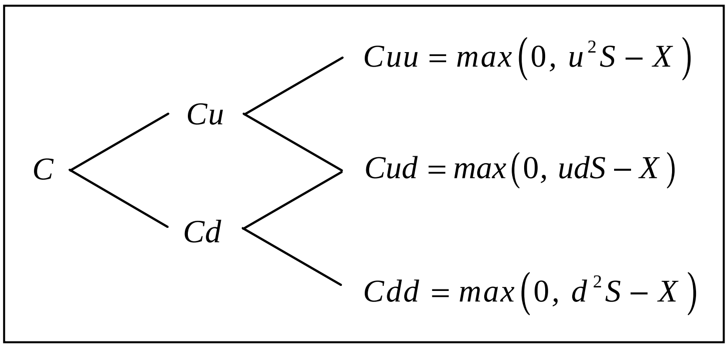
Admita-se agora, que existem dois períodos até ao vencimento e que em cada período, a cotação da acção pode subir ou descer, respectivamente, $(u-1)\%$ e $(1-d)\%$, com probabilidades q e $(1-q)$, tal como retrata a Figura 6.

Figura 6 – Evolução da cotação à vista das acções subjacentes



De forma similar, a evolução do valor da opção será a indicada na Figura 7.

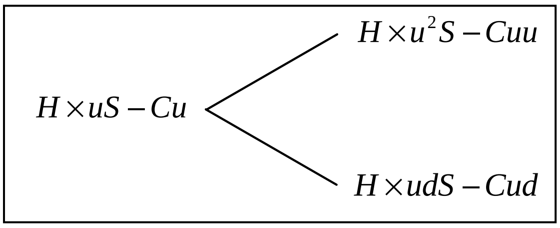
Figura 7 – Evolução do valor da opção call europeia



Para determinar o valor teórico desta opção no horizonte temporal de dois períodos, bastará aplicar o mesmo processo de avaliação usado para apenas um período. O método consistirá agora, em estimar Cu e Cd a partir dos valores intrínsecos conhecidos em t_2 e, posteriormente, calcular C. Note-se, para isso que, por exemplo, em t_1, a acção vale uS ou dS: se vale uS, a opção vale Cu e no período seguinte, a acção valerá u^2S ou udS e a opção Cuu ou Cud.

Uma carteira composta pela venda de uma opção e a compra de H acções (ou vice-versa), terá a evolução ilustrada na Figura 8.

Figura 8 – Evolução do valor da carteira



Para obter o mesmo resultado final, deverá garantir-se que,

$$H \times u^2 S - Cuu = H \times udS - Cud \ .$$

De onde,

$$H = \frac{Cuu - Cud}{(u-d) \times uS} \ .$$

Nestes circunstâncias, a carteira deve proporcionar um rendimento equivalente ao dos activos isentos de risco implicando que,

$$H \times uS - Cu = \frac{H \times u^2 S - Cuu}{\hat{r}} = \frac{H \times udS - Cud}{\hat{r}} \ .$$

Substituindo H pelo seu valor e resolvendo em ordem a Cu, tem-se:

$$Cu = \frac{1}{\hat{r}} \times \left[p \times Cuu + (1-p) \times Cud \right], \tag{4.3}$$

com:

$$p = \frac{\hat{r} - d}{u - d} \ .$$

De modo análoga, se o valor da acção em t_1 fosse dS obter-se-ia,

$$Cd = \frac{1}{\hat{r}} \times \left[p \times Cud + (1-p) \times Cdd \right]. \tag{4.4}$$

Colocando-se no período 0 e utilizando a expressão (4.2) vem,

$$C = \frac{1}{\hat{r}} \times \left[p \times Cu + (1-p) \times Cd \right].$$

Substituindo os valores de Cu e Cd obtidos em (4.3) e (4.4) virá,

$$C = \frac{1}{\hat{r}^2} \times \left[p^2 \times Cuu + 2p \times (1-p) \times Cud + (1-p)^2 \times Cdd \right].$$

E finalmente, a expressão do valor de uma opção call europeia, com vencimento dentro de dois períodos, e determinado pelo modelo binomial,

$$C = \frac{1}{\hat{r}^2} \times \left[\begin{array}{l} p^2 \times max\left(0,\, u^2 S - X\right) + 2p \times (1-p) \times \\ \times max\left(0,\, udS - X\right) + (1-p)^2 \times max\left(0,\, d^2 S - X\right) \end{array} \right] \tag{4.5}$$

* **<u>Generalização do modelo a *n* períodos</u>**

Considere-se agora o caso mais geral, de uma opção call europeia com vencimento dentro de n períodos, tendo como subjacente acções cuja evolução da cotação das acções subjacente é retratada na Figura 9 e na Figura 10 evolução do valor da opção.

Figura 9 – Evolução da cotação das acções subjacente

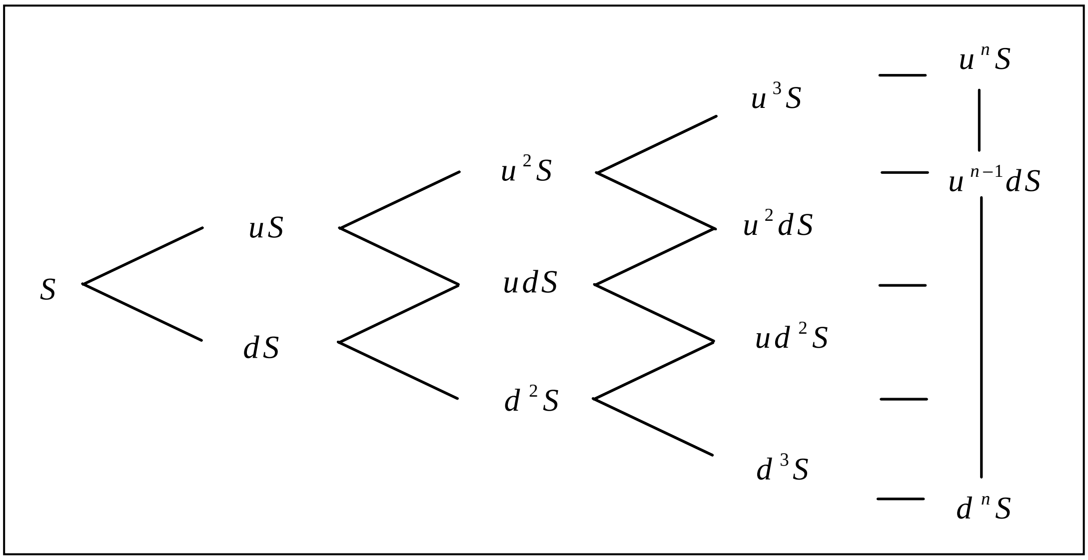
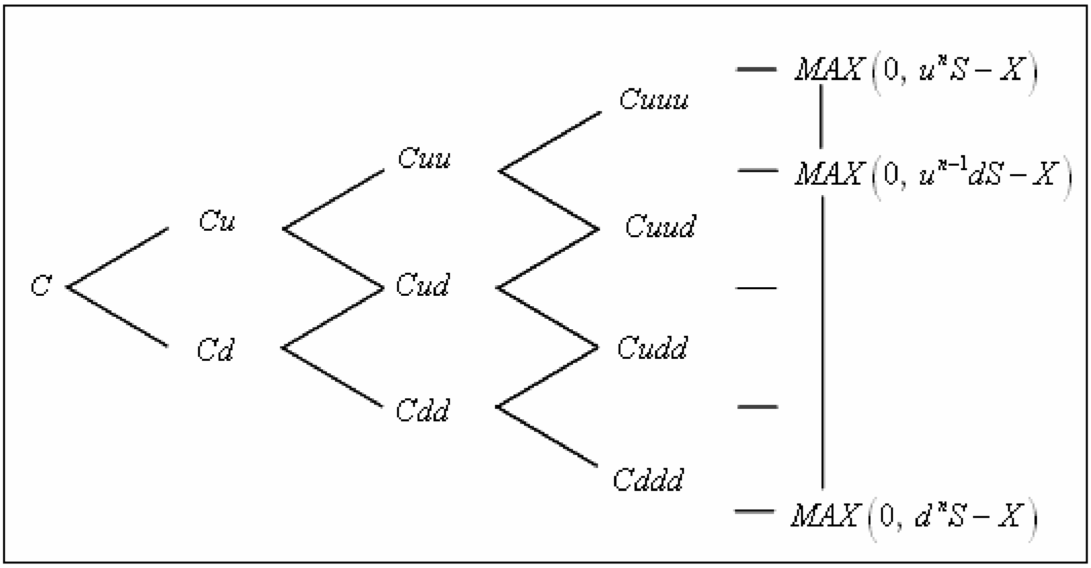


Figura 10 – Evolução do valor da opção



A determinação do valor teórico da opção pode fazer-se por duas vias:

Alternativa 1: calcular o valor intrínseco no final dos n períodos e mediante um procedimento recursivo, calcular o valor da opção em cada "nó" do diagrama que traduz a sua evolução, mediante a expressão,

$$C_{t-1} = \frac{1}{\hat{r}} \times \left[p \times C_{tu} + (1-p) \times C_{td} \right],$$

com:

- $C_{t-1} =$ valor da opção no nó $t-1$;
- $C_{tu} =$ valor da opção em t, quando a cotação da acção vem multiplicada por u entre $t-1$ e t;
- $C_{td} =$ valor da opção em t, quando a cotação da acção vem multiplicada por d entre $t-1$ e t.

Alternativa 2: mediante a extensão da equação (4.5) é possível chegar à fórmula geral de avaliação de uma opção de compra europeia para n períodos,

$$C = \frac{1}{\hat{r}^n} \times \left\{ \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) \times p^j \times (1-p)^{n-j} \times max\left(0,\ u^j d^{n-j} \times S - X\right) \right\}.$$

4.3 Modelo Cox, Ingersoll e Ross

O modelo de Cox, Ingersoll e Ross, soluciona tanto o problema de crescimento ilimitado da taxa de juros, presente em Merton, bem como o problema de possibilidade de taxas de juros nominais negativas, presente tanto em Merton como em Vasicek.

A incerteza da economia é descrita por meio do espaço de probabilidade filtrado $(\Omega,\ \xi,\ \xi_t,\ P)$. A equação diferencial estocástica seguida pela taxa de juros de curto prazo é:

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.6}$$

onde $\alpha,\ \beta$ e σ são constantes positivas e $W(t)$ é um processo de Wiener unidimensional.

Como no modelo de Vasicek, as taxas de juros tendem a gravitar em torno de θ, cuja interpretação continua a ser a de taxa de juros de curto prazo esperada no longo prazo.

É possível demonstrar (Feller (1951)) que se $2\alpha\beta \geq \sigma^2$ e $r(0) > 0$, então $r(t)$ nunca será negativo. A volatilidade da taxa de curto prazo é $\sigma\sqrt{r(t)}$. Intuitivamente, sempre que $r(t)$ começar a se aproximar de zero, a raiz quadrada de $r(t)$ se tornará um número muito pequeno, fazendo a volatilidade do processo se tornar desprezível. Nesse momento, a magnitude do termo "$\alpha\left(\beta - r(t)\right)dt$" será dominante, fazendo $r(t)$ se afastar da origem e ser sempre positivo.

A distribuição de $r(T)$ condicional a ξ_t é chi-quadrado não central $\chi\left(2cr(t),\ 2q+2,\ 2u\right)$, com $2q+2$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $2u$ proporcional à taxa de curto prazo corrente. As variáveis c, u, v e q são definidas como:

$$c = \frac{2\alpha}{\sigma^2\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)} \qquad u = cr(t)e^{-\alpha(T-t)} \qquad v = cr(t) \qquad \text{q}=\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}-1.$$

De acordo com esta distribuição, a esperança e a variância condicionais de $r(T)$ são dadas por:

$$E^P\left(r(t)/\xi_t\right) = \beta\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right) + r(t)e^{-\alpha(T-t)}$$

e

$$var^P\left(r(t)/\xi_t\right) = r(t)\frac{\sigma^2}{\alpha}\left(e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)}\right) + \beta\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)^2.$$

A esperança condicional de $r(T)$ é dada por uma média ponderada entre a taxa de curto prazo corrente $r(t)$ e a taxa de curto prazo esperada no longo prazo β, o que reflecte a propriedade de reverão à média do processo (4.6). A variância condicional depende positivamente da taxa corrente $r(t)$, de forma que quando a taxa de curto prazo se aproxima de zero sua variabilidade é reduzida.

A condição de inexistência de arbitragens no mercado de títulos equivale à existência de um processo $\lambda(t)$. Por razões ligadas à tratabilidade analítica, que não serão aqui discutidas, o market-price-of-risk é definido como $\lambda(t) = \lambda\sqrt{r(t)}$, com λ constante. A derivada de Radon-Nikodým $\rho\left(t,\ \lambda(t)\right)$ é definida por meio de:

$$\rho\left(t,\ \lambda(t)\right) = exp\left(-\int_0^t \lambda\sqrt{r(s)}dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2 r(s)ds\right).$$

A medida martingal equivalente Q em $(\Omega,\ \xi)$ é dada por $dQ = \rho\left(t,\ \lambda(t)\right)dP$. Pelo teorema de Girsanov, o processo $W^Q(t)$, definido por $dW^Q(t) = dW(t) + \lambda\sqrt{r(t)}dt$, é um processo de Wiener unidimensional em $(\Omega,\ \xi,\ Q)$.

O preço livre de arbitragem de um título de renda fixa com data de vencimento T é dado por:

$$P(t,\ T) = E^{Q}\left(exp\left(-\int_{t}^{T} r(s)\,ds \right) \Big/ \xi_t \right).$$

A solução desta expressão permite obter, endogenamente, o preço dos títulos (e a própria estrutura a termo) em função dos parâmetros do processo da taxa de juros de curto prazo e do market-price-of-risk:

$$P(t,T) = A(\tau)\,e^{-B(\tau)r(t)} \tag{4.7}$$

com

$$A(\tau) = \left(\frac{2\gamma e^{(\alpha'+\gamma)\tau/2}}{(\alpha'+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma} \right)^{\frac{(\alpha'+\gamma)R(t,\infty)}{\sigma^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\alpha'+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}$$

$$\gamma^2 = \alpha'^2 + 2\sigma^2 \qquad \alpha' = \alpha - \lambda\sigma \qquad \text{e} \qquad \tau = T - t\,.$$

O termo $R(t,\ \infty)$ é uma constante que representa o yield to maturity de um título com prazo para o vencimento infinito, isto é, $R(t,\ \infty) = 2\alpha\beta / (\alpha' + \gamma)$.

A aplicação do Lema de Itô sobre (4.7) permite obter o processo estocástico seguido pelo preço dos títulos:

$$dP(t,\ T) = P(t,\ T)\Big(\big(r(t)\big(1+\lambda\sigma B(\tau)\big)\big)dt + \sqrt{r(t)}\,\sigma B(\tau)\,dW(t)\Big).$$

Quanto maior o valor da constante λ (componente do market-price-of-risk), tanto maior o retorno instantâneo esperado dos títulos. Como nos modelos de Merton e Vasicek, este resultado é intuitivo, refletindo o facto de que investidores mais avessos ao risco exigem retornos esperados maiores.

Também é interessante notar que, conforme a taxa de curto prazo se aproxima de zero, a volatilidade instantânea dos títulos também tende a se anular. Quando $r(t)$ se aproxima da origem, a própria volatilidade da taxa de curto prazo é reduzida. Isto faz com que seu comportamento se assemelhe, pelo menos num curto período de tempo, ao de um processo determinista. Num ambiente em que a taxa de curto prazo é "quase" determinista, os preços dos títulos não podem ser voláteis.

A questão essencial, no modelo de Cox, Ingersoll e Ross é saber se a volatilidade da taxa de curto prazo deve, de facto, ser influenciada pelo próprio valor da taxa, ou se isto é apenas um artifício utilizado para garantir taxas positivas. À primeira vista, as experiências recentes de países como o Brasil, Estados Unidos e Japão parecem confirmar a primeira hipótese.

A estrutura a termo pode ser obtida, endogenamente, a partir de (4.7):

$$R(t,\ \tau)=\frac{B(\tau)}{\tau}r(t)-\left(\frac{(\alpha'+\gamma)ln(A(\tau))}{2\alpha\beta\tau}\right)R(t,\ \infty). \tag{4.8}$$

O yield de um título de renda fixa é dado por uma soma ponderada entre a taxa de curto prazo e o yield de um título com maturidade infinita.

Apesar da expressão (4.8) ser bastante complexa, o único termo estocástico presente é a própria taxa de curto prazo $r(t)$. Assim sendo, semelhantemente a Merton e Vasicek, no modelo de Cox, Ingersoll e Ross toda a dinâmica da estrutura a termo também está condicionada à dinâmica da taxa de juros de curto prazo.

4.4 Simulação de Monte Carlo

Existem autores que entendem que a simulação de Monte Carlo faz parte dos chamados métodos numéricos, isto é, métodos de simulação de eventos empregados quando não se dispõe de uma fórmula matemática que descreva satisfatoriamente o fenómeno pesquisado.

Trata-se de uma simulação, em linhas gerais, o método procura simular caminhos para a evolução de um fenómeno até encontrar uma aproximação satisfatória que o explique. Note-se que quando se utiliza uma fórmula a uma variável para obtenção de um resultado, esse resultado é exacto, mesmo que não reflicta a realidade. No caso dos métodos numéricos não se procura uma variável exacta mas sim um resultado que descreva dentro de um certo limite de tolerância o comportamento do fenómeno estudado.

Em síntese a simulação de Monte Carlo é uma técnica de análise de risco e retorno de activos que consiste em simular eventos futuros em computador, alimentando-o com um modelo que tenha em conta as medidas de sensibilidade e distribuição de variáveis.

A ideia base da simulação de Monte Carlo, quando utilizada na prefixação de opções, é a de que, dada a equação estocástica que determina o comportamento do objecto activo, um possível caminho que este objecto activo pode percorrer é simulado, e o valor da opção é calculado. Este valor da opção é considerado como uma amostra aleatória dos possíveis valores que a opção pode assumir. Então este procedimento é repetido N vezes ($N=10.000$ é considerado, na literatura de opções, um “bom” N), e se obtém a distribuição dos valores da opção, onde a média é uma estimativa do valor esperado da opção. Boyle (1977) utiliza este esquema para a avaliação de opções do tipo europeias, e sugere o uso das técnicas de variável de controlo e variável anti tética para redução da variância do resultado obtido na simulação. Também esta simulação de Monte Carlo, é utilizada para a prefixação de opções europeias sobre acções, determinando que o objecto activo, no caso, uma acção, segue um movimento geométrico Browniano regido pela equação estocástica.

4.5 Movimento browniano geométrico

O movimento browniano geométrico (também chamado de movimento geométrico browniano e movimento browniano exponencial) é um processo estocástico contínuo no qual o logaritmo de uma quantidade aleatória segue um movimento browniano, ou um processo de Wiener. É aplicável à modelagem matemática de certos fenómenos nos mercados financeiros, sendo utilizado particularmente no campo da prefixação de opções, uma vez que uma quantidade que segue um movimento browniano geométrico pode assumir qualquer valor positivo, e somente mudanças percentuais nas variáveis aleatórias são importantes. Isso é uma boa aproximação da dinâmica de preço das acções, excepto para alguns poucos eventos.

Um processo estocástico S_t segue um movimento browniano geométrico se satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

onde:

S_t – significa o valor da acção;

μ – significa a tendência da acção;

dt – diferencial no tempo

σ – significa a volatilidade do preço da acção;

Wz – diferencial numa variável que segue o processo de Wiener $\left(Wz = \varepsilon\sqrt{dt}\right)$ sendo que ε representa um número aleatório retirado de uma distribuição normal que tem média zero e desvio padrão um).

Para qualquer valor inicial S_0 a equação tem a solução analítica:

$$S_t = S_0\, exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right),$$

que é uma variável aleatória com distribuição log-normal com valor esperado $\mathrm{E}\left(S_t\right) = e^{\mu t} S_0$ e variância $Var\left(S_t\right) = e^{2\mu t} S_0^2 \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$.

4.6 Método da máxima verossimilhança

O princípio de máxima versossimilhança é um dos procedimentos usados para se obter estimadores. Consideremos uma população e uma variável aleatória contínua X, relacionada a essa população, com função densidade $f(x,\ \theta)$, sendo θ o parâmetro desconhecido. Retiremos uma amostra aleatória simples de X, de tamanho n, $X_1,\ ...,\ X_n$, e sejam $x_1,\ ...,\ x_n$ os valores efectivamente observados.

A função de verossimilhança L é definida por

$$L(\theta;\ x_1,\ ...,\ x_n) = f(x_1;\ \theta)\times ...\times f(x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta).$$

Se X é uma variável aleatória discreta com função de distribuição $p(x,\ \theta)$, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\theta;\ x_1,\ ...,\ x_n) = p(x_1;\ \theta)\times ...\times p(x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta),$$

que deve ser interpretada como uma função de θ. O estimador de máxima verossimilhança de θ é o valor que maximiza $L(\theta;\ x_1,\ ...,\ x_n)$.

Como encontrar o estimador de máxima verossimilhança:

- encontrar a função de verossimilhança;
- aplicar a função ln;
- derivar em relação ao parâmetro θ;
- igualar o resultado a zero;
- verificar que este estimador é ponto de máximo.

<u>Exemplo:</u>

Seja X uma variável aleatória com distribuição Normal, média μ e variância σ^2. Tomemos uma amostra aleatória $X_1,\ ...,\ X_n$ de X. Qual o estimador de máxima verossimilhança para $\theta = (\mu,\ \sigma^2)$?

Como $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, a função densidade de X é:

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Assim, a função de verossimilhança é dada por

$$L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ ...,\ x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

ou seja

$$L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ ...,\ x_n\right)=\left(2\pi\right)^{-n/2}\left(\sigma^2\right)^{-n/2}exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança para $\theta=\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ devemos encontrar os valores de μ e σ^2 para os quais a função de verossimilhança, $L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ ...,\ x_n\right)$, é máxima.

