CAMINHOS PARA UMA FUNDAMENTAÇÃO

DA

GEOMETRIA NÃO-ARQUIMEDIANA

PAULINO LIMA FORTES

Orientador:
Prof. Doutor Augusto José Franco de Oliveira

Dissertação apresentada à Universidade de Évora como requisito
parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

2004

CAMINHOS PARA UMA FUNDAMENTAÇÃO

DA

GEOMETRIA NÃO-ARQUIMEDIANA

PAULINO LIMA FORTES

Orientador:
Prof. Doutor Augusto José Franco de Oliveira

Dissertação apresentada à Universidade de Évora como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

2004

Índice

[1] Texto da conferência homónima proferida pelo candidato no Seminário do Centro de Estudos em História e Filosofia da Ciência da Universidade de Évora.

Símbolos

Siglas e abreviaturas

ANS — Análise não-standard

GNS — Geometria não-standard

GNA — Geometria não-arquimediana

GNSA — Geometria não-standard não-arquimediana

GNE — Geometria não-euclidiana

GNP — Geometria não Pascaliana ou não Papusiana

GND — Geometria não Arguesiana ou não Saccheriana

ZFC — Teoria dos Conjuntos (com os axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma de escolha)

ZFNC — Teoria Interna dos Conjuntos com os axiomas de Zermelo-Nelson-Fraenkel mais o axioma de escolha

Ord — classe dos ordinais

Notações

$A, B, \ldots$ conjuntos, pontos

$Arq(A, B), A(Arq)B$ — relação arquimediana

$\mathbb{R}$ — conjunto dos números reais

$\mathbb{Q}$ — conjunto dos números racionais

$\mathbb{N}$ — conjunto dos números naturais (inteiros positivos)

$\mathbb{Z}$ — conjunto dos números inteiros

$\mathbb{C}$ — conjunto dos números complexos

$\mathcal{P}(A)$ — conjunto das partes de A ou conjunto potência de A

ip — infinitamente pequeno actual

ig — infinitamente grande actual

idp — infinitamente pequeno potencial

idg — infinitamente grande potencial

$\angle\alpha$ — ângulo α

$\measuredangle\alpha$ — uma medida ou amplitude do ângulo α

$\triangle, \square$ — triângulo, quadrilátero

$\overline{AB}$ — segmento de recta

$\overleftrightarrow{AB}$ — recta incidente em A e B

$|AB|$ — medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ — semirecta de origem no ponto A

$\overrightarrow{\overrightarrow{AB}}$ — raio (recta orientada) incidente em A e B

$A - B - C$ — o ponto B está entre o ponto A e o ponto C.

$\sqcup$ — união disjunta de conjuntos

$\perp, \perp_i$— perpendicular, quase perpendicular.

$\|, \|_i$— paralelo, quase paralelo.

$\|_P$ — paralelo no campo do ponto P

$C(P)$, $C_{ip}(P)$ — campo de P, campo infinitesimal de P

$C^{\pi}_{ip}(P), C^{\pi}_{ig}(P)$ — campo infinitesimal plano de P, campo infinitamente grande plano de P

$st(\cdot)$ — parte standard.

$st(x)$ — x é standard

Resumo

Resumo da Tese de Doutoramento submetida por Paulino Lima Fortes à Universidade de Évora e intitulada "**Caminhos para uma Fundamentação da Geometria Não-Arquimediana**"

Nesta tese são revistas bases históricas da geometria não-arquimediana (GNA), em particular, as de Hilbert e Veronese.

É sugerida uma definição de Geometria não-standard (GNS), e são construídos e estudados modelos gerais Hilbert-veronesianos e birkhoffianos de geometria não-standard não-arquimediana (GNSA).

São apresentadas e sugeridas realizações analíticas e sintéticas dos modelos, bem como exemplos elementares da sua aplicação na resolução de alguns problemas standard.

Abstract

Abstract of the Ph.D. Thesis submitted by Paulino Lima Fortes to the University of Évora and entitled "**Caminhos para uma Fundamentação da Geometria Não-Arquimediana (Paths to a Foundation of Non Archimedean Geometry)**"

In this thesis, historical bases of Non Archimedean Geometry (NAG) are revised, with special emphasis to those from Hilbert and Veronese.

A definition of Non Standard Geometry (NSG) is suggested and general Hilbert – Veronesian (H-V) and Birkhoffian models of Non Standard non Archimedean Geometry (NSAG) are builted and studied.

Analytic and synthetic realizations of the models are presented or suggested and studied.

Some elementary applications to solve standard problems and situations are worked out.

À memória de **Manuel Fortes** (1924-1992), meu Pai — *Carpinteiro e Geómetra*!

Agradecimentos

Aos meus pais, na pessoa da minha mãe, Miquelina Isabel Lima Fortes, agradeço o bom ambiente familiar que souberam gerar, berço propício à minha educação e instrução. No seu-nosso lar aprendi que todos os Homens são iguais na dignidade; aprendi a respeitar a todos e a dedicar-me, sempre que possível, ao bem comum. Também aí em mim foi lançada a semente do amor à ciência, que tem germinado e espero que frutifique e dê novas sementes para que também eu possa semear florestas de gente com ciência e com consciência.

Devo aos meus irmãos e restantes familiares a harmonia própria de quem sabe que está sempre no meio da multidão, mesmo quando só. O trabalho e a produtividade muito dependem dessa harmonia.

Expresso também aqui profundos agradecimentos aos meus colegas de trabalho e superiores, no Instituto Superior de Educação de Cabo Verde (ISE) e na Universidade de Évora. Encorajaram-me nas horas desânimo e foram meus irmãos. Um agradecimento especial aos colegas do ISE que suportaram a sobrecarga de trabalhos derivada da minha ausência.

Agradeço aos meus professores, nos diversos graus de ensino e nas diversas instituições onde procurei e encontrei formação, em Cabo Verde, Portugal e França. Todos e todas foram decisivos nas opções pessoais e profissionais que tomei, sendo porém as responsabilidades minhas por inteiro. Peço-lhes desculpas pela minha presunção de querer ensinar e investigar. Felizmente tenho nessa tarefa a sua imagem e tenho por isso bons exemplos e boas razões para a levar a bom porto. Só desse modo poderei efectivamente mostrar-lhes o meu imenso reconhecimento.

O Professor Vaz Ferreira, da Universidade de Bolonha, Itália, facultou-me, no início do projecto, a obra fundamental de Giuseppe Veronese, os *Fondamenti di Geometria*, crucial no desenvolvimento da presente tese. Aqui registo os meus profundos agradecimentos.

Registo aqui também os meus agradecimentos ao Departamento de Matemática da Universidade de Évora, que me acolheu, e me proporcionou boas condições de trabalho — as mesmas que as dos seus membros —, que muito contribuiram para que o projecto e outras investigações relativas fossem desenvolvidos.

O Centro Internacional de Matemática (CIM) ajudou-me na procura duma bolsa de estudos e facultou-me apoio para acções de fomação.

A minha estadia na Universidade de Évora no quadro da realização dos trabalhos conducentes a esta dissertação foi, em momentos diferentes e de formas diferentes, suportada pela Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora (CIMA-UE) — de que sou membro, Fundação Luis de Molina, Fundação Calouste Gulbenkian e, de forma largamente maioritária, pelo Gabinete de Relações Internacionais da Ciência e do Ensino Superior — GRICES, ex-Instituto de Cooperação

Científica e Tecnológica Internacional (ICCTI). Não seria possível dar início, nem continuidade ao projecto, sem esse suporte fundamental. Os meus profundos agradecimentos a estas instituições.

O Professor Franco de Oliveira aceitou orientar esta tese e teve múltiplo papel, guiando-me nas derivas e segurando-me nas derrapagens. Ele foi e continua sendo uma das minhas referências maiores, nos diversos estatutos, na Academia e fora dela. Reforcei sobremaneira a minha dívida para com ele.

Finalmente, estou em dívida para com o Edejânio Ricardo e a Ana Isabel, por terem suportado as minhas ausências e faltas de atenção. Nos piores momentos mostraram-me o caminho da família. Sou-lhes infinitamente grato. Bem hajam!

Declaração

Nenhuma parte do trabalho presente nesta Tese foi submetida para candidatura a outro grau ou qualificação a esta ou qualquer outra Universidade ou instituição de ensino.

[...] *il est arrivé dans la haute Géométrie une chose bizarre, la certitude a nui à lá clarté. On tient toujours le fil du calcul, guide infaillible, il n'importe où l'on arrive, il y falloit arriver, quelques ténebres qu'on y trouve. De plus, la gloire a toujours été attachée aux grandes recherches, aux solutions des Problemes difficiles, & non à l'éclaircissement des idées.*

Je cru que cet éclaircissement, négligé par les habiles Géometres, pourroit être utile à la Géométrie; on n'en marchera pas plus sûrement, mais on verra plus clair autour de soi, avec le fil qu'on avoit dans des Labyrinthes sombres, on aura un flambeau, dont la lueur ne sauroit être si petite, qu'elle ne soit toujours de quelque usage, & même si cette petite lueur que je présente n'est pas fausse, rien n'empechera qu'on ne l'augmente beoucoup.

Fontenelle, 1727.

La raison se révolte des contre conceptions comme celle ci. Ça, parce que, pour une question d' habitude trés ancienne, elle cherche une image visuelle. Mais on doit se dégager de ce préjugé, si on veut atteindre la clairté, et ça c'est ici plus nécessaire que dans le cas de la géométrie non-euclidienne.

Poincaré, 1901.

Parte I

Introdução

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Enquadramento do estudo

1.1.1 O problema

A questão da fundamentação matematicamente rigorosa do uso dos infinitos actuais na análise só recentemente foi resolvida com a introdução da Análise não-standard (ANS) por Abraham Robinson em 1960 [62]. A abordagem axiomática, cuja possibilidade foi sugerida pela próprio Robinson [63] e realizada por Keisler e outros, tornou a ANS bastante popular[1], sendo a versão mais usada a de Edward Nelson (1977) [57], que consiste numa extensão da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel[2]. No entanto o uso dos infinitos actuais na matemática foi prática bastante corrente antes do século XIX, até ao seu quase completo apagamento com a criação do chamado método $\varepsilon - \delta$, por Cauchy, Bolzano e Weirstrass. Este método, baniu da matemática o uso de números infinitamente pequenos e infinitamente grandes actuais que, como se disse, não se fundamentava numa teoria matemática sólida: estava eivado de inconsistências conducentes a paradoxos inultrapassáveis com o estádio de desenvolvimento da lógica e da teoria dos conjuntos de então.

A consumação da retirada dos infinitos numéricos actuais veio a acontecer com a fixação do conceito de número por Cantor, Dedekind, Peano e posteriormente, Zermelo, que o reduziram ao de conjunto, na sua recém criada teoria de conjuntos. Nesses novos números não estavam os infinitamente pequenos actuais (*ip*) nem os infinitamente grandes actuais (*ig*) de Arquimedes, Galileu, Leibniz, Euler, Fontenelle, du Bois-Raymond, Stolz, Veronese, Bettazzi, e tantos outros. Obras como os *Fundamentos da Geometria* (*Grundlagen der Geometrie*) de Hilbert celebraram e consagraram tal conceito de número Cantor–dedekindiano, e obras como os *Fondamenti di Geometria* de Veronese, fundadas sobre os "antigos" números "infinitos", foram relegadas ao (quase) esquecimento.

Poucos foram os que ousaram, na fase subsequente, isto é, nos princípios do séc XX,

[1] Nomeadamente pela escola de Strasbourg, fundada por Georges Reeb, e a sua ramificação de Oran, na Argélia.

[2] Algumas outras propostas de axiomáticas alternativas:

- K. Cuda, *A nonstandard set Theory*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 17 (1976), 647 - 663;
- K. Hrbacek, *Axiomatic foundations for Nonstandard Analysis*, Fund. Math., 98 (1978), 1- 19;
- Kawai, Nonstandard Analysis by axiomatic method, Southeast Asian Conference on logic, North-Holland (1983), pp. 55-76;
- D. Ballard, Foudational aspects of "non" standard mathematics, AMS, 1994.

fazer estudos que incluíssem os infinitos numéricos actuais. Hans Hahn foi uma das excepções, publicando em 1907 um artigo, seminal de todos os pontos de vista, com o título "*Sistemas não-arquimedianos de Grandezas*" [41] onde lança as bases para o estudo de corpos não-arquimedianos, e onde aparecem os infinitamente grandes e infinitamente pequenos actuais.

A questão dos *ips* e dos *igs* nos conjuntos numéricos, transporta-se de forma natural para os espaços geométricos, pois, como se sabe desde Descartes, é importante (para a geometria analítica) o estabelecimento do isomorfismo entre a recta e um conjunto numérico (no sentido cantoriano ou outro). Assim pode-se dizer que o desenvolvimento das geometrias que incluem grandezas *ips* e *igs*, ficou bloqueado, mais uma vez[3].

O aparecimento da ANS veio revelar, na análise, para além de novos horizontes de ensino e aplicações, um mundo absolutamente novo, tão presente nos objectos fundamentais, como desconhecido. Será que existirão igualmente novos horizontes e novos mundos a explorar no domínio da geometria? Um dos problemas a resolver neste projecto será lançar as bases para uma resposta a esta questão.

Com o desenvolvimento da lógica e da teoria dos modelos (numa das versões da ANS) pode-se aspirar a, tal como na análise, aplicar essas novas ferramentas na exploração da geometria.

Por outro lado, há que recuperar antigas obras dedicadas ao assunto da geometria não-arquimediana, das quais se destacam duas: uma, a mais conhecida (sobretudo na sua parte de geometria elementar), os *Grundlagen* de Hilbert; outra, assaz desconhecida, embora bastante vasta, profunda e pioneira: os *Fondamenti* de Veronese. Portanto, outro problema a resolver é o de encontrar em Hilbert e Veronese, pistas para a fundamentação acima referida.

1.1.2 Objectivos da tese

Esta tese pretende ser um primeiro trabalho para a fundamentação da GNS, na tradição clássica[4]. Por isso não faz parte dos seus objectivos fazer a abordagem de consequências profundas dos resultados (o que se pretende fazer mais tarde, na continuidade da investigação).

Elegeu-se como objectivos fundamentais:

— Proceder a uma revisão histórica dos fundamentos da GNA;

— Propôr uma definição de GNS;

— Propôr uma fundamentação para a geometria não-arquimediana, com o recurso à moderna linguagem da Análise não-standard;

— Apresentar modelos elementares de geometria não-standard não-arquimediana, compatíveis com a introdução dessa matéria nas disciplinas de geometria elementar;

— Mostrar que, com a abordagem da GNS, pode-se resolver problemas de geometria, de uma forma compatível com os níveis mais elementares de intuição geométrica, e recuperando métodos históricos — como a exaustão, por exemplo.

— Construir um guia de referência rápida para os que quiserem iniciar-se nestas matérias, porém sem a pretensão de substituir as fontes.

[3] O primeiro bloqueio terá acontecido com a retirada dos ângulos de contingência para fora do convívio da geometria, com os *Elementos* de Euclides (ver capítulo 2, secção ??).

[4] Excluem-se as tentativas recentes de fundamentação de "análise suave" na geometria diferencial sintética, a qual tem por base, não a teoria dos conjuntos, mas sim a teoria das categorias (topoi).

1.1.3 Métodos gerais

Dado o carácter de trabalho inicial, e de fundamentos, pareceu conveniente a adopção da seguinte metodologia: recorrer-se à fundamentação histórica com bastante frequência, em virtude da colocação geral, para a resolução dos problemas propostos; recorrer à interpretação de conceitos geométricos na teoria interna de conjuntos.

1.2 As propostas

Como resultados da investigação, têm-se as seguintes propostas

— Uma análise das GNA's de Hilbert e Veronese, através das obras referidas;

— Uma axiomática geral para modelos Hilbert-veronesianos de GNSA e interpretações analíticas e sintéticas do modelo;

— Uma axiomática para modelos métricos de GNSA, à Birkhoff;

— Exemplos de modelos dessas axiomáticas;

— Resolução de alguns problemas elementares nos novos modelos.

1.3 Esquema da tese

Esta dissertação está dividida em cinco partes. A primeira parte (Parte I) é a introdução, com a colocação e perspectivação do problema (Capítulo 1). Na segunda parte (Parte II), faz-se uma digressão pela história do conceito de GNA, com dois objectivos, a saber: i) proceder a uma fundamentação histórica da GNA; ii) clarificar as pistas que conduzem aos modelos exibidos e propostos (Capítulo 2); introdução à geometria não-arquimediana de Hilbert (Capítulo 3); uma introdução à geometria não-arquimediana de Veronese (Capítulo 4).

Na terceira parte (Parte III) faz-se uma introdução à análise não-standard com os seguintes objectivos: i) fixar o quadro onde viverão os modelos de GNS a serem apresentados, a saber, a teoria ZFNC de conjuntos (IST); ii) fixar a linguagem e as notações; iii) estabelecer os mecanismos a serem usados na GNS; iv) servir de referência para um paralelismo entre métodos de ANS e métodos de GNS (Capítulo 5); também apresentam-se definições tentativas de GNS (Capítulo 6), bem como exemplos ilustrativos.

Na quarta parte (Parte IV), inicia-se com um capítulo de revisão da classificação das geometrias segundo Hilbert, numa abordagem adequada ao tratamento dos capítulos seguintes (Capítulo 7). É proposto um modelo sintético baseado nos axiomas de Hilbert e Veronese (Capítulo 8), bem como uma sua realização analítica e aplicações do modelo na resolução de alguns problemas standard elementares (Capítulo 9). No capítulo seguinte (Capítulo 10), são propostos modelos sintéticos, com aplicações; no seguinte, é proposto um modelo métrico baseado nos axiomas de Birkhoff (Capítulo 11), bem como algumas realizações.

A quinta parte (Parte V) é dedicada a uma revisão crítica do estudo, acompanhada de uma perspectivação de continuidade do projecto de investigação (Capítulo 12).

Parte II

Algumas bases históricas

CAPÍTULO 2

Breve incursão histórica no conceito de geometria não-arquimediana

2.1 Introdução

Os matemáticos dos finais do século XIX e início do século XX foram impelidos a lidar com o problema da geometria não-arquimediana, quer em termos de contributos directos, com produtos de investigação, quer através da participação em discussões. Dessa época frutífera que, no que diz respeito à geometria, é apenas comparada à das geometrias não-euclidianas, que a antecedeu algumas décadas, resultou, em particular, a moderna teoria dos corpos ordenados e a análise não-arquimediana [10], mas também bases fundamentais para o desenvolvimento da análise com infinitesimais (ou análise não-standard, como viria a ser conhecida mais tarde), como forma de legitimar o uso dos números infinitos actuais, grandes e pequenos, na análise, muito em voga nos séculos XVII e XVIII (Leibniz, Euler).

A discussão desenvolveu-se em torno de dois eixos: Veronese, com os seus *Fondamenti di geometria* [72] e artigos anteriores e posteriores, e Hilbert com os seus *Grunlagen der Geometrie* [49]. Veronese terá sido o primeiro em data a relançar o debate ao propor uma fundamentação sintética para a geometria onde deliberadamente se nega a necessidade do axioma de Arquimedes; Hilbert, por força de uma investigação logico-geométrica que o leva a eliminar axiomas de um conjunto de axiomas por ele próprio propostos para fundamentar a geometria sintética, para testar a independência dos mesmos do resto do grupo ou conjunto.

O debate começou com Fontenelle, du Bois-Reymond, Hermann Helmholtz, Otto Stolz. Muitos foram os intervenientes. Pode-se citar os casos de Bettazzi, Levi-Civita, Hölder, Schöenflies, Hahn, no eixo Veronese, e Poincaré, Peano, Cantor, Bernays, Schöenflies, Killing, Klein, no eixo Hilbert.