Para isso primeiramente aplicaremos a função ln,

$$ln\,L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ ...,\ x_n\right)=-\frac{n}{2}ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}.$$

Agora vamos derivar em relação a μ:

$$\frac{\partial L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ ...,\ x_n\right)}{\partial\mu}=-\frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)\left(-1\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\mu\right)}{\sigma^2}.$$

Igualando o resultado a zero obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\hat{\mu}\right)}{\sigma^2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\mu}\right)=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\mu}\right)=0\Leftrightarrow n\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}x_i\Leftrightarrow\hat{\mu}=\overline{x}.$$

Portanto, o possível estimador de máxima verossimilhança de média populacional μ é $\overline{x}$. Basta avaliar agora se realmente $\overline{x}$ é ponto de máximo. Para isto,

$$\frac{\partial^2 L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ ...,\ x_n\right)}{\partial\mu^2}=\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)\right]=-\frac{n}{\sigma^2}<0.$$

Assim, concluimos que $\overline{x}$ é realmente um ponto de máximo e portanto, o estimador de máxima verossimilhança para μ é $\hat{\mu}=\overline{x}$. Vamos agora encontrar o estimador de máxima verossimilhança para a variância σ^2. Para isso, derivamos a função em relação a σ^2:

$$\frac{\partial\,ln\,L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ ...,\ x_n\right)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2.$$

Igualando a zero, temos que

$$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2=0\Leftrightarrow -n+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}=0\Leftrightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{\left(n-1\right)}{n}s^2.$$

Como

$$\frac{\partial^2 L\left(\mu,\ \sigma^2;\ x_1,\ \ldots,\ x_n\right)}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{1}{\left(\sigma^2\right)^2}\left(\frac{n}{2} - \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)$$

que, avaliado em $\hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)s^2}{n}$ é tal que

$$\frac{\partial^2 L\left(\mu,\ \hat{\sigma}^2;\ x_1,\ \ldots,\ x_n\right)}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\hat{\sigma}}2 < 0\,.$$

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança para σ^2 é $\hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)}{n}s^2$, onde $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n-1}$.

4.7 Método dos momentos generalizados

O método dos momentos devido a Karl Pearson baseia-se no confronto entre os k (primeiros, por hipótese) momentos ordinários da população com os k primeiros momentos ordinários da amostra; admitindo que o sistema resultante seja possível e determinado, em ordem aos k parâmetros desconhecidos, a solução do sistema fornece as estimativas desejadas pelo método dos momentos.

É possível tornar este método substancialmente mais eficiente através de dois procedimentos: primeiro, escolhendo de forma óptima os momentos da população; segundo, escolhendo um critério de proximidade entre os momentos da população e da amostra que avalie a variabilidade dos momentos da amostra.

Estas ideias estão na base do método dos momentos generalizados proposto por Hansen (1982) (um dos métodos mais utilizados na literatura econométrica).

Vamos apresentar o método dos momentos generalizados adaptado para o caso de processos estocásticos. Seja, θ um vector de parâmetros desconhecidos de tipo $k\times 1$, $h_{t_i}(\theta)$ de tipo $k'\times 1$, mensurável$-F_{t_i}$, tal que $E\left[h_{t_i}(\theta_0)\right]=0$, $g_n(\theta) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_{t_i}(\theta)$ de tipo $k'\times 1(k'\geq k)$ e $Q_n(\theta) := g_n'(\theta)\Psi_n g_n(\theta)$, Ψ_n semidefinida positiva. O estimador do método dos momentos generalizados define-se como a solução do problema $min Q_n(\theta)$. Sob certas condições de regularidade (ver Mackinnon e Davidson (1993), Ogaki (1993) e Gouriéroux e Monfort (1995):

1. $\theta_0 \in \Theta$, onde Θ é compacto;

2. $h_{t_i}(\theta)$ é contínua em θ;

3. X é estacionário e ergódico;

4. Existe $E\left[h_{t_i}(\theta)\right]$ e $E\left[h_{t_i}(\theta_0)\right]=0 \Rightarrow \theta=\theta_0$;

5. $g_n(\theta)$ converge uniformemente q.c. para $E\left[h_{t_i}(\theta)\right]$;

6. $\Psi_n \xrightarrow{q.c.} \Psi$, Ψ é semidefinida positiva e não aleatória;

7 - $E\left[h'(\theta)\Psi h(\theta)\right]=0 \Rightarrow \theta=\theta_0$;

8 - $h(\theta)$ é diferenciável de segunda ordem em θ e $\frac{\partial g'(\theta)_n}{\partial\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h'_{t_i}(\theta)}{\partial\theta}$ converge uniformemente q.c. para $D(\theta)$. Escreve-se D_0 para designar $D(\theta_0)$.

9 - $Var\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}h_{t_i}(\theta_0)\right]\xrightarrow{q.c.} S_0$.

Tem-se,

- O estimador do método dos momentos generalizados, $\hat{\theta}_n$, é fortemente consistente (quando $n \to \infty$).
- Fixando a função $h(.)$, o melhor estimador do método dos momentos generalizados é atingido quando $\Psi = S_0^{-1}$.
- $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\xrightarrow{d} N\left(0,\ \left(D_0 S_0^{-1} D_0\right)^{-1}\right)$.

O problema está em seleccionar $h(.)$ com base na discretização do processo e, neste caso, $E\left[h_{t_i}(\theta_0)\right]\neq 0$ o que implica que o estimador do método dos momentos generalizados é inconsistente. Hansen e Scheinkman (1995) baseiam a sua escolha nos momentos não condicionados do processo X o que implica que o estimador do método dos momentos generalizados embora consistente pode ser pouco eficiente (precisamente porque não avalia a dinâmica do processo). A escolha natural para $h(.)$ baseia-se nos dois primeiros momentos condicionais do processo X:

$$h_{t_i}(\theta)=\begin{bmatrix} Z_{t_i}^{(1)}\left(X_{t_i}-E\left[X_{t_i}\middle|F_{t_{i-1}};\ \theta\right]\right) \\ Z_{t_i}^{(2)}\left(\left(X_{t_i}-E\left[X_{t_i}\middle|F_{t_{i-1}};\ \theta\right]\right)^2-Var\left[X_{t_i}\middle|F_{t_i};\ \theta\right]\right) \end{bmatrix}$$

onde $Z_{t_i}^{(1)}$ é de tipo $r_1\times 1$, $Z_{t_i}^{(2)}$ é de tipo $r_2\times 1$ e $r_1+r_2\geq k$. Podemos observar que $\left\{X_{t_i}-E\left[X_{t_i}\middle|F_{t_{i-1}};\ \theta\right]\right\}$ e $\left\{\left(X_{t_i}-E\left[X_{t_i}\middle|F_{t_{i-1}};\theta\right]\right)^2-Var\left[X_{t_i}\middle|F_{t_i};\theta\right]\right\}$ são diferenças de martingalas e portanto $E\left[h_{t_i}(\theta_0)\right]=0$ e $E\left[h_{t_i}(\theta_0)h'_{t_i}(\theta_0)\right]=0$ para $j\neq i$. Naturalmente podemos generalizar $h(.)$, por exemplo, considerando, $h_{t_i}(\theta)=Z_{t_i}\left(\phi\left(X_{t_i}\right)-E\left[\phi\left(X_{t_i}\right)\middle|F_{t_{i-1}}\right]\right)$.

CAPÍTULO 5

Avaliação de opções implícitas em contratos de seguro

5.1 Breve revisão da literatura

A maioria das apólices de seguro de vida estão repletas de opções implícitas que são geralmente de valor significativo. No passado, muitas dessas opções foram oferecidos gratuitamente, em parte porque os tradicionais métodos actuariais foram incapazes de avaliar as opções. Quando a British Equitable Life teve de parar de adquirir novos negócios em 2000, devido à cobertura desadequada das opções oferecidas, a preocupação com opções embutidas intensificou-se, especialmente em matéria de adequação dos preços e de medição do risco de opções implícitas e na gestão de riscos. No entanto, o processo de determinação do valor justo (fair value) exige um modelo de avaliação financeira adequado. Cada vez mais, os actuários colaboram com os economistas financeiros para enfrentar esse desafio.

A preocupação com opções implícita reflecte-se também nos últimos processos de regulação. Os relatórios financeiros exigem agora uma avaliação do valor de mercado das dívidas e assim, das opções implícitas, pelo valor justo. A determinação do valor justo das opções é não só de especial relevância no contexto de testes de solvência, mas também em relação ao International Financial Reporting Standards (IFRS). O interesse crescente no campo da valorização e gestão do risco de opções incluídas nos contratos de seguro de vida também é demonstrado pelo aumento do número de contribuições científicas neste domínio. Algumas contribuições recentes estão preocupadas com a avaliação risk-neutral de contratos de seguros de vida.

Um método comum para determinar os preços de contratos de seguro pelo valor justo envolve a utilização da teoria de avaliação de créditos condicionais, que é baseada nos trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973). A adequação dos modelos, em particular, a arbitragem tem sido defendida por Babbel e Merrill (1998), que fornecem uma discussão de modelos de avaliação económica às seguradoras. A aplicação da teoria das contingências de preços dos contratos de seguro de vida associados ao capital foi iniciada por Brennan e Schwartz (1976) e Boyle e Schwartz (1977). Os contratos de seguro de vida de que incluem mecanismos de participação nos resultados foram estudados por Briys e de Varenne (1994, 1997), Grosen e Jorgensen (2000, 2002), Jensen, Jorgensen e Grosen (2001), Hansen e Miltersen (2002), Steffensen (2002), Bacinello (2003a, 2003b), Haberman, Ballotta e Wang (2003), Miltersen e Persson (2003), Tanskanen Lukkarinen (2003), Gatzert e Kling (2005), Ballotta, Haberman, e Wang (2006) Gatzert e Schmeiser (2006), e Kling, Richter, e Russ (2006).

Briys e Varenne (1994) orientaram o seu interesse para os juros garantidos, para a participação do excedente anual e para avaliar passivos de seguros num quadro de direitos contingentes. Briys e Varenne (1997) apresentam um contrato com uma garantia "point-to-point" (ponto-a-ponto), ou seja, a empresa garante o pagamento de uma taxa de juro mínima e uma participação opcional do excedente no vencimento do contrato (bónus). O valor do contrato de mercado neste modelo é basicamente em função da taxa de juro garantida e uma participação excedente terminal logo, portanto, apenas a taxa de juro garantida influencia no risco de perda da maturidade. Portanto, os autores apresentam um modelo de taxas de juros estocásticas. Com base num contrato semelhante, Grosen e Jorgensen (2002), complementam, considerando a opção de insolvência da seguradora e o impacto da intervenção regulamentar, sem a utilização de taxas de juros estocásticas.

O contrato de seguro de vida estudado por Grosen e Jorgensen (2000) apresenta a participação excedente anual do "estilo cliquet". Neste tipo de contrato, o maior valor entre taxa de juro garantida e a fracção do retorno do activo é anualmente creditada à apólice passando a tornar-se parte da garantia. A conta bónus é introduzida para servir de mecanismo de nivelamento para a participação nos retornos dos activos. Os autores decompõem o contrato num título sem risco, uma parte bónus, e uma opção do tipo "surrender".

Trabalhos complementares sobre os contratos, incluindo uma opção surrender foram feitos por Jensen, Jorgensen e Grosen (2001) e Tanskanen e Lukkarinen (2003), que determinam preços justos dos contratos que contenham uma taxa de juro garantida e diferentes esquemas de participação o excedente anual. Ambos, assim propõem um método de avaliação de contratos com base num esquema de diferenças finitas. Bacinello (2003a, 2003b) analisa a opção surrender num contrato de seguro de vida italiano, com prémios individuais e periódicos, incluindo o risco de mortalidade. Steffensen (2002) estabelece um quadro muito geral que inclui opções surrender e paid-up.

Hansen e Miltersen (2002), bem como Miltersen e Persson (2003) apresentam um modelo de contratos de seguros de vida que incorporam mecanismos de participação nos resultados comum na Dinamarca. Junto com a garantia de taxa de juros e com um mecanismo de distribuição de alisamento do excedente anual semelhante ao apresentado por Grosen e Jorgensen (2000), é fornecido o prémio final. Além disso, neste modelo, o tomador paga uma taxa anual para a companhia de seguros.

Gatzert e Kling (2005) propõem um método em que consideram tanto a medição de preços e riscos, como aumenta a informação sobre as responsabilidades das companhias de seguros. Eles examinam o efeito da valorização pelo valor justo sobre a situação da seguradora de risco, ou seja, a probabilidade e a extensão real de uma quebra de contratos justos com o mesmo valor de mercado. Principais factores de risco são identificados por comparação dos resultados para os diferentes tipos de contratos, incluindo o estilo cliquet e as garantias ponto a ponto.

Contratos de estilo cliquet com diferentes mecanismos de nivelamento, como é comum no Reino Unido, são estudados por Haberman, Ballotta e Wang (2003) e Ballotta, Haberman, e Wang (2006). Neste tipo de contrato, o passivo corresponde ao maior de uma taxa de juro garantida ou uma fracção predeterminada de, por exemplo, a média aritmética ou média geométrica dos retornos dos últimos períodos da carteira da seguradora de referência. Ballotta, Haberman, e Wang (2006) também incidem sobre a opção padrão sobre os preços justos.

Gatzert e Schmeiser (2006) desenvolveram um quadro modelo para um contrato que inclui uma garantia de taxa de juros, uma participação do excedente anual estilo cliquet, e oferece opções paid-up e opções de revalidação. A avaliação não é baseada em suposições sobre as estratégias de exercício em particular, mas num limite superior para o preço da opção que está previsto e é independente do comportamento do tomador do seguro. Usando essa abordagem, é analisado o impacto da taxa de juro garantida, da participação no excedente anual e da volatilidade do investimento sobre os valores das opções de pagamento do prémio.

Kling, Richter, e Russ (2006) apresentam um quadro geral de contratos com garantias de estilo cliquet, que são comuns na Alemanha, e avaliam-nas levando em consideração o quadro regulamentar alemão. Eles analisaram a interacção dos parâmetros dos diversos contratos, tais como as decisões de gestão sobre as taxas de excedente de participação e as taxas de juro garantida.

Opções de garantia anual foram analisadas por Milevsky e Promislow (2001), Boyle e Hardy (2003), e Haberman e Ballotta (2003), entre outros. Milevsky e Promislow (2001) consideraram o modelo de taxa de risco actuarial ou de força de mortalidade como uma variável estocástica. Boyle e Hardy (2003) consideram contratos unit-linked e discutiram o efeito de diferentes estratégias de gestão de risco. Haberman e Ballotta (2003) também trataram de contratos unit-linked e compararam os resultados de dois diferentes modelos de estrutura a termo.

No seguimento deste capítulo, serão abordados alguns modelos de avaliação de opções financeiras de seguros do ramo vida a fim de obter o prémio calculado pelas companhias de seguros de acordo com a prática actuarial padrão, ou seja, o valor justo dos contratos. Será, também, feita uma breve abordagem relativamente às tábuas de mortalidade, com vista a atingir as probabilidades de vida e morte em função das tábuas de mortalidade e das idades, inerentes aos modelos de avaliação de opções financeiras de seguros do ramo vida.

Tanto o cálculo das probabilidades de vida e morte em função das tábuas de mortalidade e das idades, como o cálculo do prémio calculado pelas companhias de seguros de acordo com a prática actuarial padrão (o valor justo dos contratos), serão necessários para a elaboração da análise do contrato “Victoria Garantia Rendimentos” comercializado pela companhia Victoria Seguros de Vida S. A.

Todas as informações referentes aos modelos de avaliação de opções financeiras, que se encontram no seguimento deste capítulo, foram obtidas a partir Albizzati e Geman (1994), Bacinello (2001, 2003a, 2003b), Bacinello e Persson (2002), Bachelier (1900), Black e Scholes (1972, 1973), Blazenko, Boyle e Newpot (1990), Boyle e Schwartz (1977), Brennan e Schwartz, (1976, 1979a, 1979b), Briys e Varenne (1997), Cootner (1964), Cox, Ross e Rubinstein (1979), Grant e Kingsnorth (1967), Grosen e Jorgensen (1997, 2000, 2002), Haberman, Ballotta e Wang (2003), Hansen e Miltersen (2000), Heath, Jarrow e Morton (1992), Jensen, Jorgensen e Grosen (2000, 2001), Merton (1973), Melville (1970), Miltersen e Persson (1999, 2000, 2000a, 2000b), Persson e Aase (1997), Smith (1982), Squires (1973), Steffensen (2002), Tanskanen e Lukkarinen (2003), Walden (1985), Vasicek (1977), entre outros.

5.2 Tábuas de mortalidade

As tábuas de mortalidade caracterizam-se por ser um modelo sustentado de análise demográfica, que permite estimar a probabilidade de vida e de morte de uma determinada população. Esta informação é obtida através de dados estatísticos disponibilizados pelas entidades oficiais do país a que se referem e permitem caracterizar a população num determinado período de tempo. Ao longo dos anos, estas tábuas foram consideradas na avaliação das responsabilidades assumidas pelas seguradoras já que se consideravam adequadas à realidade, tendo ocorrido todavia, necessidade de efectuar algumas actualizações durante esse tempo.

Factores como a constante mudança dos hábitos das sociedades, a evolução verificada nos cuidados de saúde e a melhoria da qualidade de vida, têm tido como consequência o aumento da esperança média de vida, pelo que se tornou fundamental fazer reflectir estes fenómenos nas tábuas de mortalidade existentes. Até agora as tábuas utilizadas pelo nosso mercado, em particular, são estáticas já que estabelecem que a esperança média de vida para uma determinada idade é função do comportamento da lei de sobrevivência num dado momento, não distinguindo por isso os factores de risco segundo o ano de nascimento do indivíduo, factor que em rigor, vai determinando realidades diferentes ao longo dos anos e, além disso, baseiam-se na realidade de outras populações.

Ora o impacto da aplicação de uma tábua de mortalidade menos ajustada ao contexto português, quando se trata de avaliar responsabilidades, pode ser significativo, gerando, em consequência, perdas expressivas. Este impacto torna-se ainda mais acentuado no caso de uma população cada vez mais envelhecida.

Para calcular as probabilidades de vida e de morte em função das tábuas de mortalidade e das idades, designamos por p a probabilidade de vida e por q a probabilidade de morte. Por cada idade, a probabilidade de vida será designada por p_x, sendo x a idade que a pessoa alcança e q_x a probabilidade de morte a essa idade.

Logo, quando queremos determinar a probabilidade de uma pessoa com a idade de x viver mais em n anos, empregamos o símbolo actuarial ${}_n p_x$. De igual modo, a probabilidade de uma pessoa com idade de x falecer dentro de n anos é representada por ${}_n q_x$.

Em função das tábuas de vida e mortalidade, a probabilidade de vida por mais n anos de uma pessoa com x anos de idade é:

$${}_n p_x = \frac{1_{x+n}}{1_x}$$

em que, 1_{x+n} é o número de pessoas vivas das tábuas de mortalidade com $x+n$ anos de idade e 1_x é o número de pessoas vivas com a idade de x anos.

A probabilidade de uma pessoa com a idade x morrer antes de atingir mais n anos será:

$$_nq_x = \frac{1_x - 1_{x+n}}{1_x}.$$

Um problema que se põe frequentemente é o do cálculo do número provável de anos de vida ou esperança de vida que tem qualquer pessoa de idade x. Este problema é diferente do de encontrar a percentagem de pessoas que sobrevivem do ano x ao ano $x+n$.

A esperança de vida dá-nos o número de anos provável (esperança matemática) de vida em função da idade actual. As associações de mutuários usam este índice, que as seguradoras utilizam quando se trata de negociar com os seus clientes.

O índice, que não será deduzido neste trabalho, tem a equação:

$$\overset{0}{e}_x = 0{,}5 + \frac{1}{1_x}\sum_{t=1}^{\varpi - x - 1} 1_{x+t}$$

onde

$\overset{0}{e}_x$ – esperança de vida em anos para uma pessoa de idade x;

1_x – número de pessoas vidas à idade x. Diferente para cada tábua de vida e mortalidade utilizada;

ϖ – último ano da tábua de mortalidade;

t – a variável que toma os valores inteiros de 1 a $\varpi - x - 1$.

5.3 Modelo de avaliação de contratos de prémio único e periódico

5.3.1 Estrutura da política

Considere uma apólice de seguro dotal emitida no tempo 0 e de duração de tempo T. Denotamos por x a idade de entrada, por C_0 a soma inicial do segurado e por i a taxa de juro anual em risgime de juro composto. Na continuação deste capítulo negligenciaremos as despesas e os encargos relativos à realização de um contrato de seguro, de modo que unicamente os prémios líquidos (prémios puros) serão considerados.

5.3.2 Contratos de prémio único

Se a apólice é paga por um só montante U (prémio único) no início do contrato e o benefício devido é pago no final do ano de morte $t = 1, 2, ..., T$ ou, o mais tardar, no vencimento T, o prémio único é definido por Bacinello (2000) da seguinte forma,

$$U = C_0 A_{\overset{1}{x:T}} = C_0 \left(\sum_{t=1}^{T-1} {}_{t-1|1}q_x v^t + {}_{T-1}p_x v^T \right) \tag{5.1}$$

onde $v = (1+i)^{-1}$ e ${}_{t-1}|_1 q_x$ representa a probabilidade do tomador falecer durante o t-ésimo ano do contrato (ou seja, entre os tempos $t-1$ e t) e ${}_{T-1}p_x$ representa a probabilidade do tomador estar vivo no tempo $T-1$ (ou seja, ele falecer durante o último ano do contrato ou sobreviver até ao final do contrato).

Constata-se assim que o prémio U é expresso como um valor esperado do benefício descontado, como se a companhia de seguros de riscos tivesse sido neutra em relação ao risco de mortalidade. Uma vez que as flutuações da mortalidade, devido (a) ao futuro incerto relativamente à mortalidade e (b) à incerteza de parâmetros para uma determinada empresa, de facto ocorrer, a seguradora (que não é risk-neutral, mas aversa ao risco) geralmente solicita uma compensação por aceitar o risco de mortalidade. Tradicionalmente, essa compensação não é explicitamente adicionada ao prémio, mas está implícita na escolha de uma tábua de mortalidade, segundo a qual o prémio é calculado como um valor esperado, sendo implicitamente cobrada uma margem de segurança. Então, a vida e as probabilidades de morte extraídas normalmente a partir desta tabela diferem da verdadeira lei de sobrevivência da população, a menos que a companhia de seguros seja capaz de eliminar (por uma diversificação extrema) flutuações da mortalidade e operar num mercado perfeitamente competitivo. Daí que este ajustamento à tábua pode ser interpretado como um risco, no sentido que o termo risk-neutral tem no ambiente da Economia Financeira.

Presumimos que, no final do ano t, se o contrato ainda estiver em vigor, a reserva matemática é ajustada a uma taxa δ_t (taxa de bónus), definida por:

$$\delta_t = max\left\{ \frac{\eta g_t - i}{1+i}, 0 \right\}, \quad t = 1,\ 2,\ ...,\ T. \tag{5.2}$$

O parâmetro η, que se encontra entre 0 e 1, indica o nível de participação nos resultados, pela simplicidade assumida torna-se constante no tempo, e g_t denota o retorno anual sobre a carteira de referência. Esta relação (5.2) formalmente traduz o facto da taxa de juro total creditado à reserva matemática durante o ano t, $(1+i)(1+\delta_t)-1$, é igual ao máximo entre i e ηg_t, ou seja, que i é uma taxa mínima de retorno garantido para o tomador.

Dado que estamos a considerar uma apólice de prémio único, o bónus creditado à reserva matemática implica um ajustamento proporcional, à taxa de δ_t, também do capital seguro. Em particular, se o segurado morrer dentro do prazo do contrato, vamos supor que os lucros de um benefício adicional (o último), só serão pagos no final do ano da morte.

Designamos por $C_t = C_{t-1}\left(1+g_t\right), \quad t = 1,\ 2,\ ...,\ T$ o benefício pago no momento t se o segurado morrer entre as idades $x+t-1$ e $x+t$ ou para $t = T$, em caso de sobrevivência:

$$C_t = C_{t-1}\left(1+g_t\right), \quad t = 1,\ 2,\ ...,\ T \qquad (5.3)$$

utiliza-se a expressão interactiva, em vez da anterior:

$$C_t = C_0 \prod_{j=1}^{t}\left(1+g_t\right), \quad t = 1,\ 2,\ ...,\ T\ . \qquad (5.4)$$

5.3.3 Contratos de prémio periódico fraccionado

Suponha que a apólice é paga por uma sequência de prémios periódicos, devidos no início de cada ano do contrato, se o tomador estiver vivo. O prémio inicial, P_0, pago no momento 0 é dado por:

$$P_0 = C_0 P_{x:\overline{T}|}^{(i)} = C_0 \frac{A_{x:\overline{T}|}^{(i)}}{a_{x:\overline{T}|}^{(i)}} = C_0 \times \left(\frac{\sum_{t=1}^{T-1} {}_{t-1|1}q_x v^t + {}_{T-1}p_x v^T}{\sum_{t=1}^{T-1} {}_t p_x v^t} \right) \qquad (5.5)$$

em caso de morte a probabilidades ${}_{t-1|1}q_x$ e a probabilidade de sobrevivência ${}_1 p_x$ são extraídas da tábua de mortalidade. Além disso, a maioria das considerações e suposições feitas neste número ainda são válidas, em particular o bónus do mecanismo descrito pela relação (5.2). Em Itália, é usual o prémio periódico de uma apólice que implica participação nos resultados ser anualmente ajustado à taxa de bónus, g_t, sendo creditado à reserva matemática. Neste caso, denota-se por P_t, $t = 1,\ 2,\ ...,\ T-1$ a $\left(t+1\right)$ o prémio pago no tempo t, se o tomador estiver vivo, calculado do seguinte modo:

$$P_t = P_{t-1}\left(1+g\right), \quad t = 1,\ 2,\ ...,\ T-1$$

ou, alternativamente,

$$P_t = \begin{cases} P_0 & t = 0 \\ P_0 \prod_{j=1}^{t}\left(1+g_j\right) & t = 1,\ 2,\ ...,\ T-1 \end{cases}. \qquad (5.6)$$

Se este for o caso, o benefício C_t também é ajustado na mesma medida, de modo que a relação (5.3) ou alternativamente (5.4), ainda se mantém.

5.3.4 Modelo de avaliação

Nesta secção serão descritos, em primeiro lugar, os pressupostos básicos do modelo. Logo, observando que tantos os prémios periódicos como os benefícios são contingentes típicos de crédito, aplicamos a abordagem martingale apresentadas por Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981, 1983) para obter uma fórmula de avaliação. Finalmente, o risco de mortalidade estabelece uma condição de igualdade na fixação do preço do contrato.

5.3.4.1 Pressupostos

Assumimos, de facto, que os mercados financeiros e de seguros são perfeitamente competitivos e livres de oportunidades de arbitragem. Além disso, todos os agentes são racionais e partilham a mesma informação.

Designamos por r a taxa de mercado em regime de capitalização composta, assumindo-se determinística e constante. Portanto, no nosso quadro, há uma única fonte de incerteza financeira, reflectida por uma evolução estocástica da carteira de referência. Pressupor que esta incerteza é gerada por um padrão de movimento Browniano W, definido num espaço de probabilidade (Ω, Ψ, Q) no intervalo de tempo $[0, T]$. Em particular, Q representa a medida martingale equivalente, no qual o preço com desconto de qualquer activo financeiro é uma martingale (ver Harrison e Kreps (1979)).

Assumimos que a carteira de referência é um bem diversificado e é dividido em unidades. Além disso, os dividendos, cupões ou qualquer outro bem gerado pelos activos que o compõem são imediatamente reinvestidos na mesma carteira e assim, contribuem para o aumento do seu preço unitário. Portanto, os seus retornos anuais são completamente determinados pela evolução do seu preço unitário e não pelo seu valor total, o que reflecte também novos investimentos (correspondentes, por exemplo, para o pagamento de prémios periódicos ou à entrada de novas apólices na carteira) e as saídas (quando alguma apólice expira). Designamos por G_t o preço unitário no tempo t da carteira de referência, modelizada sob Q, como um movimento browniano geométrico:

$$\frac{dG_t}{G_t} = rdt + \sigma dW_t, \quad t \in [0,\ T], \tag{5.7}$$

a constante σ representa o parâmetro de volatilidade e G_0 é dado. Como é conhecido, a solução para a equação diferencial estocástica (5.7) é traduzida por:

$$G_t = G_0 \exp\left\{\left(r - \sigma^2\!/2\right)t + \sigma W_t\right\}, \quad t \in [0,\ T].$$

assumimos que a taxa anual composta de retorno g_t introduzida anteriormente, é definida como

$$g_t = \frac{G_t}{G_{t-1}} - 1, \quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T$$

de modo que $1 + g_t = \exp\left\{r - \sigma^2/2 + \sigma\left(W_t - W_{t-1}\right)\right\}$ são independentes e identicamente distribuídas para $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T$ e os seus logaritmos, representam uma taxa de retorno continuamente composta, estes são independentes e normalmente distribuídos com média de $r - \sigma^2/2$ e variância σ^2. Por isso, também as taxas de bónus g_t, definido pela relação (5.2), voltam a ser independentes e identicamente distribuídas.

Este facto é realmente crucial, desde a independência das taxas de bónus que nos permite expressar o valor do mercado dos contratos em termos de opções de compra anuais e juntamente com a distribuição idêntica, traduzir a condição numa equação simples. Finalmente, assumimos a independência entre a mortalidade e as variáveis financeiras, de modo que o valor do contrato pode ser realizado em duas fases distintas: na primeira fase de prémios as prestações definidas pelas relações (5.6) e (5.4) na segunda etapa do tempo 0 os preços são ponderados, com as probabilidades introduzidas anteriormente, a fim de conseguir um preço justo do contrato.

5.3.4.2 Avaliação dos contratos de prémio único

Para obter o valor destes contratos, primeiro precisamos calcular, para qualquer $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T$, o valor de mercado do C_t, definido pela relação (5.4) e assumir que este é devido com certeza no momento t. Para este fim, exploramos a abordagem martingale apresentada por Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981, 1983) e expressamos o preço no momento 0 de C_t, designado por $\pi(C_t)$, como a seguinte expectativa sob a mediada risk-neutral Q:

$$\pi(C_t) = E^Q\left[exp\{-rt\}C_t\right], \quad t = 1,\ 2,\ ...,\ T\ .$$

Explorando as relações (5.4) e (5.2), juntamente com a independência estocástica das taxas de bónus g_j para $j\ =\ 1,\ 2,\ ....,\ T$, e após algumas alterações algébricas, obtemos então

$$\pi(C_1) = C_0\prod_{j=1}^{t}\left(exp\{-r\} + \frac{\eta}{1+i}E^Q\left[exp\{-r\}max\left\{\left(1+g_j\right) - \left(1+\ {}^{i}\!/_{\eta}\right),0\right\}\right]\right), \qquad (5.8)$$

$t = 1,\ ...,\ T$

Recordando que $1+g_j$ é para qualquer j, identicamente e logaritmicamente distribuído, em particular, a mesma distribuição com tempo 1, preço das acções, no modelo clássico Black e Scholes (1973) (no momento 0 o preço da acção é igual a 1) é imediato perceber que Q expectativa para o parênteses na RHS de relação (5.8) representa o valor no momento 0 de uma opção de compra Europeia que não paga dividendos de acções com preço inicial igual a 1, com maturidade 1 e preço de exercício igual a $1+i/\eta$. Denotando este valor por c, temos então

$$\pi(C_t) = C_0\left(exp\{-r\} + \frac{\eta}{1+i}c\right)^t, \quad t = 1,\ 2,\ ...,\ T\ ,$$

com c determinado pela formula clássica de Black e Scholes (1973):

$$c = F(d_1) - (1+i/\eta)exp\{-r\}F(d_2)$$

onde $d_1 = \dfrac{r+\sigma^2/2 - ln(1+i/\eta)}{\sigma}$, $d_2 = d_1 - \sigma$, e F denota a função de distribuição cumulativa de uma variável normal padrão. O preço justo do contrato de prémio único analisado, FVB, pode ser obtido somando, para $t\ =\ 1,\ 2,\ .....,\ T$, o valor no momento 0 dos valores C_t ponderado pelas probabilidades, mencionadas anteriormente, devidos no momento t:

$$FVB = C_0\left(\sum_{t=1}^{T-1} {}_{t-1|1}q_x v_*^t + {}_{T-1}p_x v_*^T\right) = C_0 A_{x:\overline{T}|}^{(i_*)} \qquad (5.9)$$

onde $v_* = exp\{-r\} + \dfrac{\eta}{1+i}c$ e $i_* = v_*^{-1} - 1$.

Logo, o contrato é justo, se e somente se o prémio único de U é igual a FVB, ou seja, recordando a relação (5.1), se e só se a seguinte condição for satisfeita:

$$A_{x:\overline{T}|}^{(i)} = A_{x:\overline{T}|}^{(i_*)}$$

5.3.4.3 Avaliação dos contratos com prémios periódicos

Todos os aspectos mencionados anteriormente para os contratos de prémio único são válidos no caso de prémios periódicos. Em particular, o valor justo do benefício é dado pela relação (5.9), enquanto que o valor justo da sequência de prémios periódicos, FVP é dada por

$$FVP = \sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x \pi\left(P_t\right)$$

onde $\pi\left(P_t\right) = E^Q\left[exp\{-r\} P_t\right]$ representa no momento 0, o preço do activo contingente P_t, definido pela relação (5.6). Explorando os mesmos argumentos utilizados anteriormente, temos então

$$\pi\left(P_t\right) = \begin{cases} P_0 & t = 0 \\ P_0 v_*^t & t = 1,\ 2,\ ...,\ T-1 \end{cases}$$

de modo que

$$FVP = P_0 \sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x v_*^t = P_0 \ddot{a}_{x\,\overline{T}|}^{(i_*)} .$$

A exigência implica já que o justo valor do benefício, FVB, é igual ao justo valor dos prémios, FVP, ou seja que

$$C_0 A_{x:\overline{T}|}^{(i_*)} = P_0 \ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(i_*)} .$$

Recordando a definição de P_0 dada em relação a (5.5), podemos concluir, afirmando que o contrato é justo se e só se a seguinte condição:

$$P_{x:\overline{T}|}^{(i)} = P_{x:\overline{T}|}^{(i_*)}$$

é respeitada onde

$$P_{x:\overline{T}|}^{(i_*)} = \frac{A_{x:\overline{T}|}^{(i_*)}}{\ddot{a}_{x.\overline{T}|}^{(i_*)}} .$$

5.4 Modelo de avaliação de contratos de prémio único

5.4.1 Estrutura da apólice

Considere-se uma apólice de seguro dotal de prémio único emitida no tempo 0 e com maturidade T mais tarde. Como é conhecido, nos termos do presente contrato, a seguradora é obrigada a pagar uma determinada quantia de dinheiro ao beneficiário, caso o tomador morra dentro do prazo do contrato ou sobreviva até à data de vencimento. Mais precisamente, podemos supor que, em caso de morte durante o ano t do contrato, o benefício é pago no final do ano, ou seja, no tempo t $\left(t = 1,\ ...,\ T\right)$, caso contrário ele é pago na maturidade T.

Designamos por x a idade do segurado no momento 0, por C_1, o capital seguro inicial a pagar em caso de morte durante o primeiro ano de contrato, e por C_t a prestação devida no tempo $t\left(t = 2, ..., T\right)$. Enquanto C_1 é dado para $t > 1$, C_t é dependente do desempenho de uma carteira especial de activos (carteira de referência). A seguradora gere directamente esta carteira e partilha dos lucros com os tomadores.

Portanto, o prémio único líquido, que denotamos por U, é calculado da seguinte forma:

$$U = C_1 A_{x:\overline{T}|}^{(i)} = C_1 \left[\sum_{t=1}^{T-1} \left(1+i\right)^{-t} {}_{t-1|1}q_x + \left(1+i\right)^{-T} {}_{T-1}p_x \right] \tag{5.10}$$

onde i $\left(\geq 0\right)$ representa uma taxa anual de juros compostos que chamamos de taxa técnica, e ${}_{t-1|1}q_x$ designa a probabilidade de que o tomador morra no ano t do contrato (ou seja, entre os anos $t-1$ e t) e ${}_{T-1}p_x$ é a probabilidade de que ele ainda esteja vivo no tempo $T-1$. Como de costume, estas probabilidades dependem da idade do segurado x e são extraídos de uma tábua de mortalidade, que constitui, juntamente com i, a chamada base de primeira ordem.

Observa-se que tal prémio U é expresso como um valor esperado do C_1 benefício descontado no tempo aleatório do pagamento ao tempo 0 com a taxa técnica i.

Contudo, ano após ano, a característica da participação nos resultados implica uma alteração no contrato. Logo, vamos primeiro introduzir a seguinte notação: g_t representa a taxa de retorno sobre a carteira de referência durante o ano t de contrato e η, entre 0 e 1, identifica o coeficiente de participação nos resultados. No final de cada ano da apólice (excepto no último ano), se o tomador ainda estiver vivo a reserva da apólice (potencial) é ajustada a uma taxa g_t definida como

$$\delta_t = max\left\{\frac{\eta g_t - i}{1+i}, 0\right\}, \quad t = 1, ..., T-1.$$

Isto significa que a reserva é proporcionalmente maior, do que a taxa δ_t, desde que o dividendo seja creditado à apólice.

Designamos por $F_t^- \left(F_t^+\right)$ a reserva para a apólice em perspectiva no tempo t $\left(t = 1, ..., T-1\right)$, pouco antes o ajustamento. F_t^- é calculado como o valor esperado do C_t do benefício actual descontado do tempo aleatório de pagamento no tempo t com a taxa técnica i:

$$F_t^- = C_t A_{x+t:\overline{T-t}|}^{(i)} = C_t \left[\sum_{h=1}^{T-t} (1+i)^{-h} \, {}_{h-1|}q_{x+t} + (1+i)^{-(T-t)} \, {}_{T-t}p_{x+t} \right], \quad t = 1, \ldots, T-1, \qquad (5.11)$$

onde ${}_{h-1|}q_{x+t}$ representa a probabilidade de que o tomador morra dentro de ($t+h$) do contrato (ou seja, entre os tempos $t+h-1$ e $t+h$) condicionado sobre o evento que está vivo no tempo t, e ${}_{T-t}p_{x+t}$ é a probabilidade de que o segurado ainda está vivo no momento T condicionado no mesmo evento. Então

$$F_t^+ = F_t^- (1+g_t), \quad t = 1, \ldots, T-1. \qquad (5.12)$$

O dividendo $\delta_t F_t^-$ é usado para a compra de uma apólice de seguro dotal adicional padrão com benefício constante $C_{t+1} - C_t$ e maturidade T. O preço desta apólice adicional também é calculado por meio das bases de primeira ordem, ou seja,

$$(C_{t+1} - C_t) A_{x+t:\overline{T-t}|}^{(i)} = g_t F_t^-, \quad t = 1, \ldots, T-1.$$

Analisando as relações (5.11) e (5.12), é fácil verificar que o benefício seja ajustado na mesma proporção da reserva, ou seja,

$$C_{t+1} = C_t (1+\delta_t), \quad t = 1, \ldots, T-1$$

e assim

$$F_t^+ = C_{t+1} A_{x+t:T-t}^{(i)}, \quad t = 1, \ldots, T-1.$$

Também é útil expressar o benefício directamente, de modo que a sua dependência seja imediatamente perceptível:

$$C_t = C_1 \prod_{k=1}^{t-1} (1+\delta_k), \quad t = 2, \ldots, T. \qquad (5.13)$$

Tendo em conta o mecanismo de ajuste da taxa de retorno na taxa técnica i, e desconsiderando a possibilidade de entrega, observamos que o retorno total concedido ao tomador, durante o ano t do contrato (com excepção do ano, no termo do qual o benefício é pago) é dada por

$$(1+i)(1+\delta_t) - 1 = max\{i, \, \eta g_t\};$$

onde i pode ser interpretado como uma taxa de juro mínima garantida. Além disso, se formos considerar a opção de entrega e do facto de que o prémio inclui implicitamente uma compensação por isso, defendemos que a taxa de juro mínima garantida é ainda maior do que i. No entanto, deve salientar-se que essa interpretação de que i só é correcta se o prémio pago pelo tomador é expressa pela relação (5.10). Se, pelo contrário é diferente, por exemplo, maior podemos afirmar ainda que há uma disposição de garantia mínimo do contrato desde que δ_t não possa ser negativa, mas não mais do que a taxa total de retorno sobre a apólice num determinado ano é limitada inferiormente por i. Em particular, a negligência será qualquer tipo de interpretação, pois simplesmente considera-se um parâmetro contratual que intervém na definição das responsabilidades.

Denotamos este parâmetro por ρ, de modo que o valor de resgate no início dos anos de política $(t+1)$ (isto é, no momento t) pode ser representado como

$$R_t = f\left(\rho,\ C_{t+1},\ T-t,\ \ldots\right),\quad t=0,\ \ldots,\ T-1. \tag{5.14}$$

5.4.2 Avaliação do contrato

O contrato descrito anteriormente é um exemplo típico de um crédito eventual, já que é afectado pela mortalidade e pelo risco financeiro. Considerando que o risco de mortalidade determina o momento em que o benefício é devido, o risco financeiro afecta o montante da prestação e da decisão de entrega. Assumimos, de facto, que os mercados financeiros e de seguros são perfeitamente competitivos, sem atrito, e livres de oportunidades de arbitragem. Além disso, todos os agentes são racionais e partilham a mesma informação. Portanto, neste quadro, a decisão de entrega só pode ser a consequência de uma escolha racional, tomadas após a comparação, a qualquer momento, entre o valor total da apólice (incluindo a opção de entrega-la no futuro) e o valor de resgate em dinheiro.

Como é padrão na prática, assumimos que a mortalidade não afecta o risco financeiro, e que as probabilidades de mortalidade introduzidas anteriormente são extraídas de uma medida de risco de mortalidade neutra, ou seja, que todos os preços dos seguros são calculados como valores esperados com relação a esta medida específica. Se, em particular, a companhia de seguros é extremamente capaz de diversificar a sua carteira de tal forma que as flutuações de mortalidade são completamente eliminadas, então as probabilidades acima coincidem com as "verdadeiros". Caso contrário, se as flutuações de mortalidade ocorrem, em seguida, as "verdadeiras" probabilidades são "ajustadas" de modo a que o prémio expresse um valor esperado, implicitamente é cobrado um depósito de segurança, o que representa uma compensação por aceitar o risco de mortalidade. Neste caso, as probabilidades ajustadas derivam de uma alteração da medida, como acontece muitas vezes no ambiente de economia financeira; por isso é que são os chamados de "risco neutro".

Assim, assumimos que a taxa de retorno sobre o activo sem risco é determinística e constante, designada por r.

O risco financeiro que afecta a apólice é gerado por uma evolução estocástica das taxas de retorno da carteira de referência. Neste contexto, assumimos que é uma carteira bem diversificada, dividida em unidades e que qualquer tipo de rendimento é imediatamente reinvestido e compartilhado entre todas as suas unidades. Portanto, o rendimento reinvestido aumenta apenas o preço unitário da carteira, mas não o número total de unidades, que muda quando novos investimentos ou retiradas são feitas.

Estas previsões implicam que as taxas de retorno sobre a carteira de referência são completamente determinadas pela evolução da sua unidade preço. Designamos por G_τ esse preço por unidade de tempo $\tau(\geq 0)$, temos então

$$g_t = \frac{G_t}{G_{t-1}} - 1, \quad t = 1,\ ...,\ T-1 .$$

Para descrever a evolução estocástica de G_τ, podemos escolher o modelo em tempo discreto proposto por Cox, Ross, e Rubinstein (1979), universalmente reconhecido pelas suas importantes propriedades. Em particular, ele pode ser visto como um modelo exacto, para opções do tipo europeu ou americano ou como uma aproximação do Black e Scholes (1973) e Merton (1973), modelo para o qual convergem assintóticamente.

Em mais detalhe, dividimos cada ano da apólice em N sub períodos de igual duração, $\Delta = 1/N$, fixamos um parâmetro de volatilidade $\sigma > \sqrt{\Delta}\, ln(1+r)$, ajustamos $u = exp\left(\sigma\sqrt{\Delta}\right)$ e $d = 1/u$. Então vamos supor que G_τ pode ser observado no tempo discreto $\tau = t + h\Delta$, $t = 0,\ ...,\ 1;\ \ h = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$ e que condicionalmente com todas as informações relevantes disponíveis no tempo τ, $G_{\tau+\Delta}$ só podem ter dois valores possíveis: uG_τ (valor para cima) e dG_τ (valor para baixo). Como é conhecido, nesta definição discreta de ausência de arbitragem é equivalente à existência de uma medida de probabilidade risk-neutral em que todos os activos financeiros, descontados por meio da taxa livre de risco, são martingales. Sob esta medida risk-neutral, a probabilidade do evento $\{G_{\tau+\Delta} = uG_\tau\}$ condicionado em todas as informações disponíveis em tempo τ (isto é, em particular, sobre o conhecimento do valor tomado por G_τ), é dada por

$$q = \frac{(1+r)^{\Delta} - d}{u - d},$$

considerando que

$$1-q=\frac{u-(1+r)^{\Delta}}{u-d}$$

representa a probabilidade risk-neutral (condicionado), $\{G_{\tau+\Delta}=dG_{\tau}\}$. Observamos que, a fim de evitar oportunidades de arbitragem, temos que fixar σ de tal forma que $d<(1+r)^{\Delta}<u$, o que implica um valor estritamente positivo, tanto para q e $1-q$.