Nesta parte pretende-se fazer uma digressão pelos argumentos de alguns intervenientes e pelas suas contribuições (capítulo I), dando obviamente principal destaque a David Hilbert e Giuseppe Veronese (capítulos II e III, respectivamente).

Como ponto de partida histórico, relembram-se os polémicos ângulos corniformes da geometria clássica, banidos por Euclides da sua sistematização da geometria, por a álgebra daqueles não obedecer ao famoso axioma de Eudóxio-Arquimedes.

2.2 Ângulos de contingência

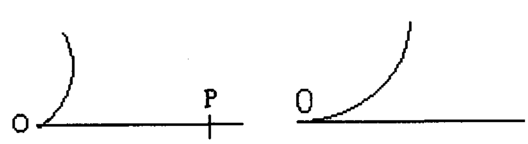
Os antigos já se tinham cruzado com grandezas geométricas não-arquimedianas: os chamados ângulos corniformes (pelos gregos) ou de contingência (por J. Nemorarius [25]). Trata-se de ângulos entre uma curva e a sua tangente num ponto, ou entre duas curvas. Nos seus *Elementos*, livro III, proposição XVI, Euclides mostra que *o ângulo formado por uma circunferência e a sua tangente é menor que todo o ângulo de lados rectilíneos*, o que se pode generalizar a uma cónica qualquer. Essa demonstração, a saber, de que o ângulo rectilíneo e o de contingência não são comensuráveis foi, como no caso da diagonal dum quadrado em relação ao seu lado, motivo de grande pânico entre os matemáticos, que prolongou-se durante séculos.

Com efeito, a avaliação da ordem de grandeza do ângulo de contingência levantou muita controvérsia. Por um lado havia uns, como Peletier (século XVII), que diziam que se tratava duma grandeza nula (*quantitas non est* [25]), e por outro lado havia aqueles, como Clávio (mesmo século), para quem um tal ângulo devia ser considerado não nulo, porém infinitamente pequeno em relação aos ângulos de lados rectilíneos — sujeito no entanto às operações usuais de adição e multiplicação.

Assim, a questão dos ângulos de contingência preocupou os melhores matemáticos da época, ao longo dos séculos XVI, XVII, e XVIII, tendo havido matemáticos como Viète, Galileu e Wallis que tomaram o partido de Peletier, e outros como Hobbes, Leibniz e Newton que adoptaram o ponto de vista de Clávio.

Uma generalização desse tipo de ângulos, os chamados *ângulos lunares*, foi introduzido por Klein [50] com vista a demonstrar a independência do axioma de Eudóxio-Arquimedes na geometria euclidiana de Hilbert.

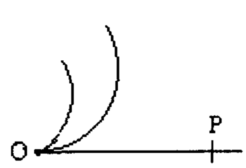
Um ângulo lunar obtem-se do seguinte modo: trace-se com origem num ponto O um arco de circunferência Γ, de amplitude inferior a 180^o. No semiplano onde existe o arco, delimitado pela recta $\overleftrightarrow{OP}$, trace-se uma semirecta $\overrightarrow{OP}$ que não intersecta Γ. A figura obtida é um ângulo lunar (figuras abaixo).



A B

Um ângulo lunar cujo lado rectilíneo é tangente ao lado curvilíneo (figura B), diz-se *ângulo lunar de lado tangente.*

Dados dois ângulos lunares de lado rectilíneo comum $\overrightarrow{OP}$, o menor é aquele que na vizinhança de O tiver pontos mais próximos de $\overrightarrow{OP}$ (figura abaixo).

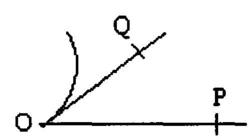


Dados dois ângulos lunares de lados tangentes, o maior é aquele cujo lado curvilíneo tiver menor curvatura.

Todo o ângulo lunar α é decomponível num ângulo de lados rectilíneos e num ângulo de lado tangente α^0,

$$\alpha = a + \alpha^0.$$

Na figura abaixo, $\alpha^0 = \angle POQ$:



Um ângulo α de lado tangente, decompõe-se em $\alpha = 0 + \alpha^0$.

Álgebra dos ângulos lunares. Sejam dois ângulos lunares $\alpha = a + \alpha^0$, $\beta = b + \beta^0$ de lado tangente comum $\overrightarrow{OP}$, situados do mesmo lado de $\overrightarrow{OP}$. Define-se a soma de α com β do seguinte modo:

$$\alpha + \beta = a + b + (\alpha + \beta)^0$$

onde $(\alpha+\beta)^0$ é ângulo de lado tangente de mesma natureza que α e β, e cujo lado curvilíneo tem curvatura igual à soma das curvaturas dos lados curvilíneos de α e β.

O conjunto $\mathcal{A}$ dos ângulos lunares fica assim munido duma estrutura de grupo ordenado. De facto $(\mathcal{A}, +)$ é um grupo ordenado, cujo elemento neutro é o ângulo de lado tangente de lado curvilíneo com curvatura igual a zero (isto é, o lado curvilíneo coincide com o rectilíneo). Ademais, como faz notar Klein, (op. cit.) qualquer ângulo lunar de lado tangente é inferior a qualquer ângulo de lados rectilíneos. Assim, um tal ângulo lunar é um infinitamente pequeno em relação aos ângulos rectilíneos. Ora, os ângulos lunares de lado tangente estão ordenados pela curvatura do lado curvo. Fica assim estabelecida uma hierarquia (ordem) dentro de uma classe de infinitamente pequenos — são absolutamente distinguíveis, explicitáveis uns em relação aos outros. Essa classe constitui um grupo ordenado arquimediano, assim como o conjunto dos ângulos de lado rectilíneo. Em suma, $(\mathcal{A}, +)$ é um grupo ordenado não-arquimediano, pois sendo $n \in \mathbb{N}$, arbitrário, e os ângulos lunares com $\gamma = 0 + \gamma^0$ e $\theta = t + \theta^0, t > 0$, qualquer, tem-se: $n\gamma < \theta$.

2.3 Ressurgimento das ideias

De acordo com o que se disse acima a propósito dos desenvolvimentos da geometria no século XIX, nos finais dos anos 1860 havia na Europa uma grande agitação[1], com o ressurgimento da geometria não euclidiana, com Riemann [], Klein [], Beltrami [], Poincaré,[], por um lado, e com a continuação do programa de rigorização da análise, iniciado com Bolzano [7] e Weirstrass [], continuado então por Dedekind e Cantor, por outro. Essa agitação

[1] Ver, por exemplo, Veronese, *Fondamenti* ou *Estudo Histórico e Crítico dos Fundamentos da Geometria* (*EHCFG*)[75].

terá sem dúvida levado a um interesse pelos sistemas ordenados não-arquimedianos de grandezas.

A geometria não euclidiana constituía o primeiro exemplo de uma geometria fundada sobre a chamada geometria absoluta e um postulado que implica a negação de um dos axiomas de Euclides, o já celebremente suspeito postulado das paralelas. É também o início do próprio desenvolvimento da teoria das axiomáticas (teoria dos modelos), com um salto qualitativo no sentido da rigorização (através da lógica) da própria axiomática: ao exibirem modelos que verificam todos os axiomas de Euclides, exceptuando-se o das paralelas, Beltrami e Klein estabeleceram, por um lado a não contradição relativa dos axiomas e, por outro lado, a independência desse axioma, método que veio a tornar-se corrente para situações similares.

Por outro lado, as primeiras construções dos números reais, em bases puramente algébrico-analíticas (Dedekind e outros), permitiram compreender a questão da continuidade, e pôs a nu vários conceitos relacionados[2]. O primeiro e mais importante aspecto foi ter-se mostrado que o princípio de continuidade de Dedekind, originalmente de inspiração geométrica mas aplicado ao conjunto dos números reais [16], podia ser usado como um axioma de continuidade da recta (Hilbert). O programa de reformulação dos axiomas da geometria, tendo em conta a sua natureza e a sua precedência numa lista (Pasch, Stolz, Veronese), permitiu analisar melhor as questões de independência relativa. A mais alta expressão de todo esse programa, de cariz puramente lógico, é sem dúvida os *Grundlagen* de Hilbert, aparecido em 1899.

No meio de toda essa emulação parece natural que, depois do postulado das paralelas de Euclides, as atenções se focassem no postulado de Arquimedes, o qual, embora não tendo sido claramente explicitado por Euclides, foi largamente por ele usado, nomeadamente na sua proposição I do livro V [42]. Os primeiros matemáticos a estudar claramente essa questão foram Veronese (1882) e Otto Stolz, que apresentou os resultados, em 1883, (ambos altamente influenciados pelos trabalhos de Cantor e Dedekind) nos quais estes últimos propõem axiomas de continuidade (embora nunca visando explicitamente o caso não-arquimediano). Stolz mostra que o axioma de Arquimedes não é uma consequência da noção de sistema ordenado de grandezas, visto que consegue exibir sistemas ordenados de grandezas não-arquimedianos — o próprio cálculo de du Bois-Reymond [1870-71] publicado alguns anos antes, fornecia um exemplo (tão bem como os ângulos cuniformes da antiguidade clássica). De facto, no seu livro *Allgemeine Functiontheorie*, distingue as grandezas «lineares» de grandezas «não lineares», atribuindo às primeiras a propriedade de verificação do axioma de Arquimedes. Porém, é difícil dizer se du Bois-Reymond de facto atribuiu às ordens de grandeza uma grande importância, uma vez que, o seu "*idealista*" não define grandezas *ip*, embora apresente algumas das propriedades dessas grandezas .

Em 1885, Stolz publica os seus *Vorlesungen uber Allgemeine Aritmetik*, apresentando de novo o seu modelo não-arquimediano, um sistema ordenado de funções, comparáveis através dos respectivos limites no infinito. Nesse livro caracteriza um sistema de grandezas, da seguinte maneira:

Gi) duas grandezas podem ser iguais ou desiguais e, neste caso, uma é maior que a outra;

Gii) as grandezas são adicionáveis, como os números naturais, em particular, a soma

[2] Ver Apêndice D.

de duas grandezas dum sistema é ainda uma grandeza do sistema;

Giii) $A < B$ sse existe no sistema uma grandeza X tal que $A + X = B$;

Giv) entre duas grandezas desiguais, existe ainda sempre uma grandeza do sistema, e existe, ao lado de toda a grandeza do sistema uma grandeza menor que ela, mas não há uma grandeza mínima.

Trata-se da caracterização dos racionais positivos, ordenados naturalmente, e algebrizados pela adição.

Para mostrar qual o papel do princípio de continuidade de Dedekind em tais sistemas, Stolz desenvolve a seguinte argumentação também usada por Veronese: seja (P_1, P_2) uma partição do sistema, e A um elemento de P_1, B um elemento de P_2 $(A < B)$. Tem-se os seguintes casos possíveis:

i) P_1 tem um último elemento e P_2 tem um primeiro elemento;

ii) P_1 tem um último elemento e P_2 não tem um primeiro elemento;

iii) P_1 não tem um último elemento e P_2 tem um primeiro elemento;

iv) P_1 não tem um último elemento e P_2 não tem um primeiro elemento;

O caso i) é excluído pela propriedade Giv) dos sistemas de Stolz. No caso iv), (A, B) é denominado por Stolz, de uma *lacuna*. Define então *sistema contínuo* como um *sistema sem lacunas*, e demonstra a seguinte propriedade importante:

Proposição 2.1 (Stolz) *Um sistema contínuo (no sentido de Dedekind) é arquimediano.*

Isto é, um sistema no qual, todo o conjunto não vazio limitado superiormente possui supremo (axioma de Dedekind), satisfaz o axioma de Arquimedes.

Num sistema com lacunas, Stolz considera dois casos: as *lacunas de primeira espécie*, e os *cortes*, nos casos em que, respectivamente, se tem:

Li) existe uma grandeza D tal que $B > A + D$, qualquer que seja A de P_1 e B de P_2

Lii) para toda a grandeza D, existe A de P_1 e B de P_2 tal que $B - A < D$

E finalmente prova que:

Proposição 2.2 (Stolz) *Um sistema pode ser completado através de cortes se e só se for arquimediano.*

A recíproca é verdadeira, isto é:

Proposição 2.3 (Veronese) *Se um sistema for arquimediano, então pode ser completado através de cortes.*

Stolz atribui este resultado a Veronese.

2.4 Dois posicionamentos: Poincaré e Schoënflies

Apresentam-se a seguir dois importantes posicionamentos sobre a geometria não-arquimediana, por parte de dois intervenientes no debate mencionando. Esses pontos de vista fornecem uma antevisão das ideias críticas da GNA em Hilbert e Veronese, respectivamente.

2.4.1 O ponto de vista de H. Poincaré

As ideias iniciais de Poincaré sobre a geometria não-arquimediana são apresentadas no seguimento da sua leitura dos *Grundlagen* de Hilbert, a quem atribui a originalidade da concepção. Essa atribuição é injusta visto que Veronese já houvera publicado (1891) os seus *Fondamenti*, depois de vários anos de divulgação de ideias sobre a geometria não-arquimediana [75].

A geometria não-arquimediana é, para Poincaré, essencialmente analítica: trata-se de um sistema não-arquimediano de coordenadas, digamos de dimensão 3, que serve para referenciar figuras geométricas num espaço mais complexo que o euclidiano. Assim o corpo de base duma geometria não-arquimediana é um corpo não-arquimediano.

A construção dum corpo não-arquimediano

Para construir um corpo não-arquimediano Poincaré indica, em primeiro lugar, que é preciso criar um conjunto Λ de números não-arquimedianos devidamente ordenado e algebrizado com operações de $+$ e $\times$ (compatíveis com a ordem — corpo ordenado), o que propõe seja feito em 3 passos:

1^o As regras aritméticas para a adição e a multiplicação (as leis comutativa, associativa, distributiva, etc..) aplicam-se sem qualquer alteração.

2^o As regras para o estabelecimento e a transformação de desigualdades também são mantidas (princípios lógicos de equivalência de equações).

3^o O axioma de Arquimedes não é aplicável.

O objectivo da criação de um tal corpo Λ é o de transferir a sua estrutura para a recta geométrica através de um isomorfismo de ordem conveniente.

Consegue-se um tal corpo Λ generalizando o corpo Ω de Hilbert[3], procedendo da seguinte forma: Λ é o conjunto das séries formais

$$A_0t^m + A_1t^{m-1} + A_2t^{m-2} + \dots$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $A_i \in \mathbb{R}$.

Sejam em Λ definidas as operações $+$ e $\times$ como as operações ordinárias de adição e multiplicação para as séries formais. Fica Λ um corpo, para o qual se deve definir a seguinte ordem: atribuindo a cada série $S \in \Lambda$ o sinal de A_0 e pondo $S_1 > S_2$ quando $S_1 - S_2 > 0$.

Esta ordem é compatível com a estrutura de corpo de Λ mas o axioma de Arquimedes já não é aplicável. Basta ver que se se considerar dois elementos, 1 e t, o primeiro adicionado a si próprio tantas vezes quanto se quiser mantém-se sempre inferior ao segundo. Tem-se sempre $t > n$, qualquer que seja o número natural n, visto que a diferença $t - n$ será sempre positiva pois o coeficiente do primeiro termo t, que, por definição, lhe dá o sinal, mantém-se sempre igual a 1.

É evidente que $\mathbb{R} \subset \Lambda$. Os novos números S estão intercalados, nas séries de números ordinários, de tal forma que se pode ter, por exemplo, uma infinidade de novos números menores que um número ordinário e maior que todos os números ordinários menores que o coeficiente A.

O espaço não-arquimediano

Com estas premissas, constrói-se um espaço a três dimensões no qual as coordenadas dos pontos são medidas, não pelos números ordinários mas por números de um corpo não-arquimediano, enquanto que as equações usuais das rectas e do plano são mantidas, assim

[3] Ver capítulo 3.

como as expressões analíticas para ângulos e comprimentos. É claro que neste espaço todos os axiomas da geometria absoluta permanecem verdadeiros, mas não o de Arquimedes.

Em toda a recta, pontos novos estariam intercalados entre os pontos ordinários. Se, por exemplo, r_0 é uma recta ordinária, e r_1 a correspondente recta não-arquimediana; se P é um ponto ordinário qualquer de r_0, e se este ponto divide r_0 em duas semirectas s e s' (P não pertencente a s nem a s'[4]); então haverá em r_1 uma infinidade de pontos novos quer entre P e s, quer entre P e s'. Existirá ainda em r_1 uma infinidade dos novos pontos que estarão à direita de qualquer ponto ordinário de r_0.

Resumindo, o espaço ordinário $\mathbb{R}^3$ é apenas uma parte deste espaço não-arquimediano.

Geometria não-arquimediana e intuição

Poincaré é um dos matemáticos que com melhor clareza expôs as ideias associadas à intuitividade (ou não intuitividade) das geometrias não-arquimedianas:

> *À primeira vista, a mente revolta-se contra concepções como esta (geometria não-arquimediana). Isso porque, por uma questão de hábito antigo, está à procura de uma imagem visual. Ela deve libertar-se desse preconceito se quiser atingir a compreensão, e isso é muito mais necessário aqui do que no caso da geometria não-euclidiana.*

Para Poincaré a concepção não-arquimediana do espaço é conceptualmente mais exigente (no sentido da profundidade da ruptura que se deve fazer com hábitos antigos de intuição espacial) do que a concepção não-euclidiana. Acrescenta:

> *Podemos observar, de passagem, que a geometria não-euclidiana respeita, por assim dizer, a nossa concepção qualitativa do contínuo geométrico, embora subvertendo as nossas ideias sobre a medição deste contínuo. A geometria não-arquimediana destrói este conceito através da dissecação do contínuo, pela introdução de novos elementos.*

Exímio defensor da intuitividade do espaço como motor da geometria[5], Poincaré acha estranho que Hilbert — a quem, como se disse, atribui inicialmente a paternidade da geometria não-arquimediana — não exprima nos seus *Grundlagen* o que significa, para a intuitividade do espaço, a concepção não-arquimediana. Escreve, quase em forma de lamento:

> *O Professor Hilbert tem apenas um objectivo em vista: construir um sistema de elementos capaz de comportar certas relações lógicas; e para ele é suficiente mostrar que estas relações não envolvem nenhuma auto-contradição.*[6]

---

[4] P é um ponto novo.

[5] Não no sentido estático de intuitividade ingénua, mas no sentido dinâmico do desenvolvimento da capacidade da mente humana para compreender e ter *insights* sobre novas formas e relações, e fazer delas um património cultural sempre crescente, sobre a qual se assentam novas intuições.

[6] Essa diferença de pontos de vista — logico-formalista de Hilbert e platonista intuitivo de Poincaré — agudiza-se com o tempo, o que não impede que estes dois monstros sagrados da geometria prossigam, cada um na sua senda, dando valiosos contributos no lançamento das bases da geometria moderna.