Além disso, as taxas de regulação da prestação g_t, $t=1, 2, ..., T-1$, são independentes e identicamente distribuídas e podem ter $N+1$ valores possíveis, dada por

$$\gamma_j=u^{N-j}d^{j}-1, \quad j=0, 1, ..., N$$

com probabilidade (risco-neutro)

$$Q_j\binom{N}{j}q^{N-j}(1-q)^{j}, \quad j=0, 1, ..., N. \tag{5.15}$$

Além disso, as taxas de regulação da prestação, δ_t, $t=1, 2, ..., T-1$ são independentes e identicamente distribuídas, e podem ter $n+1$ valores possíveis, dada por

$$u_j=\frac{\eta\gamma-i}{1+i}, \quad j=0, 1, ..., n-1$$

com probabilidade Q_j, e 0, com probabilidade $1-\sum_{j=0}^{n-1}Q_j$. Onde

$$n=\left[\frac{N}{2}+1-\frac{ln(1+i/\eta)}{2ln(u)}\right], \tag{5.16}$$

com $[y]$ a parte inteira de um número real y, representa o número mínimo de "baixos" de tal forma que uma opção de compra sobre a taxa de retorno sobre a carteira de referência num determinado ano, com preço de exercício i/η não expira in-the-money.

5.4.3 Valor do contrato e as suas componentes

Com base nos pressupostos descritos anteriormente e em particular, tendo em conta que todas as probabilidades introduzidas até agora são de risco-neutro e que a incerteza de mortalidade é independente da financeira, o justo valor do estilo europeu de componentes do contrato pode ser computado em duas etapas distintas: na primeira fase o valor do mercado no momento 0 do benefício devido no momento t em caso de morte do segurado durante o ano t do contrato é computado para todos $t=1, 2, ..., T-1$, juntamente com o valor de mercado da prestação devida ao vencimento T; na segunda fase, todos estes valores são a média com as probabilidades de pagamento em cada data possível. Recordamos que, para $t=1,\ 2,\ ...,\ T-1$, estas probabilidades são dadas por ${}_{t-1|}q_x$, enquanto que a probabilidade de que o benefício é devido no vencimento T é dado por ${}_{T-1|}q_x + {}_T p_x = {}_{T-1|}p_x$.

O valor justo da base do contrato: U^B. Relembrando que temos chamado de contrato base uma política de seguro dotal com benefício C_1 (sem lucros e sem a opção de entrega), temos

$$U^B = C_1 A^{(r)}_{x:\overline{T|}} = C_1 \left[\sum_{t-1}^{T-1} (1+r)^{-t}\ {}_{t-1|}q_x + (1+r)^{-T}\ {}_{T-1|}p_x \right].$$

O justo valor do contrato com participação nos resultados: U^P. Para calcular este valor precisamos, em primeiro lugar, de calcular o preço de mercado no momento 0 do benefício C_t, devido ao tempo $t=1,\ 2,\ ...,\ T$. Designamos este preço por $\pi(\mathrm{C_t})$. Considerando

$$\pi(\mathrm{C}_1) = C_1(1+r)^{-1},$$

para $t>1$

$$\pi(\mathrm{C_t}) = E^Q\left[(1+r)^{-t} C_t\right],$$

onde E^Q denota a expectativa tomada com respeito à medida risk-neutral. Recordando a relação (5.13) e explorando a independência estocástica de $g_k,\ k=1,\ 2,\ ...,\ T-1,$ temos em primeiro lugar

$$\pi(C_t) = C_1(1+r)^{-t} \prod_{k=1}^{t-1} E^Q\left[1+\delta_k\right].$$

Então, levando em conta que $\delta_k,\ k=1,\ 2,\ ...,\ T-1,$ também são identicamente distribuídos, temos

$$\pi(C_t) = C_1(1+r)^{-t}(1+u)^{t-1} = \frac{C_1}{1+u}\left(\frac{1+r}{1+u}\right)^{-t}, \quad t=2,\ 3,\ ...,\ T,$$

onde

$$u = E^Q\left[\delta_k\right] = \sum_{j=0}^{n-1} u_j Q_j, \quad k=1,\ 2,\ ...,\ T-1,$$

com Q_j, u_j, e n definidas nas relações (5.15) a (5.16).

Observa-se que

$$\frac{u(1+i)}{\eta(1+r)} = \frac{1+i}{\eta} E^Q\left[(1+r)^{-1}\delta_k\right] = E^Q\left[(1+r)^{-1} max\left\{g_k - \frac{i}{\eta}, 0\right\}\right]$$

representa o preço de mercado, no início de cada ano do contrato, de uma opção de compra europeia sobre a taxa de retorno sobre a carteira de referência, com vencimento no final do ano e preço de exercício i/η.

Finalmente, o justo valor U^P é dado por:

$$U^p = \sum_{t=1}^{T-1} \pi\left(C_t\right)_{t-1}\big|q_x + \pi\left(C_T\right)_{T-1}\big|p_x = \frac{C_1}{1+u} A^{\lambda}_{x:T\urcorner}$$

onde

$$\lambda = \frac{r-u}{1+u} \text{ e } A^{\lambda}_{x:T\urcorner} = \sum_{t=1}^{T-1} (1+\lambda)^{-t}\ {}_{t-1}\big|q_x + (1+\lambda)^{-r}\ {}_{T-1}\big|p_x \,.$$

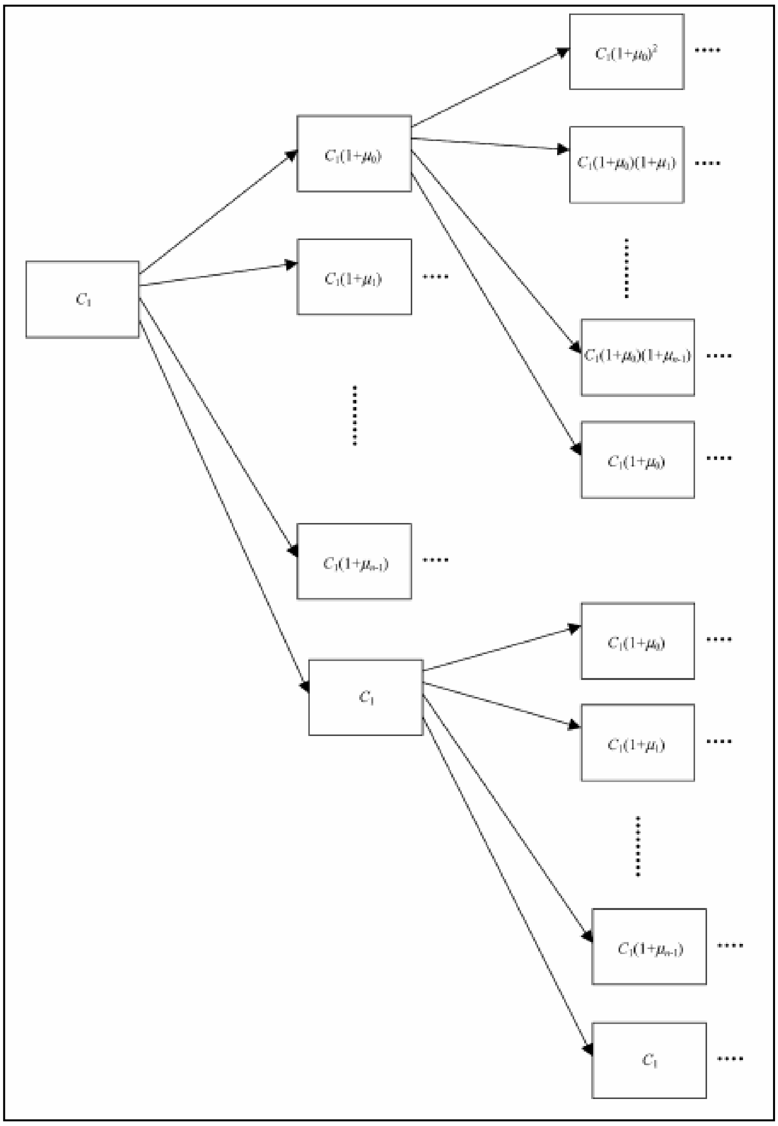
O justo valor da opção de participação: B. O valor desta opção é simplesmente dado pela diferença entre U^P e U^B:

$$B = U^P - U^B = C_1 \left\{ \sum_{t-2}^{T-1} (1+r)^{-t} \left[(1+u)^{t-1} - 1 \right]_{t-1}\big| q_x + (1+r)^{-T} \left[(1+u)^{T-1} \right]_{T-1}\big| p_x \right\}.$$

O justo valor da totalidade do contrato: U^T. Sob os nossos pressupostos, a evolução estocástica do benefício $\{C_t,\ t=1,\ 2,\ ...,\ T\}$ pode ser representado por meio de uma árvore nominal $(n+1)$. Na raiz dessa árvore que representa o C_1 prestação inicial, em cada nó da árvore tem $n+1$ ramos que conectá-lo ao $n+1$ nós seguintes (ver Figura 11). Nos nós, no tempo t que representam os possíveis valores de C_{t+1}. As trajectórias possíveis que o processo estocástico do benefício pode acompanhar em tempo 0, ao tempo t $(t=1,\ 2,\ ...,\ T-1)$ são $(n+1)^t$, mas nem todas essas trajectórias levam a diferentes nós. A árvore é, na realidade, recombinar os diferentes nós no tempo t, é $\binom{n+t}{n}$.

Na mesma árvore que também pode representar o resgate em dinheiro, os valores definidos na função (5.14), o preço justo de todo o contrato e um preço de manutenção que vamos definir imediatamente. Os dois últimos preços podem ser computados por meio de um procedimento operacional recursivo do momento $T-1$ ao momento 0. Em particular, em cada etapa e no nó do preço justo de todo o contrato é dado pelo máximo entre o valor de resgate em dinheiro e o preço de manutenção.

Figura 11 – Evolução estocástica do benefício



Designamos, em primeiro lugar por $\{V_t,\ t=0,\ 1,\ ...,\ T-1\}$ e $\{W_t,\ t=0,\ 1,\ ...,\ T-1\}$, os processos estocásticos compostos pelo valor justo de todo o contrato e os valores de manutenção, respectivamente, no início de $(n+1)$ ano do contrato (no tempo t) e deixamos $U^T = V_0$. Em seguida, observando que em cada nó no tempo $T-1$ (se o tomador está vivo), o valor de continuação é dado por

$$W_{T-1} = (1+r)^{-1} C_T$$

pois em caso de continuação do benefício C_T é devido com certeza, no tempo T, temos

$$V_{T-1} = max\{W_{T-1},\ R_{T-1}\}.$$

Agora vamos supor que, no momento $t < T - 1$, o tomador ainda está vivo e em benefício atingiu um determinado nó da árvore, designado por k. A fim de capturar a ligação entre os valores em tempo t e valores no tempo $t+1$, denotamos por C_{t+1}^{k}, R_t^k, V_t^k e W_t^k o benefício, o valor de resgate em dinheiro, o preço justo de todo o contrato e o preço de manutenção no tempo t no nó k respectivamente e por $V_{t+1}^{k(j)}$, $W_{t+1}^{k(j)}$, $j = 0, 1, ..., n$, o valor justo de todo o contrato e o valor de continuação no tempo $t+1$ em cada nó seguinte k respectivamente. Em mais detalhe, $V_{t+1}^{k(j)}$ ($W_{t+1}^{k(j)}$ respectivamente), $j = 0, 1, ..., n-1$ representam o valor quando $\delta_{t+1} = u_j$ (com probabilidade de risco-neutro Q_j), enquanto $V_{t+1}^{k(n)} \left(W_{t+1}^{k(n)} \right)$ representa o valor correspondente a $\delta_{t+1} = 0$ (com probabilidade $1 - \sum_{j=0}^{n-1} Q_j$) (ver Figura 12).

Observamos que, no nó k a continuidade do contrato para receber, no momento $t+1$, o benefício C_{t+1}^{k} se o tomador morrer dentro de 1 ano, ou para ter direito a um contrato cujo valor total aleatório (incluindo a opção de entregá-lo no futuro) é igual a V_{t+1} se o tomador sobreviver. O valor de continuação no tempo t (no nó k) é então dado pelo risco-neutro condicional deste pagamento, descontado por 1 ano com a taxa de juro livre de risco

$$W_t^k = (1+r)^{-1} \left\{ q_{x+t} C_{t+1}^{k} + p_{x+t} \left[\sum_{j=0}^{n-1} V_{t+1}^{k(j)} Q_j + V_{t+1}^{k(n)} \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} Q_j \right) \right] \right\}, \quad t = 0, 1, ..., T-2.$$

onde q_{x+t} designa a probabilidade de que o tomador, vive até ao tempo t, morre dentro de 1 ano e $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$.

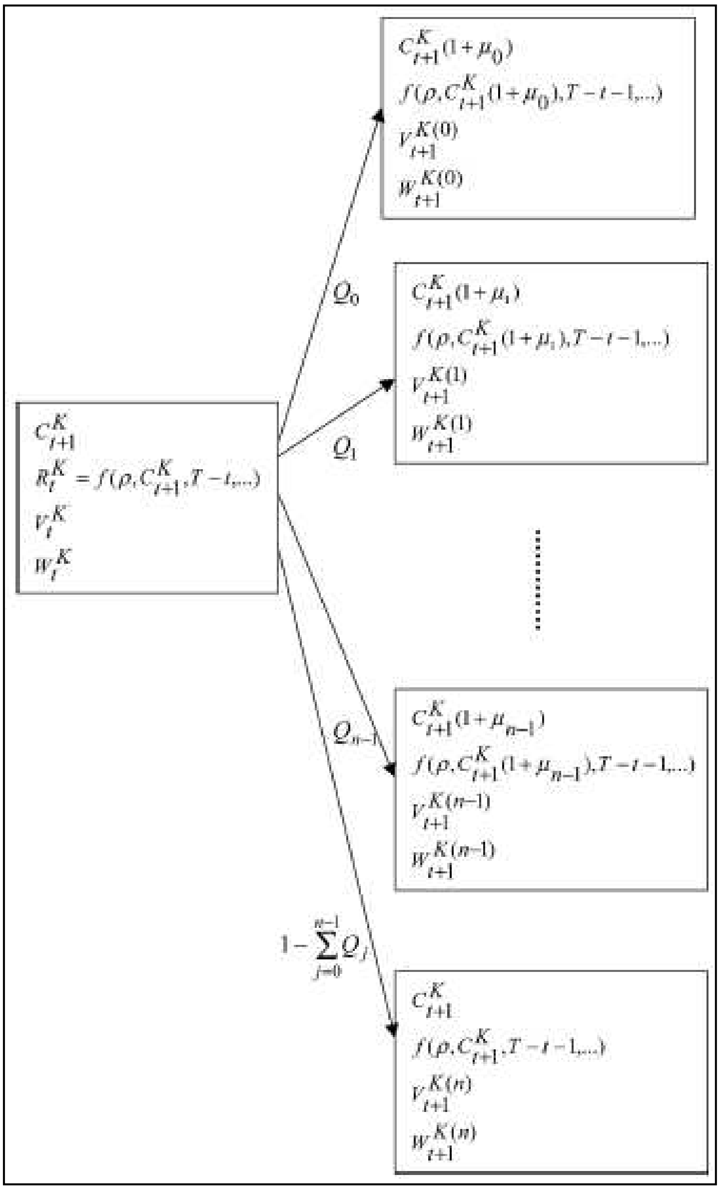
Para terminar, temos então

$$V_t^k = max\left\{ W_t^k, R_t^k \right\}, \quad t = 0, 1, ..., T-2 .$$

O justo valor da opção de entrega: S. O preço justo no momento 0, a opção de entrega é determinado pela diferença entre U^T e U^p,

$$S = U^T - U^p .$$

Figura 12 – Relação entre valores no tempo t e valores no tempo $t+1$



5.5 Modelo de avaliação de uma politica de investimento na venda de contratos de seguros

- **Estrutura da apólice**

O problema da avaliação dos preços da opção tem uma longa história que data do trabalho de Bachelier (1900), que assumiu que os preços das acções seguem um movimento Browniano e teve continuidade nos trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973). Em particular, suponha que o preço da acção segue um processo de Gauss-Wiener e que a distribuição de probabilidade dos preços das acções possíveis no final de um intervalo finito é log-normal.

Black e Scholes mostraram que é possível formar uma carteira combinando uma opção e o activo subjacente de modo que a taxa de retorno da carteira seja não-estocástica ou sem risco. Em seguida, usa o princípio de arbitragem para derivar uma equação diferencial parcial que rege o preço da opção. As características económicas do problema fornecem as condições terminais e determinam a solução da equação. A fórmula final contém apenas variáveis observáveis e isso significa que o modelo pode ser testado empiricamente. Em consequência da fórmula base de Black e Scholes a abordagem desenvolvida por Merton é utilizada. É conveniente usar a seguinte notação:

S – representa o preço das acções que não pagam dividendos no tempo t
(Esta quota será chamada a carteira de referência.);

r – representa o risco instantâneo da taxa de juro livre (assumida constante);

W – o valor de equilíbrio de uma opção de compra sobre a carteira de referência;

T – tempo de maturidade. Note-se que $dT = -dt$;

E – o preço de exercício da opção;

u – taxa instantânea esperada de retorno da carteira de referência;

σ^2 – a variância instantânea da taxa de retorno sobre a carteira de referência.

Supõe-se que a taxa instantânea de retorno sobre a carteira de referência pode ser expressa como a soma das duas componentes, como se segue

$$\frac{dS}{S} = udt + \sigma dz \tag{5.17}$$

onde dz representa um processo de Wiener Gaussiano com média zero e variância dt (durante o período infinitesimal dt). A primeira componente do rendimento é deterministica e representa a tendência. A segunda componente é estocástica. A equação (5.17) implica que o valor da carteira de referência em qualquer momento futuro no tempo segue uma distribuição log-normal, uma distribuição que tem suporte empírico importante neste contexto. A equação (5.17) é uma equação diferencial estocástica, uma vez que envolve um processo de Wiener.

Supondo que o preço da opção W é uma função das variáveis S e T , então a equação diferencial estocástica para W é dada por

$$dW = \frac{\partial W}{\partial S} dS + \frac{\partial W}{\partial T} dT + 1/2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} (dS)^2 \tag{5.18}$$

onde

$$\left(dS\right)^2 = \sigma^2 S^2 dt \,. \tag{5.19}$$

O último termo do lado direito da equação (5.18) surge devido à natureza estocástica de S. A equação (5.18) resulta de um teorema fundamental do cálculo estocástico conhecido como Lema de Itô's. Substituindo (5.19) e (5.17) em (5.18) obtém-se

$$\frac{dW}{W} = \beta dt + \gamma dz \tag{5.20}$$

onde

$$\beta = \frac{1}{W}\left[uS\frac{\partial W}{\partial S} + 1/2\ \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - \frac{\partial W}{\partial T} \right] \tag{5.21}$$

e

$$\gamma = \frac{\sigma S}{W}\frac{\partial W}{\partial S}\,. \tag{5.22}$$

O facto de que a equação diferencial estocástica (5.20) para a taxa de retorno sobre a opção tem o mesmo processo estocástico, dz, (processo de Wiener padrão) como a equação diferencial estocástica para a taxa de retorno sobre o fornecimento que permite a formação de uma cobertura envolvendo a carteira de acções, a opção e o activo livre de risco, de forma que elimina a componente estocástica do retorno. Permite:

$a_1 =$ montante instantâneo investido na cobertura;

$a_2 =$ quantidade instantânea investido na opção;

$a_3 =$quantidade instantânea investido no activo livre de risco.

A condição para o investimento líquido é zero

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0\,. \tag{5.23}$$

O retorno instantâneo numa carteira, dy, é dada por

$$dy = a_1\frac{dS}{S} + a_2\frac{dW}{W} + a_3 r dt\,.$$

Usando (5.17) (5.20) e (5.23) este retorno se torna

$$\begin{aligned} dy &= a_1\left(udt + \sigma dz\right) + a_2\left(\beta dt + \gamma dz\right) - \left(a_1 + a_2\right) rdt \\ &= \left[a_1\left(u - r\right) + a_2\left(\beta - r\right)\right] dt + \left[a_1\sigma + a_2\gamma\right] dz \end{aligned}\,. \tag{5.24}$$

Para eliminar o coeficiente de dz

$$a_1\sigma + a_2\gamma = 0\,. \tag{5.25}$$

Neste caso, como a posição coberta terá sido formado, o retorno sobre a posição é livre de risco. Nota-se que a equação (5.25) dá a relação entre os montantes investidos em acções e a opção de criar a posição coberta. Como o investimento total da carteira é igual a zero, o retorno sobre a carteira deve ser zero no equilíbrio não arbitragem ou lucros sem riscos podem ser feitas. Essa observação implica que o coeficiente de dt em (5.24) é zero:

$$\mathrm{a}_1(u-r)+a_2(\beta-r)=0 \tag{5.26}$$

e assim, combinando (5.25) e (5.26),

$$\frac{u-r}{\beta-r}=\frac{\sigma}{\gamma}.$$

Utilizando os valores de β e γ de (5.21) e (5.22) dá a seguinte equação para W

$$1/2\,\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}+rS\frac{\partial W}{\partial S}-\frac{\partial W}{\partial T}-rW=0. \tag{5.27}$$

Para resolver esta equação é necessário especificar as condições terminais. Agora, na data de vencimento o valor da opção de compra será zero se S for inferior a E e $(S-E)$ se S é maior que E. Matematicamente

$$W(S,\ 0)=max[0,\ S-E] \tag{5.28}$$

proporcionando assim a primeira condição. A segunda é obtida observando que o valor da opção é zero se o valor do preço da acção é igual a zero, dando

$$W(0,\ T)=0. \tag{5.29}$$

A solução para (5.27) sujeito a estas condições de contorno é

$$W(S,\ T)=SN(d_1)-Ee^{-rT}N(d_2)$$

onde

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(log(S/E)+\left(r+1/2\sigma^2\right)T\right)/\sigma\sqrt{T} \\ d_2 &= d_1-\sigma\sqrt{T} \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-y^2/2}\,dy \end{aligned} \tag{5.30}$$

a distribuição cumulativa é normal.