2.4.2 O ponto de vista de A. Schoënflies

Arthur Schöenflies, que muito participou nas discussões sobre a geometria não-arquimediana, inicia os seus contributos em artigos onde ele revê os fundamentos algébricos e geométricos da GNA de Stolz e de Veronese sobre a matéria. Vejamos as suas posições, expressas no artigo [67]:

Números transfinitos de Veronese

Seja η um número positivo tal que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, se tem $n\eta < 1$. O número η é um infinitamente pequeno (*ip*). O conjunto V_1 dos números da forma $a + b\eta$ com a, b números para os quais o postulado de Arquimedes não é verificado, é um conjunto de números transfinitos[7] de Veronese, do tipo mais simples:

$$V_1 = \{x : x = a + b\eta\}.$$

De uma maneira mais geral os números de Veronese constituem um conjunto de números transfinitos formados com recurso a um número finito de unidades transfinitas, infinitamente grandes (*ig*) e infinitamente pequenas (*ip*), como por exemplo o conjunto seguinte

$$V_2 = \{x : x = A_m\omega^m + A_{m-1}\omega^{m-1} + \ldots + a_1\omega + A_0 + a_1\eta + \ldots + a_n\eta^n\}$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ e onde as unidades ω (*ig*) e η (*ip*) são números transfinitos tais que para todo o número n finito se tenha

$$\omega^\lambda > n\omega^{\lambda-1}$$

e

$$\eta^\lambda < n\eta^{\lambda-1},$$

qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{N}$.

O postulado de continuidade de G. Veronese

O postulado de continuidade surge com a seguinte forma:

«— *Se um intervalo (segmento)* $\overline{XX'}$ *de um conjunto* S*, cujas extremidades variam, sempre em direcções opostas, se tornar indefinidamente pequeno*[8]*, existe sempre em* $\overline{XX'}$ *um elemento* Y *de* S*, diferente de* X *e de* X'*.*» (*FG*, p. 612, princípio IV).

Schöenflies nota que para que a continuidade assista a um conjunto de números transfinitos que seja formado com recurso a um número finito de unidades infinitamente grandes ou infinitamente pequenas, em particular, para os sistemas como os conjuntos V_1 e V_2 acima, a aplicação do postulado de Veronese impõe que o conjunto dos números a_n deve ser contínuo no sentido de R. Dedekind, podendo cada um dos coeficientes a_i bem como cada um dos coeficientes A_i ser escolhido arbitrariamente entre os números para os quais seja verificado o postulado de Arquimedes, podendo inclusivamente tomar apenas um número finito de valores. Em particular, para o conjunto V_1 de números da forma $a + b\eta$

[7] O termo "transfinito" é aqui utilizado em sentido diverso daquele que geralmente se lhe atribui, e que está associado aos transfinitos cantorianos.

[8] Para Veronese, as expressões "indefinidamente pequeno" (*idp*) e "infinitamente pequeno" (*ip*) têm significados diferentes, na medida em que, como convenciona [72], a primera expressão refere-se um processo potencialmente infinito (que aplicado a este caso particular resultaria num segmento potencialmente infinitésimo); a segunda expressão refere-se a um objecto infinitamente pequeno actual.

a condição a impor é que b pertença a um conjunto contínuo no sentido dos cortes de Dedekind, podendo os números a provir de um conjunto qualquer.

Os números transfinitos mais simples que correspondem ao conceito de contínuo de G. Veronese são formados recorrendo a um número infinito de unidades transfinitas; duma maneira mais precisa, são da forma

$$A_m\omega^m + A_{m-1}\omega^{m-1} + ... + a_1\omega + A_0 + a_1\eta + ... + a_n\eta^n + ...$$

e contêm um número finito[9] de potências de ω, mas uma infinidade de potências de η. Schöenflies nota que a restrição ao número de potências de ω, (número que deve ser finito) é essêncial para a manutenção das regras de cálculo, como pretende Veronese.

Corpo dos números de Veronese.

Seja $V = \{x : x = A_m\omega^m + A_{m-1}\omega^{m-1} + ... + a_1\omega + A_0 + a_1\eta + ... + a_n\eta^n + ...\}$ verificando as condições de continuidade acima. V é um conjunto de números transfinitos de Veronese.

Para que V seja munido da estrutura de corpo, Schöenflies, em primeiro lugar, define as operações $+$ e $\times$ em V considerando as operações $+$ e $\times$ usualmente definidas para séries inteiras formais. Depois nota que é preciso impor certas condições aos coeficientes A_i e a_i, em particular as de pertencerem a um corpo numérico ($\mathbb{Q}$, por exemplo). Se se impuser a condição de os coeficientes A_i e a_i pertencerem a um corpo contínuo (como $\mathbb{R}$, por exemplo) obtém-se números mais gerais que os elementos de V.[10]

Sobre a geometria projectiva não-arquimediana.

Nos seus *Fondamenti,* Veronese tem como um dos objectivos principais a construção sintética da geometria projectiva não-arquimediana (outro será a geometria multidimensional não-arquimediana). Mas, segundo Schöenflies, no cumprimento desse programa Veronese falha de novo num aspecto essencial: a continuidade (no sentido de Dedekind).

Schöenflies nota que o conjunto dos números de Veronese pode servir de base para a geometria projectiva, desde que não se saia do domínio das relações geométricas lineares visto que todas as operações racionais aplicam-se aos números de G. Veronese:

> *Mas quando se sai do domínio dos números racionais, os números de G. Veronese não são suficientes, apesar das suas propriedades de continuidade, na representação dos pontos, e isso até mesmo se se toma como coeficientes A_i e a_i que figuram nas expressões dos números de Veronese, todo os números ordinários (arquimedianos) possíveis.*
>
> *A causa profunda desta anomalia é que, na continuidade de G. Veronese, ao contrário da de R. Dedekind, aparecem lacunas às quais não corresponde nenhuma quantidade numérica do sistema contínuo. A continuidade de G. Veronese é, deste ponto de vista, num certo sentido, mais restrita que a de Dedekind.*

[9]Esta restrição aqui é essencial. G. Veronese, nos seus *Fondamenti,* dera um exemplo no qual figuravam números com uma infinidade de potências de ω. As regras habituais do cálculo não são mais aplicáveis a tais números; é, no fundo, a objecção de A. Schoënflies (*Atti Accad. Lincei Rendic. Mat.*(5) 6 II(1897) pág. 362) à introdução destes números.

G. Veronese e Tulio Levi-Civita (*Atti Accad. Lincei Rendic. Mat.*(5). 7 I(1898) pág. 79, 91, 113) observaram que a concepção geral dos números transfinitos de G. Veronese opõem-se à introdução desses números, que usou inadvertidamente num exemplo; a objecção de A. Schoenflies deixou então de ter razão de existência.

[10]Ver *corpos de Laugwitz,* por exemplo [69].

E Schöenflies cita como exemplo, o caso da determinação dos pontos duplos de duas pontuais projectivas situadas sobre a mesma recta. Tal determinação pode, em certos casos, ser ilusória por não existirem tais pontos (coincidiriam com lacunas). O mesmo problema pode-se colocar na determinação dos pontos de intersecção duma cónica com uma recta, ou em problemas gerais de intersecção. A resolução do problema deve passar pela introdução de novas unidades de modo a tornar possível a resolução dos diversos problemas da geometria projectiva.

Schöenflies propõe que para tal se tome como novas unidades potências fraccionárias de ω e de η nas quais os expoentes verificam certas condições e formando com estas novas unidades e as potências inteiras positivas de ω e η números mais gerais que os de G. Veronese[11].

2.5 Notícias sobre alguns desenvolvimentos

2.5.1 Sistemas ordenados não-arquimedianos de Hans Hahn

Confessadamente influenciado por Veronese, Hans Hahn procurou tirar consequências algébricas da estrutura geométrica da recta (forma fundamental) de Veronese e com isso lançou as bases para uma teoria geral dos corpos ordenados.

Terá sido o primeiro a classificar os conjuntos ordenados de arquimedianos e não-arquimedianos através de um grupo (o grupo de Hahn), lançando as bases para a teoria dos corpo valuados.[12]

As ideias de Hahn foram publicadas no artigo seminal "*Sobre sistemas não-arquimedianos de grandezas* (*Uber die Nichtarchimedishen Grossensysteme*, Sitzungsberichte der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der wissenschaften, Wien, Abteilung 2a, 116, 601-655)"[41]

Conjunto não-arquimediano de grandezas

Para Hahn, um conjunto não-arquimediano de grandezas, G é um grupo comutativo totalmente ordenado, em que a ordem é compatível com a adição. Num tal sistema de grandezas, estas podem ser colocadas em classes de equivalência totalmente ordenadas tais que para cada classe o axioma de Arquimedes seja válido. O *tipo de ordem* do conjunto de classes de equivalência é chamado por Hahn o *tipo de classe do sistema não-arquimediano* original. O conjunto de classes tem um *tipo de ordem (cantoriano)*, e é esse o tipo de classe do sistema não-arquimediano.

Proposição 2.4 *(Hahn 1907): existem sistemas não-arquimedianos de qualquer tipo de classe arbitrariamente fixado.*

Exemplo 2.1 *os números complexos (séries formais) com n unidades básicas e totalmente ordenados, são exemplos de sistemas não-arquimedianos de tipo de classe finito (ver adiante, exemplo 2.2).*

Proposição 2.5 *(Bettazzi 1890): qualquer sistema não-arquimediano de quantidades, de tipo de classe finito, pode ser representado aritmeticamente através de números complexos com n unidades.*

[11] Cf. A. Schöenflies, *Jaharesb. deutsch. Mat.-Ver, Erganzungsband* 2 (1908), p. 63.

[12] Ver anexo II a esta tese, "*Introdução a estruturas Dedekind-veronesianas do contínuo*".

Assumindo o princípio da boa ordenação, isto é, qualquer conjunto de grandezas pode ser bem ordenado, Hanh demonstra os seguintes resultados:

Proposição 2.6 *(Hahn 1907) Qualquer sistema não-arquimediano de quantidades pode ser representado por números complexos cujas unidades formam um conjunto totalmente ordenado, em geral infinito, em que o tipo de ordem do sistema de unidades é igual ao tipo de classe do sistema não-arquimediano.*

Exemplo 2.2 *Um sistema arquimediano é um tipo especial de sistema não-arquimediano, de tipo de classe igual a* 1*. Os números complexos (ordinários, elementos de* $\mathbb{C}$*) são um sistema não-arquimediano de tipo classe igual a* 2*, se se puser* $a+bi > a'+b'i$ *quando* $a > a'$*, e* $a+bi > a+b'i$ *quando* $b > b'$*. Todo o imaginário puro é "menor" que um número complexo não imaginário puro.*

Teorema 2.1 *(Hahn 1907) As grandezas de um sistema não-arquimediano arbitrário de grandezas (isto é, um grupo totalmente ordenado, abeliano) podem ser expressas como números complexos cujas unidades formam um conjunto ordenado* Γ*, e cujo tipo de ordem é o tipo de classe do sistema não-arquimediano.*

Em cada um desses números complexos, as unidades com coeficientes não nulos formam em Γ um conjunto bem-ordenado. Hahn obtém a adição somando os coeficientes de unidades iguais. A ordem é obtida estabelecendo que entre dois destes números complexos, o maior é aquele no qual a primeira unidade que não tem coeficientes iguais em ambos os números complexos, tem o coeficiente maior (isto é, a ordem lexicográfica).

Uma parte importante da construção de Hahn é aquela em que a cada elemento de G é associado uma soma, obtida do seguinte modo:

(1) considerar um conjunto de unidades e_α, que formam um conjunto Γ, do mesmo tipo de ordem que G e que são ordenados por "nível";

(2) considerar qualquer conjunto infinito dos e_α com esta ordem, e associando um real número a cada e_α;

(3) escrever o resultado como uma soma

$$a_{\alpha_1}e_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_n}e_{\alpha_n}.$$

Contudo, cada uma dessas somas pode ser vista como uma soma infinita que contém como parcelas as outras "unidades", com coeficiente zero, ordenadas segundo o nível.

A questão da completude

No processo acima descrito para associar símbolos a um sistema não-arquimediano G, pode acontecer que faltem elementos de G para alguma escolha de números reais numa soma. Nesse caso o sistema diz-se *incompleto.* Quando existe sempre um elemento de G qualquer que seja a tal "soma", o sistema é *completo.*[13]

Pode-se escolher os sistemas arquimedianos de Hahn dos grupos totalmente ordenados, impondo que sejam os sistemas com classe tipo 1. Então, diz ele, pode-se escolher fora deste, os sistemas arquimedianos completos, impondo o axioma da completude de Hilbert, aplicada ao seu sistema de grandezas, que enuncia na forma seguinte: "*não será possível, juntando novas quantidades às quantidades do nosso sistema, obter um sistema totalmente*

[13] Hahn prova que esta definição é independente da escolha da boa ordem das "unidades".

ordenado mais simples, no qual as seis condições relativas à adição continuem possíveis[14], *sem que disso resultem novas classes de quantidades"*. O que se exige é que nenhuma extensão de um sistema arquimediano possa ser feita preservando os axiomas de grupo ordenado.

Para os sistemas não-arquimedianos completos, diz Hahn, apenas é necessário requerer que o sistema tenha um tipo de classe diferente de 1, e requerer a mesma condição de completude.

Teorema 2.2 *(Hahn 1907) Um sistema arquimediano completo não difere de modo essencial do sistema de números reais.*

O corpo não-arquimediano de grandezas de Hahn

Hahn mostra que a multiplicação e a divisão podem ser introduzidas como se segue: suponha-se que se tem um grupo totalmente ordenado G, e um conjunto Γ totalmente ordenado de elementos básicos para elementos de G. Suponha-se ainda, que não apenas G mas também Γ é um grupo ordenado, ie. que há uma adição em G compatível com a sua ordem. Como anteriormente Γ e G devem ser do mesmo tipo de ordem. Dados os elementos $a_{\alpha_1}e_{\alpha_1}$ e $a_{\alpha_2}e_{\alpha_2}$ de G, tem-se, para o produto

$$a_{\alpha_1}e_{\alpha_1} \cdot a_{\alpha_2}e_{\alpha_2} = a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}e_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Sabe-se que $e_{\alpha_1+\alpha_2} \in \Gamma$, visto que Γ é um grupo.

Hahn prova ainda que quando α_1 e α_2 variam independentemente num conjunto bem ordenado, o conjunto de todos os $e_{\alpha_1+\alpha_2}$ resultantes é um conjunto bem-ordenado, e além disso que todo o $\alpha_1 + \alpha_2$ pode ser obtido como uma soma de elementos de Γ apenas de um numero finito de maneiras.

Sejam $A = \sum a_{\alpha_\beta}e_{\alpha_\beta}$ e $B = \sum b_{\alpha_\beta}e_{\alpha_\beta}$ dois elementos de G. Para determinar o coeficiente de um e_α arbitrário de G no produto AB de A e B, expressa-se α como uma soma dos dois elementos de Γ de todas as maneiras possíveis. O número de maneiras será finito, como atrás se disse e assim tem-se

$$\alpha = \alpha_{(11)} + \alpha_{(21)} = \ldots = \alpha_{(1n)} + \alpha_{(2n)}.$$

O coeficiente de e_α em AB é

$$a_{\alpha_{(11)}}b_{\alpha_{(21)}} + \ldots + a_{\alpha_{(1n)}}b_{\alpha_{(2n)}}.$$

Hahn mostra que para todo o par de elementos g_1 e g_3 de G , g_1 diferente do zero de G, existe um elemento g_2 de G (quociente de g_3 por g_1) tal que $g_1g_2 = g_3$, onde g_1g_2 são determinados pela multiplicação definida acima. Fica assim demonstrado que G, com sua a adição e subtracção definidas acima é um corpo ordenado (com compatibilidade de multiplicação e ordem) quando a multiplicação e a divisão são definidas como acima.

Finalmente, Hahn toma a identidade aditiva e_0 de Γ e identifica o sistema de número reais com os elementos ae_0 onde a é real. Então **todo** o número positivo do seu sistema não-arquimediano, cuja classe é mais alta que e_α, é mais alto que todo na múltiplo de a, e pode ser denominado *infinitamente grande actual*, em relação a todo o número das classes inferiores. Semelhantemente, todo múltiplo por n de um número cuja classe é mais baixa que e_α é *infinitamente pequeno actual*, em relação aos números das classes superiores.

[14] Válidas.

2.5.2 Hensel, Kurshack e Tate: geometria não-arquimediana dos números

Nesta secção pretende-se clarificar a intuição geométrica que está presente nas geometrias não-arquimedianas dos números p-ádicos[15], que constituem exemplos da vasta classe de geometrias não-arquimedianas.

Geometria dos números p-ádicos

Os números p-ádicos foram criados em 1905 por K. Hensel (1861-1941), e constituem uma das mais notáveis extensões do conceito de número. Os corpos $\mathbb{Q}_p$ de números p-ádicos são extensões não-arquimedianas do conjunto $\mathbb{Q}$, ao contrário do conjunto $\mathbb{R}$ que constitui uma extensão arquimediana de $\mathbb{R}$.

Assim como a análise matemática é fundada no conjunto $\mathbb{R}$, existe uma análise (não-arquimediana) fundada nos corpos $\mathbb{Q}_p$. Por outro lado, assim como as geometrias clássicas completas são fundadas no isomorfismo entre a recta e o Conjunto $\mathbb{R}$, existem geometrias não-arquimedianas e incompletas no sentido de Dedekind, baseadas nos corpos $\mathbb{Q}_p$.

Ao criar a teoria dos números p-ádicos, Hensel veio a permitir uma transferência para a aritmética das grandes ideias da análise, e em particular dos desenvolvimentos em série, num quadro que não é o das funções a uma variável real ou complexa, mas o dos "espaços analíticos rígidos", como J. Tate baptizou em 1961 o referido quadro. Tate é considerado o pai da moderna teoria não-arquimediana das funções, depois de ter sistematizado a área, na senda de J.Kurschak (1913), A.Ostrowski (1918), R.Strassmann e W. Schobe (1930) e M.Krasner, nos anos 1940.[10]

Distâncias p-ádicas Seja p um número primo. Qualquer inteiro m não nulo pode escrever-se

$$m = p^{\alpha} m'$$

em que m' é um inteiro não divisível por p, e α é um inteiro ≥ 0.

Definição 2.1 *Diz-se que o número α é a valuação p-ádica de m e escreve-se $v_p(m)$. Tem-se portanto*

$$v_p(m) = 0 \text{ se } p \text{ não divide } m.$$

Proposição 2.7 *(i)* $v_p(-m) = v_p(m)$
(ii) $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.

Proposição 2.8 *(desigualdade ultramétrica)* $v_p(m+n) \geq \min(v_p(m), v_p(n))$ *se* $m+n \neq 0$, *sendo* $v_p(m) < v_p(n)$.

[15] Uma geometria não-arquimediana não comutativa de números tem sido proposta por Paulo Almeida [Série de conferências proferidas no Departamento de Matemática da Universidade de Évora, 2003], onde desenvolve uma geometria dos idelos e adelos.

Dem. Para o provar, escrevamos $m = p^\alpha m'$, $n = p^\beta n'$, em que p não divide nem m' nem n'; suponha-se por exemplo $\alpha \geq \beta$; então

$$m + n = p^\beta(p^{\alpha-\beta}m' + n').$$

Como pode acontecer que p divida $p^{\alpha-\beta}m' + n'$ quando $\alpha = \beta$, pode-se dizer apenas que $v_p(m+n) > \beta$; todavia, se $\alpha > \beta$, tem-se a igualdade $v_p(m+n) = \min(v_p(m), v_p(n))$. ∎

Defina-se agora, para qualquer inteiro m, o valor absoluto p-ádico, $|m|_p$:

Definição 2.2 *para* $m = 0$, *põe-se* $|0|_p = 0$*; se não, toma-se*

$$|m|_p = p^{-v_p(m)}$$

Da definição 2.1, mais a proposição 2.7, deduz-se então para $m \neq 0$, $n \neq 0$,

Proposição 2.9 *(i)* $|m|_p = 1$ *se* $m \neq 0$ *e* p *não dividir* m*;*
(ii) $|-m|_p = |m|_p$ *;*
(iii) $|mn|_p = |m|_p \cdot |n|_p$.

Nota 2.1 *As relações (ii) e (iii) desta proposição, são ainda verdadeiras se* $m = 0$ *ou* $n = 0$.

Finalmente,

Proposição 2.10 *para todos os inteiros* m, n, *tem-se*

$$|m + n|_p \leq \max(|m|_p, |n|_p) \leq |m|_p + |n|_p .$$

Dem. Evidente por definição, se $m = 0$ ou $n = 0$ ou $m + n = 0$ ou como consequência imediata de (18).∎

Pode-se finalmente definir sobre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros uma distância

Definição 2.3

$$d(m, n) = |m - n|_p ;$$

A verificação dos axiomas das distâncias resulta imediatamente das definições e das relações (i) e (ii) da proposição 2.9; $d(m, n)$ é a distância p-ádica de m a n.

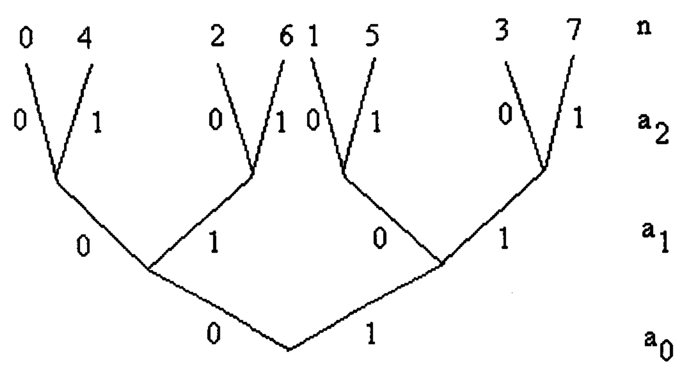
Esta distância tem propriedades muito diferentes da distância habitual $|m - n|$ e que podem parecer estranhas; se um inteiro $a \neq 0$ não for divisível por p, tem-se $|a^n|_p = 1$ para qualquer $n \geq 0$; pelo contrário $|p^n|_p = p^n$ tende para 0 quando n tende para $+\infty$. Isso mostra também que para dois números primos diferentes p, q as distâncias d_p e d_q não são equivalentes.

Árvores p-ádicas Em virtude da propriedade ultramétrica dos números p-ádicos, uma geometria que tenha por base um corpo de números p-ádicos é muito diferente da geometria real, seja ela euclidiana ou não euclidiana.

Exemplo 2.3 *Dado um triângulo num espaço p-ádico, nenhum dos seus lados pode ser maior que os outros dois, donde resulta que todos os triângulos são isósceles. Também, cada um dos pontos de um círculo está equidistante da circunferência do bordo.*

Exemplo 2.4 *Num espaço vectorial normado p-ádico, dadas três bolas que infinitamente próximas, existe sempre um plano que (num sentido bem preciso) separa uma das bolas das outras duas.*

Estes exemplos mostram que a geometria usual não ajuda a intuir os espaços p-ádicos. Uma maneira visual simples de representar os p-ádicos, é através de árvores. Considere-se, por exemplo, $p = 2$. Qualquer inteiro natural tem uma representação escrita na base 2, e identifica-se portanto com um ramo de uma árvore diádica (figura abaixo):



Esta figura deve ler-se do modo seguinte: qualquer inteiro n compreendido entre 0 e 7 escreve-se de uma única maneira $n = a_0 + 2a_1 + 4a_2$ com a_0, a_1 e a_2 pertencendo ao conjunto com dois elementos $\{0, 1\}$. Para associar a um número inteiro n um ramo da árvore, começa-se esse ramo à esquerda se $a_0 = 0$, à direita se $a_0 = 1$, e continua-se do mesmo modo à esquerda ou à direita segundo o valor de a_1 e assim de sucessivamente. Cada inteiro natural é assim identificado a um ramo da árvore.

Para representar a ultramétrica p-ádica (2-ádica, neste caso) entre dois ramos A, B desta árvore, basta ver em que nível estes se separam. Os dois ramos estão por definição tanto mais afastados um do outro quanto mais próximo da raiz da árvore está o ponto em que se separam. Verifica-se facilmente que dois ramos estão tanto mais próximos quanto a diferença entre os inteiros correspondentes for divisível por uma maior potência de 2. É evidente que se os ramos A e C coincidem até ao nível k, e os ramos B e C coincidem até ao nível l, então os ramos A e B coincidem pelo menos até ao nível p, em que p é o mais pequeno dos números k e l.

Apesar da geometria p-ádica envolver uma intuição diferente da usual para o espaço físico, por exemplo, hoje é aceite que tais espaços podem ter um papel importante nas escalas de espaço e de tempo extremamente pequenas consideradas pela física das partículas.

Desde Hensel, que se sabe utilizar ideias de análise e de geometria nas investigações aritméticas. Um dos principais resultados foi obtido por Ostrowski, que mostrou que, a única maneira de completar o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais é construir a recta real $\mathbb{R}$ (correspondente ao valor absoluto $|\cdot|_\infty$ ou os corpos $\mathbb{Q}_p$, com os valores absolutos $|\cdot|_p$. Algumas das aplicações fundamentais dos números p-ádicos derivam deste resultado: por exemplo, uma forma quadrática de coeficientes racionais representa 0 em $\mathbb{Q}$ (isto é, anula-se para determinados racionais que não são todo nulos) se e apenas se ela representa 0 em $\mathbb{R}$ e em todos os corpos $\mathbb{Q}_p$. Pode deduzir-se daqui que, se o número de variáveis que figuram numa forma quadrática com coeficientes racionais é pelo menos igual a cinco, esta forma representa 0 em $\mathbb{Q}$ a partir do momento em que representa 0 em $\mathbb{R}$. Um corolário deste último resultado é o teorema de Lagrange, que afirma que qualquer inteiro positivo é a soma de quatro quadrados.

2.5.3 Ideia da GNA não-comutativa de Alain Connes

Introdução

A ideia de base da geometria analítica é, desde Descartes, reduzir o estudo de espaços geométricos ao estudo das álgebras de polinómios, ou mais geralmente, das álgebras de funções reais ou complexas. Como uma grandeza física, função do estado de um sistema, corresponde a um operador, torna-se natural quantificar a geometria, isto é, introduzir noções quânticas na geometria, substituindo o corpo de base pela álgebra dos operadores sobre um espaço de Hilbert.

Esta intuição surgiu em primeiro lugar a Alain Connes e nos ultimos vinte anos tem-se assistido a um interesse crescente em relação à geometria não-comutativa (ou quântica), quer na matemática, quer na física. Na abordagem fundacional de Connes, funcional analítica, as estruturas não comutativas suaves aparecem nos duais das algebras-$*$ não-comutativas[16]. Com efeito são bem conhecidas as dualidades

$$\text{espaços} \longleftrightarrow \text{álgebras comutativas}$$

$$\text{espaços produto} \longleftrightarrow \text{álgebras não comutativas}$$

A geometria não-comutativa é baseada na noção de triplo espectral (real) $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra-$*$ não comutativa, $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert no qual a álgebra $\mathcal{A}$

[16]Recorde-se que uma álgebra $\mathcal{A}$ (complexa) é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, munido de um produto

$$\cdot : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}; (a,b) \mapsto a \cdot b = ab$$

distributivo em relação à adição.

O produto $\cdot$ não é, em geral, comutativo.

Uma álgebra unitária possui um elemento $\mathbb{I}$ tal que $a\mathbb{I} = \mathbb{I}a$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Uma algebra-$*$ é uma álgebra munida duma aplicação antilinear de involução:

$$* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

tal que:

$$a^{**} = a; (ab)^* = b^* a^*; (\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$$

para $a, b \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, (a barra representa a conjugação).

é realizada como uma álgebra de operadores limitados, e D é um operador em $\mathcal{H}$, com as propriedades convenientes, e que contém a informação considerada geométrica. Está provado que a toda a variedade riemanniana M fechada de dimensão n, está associado um triplo espectral canónico, com $\mathcal{A} = C^\infty M$, a álgebra das funções complexas suaves em M; $\mathcal{H} = L^2(M, S)$, o espaço de Hilbert das secções de quadrado integrável do fibrado spinorial irreductível sobre M; e D o operador de Dirac associado à conexão de Levi-Civita da métrica.

O interesse desta referência à geometria de A. Connes, é o facto de esta ser não-arquimediana, no sentido que abaixo se vai precisar.

Infinitamente pequenos

No seu livro de resultados "*Non comutative Geometry*" [14], Connes mostra uma das mais relevantes consequências da quantificação geométrica é o facto de a sua geometria não comutativa ser não-arquimediana, isto é, admitir elementos infinitamente pequenos actuais, que são os operadores compactos.

Com efeito, seja $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ a álgebra dos operadores compactos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Um operador no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito de ordem finita se o complemento ortogonal do seu espaço nulo é de dimensão finita. Basicamente, um tal operador é uma matriz de dimensão finita, mesmo se $\mathcal{H}$ tiver dimensão infinita. Um operador T em $\mathcal{H}$ é *compacto* se puder ser aproximado em norma, por operadores de ordem finita, ou o que é equivalente, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe um sub-espaço de dimensão finita E de $\mathcal{H}$ tal que

$$\|T|_{E^\perp}\| < \varepsilon.$$

Neste sentido, os operadores compactos são infinitamente pequenos. A ordem de grandeza do operador compacto *ip*, $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ é dada pelo comportamento da sucessão $\{\mu_n(T)\}$ para n suficientemente grande, de acordo com a

Definição 2.4 *Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}^+$, os ip de ordem α são todos os operadores $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tais que, para n suficientemente grande,*

$$\mu_n(T) = O(n^{-\alpha}).$$

A definição é equivalente à seguinte condição

$$\exists C < \infty : \mu_n(T) \leq Cn^{-\alpha}, \forall n \geq 1,$$

que evidencia o carácter não-arquimediano da geometria não comutativa de Connes.

Tal como Leibniz, Connes usa os seus infinitesimais para derivar e integrar, o que lhe permite fazer geometria de variedades, dum ponto de vista absolutamente novo.

CAPÍTULO 3

A geometria não-arquimediana de Hilbert

3.1 Introdução

Aproveitando a grande emulação em redor do tema da GNA do seu tempo, Hilbert desenvolveu uma parte significativa dos seus *Grundlagen*, expressamente sem recurso ao axioma de Arquimedes. O programa era simples: mostrar a possibilidade lógica de uma tal geometria e levar tão longe quanto possível as consequências dessa possibilidade. Para tal mostrou que boa parte dos temas e resultados clássicos são independentes do axioma de Arquimedes.

Contudo, Hilbert acabou por abrir novos universos, criando sistemas algébricos não-arquimedianos próprios, bem como geometrias não-arquimedianas especiais (não pascalianas, não arguesianas,...). Neste capítulo pretende-se fazer uma visita aos seus resultados publicados nos *Grundlagen*, incluindo os apêndices, acrescentados nas sucessivas edições.

Como ponto de partida para o estudo das questões relacionadas com a geometria não-arquimediana de Hilbert, coloca-se em dois temas básicos: as questões de continuidade e completude geométrica, por um lado, e as questões de consistência das geometrias e independência dos grupos de axiomas, por outro. Vai-se tratar dessas questões nesta introdução.

3.1.1 O contínuo hilbertiano: axiomas de Arquimedes e de Dedekind-Hilbert

O contínuo surge na geometria de Hilbert sob a forma de dois postulados que constituem o grupo V, denominados, axiomas de completude (ou de continuidade), a saber:

V1. (*Axioma da medida ou axioma de Arquimedes*). *Se* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *são dois segmentos quaisquer, então há na recta* $\overleftrightarrow{AB}$ *um número finito de pontos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *tais que os segmentos* $\overline{AA_1}, \overline{A_1\, A_2}, ..., \overline{A_{n-1}\, A_n}$ *são congruentes com o segmento* $\overline{CD}$ *e* B *está entre* A *e* A_n .

V2. (*Axioma da completude linear*). *Os pontos de uma recta a constituem um sistema, com as suas relações de ordem e congruência, que já não pode ser ampliado, se se quer manter as relações entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais* *de ordem linear e congruência que resultam dos axiomas I-III e V1.*

Têm-se relações entre os dois axiomas:

i) O axioma da completude não é uma consequência do de Arquimedes, como se pode ver em modelos apresentados por Hilbert;

ii) A manutenção de todos os axiomas I-III e teoremas correspondentes, mas não o axioma de Arquimedes, impossibilita a introdução de um axioma de completude, sob pena de contradição[].

Os dois axiomas de completude podem ser substituídos pelo axioma de completude de Dedekind-Hilbert, em presença dos restantes axiomas, como se faz usualmente nas versões modernas da axiomática de Hilbert:

Axioma da completude de Dedekind-Hilbert *Supondo que uma recta r é a união de dois conjuntos não vazios , $r = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de tal modo que nenhum ponto de Σ_1 está entre dois pontos de Σ_2 e vice versa, então existe um único ponto $O \in r$ tal que, para quaisquer pontos P_1, P_2 de r, O está entre P_1 e P_2 sse $O \neq P_1$, $O \neq P_2$ e um dos pontos P_1, P_2 está em Σ_1 sse o outro está em Σ_2;*

O axioma de Arquimedes, mais os restantes axiomas, não garantem a existência de pontos aderentes, portanto, de processos de limite. Mas o axioma de Dedekind-Hilbert mais os restantes, que já garante a completude da recta, (à semelhança da completude à Dedekind do conjunto dos números reais) implica o axioma de Arquimedes.

A completude de um espaço geométrico geral (de qualquer número de dimensões), é estabelecida por Hilbert no seu teorema geral da completude, que abaixo se enuncia. Porém, como nota o próprio Hilbert, o seu colaborador, P. Bernays, demonstrou a suficiencia da completude linear para todos os casos.

Teorema 3.1 (geral da completude) *Os elementos da geometria (isto é, os pontos, rectas e planos) constituem um sistema que já não pode ser ampliado por meio de pontos, rectas e planos, se se quer manter os axiomas de incidência e de ordem, o primeiro axioma de congruência e o axioma de Arquimedes ; eles constituem pois um sistema que já não pode ser assim ampliado se se quer manter todos os axiomas.*

Este teorema é demonstrado recorrendo de forma essencial ao axioma da completude V2 e ao axioma de incidência I7:

I 7. *Se dois planos α, β têm um ponto comum A, então têm pelo menos, mais um outro ponto comum.*

Este axioma limita a dimensão do espaço a 3.

Em relação papel do axioma I7 na completude, Hilbert diz:

«— *Na verdade pode-se mostrar que a um sistema de elementos que verifique os axiomas I-V, podem juntar-se sempre, pontos, rectas e planos, de tal modo que para o sistema resultante desta composição sejam válidos os mesmos axiomas com excepção do axioma I 7; isto é, um teorema da completude, no qual o axioma I 7, ou um axioma equivalente não estivesse contido, envolveria uma contradição.*»

Portanto, para a demonstração da completude geral (do espaço) é necessário o axioma de Arquimedes, como se referiu acima, e o axioma da dimensão I7. A completude, à Dedekind, global (no sentido geral do teorema) em dimensão superior é por isso impossível. Hilbert acaba por sentenciar que a completude à Dedekind não assiste à 4^adimensão. Uma geometria quadridimensional é não-clássica por incompleta no sentido de Dedekind-Hilbert. Ver-se-à mais adiante que Veronese tinha a intuição desse facto.

3.1.2 Consistência e independência dos modelos hilbertianos

Para provar que os axiomas dos cinco grupos não estão em contradição entre si, Hilbert construiu um modelo simples para esses axiomas recorrendo ao método da geometria analítica e assumindo a consistência da teoria dos números reais, anteriormente bem fundamentada por Cantor (através do recurso a um axioma de completude topológica, que se socorre das sucessões de Cauchy, [ver apêndice IV,[49]]) e Dedekind (com os seus célebres cortes).[1]

Para tal considerou o sistema algébrico[2] Ω de todos os números algébricos que resultam de, partindo do número 1, efectuar um número finito de vezes as quatro operações de adição, subtracção, multiplicação, divisão e a operação $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$ com ω um número obtido por meio das cinco operações.

Substituindo nos axiomas:

i) "ponto de Ω" por "$(x, y) \in \Omega^2$";

ii) "recta de Ω" pelo "*ratio* ou proporção $(u : v : w)$ de três números u, v, w de Ω" (u, v não simultaneamente nulos);

iii) "incidência do ponto (x, y) na recta $(u : v : w)$" pela "existência da igualdade $ux + vy + w = 0$"

Os números do domínio Ω são todos reais pelo que Ω é um conjunto ordenado arquimediano. Sendo assim Hilbert estabeleceu a seguinte relação de ordem linear entre os novos pontos e rectas: sendo (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ pontos quaisquer de uma recta r, põe-se

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) < (x_3, y_3), \ldots$$

se $x_1 < x_2 < x_3, \ldots$ ou $y_1 < y_2 < y_3, \ldots$.

Para a relação de ordem no plano, como exige o axioma II4, procedeu da seguinte forma: dada a recta $(u : v : \omega)$, ela divide o plano em duas regiões, uma dos pontos (x, y) para os quais $ux + vy + \omega < 0$ e outra dos pontos (x, y) para os quais $ux + vy + \omega > 0$.

---

[1](i) Como seria natural, recorreu à insuspeita aritmética cuja consistência seria "naturalmente" mais fácil de demonstrar. Acalentaria esse sonho até ao fim da sua vida profissional, altura em que Gödel demonstrou que a consistência da aritmética é indemonstrável: Hilbert faleceu em 1942 e os teoremas de incompletude de Gödel foram publicados em 1931.

Hilbert viria a ser criticado pelos seus contemporâneos pelo facto de se ter socorrido de um modelo analítico e não de um sintético para demonstrar tal independência. O próprio Klein deu-se a esse exercício tendo elaborado o modelo dos ângulos lunares (ver Capítulo 2). Mas do ponto de vista puramente lógico é absolutamente irrelevante a utilização de um modelo algébrico, geométrico, ou de "mesas, cadeiras e canecas de cerveja".

Do ponto de vista da maximalidade, Hilbert foi criticado por Poincaré pelo facto de o seu modelo não representar todo o espaço mas apenas as partes que podem ser construídas com régua e compasso. Por outro lado, foi mais tarde demonstrado que é possível usar um sub-modelo do modelo de Hilbert para o efeito em questão (possivelmente as partes do espaço constructíveis apenas com uma régua graduada).

(ii) Por outro lado, recorde-se as noções de consistência e de independência de uma teoria: seja T uma teoria numa certa linguagem $\mathcal{L}$ e seja φ uma sentença de $\mathcal{L}$. Então se existir uma dedução em T que leva a concuir φ, escreve-se $T \vdash \varphi$. T é inconsistente se existir em T uma sentença φ tal que $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$. No caso contrário diz-se que T é consistente. Prova-se em lógica que se T for uma teoria compatível (isto é, se tiver, pelo menos, um modelo ou realização que satisfaça os seus axiomas), então T é consistente.

Uma sentença φ é relativamente consistente com T se $T + \varphi$ for consistente ou se T for inconsistente, e φ é independente de T se $T \nvdash \varphi$ e $T \nvdash \neg\varphi$, pelo que, no caso em que T é consistente, φ é independente de T se e só se φ e $\neg\varphi$ forem relativamente consistentes com T.

[2]Na verdade, um corpo.

Para os axiomas de congruência (deslocamento de segmentos e ângulos) é suficiente aplicar as transformações conhecidas da geometria analítica:
i) Translação de um ponto (x, y) para um ponto (x', y')

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

aplicável na deslocação de segmentos e ângulos;
ii) Simetria (em relação à recta $y = 0$)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

iii) Rotação de centro no ponto $O = (0, 0)$ e ângulo $\angle COE$ (onde $E = (1, 0)$ e $C = (a, b)$) de um ponto qualquer (x, y), resulta no ponto (x', y') dado pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y \\ y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y \end{cases}$$

que são elementos de Ω visto que $\sqrt{a^2 + b^2} = b\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = b\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \in \Omega$.