Esta solução tem uma série de características interessantes. O valor de W é dado como uma função exacta de análise de variáveis que são conhecidas $(S,\ T,\ \mathrm{r},\ E)$ ou mensuráveis (σ^2). Por conseguinte, pode ser testada empiricamente por Black e Scholes, de facto, realizados alguns testes relativamente bem sucedido deste modelo. É significativo que a taxa de retorno esperada da carteira de referência não aparece no (5.30). Contudo, como o valor da opção é uma função de S o retorno realizado com a opção vai depender do retorno realizado na Bolsa de Valores.

O valor de uma opção de venda, das acções por um preço fixo E preço de exercício no final do tempo T, pode ser derivado da equação (5.30). Considere um investidor com um contrato que se compromete a pagar-lhe os maiores valores de S e E na maturidade. Este contrato pode ser avaliado de duas maneiras: primeiro como uma opção de compra mais o valor descontado de E:

$$W(S,\ T)+Ee^{-rT}.$$

Em segundo lugar, pode ser visto como a combinação de acções e uma opção de venda $P(S,\ T)$:

$$S+P(S+T).$$

Igualando estas duas expressões e invocando a equação (5.30) os rendimentos

$$P(S,\ T)=-SN(-d_1)+Ee^{-rT}N(-d_2).$$

Uma limitação do modelo anterior é que considera a inexistência de dividendos, quando a maioria das acções pagam dividendos. Merton ampliou o modelo para lidar com o problema quando as acções pagam dividendos. Assumindo que a acção paga dividendos contínuamente $D(S,\ T)$, por unidade de tempo, a seguinte equação diferencial para o valor da opção de compra pode ser derivada

$$1/2\frac{\partial^2 W}{\partial S}+(rS-D)\frac{\partial W}{\partial S}-\frac{\partial W}{\partial T}-rW=0 \qquad (5.31)$$

sujeita às condições terminais (5.28) e (5.29).

Apenas para algumas formas funcionais irrealistas de D existem soluções exactas de (5.31). No entanto Schwartz desenvolveu um procedimento numérico para resolver esta equação para qualquer função $D(S,\ T)$.

5.6 Modelo de avaliação simples para o passivo de uma seguradora

5.6.1 Estrutura da apólice

- **Modelo de um seguro de vida de uma empresa com contratos de participação**

O objectivo é criar um modelo de avaliação simples para o passivo de uma empresa de seguros de vida, incluindo as opções implícitas. Suponha-se que no momento $t=0$, a companhia adquire uma carteira de activos A e o montante desta carteira é pago com os prémios, P_0, recebe de um tomador de seguro o capital, E_0, como está ilustrado no balanço da empresa na Tabela 4. Em resultado do pagamento do prémio único, o tomador tem direito a uma prestação fixa garantida, juntamente com o chamado bónus de reversão que é adicionado periodicamente e uma segunda componente variável, que é baseada no saldo final auferido pela companhia de seguros. Descrevemos o pagamento garantido e o bónus de reversão como sendo a política de reserva de P, enquanto a segunda variável representa o bónus terminal chamado, R.

Tabela 4 – Folha de balanço para a apólice

	Activos	Passivos	
Tempo 0	A_0	$L_0 = P_0 = \theta A_0$ $E_0 = (1-\theta) A_0$	prémio único capital
Tempo t	A_0 $A(t)$	A_0 $L(t)$ $E(t)$	tomador de crédito capital
	$A(t)$	$A(t)$	

As três componentes são pagas no vencimento ou antes da morte do segurado. Dependendo das políticas, os elementos das três componentes podem ser pagos se o tomador renunciar à política, antes do vencimento. Nesta análise, podemos ignorar tanto o risco de renda e de mortalidade.

Uma inspecção dos blocos de construção desta apólice revela que podemos considerar esses contratos como uma sequência de opções implícitas sobre a carteira de activos A (que a partir de agora, chamaremos de referência). Considere um mercado competitivo com negociação contínua, e assuma que o mercado é perfeito. Em tal contexto, vamos designar:

A – a carteira de referência de apoio à apólice, assumindo-se que o seu valor segue o tradicional movimento geométrico Browniano:

$$dA(t) = rA(t)\,dt + \sigma A(t)\,d\hat{W}(t)$$

sob a medida de probabilidade risk-neutral $\hat{P}$, onde R^+ é a taxa de juro livre de risco e $\sigma \in R^+$ é a volatilidade da carteira;

θ – a proporção da carteira de referência inicial financiada pelo tomador do seguro, de modo que $(1-\theta)$ é a proporção da carteira financiada pelo detentor do capital próprio, daí θ é um parâmetro de fixação de custos. Como vamos notar mais tarde θ pode também ser interpretado como a alavancagem da empresa, ou um parâmetro que rege a distribuição do tomador financeiro e detentor do capital próprio;

r_G – taxa fixa garantida;

β – taxa de participação do segurado nos retornos gerados pela carteira de referência;

$r_P(t)$ – taxa de juros creditados na conta do segurado, incluindo tanto o benefício garantido e o bónus de reversão;

γ – taxa de prémio terminal (taxa de participação da empresa na data de vencimento);

T – data de vencimento do contrato.

Passamos agora a considerar o contrato de participação em mais detalhe. O segurado entra no contrato inicial, pagando um prémio único $P_0 = \theta A_0$, onde A_0 é o valor inicial da carteira de referência. Em contrapartida, o tomador recebe um benefício, P, que se acumula à taxa $r_P(t)$, para que

$$\begin{aligned} &P(t) = P(t-1)\big(1+r_P(t)\big) \quad t = 1, 2, \ldots, T \\ &P(0) = P_0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Como a taxa de bónus reversível é geralmente determinada por um ajuste de nivelamento para a taxa de retorno sobre a carteira da política de referência, considera-se um regulamento da acumulação da reserva para a política com base na média aritmética dos últimos τ anos de retorno à carteira A, de modo que

$$\begin{aligned} &r_P(t) = max\left\{r_G, \frac{\beta}{n}\left(\frac{A(t)}{A(t-1)} + \ldots + \frac{A(t-n+1)}{A(t-1)} - n\right)\right\} \\ &n = min(t, \tau) \end{aligned} \tag{5.33}$$

onde τ é a duração do período de referência (considerado como sendo 3 anos) . Assim, a taxa creditada na conta da apólice é o maior valor entre a taxa garantida, r_G, e a média aritmética dos últimos retornos de período τ sobre a carteira de referência, multiplicada por β a taxa de participação nos resultados.

Na data do crédito do contrato, um prémio terminal também é pago com base no saldo final auferido pela companhia de seguros, o que é definido como $\gamma R(T)$, onde

$$R(T) = \big(\theta A(T) - P(T)\big)^{+}.$$

Se na maturidade, a companhia de seguros não é capaz de pagar a conta do segurado, $P(T)$, em seguida, o tomador tem os recursos que estão disponíveis, enquanto os detentores de capital próprio têm responsabilidade limitada.

5.6.2 Condição de equilibro para a avaliação

Dadas as especificações do contrato descrito anteriormente, voltamos agora à questão para determinar o valor da apólice de seguro de vida do mercado de forma consistente, e de tal modo que as contribuições das partes interessadas da companhia de seguros de vida (ou seja, o prémio P_0 pago pelo tomador do seguro, e o capital próprio E_0 fornecido pelos detentores) sejam justos no que diz respeito ao valor dos benefícios que autorizam os interessados a receber. O "justo", significa que essas contribuições não deixam espaço para que surjam oportunidades de arbitragem, por outras palavras, o tomador recebe o valor do dinheiro pago na forma do prémio real, mas ao mesmo tempo, a seguradora não oferece os benefícios muito mais baratos, comprometendo desse modo a posição dos detentores de capital próprio.

Estas considerações implicam que os dois lados do contrato, ou seja, o tomador e os detentores de capital próprio, precisam ser consideradas simultaneamente para o mercado estar em equilíbrio. Esta secção analisa a estrutura das pretensões do segurado e dos detentores de capital próprio implícito na especificação da apólice de participação descritos na secção "Modelo de um seguro de vida empresa com contratos de participação" (em especial as equações (5.32) e (5.33)), começando com a especificação da responsabilidade da empresa para o tomador do seguro.

Com base no modelo introduzido anteriormente, referindo em especial na Tabela 4, podemos considerar o retorno total que o segurado tem direito a receber no vencimento do contrato. Esta é a responsabilidade, L, da companhia de seguros na maturidade, que pode ser descrita como segue:

$$L(T)=\begin{cases} A(\mathrm{T}) & \text{if } A(T)<P(T) \\ P(T) & \text{if } P(T)<A(T)<\dfrac{P(T)}{\theta} \\ P(T)+\gamma R(T) & \text{if } A(T)>\dfrac{P(T)}{\theta} \end{cases}.$$

De uma forma mais compacta, podemos escrever como:

$$L(T) = P(T) + \gamma R(T) - D(T),$$

onde

$$D(T) = \left(P(T) - A(T)\right)^+$$

representa o payoff da opção padrão.

Aplicando avaliação risk-neutral, segue-se que o prémio a ser cobrado ao tomador do seguro deve satisfazer a seguinte condição, a fim de ser justo, isto é, a fim de eliminar todas as oportunidades de arbitragem do mercado:

$$P_0 = e^{-rT}\hat{E}\left[P(T) + \gamma R(T) - D(T)\right], \tag{5.34}$$

onde $\hat{E}$ denota o valor esperado no âmbito da medida de probabilidade risk-neutral $\hat{P}$. Alternativamente

$$P_0 = e^{-rT}\hat{E}\left[P(T)\right] + \gamma e^{-rT}\hat{E}\left[R(T)\right] - e^{-rT}\hat{E}\left[D(T)\right],$$

que podemos escrever como

$$P_0 = V_P(0) + \gamma V_R(0) - V_D(0). \tag{5.35}$$

Como demonstrado na Tabela 4, os detentores de capital próprio na maturidade podem reivindicar

$$L(T) = \begin{cases} 0 & \text{if } A(T) < P(T) \\ A(T) - P(T) & \text{if } P(T) < A(T) < \dfrac{P(T)}{\theta} \\ A(T) - P(T) + \gamma R(T) & \text{if } A(T) > \dfrac{P(T)}{\theta} \end{cases}$$

ou

$$E(T) = \left(A(T) - P(T)\right)^+ - \gamma R(T).$$

Isto implica que a contribuição justa para o capital da empresa deve satisfazer o seguinte:

$$\begin{aligned} E_0 &= e^{-rT}\hat{E}\left[\left(A(T) - P(T)\right)^+ - \gamma R(T)\right] \\ &= e^{-rT}\hat{E}\left[\left(A(T) - P(T)\right)^+\right] - \gamma R(0) \end{aligned}.$$

Note-se que

$$P(T) - D(T) = A(T) - \left(A(T) - P(T)\right)^+.$$

Por isso,

$$E_0 = e^{-rT}\hat{E}\left[A(T) - P(T) + D(T)\right] - \gamma V_R(0). \tag{5.36}$$

Daqui resulta que

$$(1-\theta)A(0)=E_0=e^{-rT}\hat{E}\left[A(T)-P(T)+D(T)\right]-\gamma V_R(0),$$

e, portanto,

$$P_0=e^{-rT}\hat{E}\left[P(T)+D(T)\right]+\gamma V_R(0).$$

Por outras palavras, é suficiente que a equação (5.34) seja satisfeita pela apólice para que o contrato seja justo para tomadores e detentores de capital próprio.

A opção padrão

Anteriormente, apresentamos a opção padrão com retorno

$$D(T)=\left(P(T)-A(T)\right)^{+},$$

cujo valor não arbitragem é dada por:

$$V_D(0)=e^{-rT}\hat{E}\left[\left(P(T)-A(T)\right)^{+}\right], \tag{5.37}$$

onde $\hat{E}$ representa o valor esperado sob a medida de probabilidade risk-neutral $\hat{P}$.

O valor V_D da opção padrão pode ser considerado o preço de um contrato de seguros que cobre o evento de incumprimento. As equações (5.34) e (5.36) mostram que este prémio deverá ser financiado pelo detentores de capital próprio, e não a cargo do segurado.

A equação (5.37) mostra também que os parâmetros que afectam o valor da opção padrão, V_D, são os parâmetros do contrato $(\theta,\ r_G,\ \beta,\ \tau)$, na medida em que estes parâmetros afectam a reserva matemática, P, e os parâmetros de mercado (σ, r). Dada a estrutura do contrato, o efeito dos parâmetros do mercado é parcialmente moderado pela duração do período de compensação, τ, a taxa de participação, β, mas principalmente pelo parâmetro θ. Como mencionado anteriormente, θ determina a atribuição do prémio entre as duas partes envolvidas, o tomador e os detentores de capital próprio, neste sentido, poderia ser considerado um coeficiente de distribuição de riqueza. Por outro lado, θ também determina o tamanho da dívida da companhia. A contribuição proveniente do tomador pode ser considerada como um empréstimo de longo prazo, em que a empresa paga juros por crédito cada ano, à taxa $r_P(t)$ para a reserva matemática. Quanto maior o tamanho do empréstimo, mais recursos a empresa tem disponível para financiar suas estratégias de investimento. No entanto, um grande empréstimo também significa que mais juros têm de ser pagos no vencimento. Isto implica uma maior probabilidade de inadimplência. Neste sentido, o parâmetro θ pode ser considerado um coeficiente de alavancagem.

Essas considerações sugerem que o valor da opção padrão, V_D, capta o grau de risco do contrato, tanto em termos de risco de mercado e risco de crédito. Pelo risco de mercado, entende-se o risco decorrente da possibilidade de que as variáveis do mercado vão se mover de tal maneira que o valor de um contrato com a instituição financeira, ou seja, a companhia de seguros, torna-se negativa. Ao risco de crédito, em vez disso, entende-se o risco de que a perda será experimentada (pelo tomador do seguro) por causa de um default da contraparte (a empresa de seguros de vida) em derivados (a sequência de opções implícitas na política) da transacção.

Uma análise mais aprofundada das componentes da política

Equação (5.32) segue-se que a reserva da política pode ser expressa como

$$\begin{aligned} P(T) &= P_0 \prod_{t=1}^{T} \left(1 + r_P(t)\right) \\ &= \theta A_0 \prod_{t=1}^{T} \left(1 + r_P(t)\right) = \theta P^U(T), \end{aligned} \tag{5.38}$$

onde $P^U(T)$ é o "alavancado" da reserva política. Por analogia, se $R^U(T)$ denota o "alavancado" bónus terminal, então

$$\begin{aligned} R(T) &= \left(\theta A(T) - P(T)\right)^+ \\ &= \left(\theta A(T) - \theta A_0 \prod_{t=1}^{T} \left(1 + r_P(t)\right)\right)^+ = \theta\left(A(T) - P^U(T)\right)^+ \\ &= \theta R^U(T) \end{aligned}$$

enquanto o retorno da opção padrão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} D(T) &= \left(P(T) - A(T)\right)^+ \\ &= \left(\theta A_0 \prod_{t=1}^{T} \left(1 + r_P(t)\right) - A(T)\right)^+ \\ &= \theta\left(P^U(T) - \frac{A(T)}{\theta}\right)^+. \end{aligned} \tag{5.39}$$

As três equações do payoff (5.38) e (5.39) mostram que a adição do recurso da alavancagem do modelo afecta a estrutura da opção padrão, enquanto a reserva para a política, os bónus do terminal não são afectados, como o coeficiente de alavancagem, que actua apenas como um factor de redimensionamento.

Isto implica que a condição de equilíbrio (5.35) pode ser reescrita como:

$$P_0 = e^{-rT}\hat{E}\left[P(T)\right] + \gamma e^{-rT}\hat{E}\left[R(T)\right] - e^{-rT}\hat{E}\left[D(T)\right]$$
$$= \theta e^{-rT}\hat{E}\left[P^U(T)\right] + \gamma\theta e^{-rT}\hat{E}\left[R^U(T)\right] - \theta e^{-rT}\hat{E}\left[\left(P^U(T) - \frac{A(T)}{\theta}\right)^+\right]$$
$$= \theta\left[\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{U}}(0) + \gamma\mathrm{V}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{U}}(0) - e^{-rT}\hat{E}\left[\left(P^U(T) - \frac{A(T)}{\theta}\right)^+\right]\right],$$

onde $V_P^U(0)$ é o justo valor do "alavancado" reserva política e $V_R^U(0)$ é o justo valor do "alavancado" bónus terminal.

Daqui resulta que

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{U}}(0) + \gamma\mathrm{V}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{U}}(0) - e^{-rT}\hat{E}\left[\left(P^U(T) - \frac{A(T)}{\theta}\right)^+\right].$$

É claro que os aumentos P_0 como cada um dos $\beta,\ \gamma,\ \theta,$ e r_G aumentam também. Além disso,

$$\gamma = \frac{\mathrm{A}_0 - \mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{U}}(0) + e^{-rT}\hat{E}\left[\left(P^U(T) - \frac{A(T)}{\theta}\right)^+\right]}{\mathrm{V}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{U}}(0)}. \tag{5.40}$$

Observe que, se $\theta = 1$ (de modo que não há nenhuma contribuição dos sócios), então

$$\gamma = \frac{\mathrm{A}_0 - \mathrm{V}_{\mathrm{P}}(0) + e^{-rT}\hat{E}\left[\left(P(T) - A(T)\right)^+\right]}{\mathrm{V}_{\mathrm{R}}(0)} = 1, \tag{5.41}$$

uma vez que, como vimos antes,

$$P(T) - D(T) = A(T) - \left(A(T) - P(T)\right)^+.$$

O resultado expresso na Equação (5.41) pode ser interpretado como um efeito de "distribuição de riqueza" se os tomadores são o único grupo que contribuam para o financiamento da carteira de apoio à política (ou seja, se $\theta = 100$ por cento), eles têm o direito de receber todo o excedente da empresa e, portanto, irão fixar a taxa de prémio terminal no seu valor máximo (cento $\gamma = 100$). O mesmo recurso foi observado num contexto semelhante por Grosen e Jorgensen (2002). A equação (5.40) também mostra que γ aumenta à medida que aumenta θ.

Finalmente, podemos constatar que qualquer acção da seguradora sobre o coeficiente de financiamento, θ, afecta somente a maneira em que o risco financeiro é redistribuído entre as partes interessadas da empresa. À medida que o mercado se torna mais volátil, de facto, a companhia de seguros pode decidir alterar a exposição de novos segurados à maior volatilidade da carteira de referência, alterando o valor do parâmetro θ. Isto pode ser considerado como uma espécie de efeito de substituição de activos que, entretanto, não afecta o grau de risco da carteira de apoio ao contrato participante.

CAPÍTULO 6

Aplicação dos modelos de avaliação de opções implícitas em contratos de seguro do ramo vida

Tal como foi referido no capítulo inicial desta dissertação, esta está organizada em várias grandes secções. A primeira destas secções forneceu uma descrição geral e sucinta sobre contratos de opções, contendo também uma discussão sobre opções implícitas normalmente contidas em contratos de seguros do ramo vida e uma revisão da literatura relevante neste domínio. Foram também, abordadas ainda várias hipóteses para a avaliação de contratos de seguros, recorrendo a rendas probabilísticas em função da duração da vida humana.

Na presente secção, serão analisados os diferentes métodos de avaliação de opções e a sua aplicabilidade neste contexto. Também será realçado o método de recolha de dados, que foram obtidos através de uma companhia de seguros, VICTORIA Seguros de Vida S.A.. No final deste capítulo serão apresentados os resultados numéricos sobre a avaliação dos dados recolhidos.

De seguida, serão definidos os objectivos deste estudo e as hipóteses a considerar nele, tal como será ainda, elaborada uma caracterização do contrato de seguro do ramo vida *"Victoria Garantia Rendimento"* fornecido pela companhia VICTORIA Seguros de Vida S.A.

6.1 Objectivos

- Discutir os modelos de avaliação de opções financeiras implícitas em contratos de seguro do ramo de vida.

- Analisar as vantagens e desvantagens dos modelos com soluções fechadas em comparação com as abordagens baseadas em métodos de simulação, discutindo neste último caso os modelos apropriados para replicar os preços de mercados dos derivados, as fontes de informação para a sua calibragem e o número de cenários a considerar.
- Entender certas particularidades das rendas probabilísticas da vida humana, como por exemplo, a perda da garantia da equação de valor logo após o contrato com a seguradora, o seu desajustamento ao longo do tempo e o aproveitamento desta particularidade para a constituição de reservas.
- Distinguir entre rentabilidade de diferentes seguradoras para o caso de interrupção dum seguro.
- Saber quando deve usar um banco ou uma seguradora para constituir uma renda de reforma ou temporária.
- Ilustrar a complexa interacção de várias opções implícitas em projectos comuns e o impacto no valor do contrato de risco.
- Analisar aspectos relacionados com o valor justo das opções implícitas que têm um impacto substancial, especialmente os de medição e gestão do risco e no impacto dos impostos corporativos.
- Descrever, mais detalhadamente, o contrato, técnicas de avaliação e os principais resultados das análises seleccionados, a fim de ilustrar o impacto de incorporar as opções nas políticas de vida tradicional e ao cálculo do valor justo.

6.2 Caracterização do contrato “Victoria Garantia Rendimento”

O “Victoria Garantia Rendimento” é um produto financeiro que possibilita uma gestão dinâmica do investimento, permitindo valorizar a poupança do tomador sem correr riscos.

Este produto é composto por unidades de participação de um fundo autónomo de investimento, garantindo toda a transparência no acompanhamento da sua aplicação.

As características referentes a este produto são, entre outras, as seguintes:

- **Empresa de seguros**

VICTORIA Seguros de Vida, S.A.. Entidade legalmente autorizada a exercer a actividade seguradora no território português.

- **Duração do contrato**

Estabelecida pelo tomador de seguro.

- **Principais riscos do produto**

O valor da unidade de conta pode variar em função dos activos que compõem o fundo autónomo, estando sujeito à evolução das cotações e da taxa de juro dos activos em que investe. O risco de crédito, cambial e dos mercados accionistas também poderá influenciar a valorização do fundo autónomo.