Assim tornou-se evidente que o modelo

$$(\Omega^2 = \{(x, y)\}, \{(u : v : w)\}, <_\Omega, \equiv_\Omega),$$

onde $\equiv_\Omega$ representa as três últimas transformações acima descritas, (x, y) representa os pontos do plano Ω^2, $(u : v : w)$ representa as rectas do plano Ω^2, verifica todos os axiomas de incidência, ordem, congruência e o de Arquimedes. O axioma da completude não é satisfeito, pois Ω não é um corpo completo no sentido de Dedekind. No entanto, como é conhecido desde os primórdios deste método, qualquer contradição nas consequências dos axiomas lineares e planos I–IV, V1 têm de forçosamente ser reconhecível na aritmética do sistema algébrico ordenado Ω. Isto é: se a aritmética de Ω for não contraditória, então a geometria do modelo $(\Omega^2 = \{(x, y)\}, \{(u : v : w)\}, <_\Omega, \equiv_\Omega)$, assim como qualquer outra fundada nos axiomas I–IV, V1 é igualmente contraditória.

É claro que se for $\Omega = \mathbb{R}$ então a geometria Ω^2 é a geometria cartesiana plana ordinária, pois o axioma da completude é também satisfeito, como Hilbert faz questão de demonstrar por redução ao absurdo: o seu argumento começa por recordar os seguintes resultados demonstráveis na geometria da congruência:

— Todo o segmento $\overline{AB}$ é divisível num número $n \in \mathbb{N}$, de partes congruentes:

$$\forall \overline{AB} \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n}\overline{AB} \in \Omega$$

— Se um segmento $\overline{AB}$ é menor do que um segmento $\overline{AC}$, então também a n-ésima parte de $\overline{AB}$ é menor do que a n-ésima parte de $\overline{AC}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{AB} < \overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{n} < \frac{\overline{AC}}{n}$$

Supõe em seguida, com vista a uma contradição, que existe uma recta g na qual, contrariamente ao axioma de completude, se possam juntar novos pontos aos da geometria inicial sem que, sobre g fique perturbada a validade dos axiomas I 1-2, II, III, V 1. Seja P um desses pontos novos. Ora P divide g em duas semirectas, cada uma, das quais, pelo axioma de Arquimedes, contém também pontos que existiam antes da ampliação (pontos velhos). Assim P parte os pontos velhos de g em duas semirectas. Com g representada na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = mt + n \\ y = pt + q \end{cases}$$

onde o parâmetro $t \in \mathbb{R}$ então, a partição gerada por P, fornece um corte de Dedekind dos valores de t. Para um tal corte, tem-se: ou a primeira classe determinada por ele tem um último elemento, ou a segunda classe tem um primeiro elemento. Seja A o ponto de g, correspondente ao primeiro elemento da segunda classe. Entre A e P não está, portanto, nenhum ponto velho.

Por outro lado, há um ponto velho B tal que P está entre A e B. Pelo axioma de Arquimedes, há ainda um número finito n de pontos diferentes $P, C_1, C_2, ..., C_i, D$ tais que os n segmentos $\overline{AP}, \overline{PC_1}, \overline{C_1C_2}, ..., \overline{C_iD}$ são congruentes entre si e tais que B está entre A e D. Divide-se então o segmento $\overline{AB}$ em n partes congruentes. Todos os pontos de divisão são pontos velhos; seja W aquele, entre esses, que está mais próximo de A. Pelas propriedades da ordem linear e da congruência assumidas, tem-se que o segmento $\overline{AW}$ é menor do que $\overline{AP}$, porque $\overline{AB}$ é menor do que $\overline{AD}$. O ponto velho W está portanto entre A e P. A hipótese de que se pode juntar a g um ponto P, sem perturbar a validade dos axiomas lineares, conduziu por consequência a uma contradição.

Conclui-se então que a geometria analítica cartesiana cumpre *todos* os axiomas lineares e planos de I a V, o que se pode generalizar sem dificuldade para a geometria do espaço. Como a aritmética do corpo dos números reais em que ela se baseia é supostamente não contraditória, então, como qualquer outro modelo dos axiomas I–V, a geometria cartesiana é não contraditória.

Finalmente Hilbert observa que, embora existindo um número infinito de geometrias que satisfazem aos axiomas I–IV, V1, apenas uma delas, a geometria cartesiana, é completa no sentido de Dedekind, isto é, que satisfaz o axioma V2 de completude.[3]

Depois de mostrar a consistência dos seus axiomas, Hilbert enceta a tarefa de demonstrar a independência mútua de cada grupo de axiomas. A independência dos grupos I, II, III e IV é estabelecida de forma rápida e elementar. Porém, tudo muda nos *Grundlagen* a partir do momento em que Hilbert mostra a independência dos axiomas de continuidade, V1 , ou axioma de Arquimedes, e V2 ou axioma da completude. A partir daí toda a geometria dos *Grundlagen* é não-arquimediana[4]

[3] Na realidade o processo de Hilbert é generalizável. Um modelo dos axiomas I–IV e V_1 é obtido no corpo numerável $\mathbb{R}_0$ de todos os números algébricos reais, em vez dos números reais. Então $\mathbb{R}_0$ pode ser restringido ainda mais ao seu subcorpo $\mathbb{P}_0$ da seguinte forma:

Seja $\mathbb{F}$ um corpo qualquer. Uma extensão de $\mathbb{F}$ da forma $\mathbb{F}(\sqrt{1+\lambda^2})$ com $\lambda \in \mathbb{F}$ é dita uma *extensão pitagórica* de $\mathbb{F}$, e $\mathbb{F}$ é dito um *corpo pitagórico* se toda a extensão pitagórica de $\mathbb{F}$ coincide com $\mathbb{F}$ (por exemplo $\mathbb{R}_0$ e $\mathbb{R}$ são pitagóricos).

É fácil ver que I–IV são satisfeitos na "geometria analítica" sobre qualquer corpo pitagórico. Por outro lado, pode-se construir um corpo pitagórico minimal contendo um corpo dado (o fecho pitagórico do referido corpo) da mesma maneira que se constrói o fecho algébrico de um corpo qualquer.

O corpo $\mathbb{P}_0$ *é definido como sendo o fecho pitagórico de* $\mathbb{Q}$.

[4] Desenvolvendo aquilo que Poincaré designou de "parte não elementar" dos *Grundlagen.*

O que se propõe para a secção seguinte é um "passeio" pela construção dessa geometria não-arquimediana (GNA), bem como por outras que surgem através da negação de axiomas ou de grupos de axiomas, seguindo a par e passo a emergência do pensamento hilbertiano, ao longo da sua obra fundacional, os *Grundlagen.*

3.2 Geometria não-arquimediana de Hilbert

3.2.1 Introdução

Para a investigação das relações geométricas na GNA, Hilbert introduziu, o por ele denominado, *cálculo de segmentos*, isto é, um sistema numérico não-arquimediano, que se considera como *um sistema complexo especial*[5]. Define as noções de segmento e de razão de segmentos, assim como a adição e a multiplicação dos segmentos. Em particular, introduz um *sistema numérico arguesiano*, ou seja um sistema numérico não-arquimediano, no qual a multiplicação de segmentos não é comutativa. Através desses sistemas numéricos constrói na GNA a teoria da semelhança das figuras, a teoria das áreas, e as outras teorias clássicas.

Por outro lado, sabe-se, desde Euclides, que a teoria das áreas dos polígonos, que constitui a base da teoria elementar da medida das áreas das figuras no plano arquimediano, baseia-se na noção de *equicomplementabilidade*, que na GNA, é mais geral, em relação à noção de *equidecomponibilidade* (equivalência por decomposição em pares de triângulos congruentes — ver definições 3.7 e 3.8).

Nos parágrafos seguintes vai-se dar uma vista de olhos pelas propostas de Hilbert nesse âmbito.

3.2.2 Um modelo analítico de GNA de Hilbert

Hilbert chama ao axioma de Arquimedes, V1 , *axioma de continuidade* porque, segundo ele, "*torna possível a introdução do conceito de continuidade na geometria*".[6]

Para provar a independência do referido axioma, Hilbert parte do corpo de números algébricos Ω definido no número 3.1.2[7], com vista a construir um novo corpo não-arquimediano. A seguir toma o corpo $\Omega(t)$ das funções algébricas numa variável t sobre o corpo Ω (polinómios em t), e novamente com as cinco operações indicadas no número 3.1.2 (onde ω é agora qualquer função gerada pelas cinco operações). $\Omega(t)$ é o corpo ordenado procurado, uma vez nele definido uma ordem total da seguinte maneira: para duas funções a e $b, a > b$ ou $a < b$, conforme for a função de t, $c = a - b$ sempre positiva ou sempre negativa para t suficientemente grande. Como para qualquer n racional positivo, a função $n - t$ é

[5]Um sistema de "números complexos" é aquilo que na linguagem moderna se chama uma *álgebra real*, e um "número complexo", *uma série formal.*

[6]Obviamente Hilbert se refere à continuidade à Dedekind, que assiste ao conjunto dos números reais que, intencionalmente, quer transferir para as rectas da sua geometria. Ora, como já era conhecido no seu tempo, o axioma de Arquimedes não é uma consequência dos axiomas dos restantes grupos da geometria euclidiana. Portanto, Hilbert admite a continuidade à Dedekind (que implica o axioma de Arquimedes) como uma propriedade intrínseca da sua geometria.

[7]Embora nessa altura já tivesse conhecimento da obra de Veronese (a que se refere numa nota de rodapé) Hilbert prefere não recorrer ao modelo de Veronese para demonstrar a independência do axioma de Arquimedes. Para tal teria que previamente verificar se a Geometria não arquimediana de Veronese verifica os axiomas I-IV.

sempre negativa para t suficientemente grande, logo $n < t$ para todo o n, o que demonstra que o axioma de Arquimedes não é válido em $\Omega(t)$, enquanto que todos os outros grupos de axiomas (incidência, ordem e congruência) são satisfeitos. Assim acaba a demonstração da independência do axioma de Arquimedes dos restantes axiomas[8], ao mesmo tempo que obtém uma *geometria «não-arquimediana»*, na qual são verificados todos os axiomas, com excepção do axioma de continuidade, como mostram as propriedades dos números $\Omega(t)$ acima discutidas, e que pode ser representado assim:

$$((\Omega(t))^3 = \{(x, y, z)\}, \{(u : v : w : r)\}, <_{\Omega(t)}, \equiv_{\Omega(t)}).$$

Hilbert também estudou (ou sugeriu o estudo de) o efeito do axioma de Arquimedes no carácter não-euclidiano das geometrias. Atente-se a um excerto dos seus *Grundlagen* sobre esta matéria:

> *«Também são de fundamental importância as geometrias não-arquimedianas e ao mesmo tempo não-euclidianas e, em particular, é do mais alto interesse o papel que o axioma de Arquimedes desempenha na demonstração dos teoremas de Legendre. A pesquisa que, sob o meu estimulo, M. Dehn*[9] *empreendeu acerca deste assunto, conduziu a um completo esclarecimento da questão. As pesquisas de M. Dehn alicerçam-se nos axiomas I-III. Só no final do trabalho de Dehn — e para que a geometria de Riemann (elíptica) também ficasse incluída no domínio de investigação — é que os axiomas II de ordem foram encarados duma maneira mais geral do que no presente livro, a saber :*
>
> *Quatro pontos A, B, C, D duma recta repartem-se sempre em dois pares A, C e B, D tais que A, C e B, D são "separados" e reciprocamente. Cinco pontos sobre uma recta podem sempre designar-se por A, B, C, D, E de tal modo que o par A, C é separado por B,D e por B, E e que o par A, D é separado por B, E e por C, E, etc.*
>
> *Com base nestes axiomas I-III, portanto, sem utilizar a continuidade, M. Dehn demonstra em seguida, uma versão mais larga do segundo teorema de Legendre, teorema 39 [49]:*
>
> *Se nalgum triângulo a soma dos ângulos é respectivamente maior, igual ou menor do que dois rectos, então ela é assim também em cada triângulo.*
>
> *No trabalho citado também se demonstra o seguinte complemento ao primeiro teorema de Legendre, teorema 35 [49]:*
>
> *Da hipótese de infinitas paralelas a uma recta que passem por um ponto, não resulta, se se exclue o axioma de Arquimedes, que a soma dos ângulos no triângulo seja menor do que dois rectos. Mais: há por um lado, uma geometria (a geometria não-legendriana) na qual por um ponto se podem conduzir infinitas paralelas a uma recta e em que, contudo, são válidos os teoremas da geometria*

[8] Seguindo a nota anterior, pode-se dizer que independência de V_2 é mostrada pela geometria $\mathbb{R}_0$ ou pela geometria $\mathbb{P}_0$.

A independência de V1 decorre da existência de corpos pitagóricos não arquimedianos: o fecho pitagórico de qualquer corpo não arquimediano (por exemplo, o corpo das funções racionais a uma variável, sobre $\mathbb{Q}$, com uma valuação não arquimediana).

[9] «Os "Teoremas de Legendre" sobre a soma dos ângulos no triângulo *Math. Ann.*, Bd. 53, 1900.»

de Riemann (elíptica); e há, por outro lado, uma geometria (a geometria semi-euclideana) na qual há infinitas paralelas a uma recta passando por um ponto e em que, apesar disso, são válidos os teoremas da geometria euclideana.

Da hipótese de que não há paralelas resulta sempre que a soma dos ângulos no triângulo é maior do que dois rectos.

Noto finalmente que, quando se introduz o axioma de Arquimedes, o axioma das paralelas pode ser substituído pela condição de que a soma dos ângulos no triângulo deva ser igual a dois rectos.»

Nas secções seguintes vai-se ver como Hilbert desenvolve tópicos clássicos fundamentais da geometria, sem recurso ao Axioma de Arquimedes, obtendo resultados a todos os títulos surpreendentes, como por exemplo o seguinte:

Proposição 3.1 *Na geometria não-arquimediana existem triângulos que, respectivamente, têm iguais medidas de altura e base, são equicomplementáveis, mas não são equidecomponíveis.*■

3.2.3 Cálculo não-arquimediano das proporções

Introdução: uma teoria não-arquimediana de segmentos proporcionais

O seu objectivo é o de fundamentar a teoria das proporções de Euclides, apenas com os axiomas I–IV. Antes de iniciar a investigação nessa matéria, Hilbert deixa claro (§13, *Grundlagen*[10]) o conceito de número que vai utilizar, acabando por apresentar uma (a primeira) axiomática para corpos ordenados, isto é, isomorfos ao corpo ordenado dos números reais. O que tem em vista é a construção de um corpo ordenado de segmentos, isomorfo aos sistemas numéricos construidos por Cantor e Dedekind.

O papel fundamental do teorema de Pascal nessa construção é o de permitir a demonstração das propriedades da multiplicação de segmentos e criar o referido corpo, sem recorrer ao axioma de Arquimedes[11]. Com esse corpo de segmentos Hilbert encontra-se armado para recriar a teoria euclidiana das proporções[12], sem recurso ao axioma de Arquimedes, o que constitui uma inovação.

O teorema fundamental da teoria das proporções é o teorema dito de Thales, com o enunciado seguinte:

Proposição 3.2 (teorema de Thales) *se duas rectas paralelas cortam, nos lados de um ângulo, os segmentos a, b, a', b', a proporção $a : b = a' : b'$ é satisfeita. Reciprocamente, se quatro segmentos a, b, a', b' satisfazem a proporção $a : b = a' : b'$ e são referentes aos lados de um ângulo, as rectas que ligam as extremidades de a e de b às de a' e b' são paralelas.*

A demonstração deste teorema, dada por Euclides, baseia-se na procura de uma parte aliquota de segmentos com o mesmo suporte; no caso dos segmentos incomensuráveis tal demonstração exige o recurso a um axioma de continuidade à Dedekind, portanto de alguma forma ao axioma de Arquimedes []. O recurso ao teorema de Pascal vai mostrar que o teorema de Thales é independente do axioma de Arquimedes.

[10] Todas as referências aos *Grundlagen* reportam-se às edições portuguesas, [46], [49].

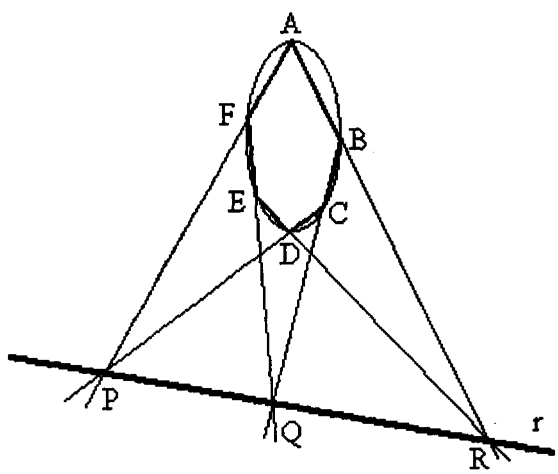
[11] Hilbert consegue assim esse desiderato, de forma simples, muito loge do método muito complexo usado por Veronese.

[12] Ou melhor, *"teoria dos segmentos proporcionais"*, segundo Paul Rossier [47].

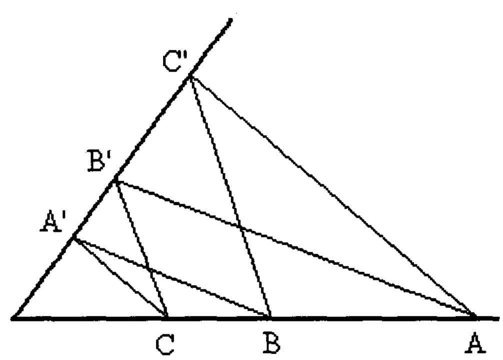
O teorema de Pascal

O teorema de Pascal é um teorema da geometria projectiva[13] e é uma proposição sobre um hexágono inscrito numa cónica[14]:

Teorema 3.2 (Pascal, geral) *Dado um hexágono $[ABCDEF]$, inscrito numa cónica, cada um dos três pares de rectas que contêm os três pares de lados opostos, intersectam-se em pontos, P, Q, R, que estão situados sobre uma mesma recta, r:*



Obs: nada obriga a que o hexágono seja regular, ou mesmo convexo. O teorema continua válido mesmo no caso de a cónica se encontrar degenerada em duas rectas. O caso a que Hilbert recorre é aquele em que a recta que contém os pontos de intersecção é uma recta no infinito, isto é, em que os lados opostos do hexágono são paralelos. Nesse caso o teorema de Pascal pode ser enunciado como se segue:



[13] Dual do teorema de Brianchon: dado um hexágono circunscrito numa cónica as rectas que unem vértices opostos(diagonais) intersectam-se num único ponto.

[14] É ineressante notar que Veronese, também trabalhou com o hexagrama "místico" antes de entrar pelos caminhos não-arquimedianos. Hilbert recorre ao teorema de Pascal — um teorema sobre o hexagrama — exactamente para se livrar do axioma de Arquimedes.

Teorema 3.3 (Pascal, restrito) *Sejam A, B, C, A', B', C' dois ternos de pontos respectivamente sobre cada uma de duas rectas que se intersectam num ponto distinto de qualquer daqueles pontos; se $\overline{CB'}$ é paralelo a $\overline{BC'}$ e $\overline{CA'}$ paralelo a $\overline{AC'}$, então é também $\overline{BA'}$ paralelo a $\overline{AB'}$.*

Esta forma do teorema de Pascal era já conhecida de Papo, pelo que na maior parte da literatura aparece associado a esse nome. Assim, doravante adoptar-se-à, para este resultado, a designação de "teorema de Papo-Pascal".

Para fundamentar a sua teoria das proporções Hilbert recorre unicamente ao caso especial do teorema de Papo-Pascal em que os pontos A, B, C estão no mesmo raio a partir de O e em que se tem

$$\overline{OC} \equiv \overline{OA'} \Leftrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC'}$$

Cálculo não-arquimediano de segmentos com recurso ao teorema de Papo-Pascal

O teorema de Papo-Pascal permite-lhe introduzir na geometria um sistema algébrico ordenado de segmentos no qual são válidas todas as regras de cálculo para os números reais.

Adaptando a linguagem geométrica à numérica, através da substituição do símbolo "$\equiv$", de congruência, pelo símbolo "$=$", usado no sistema dos números reais, introduz a:

Definição 3.1 (Soma de segmentos, ordem) *Se três pontos A, B, C estão sobre uma recta e B está entre A e C então representa-se por $c = \overline{AC}$ a soma dos dois segmentos $a = \overline{AB}$ e $b = \overline{BC}$ e põe-se:*

$$c = a + b.$$

Os segmentos a e b dizem-se menores que c, simbolicamente

$$a < c, \quad b < c$$

e c diz-se maior do que a e b, simbolicamente

$$c > a, \quad c > b.$$

Proposição 3.3 (Propriedades da soma de segmentos) *para a adição de segmentos definida acima são válidas as leis associativa*

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

e comutativa

$$a + b = b + a.$$

Define, como classicamente, o produto dum segmento a por um segmento b, através da seguinte construção:

Definição 3.2 (produto de segmentos) *escolhe-se em primeiro lugar um segmento qualquer, fixo de uma vez por todas, designado por* 1 . *Desloca-se para um dos lados dum ângulo recto e a partir do vértice* O, *o segmento* 1 *e também a partir de* O, *o segmento* b; *em seguida desloca-se para o outro lado o segmento* a. *Unindo as extremidades dos segmentos* 1 *e* a *por uma recta e conduzindo uma paralela a essa recta pela extremidade do segmento, esta determinará um segmento* c *no outro lado do ângulo.* c *é o produto do segmento* a *pelo segmento* b *e é designado por*

$$c = ab.$$

Nas proposições seguintes, Hilbert demonstra propriedades da multiplicação de segmentos acima definida:

Proposição 3.4 *Na multiplicação de segmentos definida em 3.2 é válida a lei comutativa*

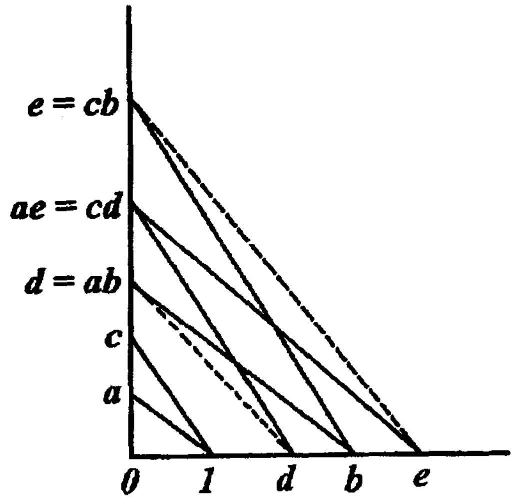
$$ab = ba.$$

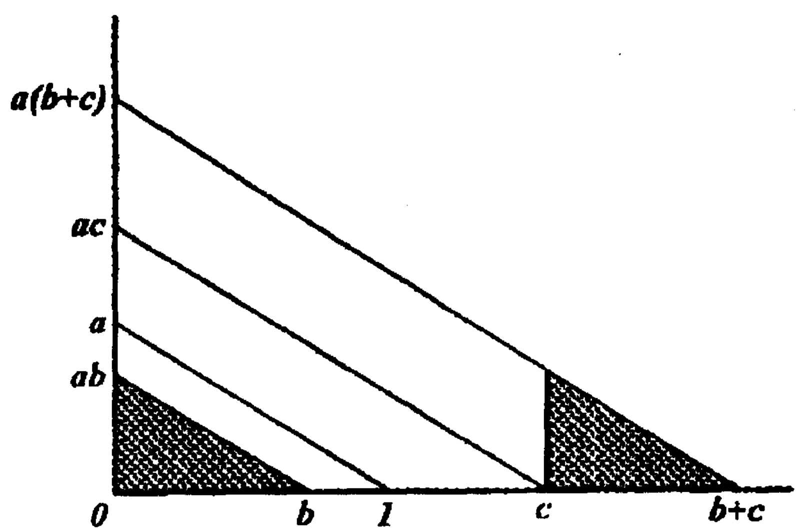
Na demonstração, importante para se compreender o papel do teorema de Papo-Pascal nesta teoria, Hilbert diz: «*Para este fim construamos primeiramente, da maneira acima indicada, o segmento* ab. *Além disso, desloquemos o segmento* a *para o primeiro lado do ângulo recto e o segmento* b *para outro lado; unamos a extremidade do segmento 1 com a extremidade do segmento* b, *que está no outro lado, por meio duma recta, e tracemos uma paralela a esta recta pela extremidade de* a *que está no primeiro lado: esta paralela determina o segmento* ba *sobre o outro lado — e, de facto, este segmento* ba *coincide, como mostra a figura, com o segmento* ab *anteriormente construido, em vista do paralelismo das linha auxiliares a tracejado, paralelismo que é consequência do teorema de Pascal. Também, reciprocamente, da lei comutativa no nosso cálculo de segmentos, resulta, como imediatamente se verá, que, o que foi chamado o caso especial do teorema de Pascal, é seguramente válido para as figuras onde as semirectas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OA'}$ *formam um ângulo recto*».

Proposição 3.5 *Na multiplicação de segmentos definida em 3.2 são válidas as leis associativa e distributiva*

$$\begin{aligned} a(bc) &= (ab)c. \\ a(b+c) &= ab + ac \end{aligned}$$

Um breve exame das figuras abaixo (extraídas dos *Grundlagen*), basta para se certificar da veracidade desta proposição:





Definição 3.3 (quociente de segmentos) *Se b e c são segmentos quaisquer, então há sempre um segmento a, tal que $c = ab$; este segmento a representa-se por $\frac{c}{b}$ e chama-se quociente de c por b.*

Isto acaba a construção hilbertiana de um sistema algébrico ordenado de segmentos isomorfo ao sistema dos números reais.

Teoria não-arquimediana das proporções

No sistema algébrico ordenado de segmentos que acabou de construir, Hilbert fundamentou a teoria de *Euclides* das proporções, sem o recurso ao axioma de Arquimedes do seguinte modo:

Definição 3.4 (proporção) *Se a, b, a', b' são quaisquer quatro segmentos, a proporção:*

$$a : b = a' : b'$$

é equivalente à igualdade de segmentos

$$ab' = ba'.$$

Definição 3.5 (semelhança de triângulos) *Dois triângulos dizem-se semelhantes quando os seus ângulos se podem fazer corresponder de tal modo que, ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Teorema 3.4 *Se a, b e a', b' são lados correspondentes em dois triângulos semelhantes, então tem-se a proporção*

$$a : b = a' : b'.$$

Corolário 3.1 (Teorema fundamental da teoria das proporções (Tales)) *Se duas paralelas intersectam os lados dum ângulo qualquer nos segmentos a, b, a', b', respectivamente, então é válida a proporção*

$$a : b = a' : b'.$$

Reciprocamente, se quatro segmentos a, b, a', b' verificam esta proporção, e a, a' e b, b' são dois a dois deslocados para cada um dos lados dum ângulo qualquer, então as rectas que unem os pontos extremidades de a, b e a', b', respectivamente, são paralelas entre si.

3.2.4 O modelo geral de geometria analítica não-arquimediana de Hilbert

Ao sistema de segmentos considerado, Hilbert associa um sistema de segmentos orientados, do seguinte modo: escolhe na recta ordenada um sentido *positivo* e um sentido *negativo;* ao segmento $\overline{AB}$ associa um segmento a, quando B ficar no sentido positivo a partir de A, e no caso contrário associa $\overline{AB}$ a $-a$; um ponto qualquer é designado o segmento 0. O segmento a diz-se *positivo* quando for maior do que 0, $a > 0$; o segmento $-a$ diz-se *negativo* quando menor do que 0, $-a < 0$.

Obtém uma extensão do cálculo de segmentos onde são válidas todas as regras de cálculo para os números reais. Em particular, tem-se

Proposição 3.6 *i)* $a.1 = 1 - a = a$ e $a.0 = 0.a = 0$.
ii) Se $ab = 0$, então é, ou $a = 0$, ou $b = 0$.
iii) Se $a > b$ e $c > 0$, então resulta sempre $ac > bc$.
iv) Além disso, se $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-l}, A_n$ são n pontos numa recta, então a soma dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ é igual a 0.

Com o objectivo de representar analiticamente uma recta num plano cartesiano, constrói um sistema de eixos ortogonais, num plano α, com duas rectas perpendiculares entre si passando por O. Cada ponto do plano α é univocamente determinado pelas suas coordenadas x, y que podem ser segmentos positivos, negativos ou 0.

Seja l uma qualquer recta do plano α, passando por O e por um ponto C com as coordenadas a, b e sejam x, y as coordenadas dum ponto qualquer P de l. Então encontra-se facilmente, a partir do teorema 3.1, como equação da recta l,

$$a : b = x : y,$$

ou

$$bx - ay = 0.$$

Se l', for uma paralela a l que intersecta no eixo dos X o segmento c, então obtem-se a equação da recta l', substituindo o segmento x pelo segmento $x - c$ na equação da recta l; a equação desejada é portanto

$$bx - ay - bc = 0.$$

A partir destas considerações conclui-se, independentemente do axioma de Arquimedes, que

Proposição 3.7 *Toda a recta num plano, representa-se por uma equação linear nas coordenadas x, y, e reciprocamente, que toda a equação linear representa uma recta, sendo os coeficientes segmentos considerados na geometria em questão.*

Para obter a geometria analítica euclidiana usual, é porém necessário introduzir o axioma de Arquimedes. Nesse caso, pode-se fazer corresponder aos pontos duma recta qualquer no espaço, números reais, da seguinte maneira, indicada por Hilbert:

[...] *escolhe-se sobre a recta dois pontos quaisquer a que se faz corresponder os números* 0 *e* 1, *definindo assim um segmento unitário; depois dividindo ao meio o segmento* 01 *e designando o ponto médio correspondente por* $\frac{1}{2}$, *em seguida o ponto médio do segmento* $O\frac{1}{2}$ *por* $\frac{1}{4}$ *etc. ; depois de ter usado* n *vezes este processo, chega-se a um ponto a que corresponde o número* $\frac{1}{2^n}$. *Desloquemos, agora, o segmento* $O\frac{1}{2^n}$ *partindo do ponto* O, *quer para o lado do ponto* 1 *quer para o outro lado, por exemplo,* m *vezes, e demos aos pontos que se obtêm os valores numéricos* $\frac{m}{2^n}$ *e* ,$-\frac{m}{2^n}$ *respectivamente.»*

A partir do axioma de Arquimedes pode-se facilmente concluir (com base nesta correspondência) que

Proposição 3.8 *A qualquer ponto da recta se pode fazer corresponder um número real, duma maneira unívoca, e de tal modo que esta correspondência tem a seguinte propriedade: se A, B, C são três pontos quaisquer da recta e α, β, γ, os correspondentes números reais e se B está entre A e C, então estes números satisfazem ou à desigualdade $\alpha < \beta < \gamma$ ou a $\alpha > \beta > \gamma$.*

A recíproca desta proposição, isto é, se *a todo o número real também corresponde um ponto da geometria*, não é verdadeira, pois depende de ser ou não válido o axioma de completude V2, na geometria em questão.

Pelo contrário,

Proposição 3.9 *Se numa geometria só se supõe a validade do axioma de Arquimedes, então é sempre possível ampliar o sistema de pontos, rectas e planos por meio de elementos «irracionais», de modo que para cada recta da geometria resultante, a cada sistema de três números reais satisfazendo à equação dessa recta corresponda, sem excepção, um ponto.*

Isto é, trata-se duma geometria incompleta, no sentido de Dedekind. Uma geometria que verifique o axioma de completude de Dedekind é isomorfa à geometria cartesiana real:

Proposição 3.10 *A geometria analítica cartesiana usual é única, a menos de isomorfismo.*

3.2.5 Aplicação: teoria não-arquimediana das áreas planas

Após a introdução de uma teoria não-arquimediana de segmentos proporcionais, fundada nos axiomas I 1-3 e II-IV, Hilbert propõe um estudo das áreas planas, fundado nos mesmos axiomas. A teoria proposta é também "*uma das mais notáveis aplicações do teorema de Papo-Pascal na geometria elementar*" [49].

Equidecomponibilidade e equicomplementabilidade

São fundamentais as definições seguintes:

Definição 3.6 (decomposição de um polígono) *Unindo dois pontos dum polígono simples, P, por uma poligonal qualquer que exista toda no interior do polígono e não contenha nenhum ponto duplo, obtêm-se dois novos poligonos simples P_1 e P_2 cujos pontos interiores estão todos no interior de P; diz-se que P está decomposto em P_1 e P_2 ou P_1 e P_2 compõem P.*

Definição 3.7 (equidecomponibilidade) *Dois polígonos simples dizem-se equidecomponíveis, quando se podem decompor num número finito de triângulos congruentes entre si, dois a dois.*

Definição 3.8 (equicomplementabilidade) *Dois polígonos simples P e Q dizem-se equicomplementáveis quando se puder juntar-lhes um número finito de polígonos equidecomponiveis dois a dois $P', Q'; P'', Q''; ..., P''', Q'''$ de modo que os dois poligonos $P + P' + P'' + ... + P'''$ e $Q + Q' + Q'' + ... + Q'''$ desse modo compostos, sejam equidecomponíveis entre si.*

Destas definições resulta imediatamente:

Proposição 3.11 *Por composição de polígonos equidecomponíveis resultam ainda polígonos equidecomponíveis, e quando de polígonos equidecomponíveis se retiram polígonos equidecomponíveis então os polígonos restantes são equicomplementáveis.*

Além disso, tem-se:

Proposição 3.12 *Se dois polígonos P_1, e P_2 são equidecomponíveis com um terceiro polígono P_3 então P_1, e P_2 são equidecomponíveis entre si.*

Proposição 3.13 *Se dois polígonos são equicomplementáveis com um terceiro, então são equicomplementáveis entre si.*

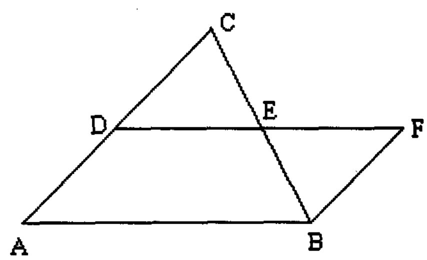
Isto é, as relações de equidecomponibilidade e de equicomplementabilidade são relações de equivalência.

Definindo de maneira usual, as noções de rectângulo, base e altura dum paralelogramo, base e altura dum triângulo, tem-se:

Proposição 3.14 *Dois paralelogramos com a mesma base e a mesma altura são equicomplementáveis.*

Além disso, é válida a conhecida proposição:

Proposição 3.15 *Todo o triângulo $\triangle ABC$ é sempre equidecomponível com um paralelogramo com a mesma base e metade da altura.*



Teorema 3.5 (fundamental da teoria das áreas planas, $\Rightarrow$) *Dois triângulos com a mesma base e com mesma altura são equicomplementáveis.*

Dem. resulta imediatamente dos teoremas 3.14 e 3.15, e com a intervenção do teorema 3.12.■

Como é sabido desde Euclides, mostra-se facilmente, que

Proposição 3.16 *Dois paralelogramos e, portanto, (pelas proprosições anteriores) também dois triângulos, com as mesmas bases e mesmas alturas são sempre equidecomponíveis.*

A demonstração é feita em Euclides. Note-se porém que *a demonstração não é possível sem a utilização do axioma de Arquimedes.* Na verdade, tem lugar a seguinte

Proposição 3.17 *Em todo o modelo de geometria não-arquimediana, existem triângulos possuindo a mesma base e a mesma altura que (pelo teorema 3.5, são equicomplementáveis e que) não são equidecomponíveis.*

Veja-se a demonstração de Hilbert:

«De facto desloquem-se, numa geometria não-arquimediana, para uma semirecta dois segmentos $\overline{AB} = e$ e $\overline{AD} = a$, para os quais não haja nenhum número inteiro n que satisfaça à relação:

$$ne \geq a.$$

Das extremidades do segmento $\overline{AD}$ levantem-se as perpendiculares $\overline{AC}$ e $\overline{DC'}$ de comprimento e. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABC'$ são, pelo teorema 3.5, equidecomponíveis por ampliação. Do teorema 23 [49][15] resulta que a soma de dois lados dum triângulo é maior do que o terceiro lado, entendendo-se a soma de dois lados no sentido do cálculo de segmentos introduzido no capitulo terceiro.

[15] "Em todo o triângulo, ao maior lado está oposto o maior ângulo".

Portanto é $\overline{BC} < e + e = 2e$. *Além disso pode demonstrar-se a seguinte proposição sem usar a continuidade:*

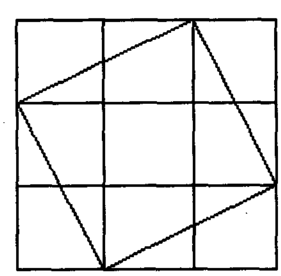
— Um segmento que fique completamente no interior dum triângulo é menor do que o maior dos seus lados.

Por consequência, cada segmento que esteja no interior do triângulo $\triangle ABC$ *é menor do que* $2e$.

Suponhamos agora que seja dada uma decomposição dos triângulos $\triangle ABC$ *e* $\triangle ABC'$ *num número finito de partes, por exemplo cada um em* k *triângulos, congruentes entre si dois a dois. Cada lado dum triângulo parcial utilizado na decomposição do triângulo* $\triangle ABC$ *está ou no triângulo* $\triangle ABC$ *ou sobre um dos seus lados, isto é, é menor do que* $2e$. *O perímetro de cada triângulo parcial é portanto menor do que* $6e$*; a soma de todos estes perímetros é portanto menor do que* $6ke$. *As decomposições dos triângulos* $\triangle ABC$ *o* $\triangle ABC'$ *devem dar o mesmo perimetro soma, e, por isso, a soma dos perímetros dos triângulos parciais utilizados na decomposição do triângulo* $\triangle ABC'$ *deve ser menor do que* $6ke$. *Porém, nesta soma está com certeza, completamente compreendido o lado* $\overline{AC'}$, *isto é, deve ser* $\overline{AC'} < 6ke$ *e daqui e pelo teorema 23 [Grundlagen] tem-se:* $a < 6ke$. *Isto contradiz a nossa hipótese relativa aos segmentos* e *e* a. *A hipótese da possibilidade duma decomposição dos triângulos parciais congruentes entre si conduziu-nos, portanto a um contradição.»*

Os teoremas sobre a equicomplementabilidade da geometria elementar são corolários dos resultados acima.