- **Risco de perda dos montantes investidos**

A VICTORIA garante em qualquer momento os montantes investidos e o rendimento garantido até à data. Apenas existe risco de perda dos montantes investidos em caso de insolvência da companhia de seguros.

- **Garantias, opções e coberturas**

Em caso de morte, vencimento ou resgate (total ou parcial), a VICTORIA garante o maior dos seguintes valores:

a) valor das unidades de participação à data do respectivo processamento;

b) capital garantido acrescido do rendimento garantido capitalizado até à data de processamento.

O pagamento do valor será efectuado por crédito na conta que seja indicada, até 5 dias úteis a contar da data do pedido entrar na VICTORIA tendo por base o valor da unidade de conta do dia do processamento do pagamento, sendo este efectuado a preço desconhecido.

O capital garantido, acrescido do rendimento garantido corresponde à capitalização à taxa de rendimento garantida, dos montantes investidos líquidos de encargos de subscrição e deduzidos de eventuais resgates parciais. A taxa de rendimento garantida em cada ano civil corresponde a 75% da média simples da taxa “Euribor a 12 meses – base 365 dias” do mês de Dezembro do ano anterior.

- **Resgate (total ou parcial)**

Em qualquer altura, o tomador do seguro pode solicitar o resgate total ou parcial do contrato. O valor de resgate corresponde ao maior entre os seguintes valores:

a) valor das unidades de participação à data do respectivo processamento;

b) capital garantido acrescido do rendimento garantido capitalizado até à data de processamento.

Sobre este montante incide o encargo indicado na tabela de penalizações de acordo com a modalidade de seguro subscrita.

Poderão ser efectuados resgates parciais desde que o valor correspondente às unidades de conta não resgatadas seja no mínimo de € 1.000,00. O pagamento do valor será efectuado por crédito na conta que seja indicada, até 5 dias úteis a contar da data do pedido entrar na VICTORIA tendo por base o valor da unidade de conta do dia do processamento do pagamento, sendo este efectuado a preço desconhecido.

- **Resolução (cessação antecipada do contrato de seguro)**

O contrato pode ser resolvido unilateralmente pelo tomador de seguro sem invocar justa causa, nos 30 dias imediatos à data da recepção da apólice. A resolução tem efeitos retroactivos, podendo ser deduzido ao montante investido o custo da apólice de € 25.

- **Modalidades e períodos de pagamento de prémios**

A modalidade “Poupança Crescente” (prémios programados) permite o investimento através de entregas com uma periodicidade pré-definida, podendo em qualquer momento serem entregues prémios adicionais. Na modalidade “Investimento Flexível” (prémio único) o contrato será efectuado através de um investimento único, podendo em qualquer momento serem entregues prémios adicionais.

- **Valorização da componente financeira**

O capital e o rendimento são garantidos em qualquer momento, sujeito a risco de crédito da VICTORIA. O rendimento garantido é capitalizado diariamente à taxa de rendimento garantida. A valorização do Seguro está dependente da evolução do Valor da Unidade de Conta do Fundo Autónomo. Este valor é calculado diariamente dividindo o valor patrimonial do Fundo pelo número de unidades de conta em circulação. O valor de unidade de conta depende da valorização dos activos que compõem o fundo, sendo utilizadas, para efeitos de avaliação, as cotações de fecho para os instrumentos financeiros admitidos à negociação em mercados regulamentados. Nos casos em que tal não seja possível é utilizado o valor justo respectivo.

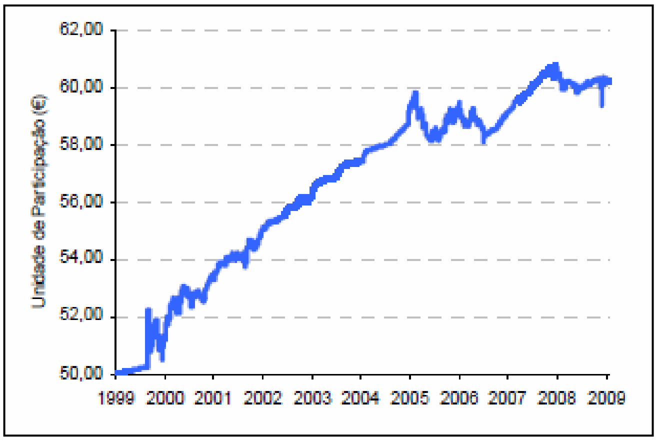
- **Perfil de risco do tomador**

O produto destina-se a investidores conservadores e avessos ao risco, que procurem um instrumento de poupança com vantagens fiscais, rendimento mínimo e capital garantido.

- **Evolução do "Victoria Garantia Rendimento"**

Pode-se observar que na Figura 13, a unidade de participação no início do contrato era de €50 no ano de 1999. Entre os anos 1999 e 2000 existiu um decréscimo e entre 2000 e 2005 sofreu um aumento crescente da unidade de participação, tendo atingido entre estes anos o máximo de €60. De 2005 a 2006 houve uma oscilação tendo ainda neste último ano recuperado e atingido a seu valor máximo no ano de 2008. Entre 2008 e 2009 existiu um ligeiro decréscimo da unidade de participação tendo finalizado no valor de €60.

Figura 13 – Evolução da unidade de conta



Pode se verificar através da Tabela 5 e da Figura 14 que relativamente ao risco, este decresceu entre os anos de 2000 e 2005, tendo existido um acréscimo no ano de 2006. Posteriormente entre 2007 e 2008 existiu uma nova diminuição do risco seguido de um aumento no ano de 2009.

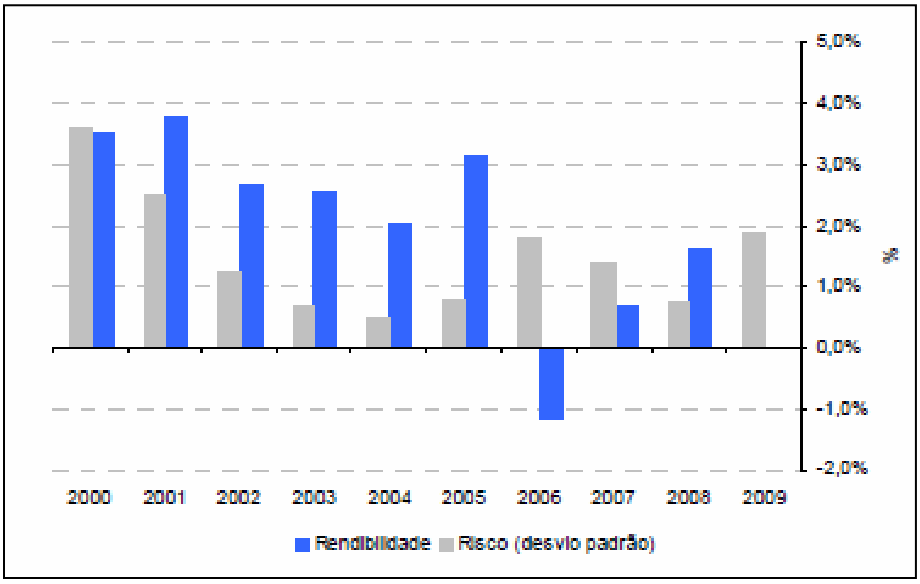
Relativamente à rentabilidade, existiu um ligeiro aumento entre os anos de 2000 e 2001, tendo posteriormente entre 2001 e 2004 existido um decréscimo seguido de um acentuada recuperação no ano de 2005. No ano de 2006 a rentabilidade atingido o valor mínimo e negativo de $-1{,}16\%$ tendo recuperado nos dois anos seguintes. E no ano de 2009 existiu um novo decréscimo tendo a rentabilidade atingido os 0,02%.

Pode-se concluir também, que quanto maior é o risco maior são os ganhos e as perdas.

Tabela 5 – Rentabilidade e risco histórico

Ano	Rendibilidade	Risco (mínimo:1 máximo:6)	Taxa Garantida
2009	0,02%	1 - baixo	2,63%
2008	1,60%	1 - baixo	3,65%
2007	0,68%	1 - baixo	2,98%
2006	-1,16%	2 - médio / baixo	2,12%
2005	3,15%	1 - baixo	1,75%
2004	2,02%	1 - baixo	1,81%
2003	2,55%	1 - baixo	2,18%
2002	2,65%	1 - baixo	2,51%
2001	3,79%	2 - médio / baixo	3,71%
2000	3,53%	2 - médio / baixo	2,91%

Figura 14 – Rentabilidade e risco histórico



- **<u>Regime fiscal (actualizado a 13-05-2010)</u>**

A descrição do regime fiscal apresentado, não dispensa a consulta da legislação em vigor nem constitui garantia de que tal informação se mantenha inalterada. Sobre o rendimento serão aplicadas as seguintes taxas:

Até ao 5º ano: 20%

A partir do 5º ano até ao 8º ano 16% (*)

A partir do 8º ano: 8% (*)

(*) Desde que, na primeira metade do contrato, tenham sido pagos pelo menos 35% dos prémios.

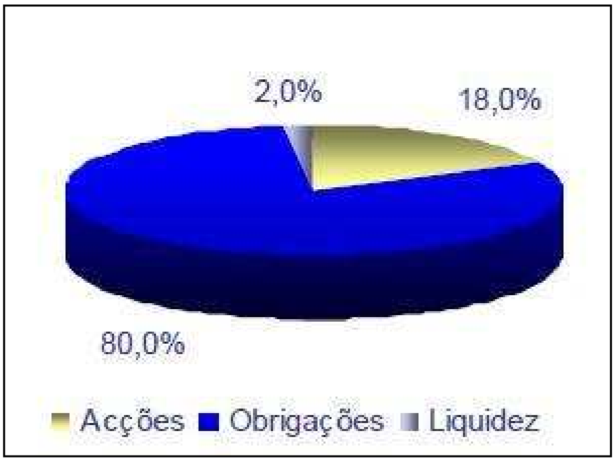
- **Informação relativa ao fundo de investimento (política de investimento)**

O Fundo investe essencialmente no Mercado Obrigacionista, quer em Obrigações de Dívida Pública quer em Obrigações de Empresas. Adicionalmente, prevê-se que apenas 5% do investimento em Obrigações poderá deter uma notação de rating inferior a A-, e que não poderão existir títulos com rating inferior a BBB-. O investimento no mercado accionista será no máximo de 30% do valor do Fundo. O investimento no mercado imobiliário está limitado a 15% do património do Fundo e poderá ser efectuado directamente ou indirectamente através de fundos de investimento imobiliário. O investimento em activos denominados em moedas diferentes de Euro está limitado a 15%. O Fundo poderá investir em instrumentos derivados com objectivo de protecção de capital e rendimento.

A carteira do Fundo é composta por um conjunto diversificado de activos através do qual se procura minimizar a concentração de risco associada a cada um dos mercados individualmente. A qualidade de crédito dos activos em que o Fundo está investido é uma prioridade, não se procurando por esta via a maximização das rendibilidades obtidas.

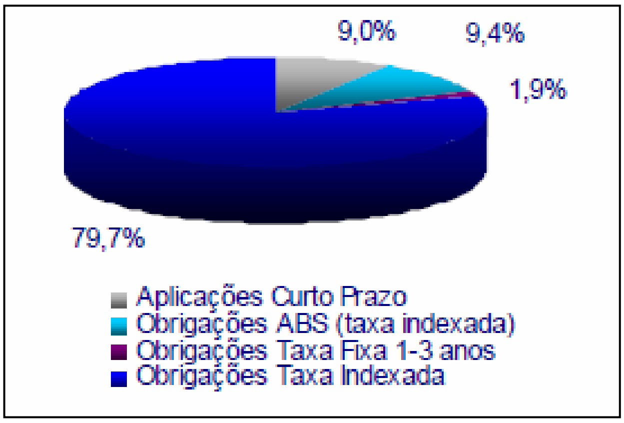
A carteira objectivo do Fundo obedece à composição indicada na Figura 15. Uma vez que a gestão do Fundo é feita de forma activa, poderão pontualmente existir desvios face à carteira objectivo do fundo, procurando por esta via minimizar eventuais riscos de mercado ou, maximizar potenciais retornos.

Figura 15 – Carteira objectivo



A linha orientadora da estratégia de investimento do Fundo, que assenta na minimização de risco dos activos e um objectivo de retorno acima do mercado monetário, continua a ser seguida. O investimento incide preferencialmente em obrigações de rendimento variável (indexado à Euribor), que representavam a 31 de Março 2010 cerca de 89% do valor líquido Fundo (85% em Dez-09) Figura 16.

Figura 16 – Composição da carteira



6.3 Análise estatística

Pode-se observar através da Tabela 6 os valores máximos e os mínimos de vários anos, assim como o valor médio, que tem uma tendência crescente ao longo dos anos. Observa-se também que o desvio padrão do fundo varia entre 0,01584 e 0,65858, não sofrendo grandes oscilações durante os anos.

A média do fundo é de 56,78 e o desvio padrão é de 3,123.

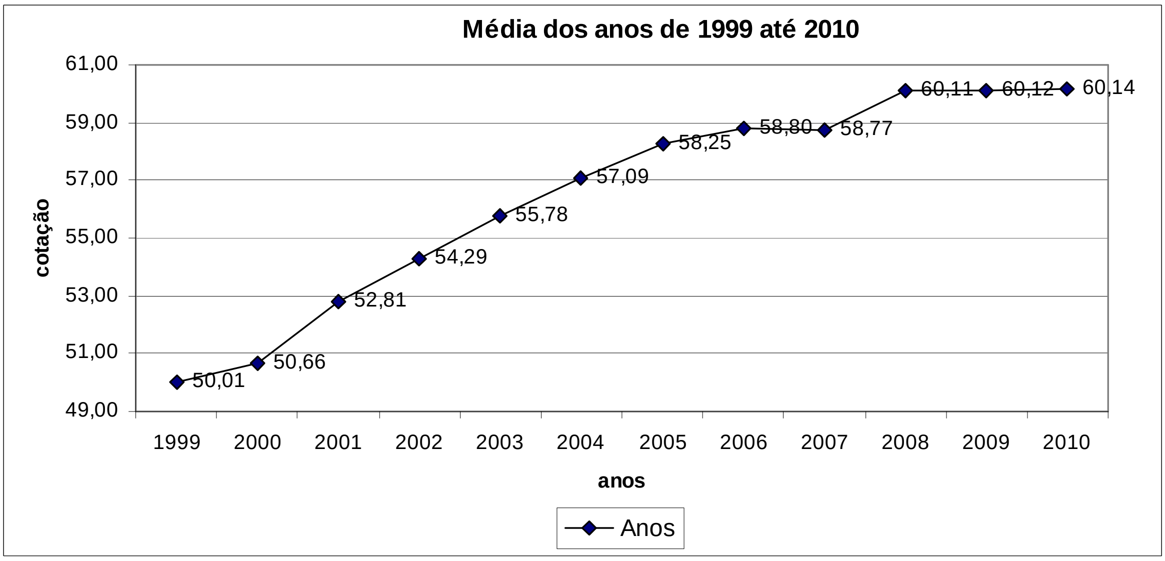
Tabela 6 – Estatística descritiva dos anos 1999 a 2010 do fundo

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Ano1999	20	49,99	50,03	50,0106	,01584
Ano2000	247	50,04	52,23	50,6648	,65858
Ano2001	249	51,74	53,76	52,8084	,37720
Ano2002	249	53,76	55,19	54,2898	,39071
Ano2003	252	55,19	56,59	55,7807	,36466
Ano2004	254	56,60	57,72	57,0849	,28818
Ano2005	249	57,74	59,65	58,2471	,46570
Ano2006	251	58,15	59,80	58,7953	,41854
Ano2007	250	58,09	59,29	58,7677	,25315
Ano2008	250	59,27	60,76	60,1117	,43214
Ano2009	249	59,40	60,40	60,1156	,15128
Ano2010	122	59,96	60,30	60,1446	,10070
Ano1999a2010	2643	49,99	60,76	56,7852	3,12326

Pela análise do Gráfico 6, pode-se observar que as tendências das médias durante o período de 1999 a 2010 foram sempre crescentes, excepto no ano de 2006, pois neste ano ocorreu uma estagnação no fundo.

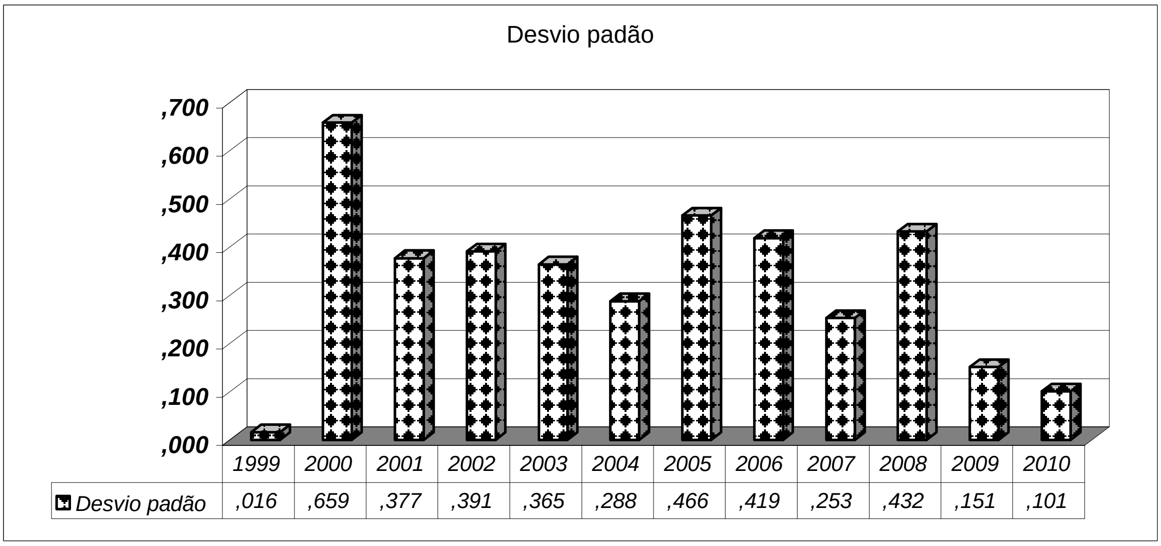
Gráfico 6 – Gráfico das médias de 1999 a 2010



Pela observação do Gráfico 7, nota-se que o ano de 2000 registou-se um desvio padrão de 0,659 que foi o maior, entre os anos de 1999 a 2010. Os restantes anos tiveram um desvio padrão de cerca de 0,4 excepto o ano de 2009 que obteve um valor de 0,16.

Os anos 1999 e 2010 não apresentam as cotações de um ano completo, devido ao fundo ter começado a ser comercializado em 03/12/1999. Logo para este estudo considera-se a data final de 31/12/2009.

Gráfico 7 – Desvio padrão desde 1999 a 2010



6.4 Análise do valor justo do contrato

Na presente secção desta dissertação, será elaborada uma análise do valor justo do contrato em estudo que se assume terá a duração de cinco anos e início em 2010. Para tal ter-se-á de recorrer ao modelo do movimento geométrico browniano, ao modelo da taxa de juro de Cox, Ingersoll e Ross e ao cálculo da probabilidade de sobrevivência de um indivíduo para considerar o risco de mortalidade/longevidade implícito na apólice.

A utilização do modelo do movimento geométrico browniano do fundo terá como função a estimação do comportamento futuro (dos próximos cinco anos) do fundo. Para estimar este comportamento, ter-se-á que estimar os parâmetros, μ e σ, recorrendo ao método da máxima verosimilhança e ter-se-á, também de recorrer ao método de Monte Carlo de modo a obter 20000 simulações das trajectórias da equação do movimento geométrico browniano. Com estas 20000 simulações calcular-se-á um valor médio obtendo se assim, uma estimação do comportamento futuro do fundo.

A aplicação do modelo do Cox, Ingersoll e Ross terá como objectivo estimar uma futura taxa de juro (Euribor). Para se proceder a esta estimação será necessário estimar os parâmetros da equação, α, β e σ, utilizando o método dos momentos e será também necessário recorrer ao método de Monte Carlo de modo a obter 20000 simulações das trajectórias da equação do modelo Cox, Ingersoll e Ross, referentes ao último mês de cada ano (considerando-se somente os 21 dias úteis do mês de Dezembro). Com estas 20000 simulações será calculado um valor médio obtendo se assim, uma estimação da taxa de juro (Euribor).

Terá de ser calculada, também, uma probabilidade de sobrevivência de um indivíduo de forma a permitir estimar a probabilidade de vida e de morte desse indivíduo (será elaborado um exemplo, em que o indivíduo tenha 30 anos e que tenha uma probabilidade de vida de 5 anos).

Com a aplicação dos modelos e cálculos referidos anteriormente, será assim, possível atingir o objectivo inicial desta secção, ou seja, o de analisar o valor justo do contrato em estudo.

De seguida serão apresentadas algumas informações, observações, cálculos e conclusões relevantes para a análise do valor justo do contrato.

- **Movimento geométrico browniano do fundo**

O movimento da cotação do fundo, ao longo do tempo, segue o movimento geométrico browniano, no qual a cotação do activo pode ser apresentada pela seguinte equação geral:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t ,$$

onde dS_t é a variação infinitesimal da cotação, μ é a tendência percentual, dt é a variação infinitesimal do tempo, σ é a volatilidade percentual e dW_t é o incremento de Wiener que representa uma variável aleatória independente de média zero e de desvio padrão um.

A equação para o movimento geométrico browniano pode ser discretizada por:

$$S_t = S_{t-1} \times exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times \Delta t + \sigma \times Normal(0;1) \times \sqrt{\Delta t}\right],$$

onde,

S_t - preço do fundo em t;

S_{t-1} - preço do fundo no tempo $t-1$;

μ - taxa de crescimento;

σ - volatilidade;

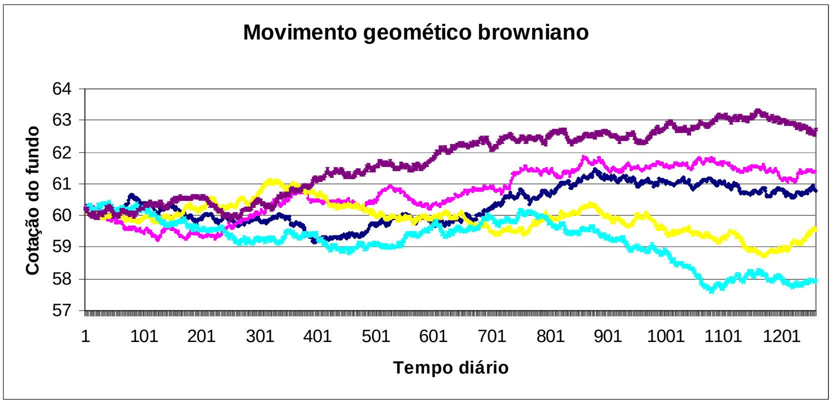
Δt - diferença entre o tempo t e o $t-1$.