Exemplo 3.1 *Tem-se, em particular, o teorema de Pitágoras:*



Proposição 3.18 *Para um dado triângulo (e portanto também para todo o polígono simples) pode-se sempre construir um triângulo rectângulo que possui um cateto unidade e que é equicomplementável com o triângulo (com o polígono).*

Teorema 3.6 (fundamental da teoria das áreas planas, $\Leftarrow$**)** *Se dois triângulos equicomplementáveis tem bases iguais, então têm também alturas iguais.*

Este teorema fundamental, encontra-se no primeiro livro de Euclides como o 39.^{o}teorema; entretanto, para a sua demonstração, Euclides faz apelo ao postulado geral sobre grandezas:

"*O todo é maior do que uma sua parte*"

um método que implica a introdução dum novo axioma geométrico sobre equicomplementabilidade.

Ora, sem um tal novo axioma, Hilbert consegue estabelecer o teorema 3.6 e por consequência a teoria das áreas planas, seguindo o mesmo caminho, isto é, unicamente com o auxílio dos axiomas do plano e sem utilização do axioma de Arquimedes. Para analisar isto, temos necessidade da noção de medida de área.

Para continuar a teoria, necessário se tornou, definir, nesse quadro, uma noção de área de um triângulo.

Definição hilbertiana de área

Definição 3.9 (orientação) *Numa geometria plana uma recta $\overleftrightarrow{AB}$ divide os pontos que não estão sobre ela em dois conjuntos de pontos: um destes conjuntos é desgnado por "à direita da semirecta $\overrightarrow{AB}$" que parte de A ou do «segmento orientado $\overline{AB}$» e o "à esquerda da semirecta $\overrightarrow{BA}$" que parte de B, ou do «segmento orientado $\overline{BA}$», o outro domínio o à esquerda da semirecta $\overrightarrow{AB}$ e à direita da semirecta $\overrightarrow{BA}$. Relativamente a dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{AO}$, o mesmo domínio estárá situado "à direita", quando B e C estiverem na mesma semirecta que parte de A (e reciprocamente). Se para uma semirecta g, partindo dum ponto O, foi já definido o domínio à direita, o uma semirecta h partindo de O percorre este domínio, então diz-se que o domínio relativo a h que contém g, é à esquerda de h.*

Reconhece-se que deste modo, partindo de uma determinada semirecta $\overrightarrow{AB}$, ficam univocamente determinados os lados *direito* e *esquerdo* em relação a *toda* a semirecta, ou a *todo* o segmento, isto é, fica determinada uma orientação.

Definição 3.10 (orientação de um triângulo) *Os pontos do interior dum triângulo $\triangle ABC$ estão, ou à esquerda dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ou à esquerda de $\overline{BA}, \overline{CB}, \overline{AC}$. No primeiro caso diz-se: ABC (respectivamente BCA, CAB) é o sentido positivo e CBA (respectivamente BAC, ACB) o sentido negativo do triângulo; no último caso diz-se: CBA é o sentido positivo e ABC o sentido negativo do triângulo.*

Quando num triângulo $\triangle ABC$ de lados a, b, c se constroem as duas alturas $h_a = \overline{AD}$, $h_b = \overline{BE}$, resulta da semelhança dos triângulos $\triangle BCE$ e $\triangle ACD$ e pelo teorema 3.4, a proporção:

$$a : h_b = b : h_a,$$

isto é:

$$ah_a, = bh_b;$$

por consequência,

Proposição 3.19 *Em todo o triângulo, o produto duma base pela altura correspondente é independente do lado escolhido como base no triângulo.*

A metade do produto da base pela altura dum triângulo $\triangle ABC$ é portanto, um segmento a característico do triângulo $\triangle ABC$. A este segmento característico dá-se um nome, conforme a definição seguinte:

Definição 3.11 (área de um triângulo) *Seja, no triângulo $\triangle ABC$, o sentido ABC o positivo. O segmento positivo $(+a)$ chama-se medida de área do triângulo $\triangle ABC$ percorrido no sentido positivo e é designada por $[ABC]$; o segmento negativo $(-a)$ chama-se a medida de área do triângulo $\triangle ABC$ percorrido no sentido negativo e é designada por $[CBA]$.*

Tem-se então o teorema muito simples:

Proposição 3.20 *Se um ponto O está no exterior dum triângulo $\triangle ABC$, então têm-se para a medida de área do triângulo a relação*

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].$$

Teorema 3.7 *Se um triângulo $\triangle ABC$ é decomposto, de qualquer maneira, num número finito de triângulos Δ_k, então a medida da área do triângulo $\triangle ABC$, percorrido no sentido positivo, é igual à soma das medidas das áreas de todos os triângulos Δ_k, percorridos no sentido positivo.*

Proposição 3.21 *A medida de área $[P]$ dum polígono simples é independente do modo de decomposição em triângulos e por consequência é determinada univocamente pelo polígono.*

Tem-se então a

Definição 3.12 *A medida de área $[P]$ dum polígono simples, percorrido no sentido positivo, é a soma das medidas das áreas de todos os triângulos percorridos no sentido positivo, que se obtêm por uma determinada decomposição do polígono.*

Desta definição obtém-se, recorrendo ao teorema 3.7, a proposição:

Proposição 3.22 *Polígonos equidecomponiveis têm a mesma medida de área.*

Deve-se sempre entender por medida de área a que se refere ao sentido positivo de percurso.

Proposição 3.23 *Polígonos equicomplementáveis têm a mesma medida de área.*

Com efeito, se P e Q são polígonos equicomplementáveis, então, por definição, devem existir poligonos equidecomponiveis dois a dois $P', Q'; ...; P'', Q''$, tais que, juntando por um lado $P, P', ..., P''$ num polígono $P + P' + ... + P''$ e por outro lado $Q, Q', ..., Q''$ num polígono $Q + Q' + ... + Q''$, estes dois últimos são equidecomponiveis. Das igualdades:

$$\begin{aligned} [P + P' + ... + P''] &= [Q + Q' + ... + Q''] \\ [P'] &= [Q'] \\ &\vdots \\ [P''] &= [Q''] \end{aligned}$$

conclui-se facilmente :

$$[P] = [Q]$$

Desta proposição deduz-se imediatamente a demonstração do teorema fundamental do cálculo das áreas planas ($\Leftarrow$). Com efeito, designando as bases iguais dos dois triângulos por g, as alturas correspondentes por h e h', respectivamente, conclui-se da suposta equicomplementabilidade dos dois triângulos, que devem ter a mesma medida de área, isto é, que

$$\frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}gh' \Leftrightarrow h = h',$$

que é a tese do teorema 3.6.

Tem-se também a

Proposição 3.24 *Polígonos com a mesma medida de área são equicomplementáveis.*

Resulta então das duas últimas proposições o

Teorema 3.8 *Dois polígonos equicomplementáveis têm sempre a mesma medida de área e dois polígonos com a mesma medida de área são sempre equicomplementáveis.*

Exemplo 3.2 *Em particular, em dois rectângulos equidecomponíveis por ampliação e com um mesmo lado, os outros lados são também iguais.*

Também tem-se o teorema:

Teorema 3.9 *Se se decompõe um rectângulo, por meio de rectas, em vários triângulos e tirarmos um só que seja destes triângulos, então não se pode, com os restantes triângulos, preencher o rectângulo.*

3.2.6 Números arguesianos. Geometria não-arquimediana não-pascaliana.

Números arguesianos

Com vista a demonstrar o significado do teorema de Desargues no contexto da sua construção axiomática, Hilbert introduz um cálculo de segmentos, sem recorrer aos axiomas de congruência e baseando-se nesse teorema. Parte de uma geometria plana na qual são válidos os axiomas I1-3, II, IV* (§24, *Grundlagen*), isto é, todo os axiomas lineares e planos com excepção dos axiomas de congruência e continuidade, e introduz nesta geometria, *independentemente dos axiomas de congruência e de continuidade*, um novo cálculo de segmentos, da seguinte maneira:

Toma-se no plano duas rectas fixas que se intersectam num ponto O, calcula-se, com os segmentos cujos pontos origem sejam O e cujas extremidades estejam sobre uma destas duas rectas fixas. Considera-se o ponto O como o segmento 0, ficando $\overline{OO} = 0$ ou $0 = \overline{OO}$.

Sejam E e E' pontos determinados sobre as rectas fixas que se intersectam em O; então chama-se aos dois segmentos $\overline{OE}$ e $\overline{OE'}$ segmentos unitários:

$$\overline{OE} = \overline{OE'} = 1 \vee 1 = \overline{OE} = \overline{OE'}$$

À recta $\overleftrightarrow{EE'}$ chama-se a recta-unidade. Além disso, se A e A' forem pontos, respectivamente sobre as rectas $\overleftrightarrow{OE}$ e $\overleftrightarrow{OE'}$, e se $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{EE'}$, então dize-se que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ são iguais.

Para se definir a soma dos segmentos $a = \overline{OA}$ e $b = \overline{OB}$, que estão sobre $\overleftrightarrow{OE}$, constroi-se $\overleftrightarrow{AA'}$, paralela à recta unidade $\overleftrightarrow{EE'}$ e conduz-se depois, por A', uma paralela a $\overleftrightarrow{OE}$ e por B uma paralela a $\overleftrightarrow{OE}$. Essas duas paralelas intersectam-se num ponto A''. Finalmente conduza-se por A'' uma paralela à recta unidade $\overleftrightarrow{EE'}$; esta encontra as rectas fixas $\overleftrightarrow{OE}$ e $\overleftrightarrow{OE'}$ nos pontos O e C'; então a $c = \overline{OC} = \overline{OC'}$ chama-se a soma do segmento $a = \overline{OA}$ com o segmento $b = \overline{OB}$.

A seguir Hilbert mostra que nessa álgebra de segmentos são válidas todas as propriedades dum corpo ordenado, excepto a propriedade comutativa da multiplicação e os teoremas de continuidade. A este sistema de números ele chama *sistema de números arguesianos*.

Num sistema D de números arguesianos, Hilbert constroi uma geometria do espaço, na qual são válidos todos os axiomas I, II e o

Axioma 3.1 *IV* (Axioma das paralelas na forma mais forte) Seja a uma recta e A um ponto fora de a: então há no plano determinado por a e A uma e uma só recta que passa por A e não corta a.*

Para tal, considera cada elemento do conjunto $\{(x, y, z) : x, y, z \in D\}$ como um ponto, e as listas $(u : v : w : r) \in D^4$, no qual os três primeiros números não são iguais a 0, como um plano, com a condição de que os sistemas $(u : v : w : r)$ e $(au : av : aw : ar), (0 \neq a \in D)$ representem o mesmo plano. A equação

$$ux + vy + wz + r = 0$$

exprime que o ponto (x, y, z) está no plano $(u : v : w : r)$. A recta é definida através da intersecção de dois planos $(u' : v' : w' : r')$ e $(u'' : v'' : w'' : r'')$, onde não existe $a \neq 0$, tal que:

$$au = u, \quad av = v, \quad aw = w.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\in [(u' : v' : w' : r'), (u'' : v'' : w'' : r'')] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \in (u' : v' : w' : r') \cap (u' : v'' : w'' : r''). \end{aligned}$$

Por construção de D, é evidente que são válidos todos os axiomas I e IV*. Para que os axiomas, de ordem, sejam também satisfeitos Hilbert define a seguinte ordem:

Definição 3.13 *Sejam (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) três pontos quaisquer duma recta $[(u : v' : w' : r'), (u'' : v'' : w'' : r'')]$. Então o ponto (x_2, y_2, z_2) está entre os outros dois, quando pelo menos uma das seis seguintes duplas desigualdades é verificada:*

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1 &< x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3; \\ (2) \quad y_1 &< y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3; \\ (3) \quad z_1 &< z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3. \end{aligned}$$

Das equações:

$$\begin{aligned} u'xi + v'yi + w'zi + r' &= 0 \\ u''xi + v''yi + w''zi + r'' &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

deriva-se, por multiplicação à esquerda por números apropriados de D, diferentes de 0, e depois por adição das igualdades correspondentes, um sistema de igualdades da forma

$$(4) \quad u'''xi + v'''yi + w'''zi + r''' = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Aqui o coeficiente v''' não é, com certeza, 0, visto que, de contrário, ter-se-ia a igualdade dos três números x_1, x_2, x_3 . No caso em que $u''' = 0$, então tem-se

$$y_1 = y_2 = y_3.$$

Mas se é $u''' \neq 0$, então conclui-se a partir de

$$x_1 \lesseqgtr x_2 \lesseqgtr x_3,$$

as outras duplas desigualdades

$$u'''x_1 \lesseqgtr u'''x_2 \lesseqgtr u'''x_3,$$

e por consequência, em vista de (4)

$$v'''y_1 + r''' \lesseqgtr v'''y_2 + r''' \lesseqgtr v'''y_3 + r'''$$

donde

$$v'''y_1 \lesseqgtr v'''y_2 \lesseqgtr v'''y_3,$$

e como $v''' \neq 0$, tem-se

$$y_1 \lesseqgtr y_2 \lesseqgtr y_3;$$

devendo em cada uma destas duplas desigualdades ser válido sempre ou o sinal superior ou o sinal inferior.

Das considerações desenvolvidas pode-se reconhecer que, nesta geometria, se têm os axiomas II1–3.

Para mostrar que nesta geometria também é válido o axioma II4, do plano, Hilbert considera um plano $(u : v : w : r)$ e nele uma recta $[(u : r, : w : r), (u' : v' : w' : r')]$. Convenciona que todos os pontos (x, y, z) existentes no plano $(u : v : w : r)$, para os quais a expressão $u'x + v'y + wz + r$, se torna menor ou maior que 0, devem estar situados, respectivamente, dum ou de outro lado daquela recta; esta convenção é claramente uma bijecção.

Assim os axiomas I, II, IV* são todos válidos na geometria do espaço que provém, do modo acima descrito, do sistema de números de Desargues, D .

Visto que, o teorema de Desargues é uma consequência dos axiomas I1–8, II, IV*, reconhece-se que:

Teorema 3.10 *A partir dum sistema de números arguesianos, D, pode-se construir uma geometria plana na qual os números do sistema D constituem os elementos dum cálculo de segmentos, introduzido como acima, e no qual os axiomas I1–3, II, IV* são verificados; numa tal geometria plana é então sempre válido também o teorema de Desargues.*

Este teorema é recíproco do seguinte resultado:

Teorema 3.11 *Numa geometria plana na qual, além dos axiomas I1–3, II, IV*, seja válido também o teorema de Desargues, pode-se introduzir um cálculo arguesiano de segmentos; os elementos deste cálculo de segmentos constituem então, depois da definição de ordem, um sistema de números de arguesianos.*

Considere-se agora o conjunto dos segmentos como um sistema algébrico ordenado e construa-se a partir deles , de acordo com o acima exposto, uma geometria do espaço na qual sejam válidos todos os axiomas I, II, IV*. Tem-se o

Teorema 3.12 *Se numa geometria plana são verificados os axiomas I1–3, II, IV*, então a validade do teorema de Desargues é condição necessária e suficiente para que esta geometria plana se possa considerar como uma parte duma geometria do espaço, na qual sejam verificados todos os axiomas I,II,IV*.*

Assim o teorema do Desargues para a geometria plana caracteriza-se como o resultado da eliminação dos axiomas do espaço.

Destes resultados pode-se reconhecer que

— Toda geometria do espaço, na qual são verificados os axiomas I, II, IV*, pode-se sempre considerar como uma parte duma «geometria a um número qualquer de dimensões»;

Têm-se os seguintes resultados essênciais:

Teorema 3.13 *Num sistema de números arquimediano, a lei comutativa da multiplicação é uma consequência necessária das restantes leis de cálculo.*

Teorema 3.14 *Num sistema de números não-arquimediano, a lei comutativa da multiplicação não é uma consequência necessária das restantes leis de cálculo.*

Dem. Sejam t um parametro e T uma expressão qualquer, com um número finito de termos, da forma

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{(n+1)} + r_2 t^{(n+2)} + r_3 t^{(n+3)} + ...;$$

onde $r_0 (\neq 0), r_1, r_2, ...$ designam números racionais quaisquer e n um número inteiro racional qualquer. Acrescente-se ao conjunto destas expressões o número 0. Duas expressões da forma T dir-se-ão iguais, se todos os números $n, r_0, r_1, r_2, ...$ são nelas respectivamente iguais. Além disso, sejam s um outro parametro e S uma expressão qualquer, com um número finito ou infinito de termos, da forma

$$S = s^m T_0 + s^{(m+1)} T_1 + s^{(m+2)} T_2 + ...;$$

onde $T_0 (\neq 0), T_1, T_2, ...$ designam expressões quaisquer da forma T, e m é ainda um número inteiro, racional qualquer.

O conjunto de todas as expressões da forma S, acrescentado também com o número 0, é um corpo ordenado $\Omega(s,t)$, onde se convencionam as seguintes regras de cálculo: primeiramente calcule-se com os próprios parametros s e t segundo as regras de corpo comutativo, exceptuando-se a propriedade comutativa da multiplicação, que deve ser substituida pela seguinte fórmula:

$$(1) \quad ts = 2st.$$

Sejam agora S', S'' duas expressões quaisquer da forma S:

$$\begin{aligned} S' &= s^{m'}T_0' + s^{m'}T_1' + s^{m'}T_2' + \ldots, \\ S'' &= s^{m''}T_0'' + s^{m''}T_1'' + s^{m''}T_2'' + \ldots, \end{aligned}$$

então pode-se evidentemente, por adição termo a termo, formar uma nova expressão $S'+S''$ que é ainda da forma S; esta expressão $S' + S''$ é a soma dos números representados por S e S''.

Pela multiplicação formal, usual, termo a termo, das duas, expressões, chega-se à expressão

$$\begin{aligned} S'S'' &= s^{m'}T_0's^{m''}T_0'' + (s^{m'}T_0's^{m''+1}T_1'' + s^{m'+1}T_1's^{m''}T_0'') + \\ &+(s^{m'}T_0's^{m''+2}T_2'' + s^{m'+1}T_1's^{m''+1}T_1'' + s^{m'+2}T_2's^{m''}T_0'') + \ldots \end{aligned}$$

Usando a fórmula (1) vê-se que esta expressão é da forma S, que será designada por produto do número S' pelo número S''. Com esta forma de calcular reconhece-se imediatamente a validade das regras de cálculo num corpo comutativo. Para este fim, tomem-se

$$S' = s^{m'}T_0' + s^{m'}T_1' + s^{m'}T_2' + \ldots,$$

e

$$S'''' = s^{m''''}T_0'''' + s^{m''''}T_1'''' + s^{m''''}T_2'''' + \ldots,$$

como expressões dadas da forma S, e suponha-se que o primeiro coeficiente r_0 de T_0 é diferente de 0. Comparando agora as mesmas potências de s nos dois membros duma equação:

$$(2) \quad S'S'' = S''''$$

encontra-se primeiro um número inteiro m'', como expoente, e em seguida por ordem, expressões

$$T_0'', T_1'', T_2'', \ldots$$

tais que a expressão

$$S'' = s^{m''}T_0'' + s^{m''}T_1'' + s^{m''}T_2'' + \ldots,$$

satisfaz, usando a fórmula (1), à equação (2). Analogamente quanto a uma equação

$$S''S' = S'''',$$

concluindo a demonstração.

Finalmente, para encontrar uma ordenação dos números do sistema $\Omega(s,t)$, Hilbert estabelece as seguintes convenções: um número do sistema diz-so $<$ ou $>$ 0, se na expressão S, que ele representa, o primeiro coeficiente r_0, de T_0 é $<$ ou $>$ 0.

Sejam dados dois números quaisquer a e b do sistema algébrico ordenado $\Omega(s,t)$. Então diz-se que $a < b$, $a > b$ quando for, respectivamente, $a-b < 0$ ou > 0. Vê-se imediatamente que, com estas convenções, também são válidas as regras de compatibilidade com a ordem num corpo ordenado, isto é, que $\Omega(s,t)$ é um corpo de números de Arguesianos.