Neste estudo, S_{t-1} representa a cotação do fundo inicial, μ a tendência de crescimento ou decrescimento da cotação do fundo, σ a volatilidade da cotação do fundo.

Os estimadores dos parâmetros μ e σ foram estimados através do método da máxima verossimilhança e os resultados são: $\hat{\mu} = 7{,}38855\text{E}-06$ e $\hat{\sigma} = 0{,}010610125$.

O Gráfico 8 representa o movimento geométrico browniano do fundo por simulações de Monte Carlo, mostra 5 caminhos possíveis, calculados com um intervalo de tempo Δt igual a um dia, para um período de cinco anos cujo valor inicial é de $60{,}21955$.

Gráfico 8 – Movimento geométrico browniano do fundo



Tendo assim obtido-se, os valores médios das 20000 simulações pelo método Monte Carlo para os futuros cinco anos do fundo, que indicam a média do último dia de cada ano, represendas na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores médios das simulações de Monte Carlo

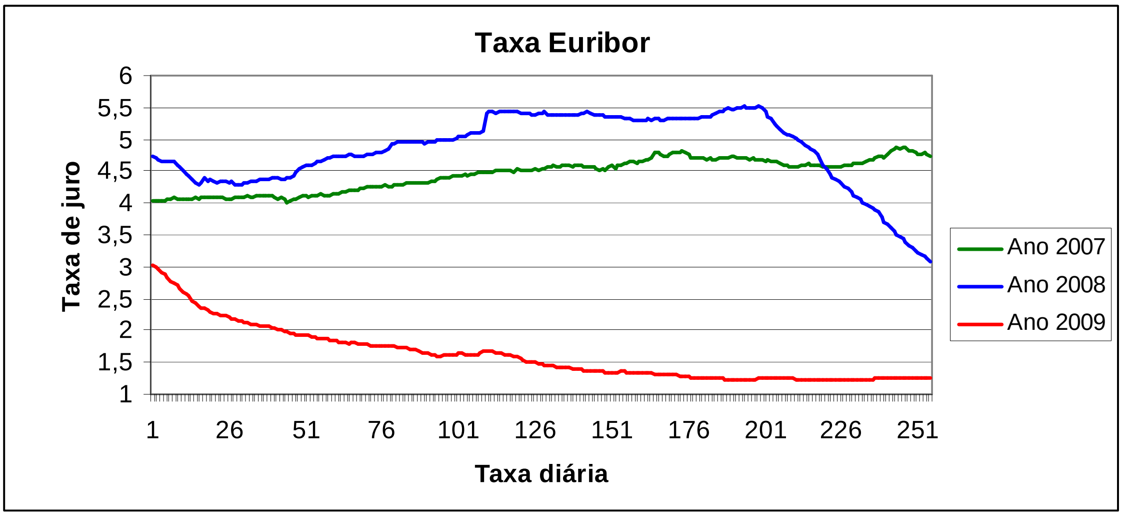
Anos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Valor Médio	60,21777	60,20866	60,21805	60,22587	60,22862

✹ **Modelo da taxa de juro Cox, Ingersoll e Ross**

Análise estatística da taxa Euribor

Podemos observar no Gráfico 9 que no ano de 2007 a taxa Euribor manteve-se aproximadamente no intervalo de 4% a 5%, em relação ao ano de 2008 a taxa iniciou-se aproximadamente nos 4,5% e cresceu até atingir os 5,5% durante quase todo o ano, no final do ano a taxa começou a descer bruscamente até aos 3% devido à crise financeira. No ano de 2009 a taxa continuou a descer com agravamento da crise, no final deste ano a taxa situava-se a cerca 1%.

Gráfico 9 – Evolução das taxas Euribor nos anos 2007, 2008 e 2009



Analise estatística para taxa de 2007

Pode-se observar na Tabela 8, as medidas de tendência central para a variável Euribor no ano 2007. Observa-se que a variável da taxa de Euribor de 2007 tem assimetria negativa e curtose platicúrtica. Esta não sugere uma distribuição normal, pois não têm os coeficientes de simetria e curtose dentro do intervalo $[-1{,}96;\ 1{,}96]$.

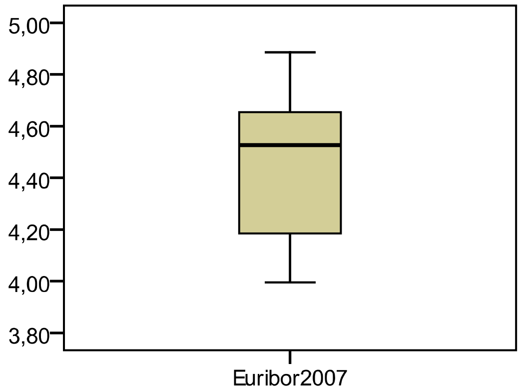
Tabela 8 – Estudo descritivo para taxa Euribor de 2007

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Euribor2007	Mean		4,4500	,01589
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	4,4187	
		Upper Bound	4,4813	
	5% Trimmed Mean		4,4518	
	Median		4,5260	
	Variance		,064	
	Std. Deviation		,25382	
	Minimum		4,00	
	Maximum		4,89	
	Range		,89	
	Interquartile Range		,48	
	Skewness		-,333	,153
	Kurtosis		-1,287	,304

Pela análise da Figura 17, pode-se concluir que existe maior dispersão entre o 1º e 2º quartis do que no 2º e 3º, ou seja, que a taxa de juro é mais frequente naquele intervalo. Nos gráficos da Figura 18, pode-se verificar que a maioria dos pontos não está ajustada à recta, o que sugere que os valores não seguem uma distribuição normal. Na representação da dispersão dos desvios pode observar-se, que os pontos não se distribuem de forma mais ou menos aleatória em torno de zero.

Figura 17 – Caixa de Bigodes e histograma da taxa Euribor de 2007



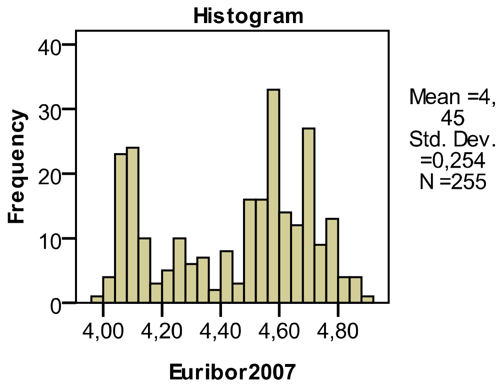
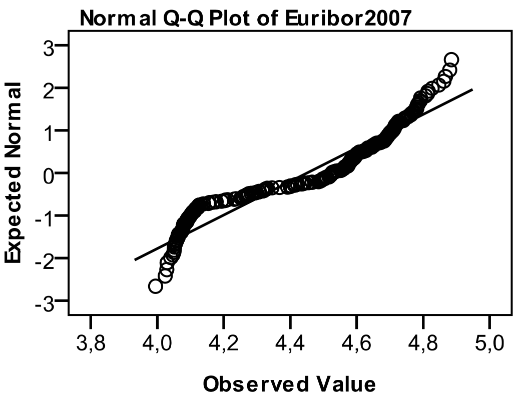
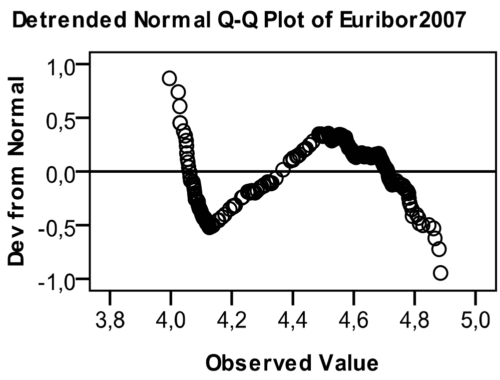


Figura 18 – Probabilidade normal e dispersão dos desvios para taxa Euribor de 2007





Na Tabela 9, testa-se a normalidade pelo teste Kolmogorov-Smirnov da taxa Euribor de 2007, verificando-se que não segue uma distribuição normal, pois o p-value é de 0,000 rejeitando-se a hipótese H_0 para um nível de significância de 5%.

Tabela 9 – Resultados dos testes de normalidade da taxa Euribor de 2007

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Euribor2007	,141	255	,000	,910	255	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Análise estatística para taxa Euribor de 2008

Pode-se observar na Tabela 10, as medidas de tendência central para a variável Euribor no ano 2008. Observa-se que a variável da taxa de Euribor de 2008 tem assimetria negativa e curtose mesocúrtica. Esta não sugere uma distribuição normal, pois não têm os coeficientes de simetria e curtose dentro do intervalo $[-1{,}96;\ 1{,}96]$.

Tabela 10 – Estudo descritivo para taxa Euribor de 2008

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Euribor2008	Mean		4,8260	,03675
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	4,7536	
		Upper Bound	4,8984	
	5% Trimmed Mean		4,8757	
	Median		4,9525	
	Variance		,346	
	Std. Deviation		,58799	
	Minimum		3,05	
	Maximum		5,53	
	Range		2,48	
	Interquartile Range		,96	
	Skewness		-,996	,152
	Kurtosis		,558	,303

Pela análise da Figura 19, pode-se concluir que existe maior dispersão entre o 1º e 2º quartis do que no 2º e 3º, ou seja, que a taxa de juro é mais frequente naquele intervalo. Nos gráficos da Figura 20, pode-se verificar que a maioria dos pontos não está ajustada à recta, o que sugere que os valores não seguem uma distribuição normal. Na representação da dispersão dos desvios pode observar-se que os pontos não se distribuem de forma mais ou menos aleatória em torno de zero.

Figura 19 – Caixa de Bigodes e histograma da taxa Euribor de 2008

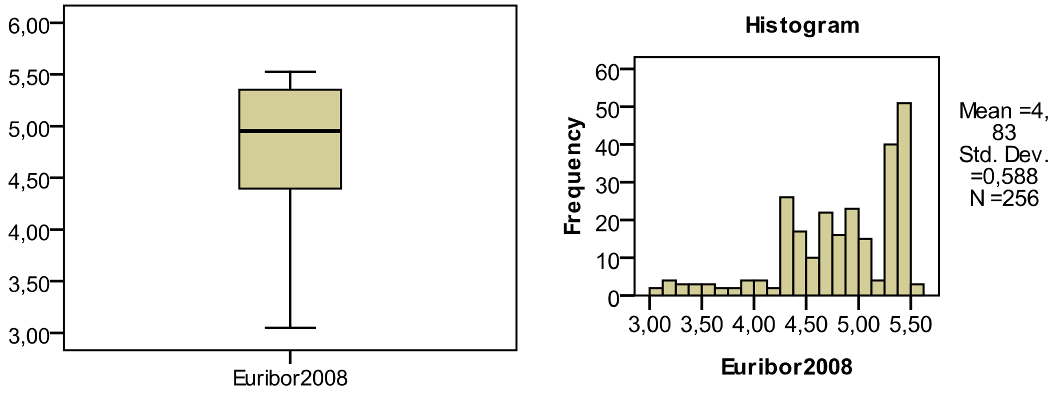
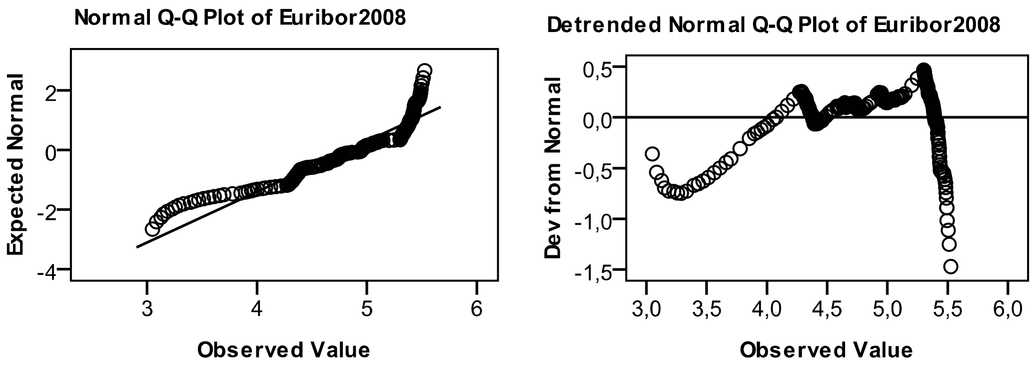


Figura 20 – Probabilidade normal e dispersão dos desvios para taxa Euribor de 2008



Na Tabela 11 testa-se a normalidade pelo teste Kolmogorov-Smirnov da taxa Euribor de 2008, verificando-se que não segue uma distribuição normal, pois o p-value é de 0,000 rejeitando-se a hipótese H_0 para um nível de significância de 5%.

Tabela 11 – Resultados dos testes de normalidade da taxa de Euribor 2008

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Euribor2008	,158	256	,000	,892	256	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Analise estatística para taxa de 2009

Pode-se observar na Tabela 12, as medidas de tendência central para a variável Euribor no ano 2009. Observa-se que a variável da taxa Euribor de 2009 tem assimetria positiva e curtose leptocúrtica. Esta não sugere uma distribuição normal, pois não têm os coeficientes de simetria e curtose dentro do intervalo $[-1,96;\ 1,96]$.

Tabela 12 – Estudo descritivo para taxa Euribor de 2009

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Euribor2009	Mean		1,6103	,02633
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,5585	
		Upper Bound	1,6622	
	5% Trimmed Mean		1,5662	
	Median		1,4620	
	Variance		,178	
	Std. Deviation		,42133	
	Minimum		1,22	
	Maximum		3,03	
	Range		1,80	
	Interquartile Range		,55	
	Skewness		1,294	,152
	Kurtosis		1,265	,303

Pela análise da Figura 21 pode-se concluir que existe maior dispersão entre o 2º e 3º quartis do que no 1º e 2º, ou seja, que a taxa de juro é mais frequente naquele intervalo. As observações 4, 5, 6, 7, 8, 9, e 10 são outliers. Nos gráficos da Figura 22 pode-se verificar que a maioria dos pontos não está ajustada à recta, o que sugere que os valores não seguem uma distribuição normal. Na representação da dispersão dos desvios pode observar-se que os pontos não se distribuem de forma mais ou menos aleatória em torno de zero.

Figura 21 – Caixa de Bigodes e histograma da taxa Euribor de 2009

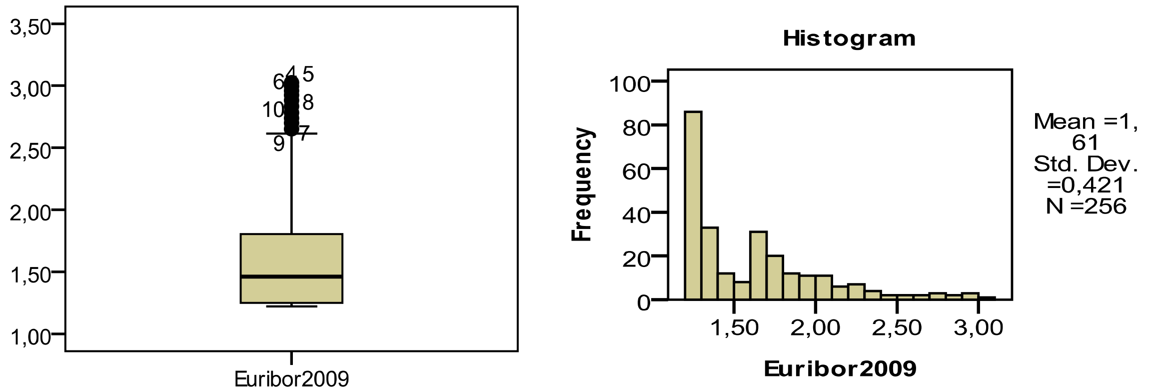
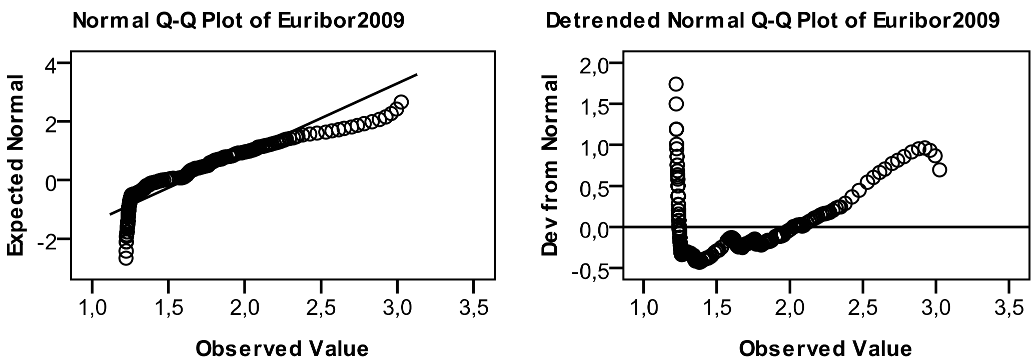


Figura 22 – Probabilidade normal e dispersão dos desvios para taxa Euribor de 2009



Na Tabela 13 testa-se a normalidade pelo teste Kolmogorov-Smirnov da taxa Euribor de 2009, verificando-se que não segue uma distribuição normal, pois o p-value é de 0,000 rejeitando-se a hipótese H_0 para um nível de significância de 5%.

Tabela 13 – Resultados dos testes de normalidade da taxa Euribor de2009

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Euribor2009	,178	256	,000	,839	256	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Análise estatística para taxa Euribor de 2007 a 2009

Pode-se observar na Tabela 14, as medidas de tendência central para a variável Euribor entre os anos de 2007 a 2009. Observa-se que a variável da taxa Euribor 2007 a 2009 tem assimetria negativa e curtose platicúrtica. Esta não sugere uma distribuição normal, pois não têm os coeficientes de simetria e curtose dentro do intervalo $[-1{,}96;\ 1{,}96]$.

Tabela 14 – Estudo descritivo para taxa Euribor de 2007 a 2009

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Euribor2007_2009	Mean		3,6277	,05429
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,5211	
		Upper Bound	3,7343	
	5% Trimmed Mean		3,6597	
	Median		4,3240	
	Variance		2,261	
	Std. Deviation		1,50355	
	Minimum		1,22	
	Maximum		5,53	
	Range		4,30	
	Interquartile Range		2,92	
	Skewness		-,564	,088
	Kurtosis		-1,336	,176

Pela análise da Figura 23, pode-se concluir que existe maior dispersão entre o 1º e 2º quartis do que no 2º e 3º, ou seja, que a taxa de juro é mais frequente naquele intervalo. Nos gráficos da Figura 24 pode-se verificar que a maioria dos pontos não está ajustada à recta, o que sugere que os valores não seguem uma distribuição normal. Na representação da dispersão dos desvios pode observar-se que os pontos não se distribuem de forma mais ou menos aleatória em torno de zero.

Figura 23 – Caixa de Bigodes e histograma da taxa Euribor de 2007 a 2009

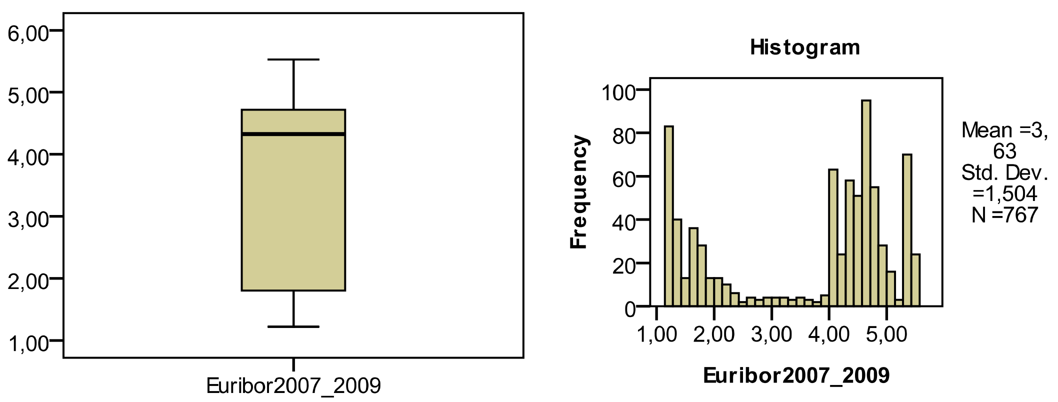
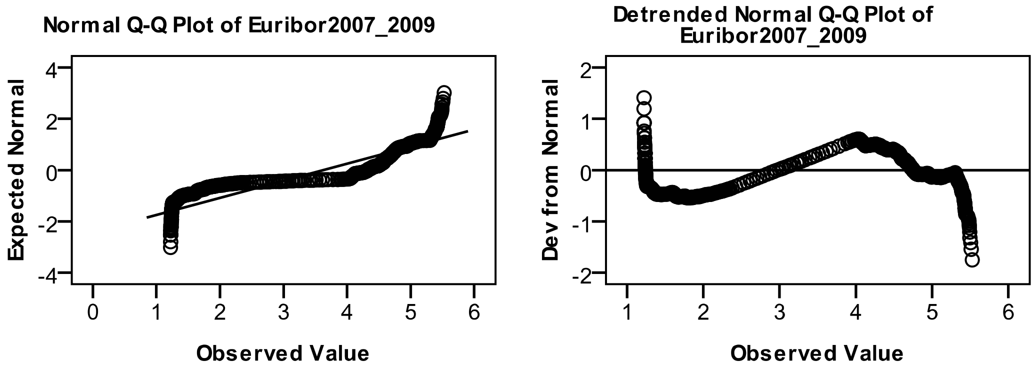


Figura 24 – Probabilidade normal e dispersão dos desvios para taxa Euribor de 2007 a 2009



Na Tabela 15 testa-se a normalidade pelo teste Kolmogorov-Smirnov da taxa Euribor de 2007 a 2009, verificando-se que não segue uma distribuição normal, pois o p-value é de 0,000 rejeitando-se a hipótese H_0 para um nível de significância de 5%.

Tabela 15 – Resultados dos testes de normalidade da taxa Euribor de 2007 a 2009

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Euribor2007_2009	,238	767	,000	,829	767	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Modelo Cox, Ingersoll e Ross

A evolução do modelo Cox, Ingersoll e Ross especifica que a taxa de juro instantânea, segue a equação diferencial estocástico, pode ser apresentada pela seguinte equação geral:

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t)$$

onde,

$W(t)$ – é um processo de Wiener unidimensional;

α – a velocidade de reversão;

β – nível média a longo prazo;

σ – a velocidade instantânea.

Neste estudo os estimadores dos parâmetros do modelo Cox, Ingersoll e Ross da taxa de juro dos últimos três anos 2007, 2008 e 2009, foram estimados pelo método dos momentos. Os valores obtidos foram os seguintes: $\alpha = -0{,}0093294763$, $\beta = 0{,}0014643114$ e $\sigma = 0{,}0001217658$.

Tendo-se assim obtido, os valores médios das 20000 simulações pelo método de Monte Carlo para os futuros cinco anos da taxa Euribor, que indicam a média dos 21 dias úteis do último mês de cada ano, representado na Tabela 16.

Tabela 16 – Valores médios das simulações de Monte Carlo

Anos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Valor Médio	1,259	1,271	1,283	1,295	1,307

- **Calcular a probabilidade de sobrevivência**

Probabilidade de sobrevivência de um indivíduo com idade de 30 anos e sobreviver mais 5 anos,

$$ {}_{n}p_{x} = \frac{1_{x+n}}{1_{x}} \Leftrightarrow {}_{5}p_{30} = \frac{1_{30+5}}{1_{30}} \Leftrightarrow {}_{5}p_{30} = \frac{1_{35}}{1_{30}} \Leftrightarrow {}_{5}p_{30} = \frac{97025}{97439} = 0{,}995 . $$

A probabilidade de sobrevivência de um indivíduo com 30 anos sobreviver mais cinco anos é de 99,5%.

- **Análise do valor justo do contrato**

Será usada a seguinte notação:

S_t - preço do fundo em t;

V_t - valor do contrato;

V_0 - valor inicial;

r - taxa de juro sem risco para um investimento com maturidade em T;

T - data de expiração;

t - tempo presente, $(T-t)$ expresso em anos;

${}_{t}p_{x}$ - Probabilidade de uma pessoa com a idade x viver mais t anos;

$K = V_0 e^{r(T-t)}$ - preço de exercício.

Na maturidade T, o valor do contrato pode ser definido por:

$$ \begin{aligned} V_T &= max\left(S_T;\ V_0 e^{r(T-t)}\right) \\ &= \left\{V_0 e^{r(T-t)} + max\left(S_T - V_0 e^{r(T-t)};\ 0\right)\right\} \times {}_{(T\text{-}t)}p_x \end{aligned} , $$

ou seja, o valor global do contrato na maturidade corresponderá ao valor capitalizado à taxa de juro garantida acrescido de uma call option com preço de exercício $K = V_0 e^{r(T-t)}$.

Pela análise da Tabela 17, podemos constatar que nesta simulação o valor garantido do fundo é sempre maior que o valor da opção. Como o valor da opção toma sempre o valor zero, as rentabilidades futuras dependem apenas da capitalização da taxa de juro garantida de cada ano.

Tabela 17 – Valor justo dos cinco anos do contrato

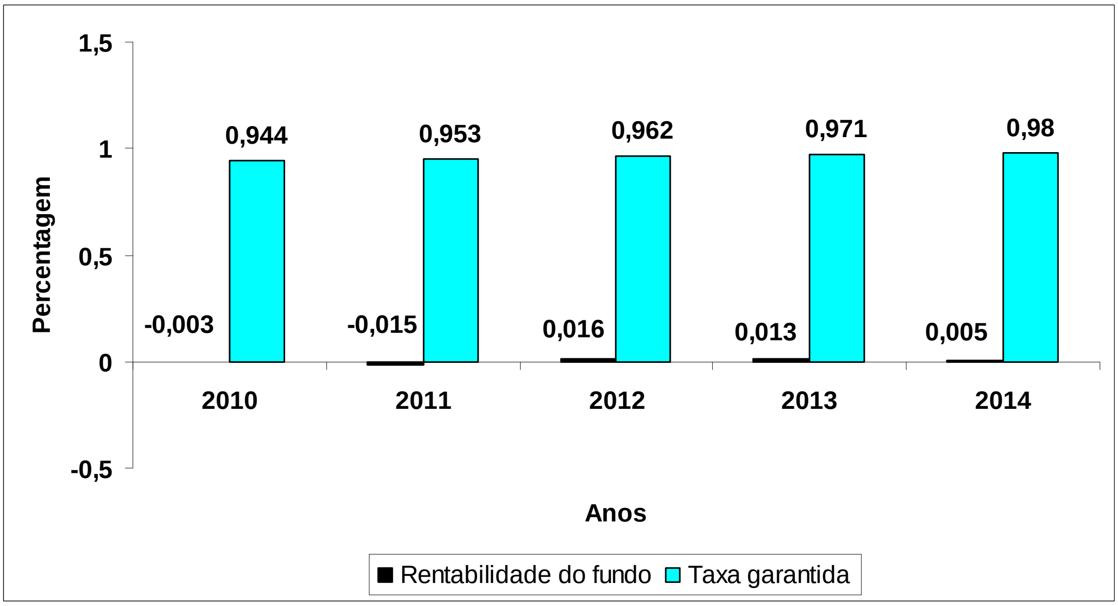
Ano	Valor garantido $V_0 e^{r(T-t)}$	Valor da opção $max\left(S_t - V_0 e^{r(T-t)}; 0\right)$	Probabilidade de sobrevivência ${}_t p_x$	Valor total V_t
1º ano	60,79087	0	0,995	60,48691
2º ano	61,3676	0	0,995	61,06076
3º ano	61,94981	0	0,995	61,64006
4º ano	62,53754	0	0,995	62,22485
5º ano	63,13085	0	0,995	62,8152

A Tabela 18 e o Gráfico 10 representa a rentabilidade do fundo e da taxa garantida dos próximos cinco anos, em que podemos constatar que os anos de 2010 e 2011 da unidade de conta vão ser negativos e os últimos três anos serão positivos. A taxa de juro garantida tem uma evolução crescente ao longo dos cincos anos.

Tabela 18 – Rentabilidades

Ano	Rentabilidade do fundo	Taxa garantida
2010	-0,003%	0,944%
2011	-0,015%	0,953%
2012	0,016%	0,963%
2013	0,013%	0,971%
2014	0,005%	0,980%

Gráfico 10 – Rentabilidades



Exemplo para um investimento inicial de €1000 entrega única: o tomador tem 30 anos e o contrato tem a duração de cinco anos.

O tomador do seguro com os €1000 subscreve 16,605 unidades de conta do fundo.

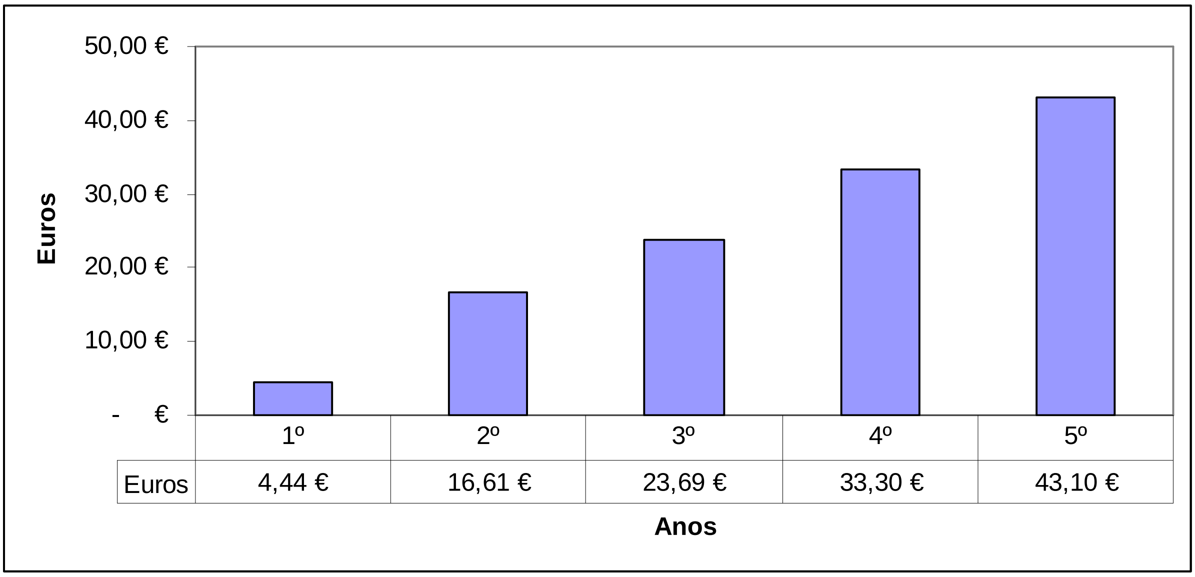
A Tabela 19 representa o lucro que o tomador vai receber durante os cinco anos, como a opção tem sempre o valor negativo durante os cinco anos, o lucro será a taxa garantida estipulada durante os cinco anos no início de cada ano, como foi referido anteriormente. No termo do contrato o tomador vai receber um lucro de €43,10.

Tabela 19 – Investimento inicial de € 1000

Ano	Valor garantido $V_0 e^{r(T-t)}$	Valor da opção $max\left(V_t - V_0 e^{r(T-t)};0\right)$	Probabilidade de sobrevivência ${}_t p_x$	Valor total V_t	Lucro
1º ano	60,79087	0	0,995	60,48691	€ 4,44
2º ano	61,3676	0	0,995	61,06076	€ 16,61
3º ano	61,94981	0	0,995	61,64006	€ 23,69
4º ano	62,53754	0	0,995	62,22485	€ 33,30
5º ano	63,13085	0	0,995	62,8152	€ 43,10

O Gráfico 11 representa a evolução do lucro dos cinco anos, o tomador no 1º ano obteve um rendimento de €4,44 e no final do contrato vai receber €43,10.

Gráfico 11 – Lucro dos vários anos



O produto deste contrato destina-se a investidores conservadores e avessos ao risco, que procurem um instrumento de poupança com vantagens fiscais, rendimento mínimo e capital garantido.

CAPÍTULO 7

Conclusão

Espera-se com esta dissertação salientar a importância da existência de uma avaliação nos contratos de uma companhia de seguros. Pois a evolução actual indica que em matéria de regulação, de contabilidade, de necessidades dos clientes e dos mercados secundários de seguros de vida podem levar a uma tendência de fugir da concepção de contrato tradicional.

Uma avaliação melhor e mais consciente dos riscos através de uma maior transparência, é a resposta encontrada para combater um ambiente de recuperação de informação rápida e fácil, pois os clientes estão cada vez mais críticos e exigentes. Com esta avaliação o design e os preços são questionados, mais transparentes e fáceis de entender, sendo os produtos desejados pelos clientes.

Esta mudança baseada no conceito de valor justo oferece significativas vantagens às companhias de seguros. A transparência permite uma maior e mais correcta classificação dos riscos reais na carteira, assim como reduz substancialmente a probabilidade de perdas. Portanto esta avaliação beneficia tanto os segurados como as companhias de seguros.

O produto deste contrato destina-se a investidores conservadores e avessos ao risco, que procurem um instrumento de poupança com vantagens fiscais, rendimento mínimo e capital garantido.

Numa monografia tão vasta e onde foi reunida tanta informação é natural que, por mais análises que se realizem e se apresentem, fiquem muitas outras por fazer. Interessará em estudos futuros considerar outros modelos e outros métodos estatísticos, como, por exemplo, o modelo Binomial e o modelo Black e Scholes. Há a salientar, também, que os objectivos traçados inicialmente, foram sendo respondidos ao longo dos capítulos anteriores e da análise dos dados, tendo sido cumprimos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Albizzati, M. O., and Geman, H., 1994, Interest Rate Risk Management and Valuation of the Surrender Option in Life Insurance Policies, Journal of Risk and Insurance, 61: 616-637.
- Associação da Bolsa de Derivados do Porto, 1994, Introdução aos Mercados de Futuros e Opções, Porto, Associação da Bolsa de Derivados do Porto.
- Associação da Bolsa de Derivados do Porto, 1994, Funcionamento dos Mercados de Futuros e Opções, Porto, Associação da Bolsa de Derivados do Porto.
- Associação da Bolsa de Valores do Porto, 1995, Avaliação e Estratégias de Intervenção, Porto, Associação da Bolsa de Valores do Porto.
- Associação da Bolsa de Valores do Porto, 1995, Futuros Sobre o índice PSI-20, Porto, Associação da Bolsa de Valores do Porto.
- Associação da Bolsa de Derivados do Porto, 1997, Mercados e Contratos de opções – Parte I, Porto, Associação da Bolsa de Derivados do Porto.
- Babbel, D. F. and Merrill, C., 1998, Economic Valuation Models for Insurers, in: North American Actuarial Journal, 2(3), 1–17.
- Bacinello, A. R., 2000, Fair Pricing of Life Insurance Participating Policies with a Minimum Interest Rate Guaranteed. Proceedings of the Tenth AFIR International Colloquium, Tromso, 1-28.
- Bacinello, A. R., 2001, Fair Pricing of Life Insurance Participating Policies with a Minimum Interest Rate Guaranteed, Astin Bulletin, 31: 275-297.
- Bacinello, A. R., and Persson, S. A., 2002, Design and Pricing of Equity-Linked Life Insurance under Stochastic Interest Rates, Journal of Risk Finance, 3(2): 6-21.
- Bacinello, A. R., 2003a, Pricing Guaranteed Life Insurance Participating Policies with Annual Premiums and Surrender Option, in: North American Actuarial Journal, 7(3), 1–17.
- Bacinello, A. R., 2003b, Fair Valuation of a Guaranteed Life Insurance Participating Contract Embedding a Surrender Option, in: Journal of Risk and Insurance, 70(3), 461–487.
- Bachelier, L., (translation of 1900 French edition), Theory of Speculation in Cootner (8), pp. 17-78.

- Ballotta, L., Haberman, S. and Wang, N., 2006, Guarantees in With-Profit and Unitized With-Profit Life Insurance Contracts: Fair Valuation Problem in Presence of the Default Option, in: Journal of Risk and Insurance, 73(1), 97–121.
- Bandeira, Luís; Ferreira, José Manuel, 1998, Contabilidade e Fiscalidade de Futuros e Opções — 2.ª Edição, Porto, Associação da Bolsa de Derivados Do Porto.
- Black, F. and Scholes, M., 1972, The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Equilibrium." Journal of Finance, Vol. 27.
- Black, F., and Scholes, M. 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81: 637-654.
- Blazenko, G.W, Boyle, R.E. and Newport, K.E., 1990, Valuation of Tandem Options. Advances in Futures and Options Research, vol. 4, JAI Press Inc., 39-49.
- Boyle, P. P., Schwartz, E. S., 1977, Equilibrium Prices of Guarantees under Equity-Linked Contracts, in: Journal of Risk and Insurance, 44(4), 639–660.
- Boyle, P. P., Hardy, M. R., 2003, Guaranteed Annuity Options, in: ASTIN Bulletin, 33(2), 125–152.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., 1976, The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee, in: Journal of Financial Economics, 3(3), 195–213.
- Brennan, M. J., and Schwartz, E. S., 1979a, Alternative Investment Strategies for the Issuers of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee, Journal of Business, 52: 63-93.
- Brennan, M. J., and Schwartz, E. S., 1979b, Pricing and Investment Strategies for Equity- Linked Life Insurance (Philadelphia: The S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania).
- Briys, E., and Varenne, F., 1994, Life Insurance in a Contingent Claim Framework: Pricing and Regulatory Implications, in: Geneva Papers on Risk and Insurance – Theory, 19(1), 53–72.
- Briys, E., and Varenne, F., 1997, On the Risk of Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls, in: Journal of Risk and Insurance, 64(4), 673–694.
- Cootner, P. H., 1964, ed.. The Random Character of Stock Market Prices, Cambridge; M.I.T.
- Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S., 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica, 53, 385-408.

- Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M., 1979, Option Pricing:ASimplified Approach, Journal of Financial Economics, 7: 229-263.
- Cruz, Ricardo, 1997, As Opções no contexto da teoria financeira, Porto, Associação da Bolsa de Derivados Do Porto.
- Dillmann, T.; and Ruß, J., 2001, Implicit Options in Life Insurance Contracts: Part 2—The Case of Flexible Expiration Option in Endowment Contracts. Blätter der DGVM, 25 (2), 225–235.
- Cummins, J. D.; Miltersen, K. R.; and Persson, S.A., 2004, International Comparison of Interest Rate Guarantees in Life Insurance, Conference Proceedings ASTIN 2004.
- Gatzert, N., Kling, A., 2005, Analysis of Participating Life Insurance Contracts: A Unification Approach, in: Working Papers on Risk Management and Insurance No. 18, University of St. Gallen.
- Gatzert, N., Schmeiser, H., 2006, Assessing the Risk Potential of Premium Payment Options in Participating Life Insurance Contracts, in: Working Papers on Risk Management and Insurance No. 22, University of St. Gallen.
- Grant, A. T., and Kingsnorth, G. A., 1967, Unit Trusts and Equity-Linked Endowment Assurances, Journal of the Institute of Actuaries, 93, Part III.
- Grosen, A., and Jorgensen, P. L., 1997, Valuation of Early Exercisable Interest Rate Guarantees, Journal of Risk and Insurance, 64: 481-503.
- Grosen, A., Jorgensen, P. L., 2000, Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options, and Bonus Policies, in: Insurance: Mathematics and Economics, 26(1), 37–57.
- Grosen, A., Jorgensen, P. L., 2002, Life Insurance Liabilities at Market Value: An Analysis of Insolvency Risk, Bonus Policy, and Regulatory Intervention Rules in a Barrier Option Framework, in: Journal of Risk and Insurance, 69(1), 63–91.
- Gourieroux C., Monfort A., 1995a, Statistics and Econometric Models, Vol. I, Cambridge University Press.
- Gourieroux C., Monfort A., 1995b, Statistics and Econometric Models, Vol. II, Cambridge University Press.
- Haberman, S., Balotta, L. and Wang, N., 2003, Modelling and Valuation of Guarantees in With-profit and Unitised With-Profit Life Insurance Contracts, in: Actuarial Research Paper No. 146, Cass Business School, City of London.

- Hansen L.P., 1982, Large Sample Properties of Generalized Methods of Moments, Econometrica, Vol. 50, N4.
- Hansen, M. and Miltersen, K.R., 2000, Minimum Rate of Return Guarantees: The Danish Case. Proceedings of the Tenth AFIR International Colloquium, Tromso, 309-329.
- Hansen, M. and Miltersen, K. R., 2002, Minimum Rate of Return Guarantees: The Danish Case, in: Scandinavian Actuarial Journal, 2002(4), 280–318.
- Hansen L.P., Scheinkman J .A., 1995, Back to the Future: Generating Moment Implications for Continous-Time Markov Processes, Econometrica, Vol.63, nº4.
- Harrison, M. J. and Kreps, D., 1979, Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. Journal of Economic Theory 20, 381-408.
- Harrison, M. J. and Pliska, S., 1981, Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. Stochastic Processes and Their Applications 11, 215-260.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. J. Morton, 1992, Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, Econometrica, 60: 77-105.
- Jenser, B., Jorgensen, P.L., and Grosen, A., 2000, A Finite Difference Approach to the Valuation of Path Dependent Life Insurance Liabilities. Proceedings of the Tenth AFIR International Colloquium, Tromso, 279-307.
- Jensen, B., Jorgensen, P. L. and Grosen, A., 2001, A finite difference approach to the valuation of path dependent life insurance liabilities, in: The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 26(3), 57–84.
- Kling, A., Richter, A., Russ, J., 2006, The Interaction of Guarantees, Surplus Distribution, and Asset Allocation in With Profit Life Insurance Policies, to appear in: Insurance: Mathematics and Economics.
- Mackinnon J. G., Davidson R., 1993, Estimation and Inference in Econometrics, Oxford University Press.
- Maurer, R., and Schlag, C., 2002, Money-Back Guarantees in Individual Pension Accounts: Evidence From the German Pension Reform, Centre for Financial Studies Working Paper No. 2002/03, Johan Wolfgang Goethe-Universitat, Frankfurt am Main.
- Melville, G. L., 1970, The Unit-Linked Approach to Life Insurance, Journal of the Institute of Actuaries, 96, Part III.

- Merton, R. C., 1973, Theory of Rational Option Pricing, in: Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1), 41–183.
- Milewsky, M. A., Promislow, S. D., 2001, Mortality Derivatives and the Option to Annuitize, in: Insurance: Mathematics and Economics, 29(3), 299–318.
- Miltersen, K. R., and Persson, S. A., 1999, Pricing Rate of Return Guarantees in a Heath-Jarrow-Morton Framework, Insurance: Mathematics and Economics, 25: 307-325.
- Miltersen, K. R., and Persson, S.A., 2000a, Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Returns, Working paper 2000/1, Department of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration.
- Miltersen, K. R., and Persson, S.A., 2000b, A Note on Interest Rate Guarantees and Bonus: The Norwegian Case. Proceedings of the Tenth AFIR International Colloquium, Tromso, 507-516.
- Miltersen, K. R., Persson, S.A., 2003, Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Return, in: Scandinavian Actuarial Journal, 2003(4), 257–279.
- Persson, S. A., and Aase, K. K., 1997, Valuation of the Minimum Guaranteed Return Embedded in Life Insurance Products, Journal of Risk and Insurance, 64: 599-617.
- Smith, M. L., 1982, The Life Insurance Policy as an Options Package, Journal of Risk and Insurance, 49: 583-601.
- Squires, R. J., 1973, Unit-linked Assurance Observations and Propositions," Journal of the Institute of Actuaries, 101, Part 1.
- Steffensen, M., 2002, Intervention options in life insurance, in: Insurance: Mathematics and Economics, 31 (1), 71–85.
- Tanskanen, A. J., Lukkarinen, J., 2003, Fair Valuation of Path-Dependent Participating Life Insurance Contracts, in: Insurance: Mathematics and Economics, 33(3), 595–609.
- Walden, M. L., 1985, The Whole Life Insurance Policy as an Options Package: An Empirical Investigation, Journal of Risk and Insurance, 52: 44-58.
- Vasicek, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics 5, 177-188.