A lei comutativa da multiplicação não é verificada, no corpo ordenado $\Omega(s,t)$, como mostra a equação (1), e assim se reconhece completamente a validade do teorema 3.13. É claro que o axioma de Arquimedes não é válido para este sistema de números $\Omega(s,t)$.

Geometria não-pascaliana

Se numa geometria do espaço são verificados todos os axiomas I, II, IV*, então tem-se também o teorema de Desargues e, por consequência, é possível e para cada par de rectas concorrentes, a introdução nesta geometria dum cálculo de segmentos para o qual são válidas as leis de corpo ordenado.

Suponha-se agora nessa geometria, o axioma de Arquimedes, e por consequência, também a lei comutativa da multiplicação. Vê-se imediatamente que, a lei comutativa da multiplicação não significa outra coisa senão o teorema de Pascal para os dois eixos. Assim fica provado que o teorema de Pascal não é demonstrável com exclusão dos axiomas de congruência e recorrendo ao axioma de Arquimedes.

Para demonstrar que o teorema de Pascal não é demonstrável com exclusão dos axiomas de congruência e do axioma de Arquimedes, consider-se o corpo de números arguesiano $\Omega(s,t)$, apresentado, e construa-se com o seu auxílio, e da maneira acima descrita, uma geometria do espaço na qual seriam válidos todos os axiomas I, II, IV* . Apesar disso, não é válido nesta geometria, o teorema de Pascal, visto que a lei comutativa da multiplicação não subsiste no sistema de números arguesiano $\Omega(s,t)$. A *geometria «não-pascaliana»*, assim construida é, de acordo com o acima referido, necessariamente ao mesmo tempo também uma *geometria «não-arquimediana»*.

3.2.7 Conclusões

Como principais resultados deste capítulo, pode-se afirmar que a realização do modelo numérico dos grupos de axiomas de incidência, ordem, congruência e paralelismo demonstra a independência dos axiomas de continuidade, como também a própria não contradição da geometria não-arquimediana. Por outro lado, revela o papel dos axiomas de continuidade na construção da geometria euclidiana, sobre a base dos axiomas de Hilbert. Em particular, sem os axiomas de continuidade é impossível demonstrar a equivalência do axioma euclidiano do paralelismo com a proposição de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois rectos.

Por outro lado, evidenciaram-se resultados surpreendentes. Por exemplo, na GNA existem triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ que, respectivamente, têm iguais medidas de altura e base, são equicomplementáveis, mas não equidecomponíveis. Tem-se que na GNA os polígonos equicomplementáveis têm igual medida de área, e dois polígonos com igual área são sempre equicomplementáveis. Para os triângulos rectângulos na GNA tem lugar o teorema de Pitágoras, que é um resultado sobre equidecomponibilidade.

Através do cálculo de segmentos num espaço não-arquimediano pode-se introduzir um sistema de coordenadas afins (ou projectivas). Por exemplo no plano escolhem-se duas rectas, isto é, os eixos de coordenadas, que passam por um ponto fixado, e em cada uma delas se marcam segmentos unitários. Neste sistema de coordenadas afins a equação da recta é linear, ou seja, tem a forma $ax + by + c = 0$, onde x e y são números (segmentos) que determinam as coordenadas dos pontos na recta, a, b, e c números (segmentos) fixados. Além disso, a multiplicação dos segmentos dados por segmentos x e y é sempre possível à esquerda e, regra geral, a equação $xa + yb + c = 0$ neste sistema de coordenadas não representa uma recta.

O sistema de proposições geométricas que compõem a GNA pode ser realizado no modelo de um conjunto finito de objectos principais: "ponto", "recta", etc., não sendo necessariamente verdade que em cada recta existe um número infinito de pontos. A construção dos modelos numéricos conduz na GNA aos espaços transfinitos de Hilbert (não-arquimedianos).

A realização numérica da GNA, na qual a lei comutativa da multiplicação não é necessária, também desempenha um papel significativo na construção da chamada geometria não-pascaliana (GNP).

CAPÍTULO 4

A geometria não-arquimediana de Veronese

4.1 Introdução

Veronese foi o primeiro geómetra a construir geometrias (sintética e analítica), com a não assumpção expressa do axioma de Arquimedes. Para esse estudo, a sua obra de referência são os *Fondamenti*, uma obra de difícil leitura e análise. Nesta introdução pretende-se, com vista a facilitar o acompanhamento da análise mais pormenorizada que se faz nas secções seguintes, situar as ideias de Veronese em duas sub-secções: uma com uma tentativa de dissecação do pensamento do autor em relação ao contínuo[1]; outra com um resumo das principais ideias contidas na parte introdutória dos *Fondamenti*, onde Veronese constrói a estrutura que está na base da sua álgebra e da sua geometria: a *forma fundamental*.

4.1.1 O contínuo intuitivo de Veronese

Para se compreender o ponto de partida da concepção veronesiana da geometria, bem como o método que utilizou, vale a pena rever os conceitos de *contínuo empírico*[2] e de *contínuo matemático*, assim como a passagem do primeiro ao segundo. Nos seus *FG* (Prefácio), bem como noutros textos[3], Veronese torna claras as suas concepções:

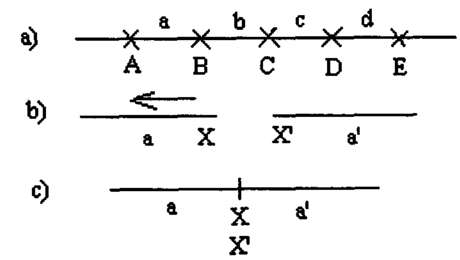
«O que é o contínuo? Esta é uma palavra cujo sentido compreendemos mesmo sem nenhuma definição matemática, visto que intuímos o contínuo na sua forma mais simples como a característica comum a muitas coisas concretas, como, por exemplo, para dar alguns dos mais simples, o tempo e o lugar ocupado na vizinhança externa do objecto

[1] Ver Apêndice, D para mais desenvolvimentos.

[2] Que Veronese chama de *contínuo intuitivo*.

[3] Ver Apêndice D, ou *EHCFG*, anexo a esta tese, por exemplo.

esboçado aqui (figura abaixo),



ou pela linha de uma caneta, se desprezarmos as suas propriedades físicas e a sua espessura (no sentido empírico[4]*). Observando as características particulares deste contínuo intuitivo, devemos aproximarmo-nos de uma definição abstracta do contínuo na qual, a sua intuição, ou a representação percepcionada, não entra como parte necessária, de tal modo que, reciprocamente, esta definição possa servir abstractamente, com completo rigor lógico, para a dedução de outras propriedades deste contínuo intuitivo. Veremos mais adiante que esta definição abstracta pode ser dada matematicamente. Por outro lado, se a definição do contínuo não for meramente nominal*[5] *e quisermos que ela, em vez de corresponder à (definição) intuitiva, advenha de investigações sobre a (definição) intuitiva, mesmo se, mais tarde, a definição abstracta, conformamente aos princípios matematicamente possíveis, contenha o seu contínuo como caso particular.*

O objecto da figura a), diz-se rectilíneo. Examinando portanto o contínuo (figura, a)), vemos que pode ser considerado como composto de uma sucessão de partes consecutivas idênticas, a, b, c, etc. dispostas da esquerda para a direita, e isto é válido entre certos limites do campo de observação. As partes são separadas por cruzes assinaladas sobre o próprio objecto, e são também contínuas. Por outro lado, percorrendo com os olhos, da esquerda para a direita, observamos que as partes a, b, c, d, assim como (as partes) ab, bc, cd, etc.; abc, bcd, etc. etc., são idênticas da esquerda para a direita, e que estas particularidades têm também lugar da direita para a esquerda.

Se entre duas partes consecutivas a e b da sucessão abcd etc., não existe nenhuma parte, enquanto que, por exemplo, entre as partes a e c existe a parte b; e se se ignora a parte b, o objecto rectilíneo deixa de ser contínuo. A observação garante que o que vale para as partes a e b vale igualmente para duas partes consecutivas quaisquer, ou por outras palavras, não existe outro todo com as mesmas propriedades do objecto rectilíneo, que separam duas partes consecutivas do referido objecto, ou melhor, do lugar por ele ocupado (secção 23 e definição II, 25).

Vemos também que tanto experimentalmente (isto é, com uma sequência natural limitada de decomposições), como abstractamente, (isto é, de acordo com qualquer hipótese ou operação matematicamente possível que não contradizem os resultados da experiência) chegar a uma parte que não é mais decomponível em partes (— parte indivisível), sendo o contínuo composto destas partes indivisíveis (como um instante está para o tempo).

É a própria experiência que nos faz olhar para o indivisível de tal modo que não podemos obtê-lo experimentalmente, pois mostra-nos que uma parte considerada indivisível em

[4] Ver observação empírica n°. 1, parte I, [*FG*].

[5] Isto é, formal.

relação a uma observação não é indivisível em relação a outras observações executadas com instrumentos mais exactos ou sob outras condições. Se assumirmos que existe uma parte indivisível, vemos que podemos ainda experimentalmente considera-la indeterminada, e por isso menor que qualquer parte dada do objecto rectilíneo.

[...]

A hipótese de que o ponto não é parte do contínuo linear (e também que o próprio não tem partes[6]*) significa que todos os pontos que podemos imaginar nele, por mais que possam ser, não constituem o contínuo quando são juntados, e escolhendo uma parte* (XX')[7] *tão pequena quanto quisermos do objecto (fio) (para o tempo, um instante), por mais indeterminada, o que é o mesmo que dizer sem* X *nem* X' *fixados nas nossas mentes, a intuição diz-nos que esta parte é sempre contínua.*

[...]

Ademais, entre dois pontos X *e* X' *indeterminados em posição mas não coincidentes (definição V,8), existe sempre uma parte contínua. E porque o contínuo é determinado matematicamente pelos seus pontos, temos de assumir que entre dois pontos quaisquer, também indeterminados, por mais próximos que estejam, existe sempre, pelo menos outro ponto distinto dos pontos extremos (definição V, 8). Somos igualmente conduzidos a esta hipótese pela observação de que um dado ponto* X *no objecto rectilíneo, pode-se imaginar uma parte* (AB) *do último que contém* X *tal que* A *e* B *se aproximem cada vez mais de* X *sem contudo coincidir com* X*, e por isso podemos imaginar uma parte com pontos extremos indeterminados, tão pequenos que nós queiramos que contenham outro ponto* X' *para além dos pontos extremos.*

Finalmente, recebemos a impressão de que no objecto rectilíneo (figura acima), em torno de um dos seus pontos B *há duas partes* BA *e* BC *tal que, considerando o primeiro de* B *para* A *e o segundo de* B *para* C*, são idênticos, e que a parte* (AB) *atravessada de* B *para* A *é idêntica à mesma parte atravessada de* A *para* B *(Definição III.9).*

Podem todas estas características do objecto rectilíneo ser estabelecidas abstractamente sem recurso à intuição? Ou não serão algumas destas características consequências necessárias de outras, ainda que sejam óbvias?

Estas são as questões às quais temos que responder nesta introdução, e veremos que as características indicadas acima são mais do que suficientes».

4.1.2 Súmula dos conceitos básicos

A abordagem de Veronese consta de três etapas: na primeira, constrói um corpo de segmentos e o correspondente corpo numérico. Essa construção é puramente sintética, por razões por ele justificados [*FG*, Introdução; *EHCFG*, parte I], e visa a elaboração de um sistema ordenado linear, ao mesmo tempo geométrico e numérico: em suma, trata-se de uma régua (não-arquimediana — o conjunto $\mathbb{H}$). Faz essa construção na *Introdução* dos *FG*; a segunda etapa consiste em estabelecer alguns axiomas geométricos que permitam configurar a recta, transferir para essa recta a estrutura da forma fundamental, através

[6] «Então não precisamos de estabelecer no desenvolvimento teórico da geometria que o ponto por si não tem partes. Por "por si" não queremos significar que uma tal coisa é independente de nós, mas que tal coisa está na nossa representação mental.»

[7] Notação veronesiana para segmento de recta.

de um isomorfismo[8], antecedendo a abordagem birkhoffiana (métrica, [ver capítulo 11]) dos fundamentos da geometria; a terceira etapa consiste na exploração de geometrias construídas através do método da segunda etapa.

Nesta súmula vai-se apresentar uma antevisão, sobretudo, da parte da construção e caracterização da *forma fundamental*. São os conceitos dessa parte, os considerados basilares[9].

O ente geométrico básico para Veronese é aquilo a que chama *forma*. Uma forma linear, ou de dimensão um, pode ser encarada como um grupo infinito, munido da ordem total e sua inversa, ditas *sentidos* da forma[10]. Um sentido é determinado pela escolha de dois elementos da forma.

Numa forma identificam-se *partes*, que são todas as sequências de elementos consecutivos, em relação à ordem total. Por exemplo, se $..., A, B, C, ...$ são elementos de uma forma, então as partes são, para além de $..., A, B, C, ...$, AB, BC, CD, etc, ABC, BCD, etc. As partes que consistem em mais do que um elemento são denominadas *segmentos*. Os elementos A e B que limitam um segmento (isto é, são primeiro ou último elemento) são chamados *extremidades* do segmento.

Um segmento $\overline{AB}$ é um *indivisível* ou *contínuo*, se entre A e B não houver nenhum elemento de $\overline{AB}$. Dois segmentos são *consecutivos* num dado sentido se a segunda extremidade do primeiro segmento é a primeira extremidade do segundo, no sentido dado.[11]

Uma forma linear é *fechada* se, quando se aplica a sua *lei de construção*, a partir de um elemento A da forma, se encontrar o elemento A de novo, depois de se ter obtido todos os outros elementos da forma. Uma forma linear fechada pode ser considerada como um segmento cujos extremos coincidem com um elemento da forma. Uma foma linear é *aberta* se e só se tem um primeiro elemento, e é *ilimitada (infinita)*[12] se e só se não tem primeiro ou último elemento.

Uma forma linear aberta é *simples* se nenhum dos seus elementos for repetido. Uma forma linear *fechada* é simples se, começando num elemento qualquer, nenhum elemento é repetido até que todos os elementos tenham sido *construídos*.

Uma forma aberta é ilimitada. Uma forma aberta simples é decomposta por um qualquer dos seus elementos em duas partes ilimitadas, que não têm mais nenhum elemento comum, podendo-se considerar que uma delas tem uma das direcções possíveis e a outra tem a direcção oposta.

Uma forma linear fechada pode ser considerada como um sistema linear ilimitado, iniciado por qualquer um dos seus elementos, considerando as repetições dos mesmos como sendo novos elementos.

A noção de *homogeneidade* é a principal característica de simetria das formas e um dos principais pontos de discórdia entre Veronese e Cantor. Uma forma linear é *homogénea* num dado sentido se, para qualquer elemento A da forma, existem dois segmentos no mesmo sentido, um dos quais tem A como primeiro extremo e o outro tem A como o

[8] Postula que existe uma forma fundamental que serve para *determinar* todas as outras (formas), Hip. IX.

[9] Uma análise mais pormenorizada, mais completa, e numa terminologia mais próxima da veronesiana, é feita no Anexo III.

[10] A ideia de "*forma*" é a de grupo ordenado não-arquimediano de segmentos.

[11] Estas duas definições são iguais às aparecidas em Aristóteles. Ver Apêndice D.

[12] Esta terminologia faz lembrar o "ilimitado" da ANS, isto é, refere-se a um conjunto com um número infinito de elementos. Vai-se manter a terminologia veronesiana.

segundo extremo.

Segue-se que quando uma forma homogénea é aberta, — ou fechada mas considerada como aberta [13]—, é limitada (finita) em ambos os sentidos.

Por argumentos de indivisibilidade e homogeneidade, Veronese mostra que, se existem segmentos indivisíveis, são iguais.

Uma forma homogénea numa direcção, também o é na direcção oposta.

Outro conceito de simetria é introduzido a partir da definição seguinte: se numa forma linear homogenea, a forma linear obtida, considerando todos os elementos a partir de um elemento qualquer A, é *idêntica* (isto é, a mesma, a menos da posição, ou seja, congruente[14]) ao sistema obtido partindo do mesmo elemento A, mas seguindo no sentido oposto, o sistema é dito *idêntico na posição das suas partes.*[15]

Esta simetria permite movimentos lineares sem deformação ou isometrias: qualquer parte de uma forma linear, "*idêntica na posição das suas partes*", "*pode mover-se ou atravessar essa forma e manter-se identico a si própria ou invariante*".[16]

Como axioma de existência, Veronese assume que existe uma forma linear, idêntica na posição das suas partes, que serve para determinar[17] todas as outras formas lineares (secção 71, hipóteses I e II), chamada de *forma fundamental* ou *básica.* Todas as formas fundamentais ou básicas são supostas idênticas.

As operações de adição e de subtracção de dois segmentos é introduzida na forma fundamental e a partir daí o produto de um número racional por um segmento: dado um segmento $\overline{AB}$ da forma fundamental, e se se construir, a começar por um elemento qualquer, n segmentos consecutivos *iguais* (congruentes) a $\overline{AB}$, o segmento resultante é um *múltiplo* de $\overline{AB}$, e $\overline{AB}$ é um *submúltiplo* ou *factor* do segmento resultante, $n\overline{AB}$. Isto leva às fracções de segmentos denotadas pelas expressões da forma $(m/n)\overline{AB}$, onde $\overline{AB}$ é um segmento orientado de A para B.

Uma noção veronesiana fundamental é a de *escala.* Uma escala obtém-se começando num elemento qualquer da forma básica e considerando uma sucessão natural de segmentos consecutivos todos iguais a um segmento dado $\overline{AB}$, chamado *unidade* da escala. Diz-se que as extremidades de cada um dos segmentos numa escala *dividem* elementos da escala.

Associado ao de escala, está o conceito de *campo ou região de uma escala*[18]. O campo de uma escala é um segmento ilimitado da forma fundamental que consiste em todos os segmentos consecutivos, na direcção da escala (não necessariamente na escala).

A maneira de associar números à forma fundamental é atribuindo aos elementos de divisão de uma escala essa forma, números naturais, excepto o zero que é associado ao primeiro elemento. Quando um segmento tem uma n-ésima parte, associa-se o número racional m/n ao m-ésimo múltiplo dessa parte, a começar no primeiro extremo do primeiro segmento, e continuando da mesma forma através dos outros segmentos, com $n/n = 1$, $(n+1)/n$, $(n+2)/n$, etc.

[13]Quando, embora a forma seja fechada, fechada, consideram-se as repetições de elementos, num dos sentidos, ou em ambos, como sendo novos elementos. Neste caso a forma aberta resultante não é simples.

[14]Ver a definição de "identidade" em Veronese, mais adiante.

[15]Isto é, dada uma parte da forma, existe na mesma, um número infinito de outras partes, congruentes com ela — ver mais adiante.

[16]Esta noção (a par da sua definição por dois dos seus elementos) ajuda a intuir a "rectilinearidade" da forma, que porém pode ter curvatura constante, como se verá mais adiante.

[17]No sentido de conter a estrutura geométrica mínima: as outras resultam de translações desta.

[18]Ou classe arquimediana, noção descoberta independentemente por Veronese e Betazzi (ver adiante).

A forma fundamental serve de referencial unidimensional. Assim, todos os segmentos e escalas são considerados sobre ela.

Veronese considera vários resultados que relacionam escalas, ainda no âmbito das escalas arquimedianas:

— Se, numa forma fundamental, com uma escala de unidade $\overline{AB}$, um segmento $\overline{CD}$ é igual a um segmento $\overline{AE}$, cujos extremos são dois elementos da região da escala, e $\overline{AB} < \overline{CD}$[19], então existe um número natural n tal que $n\overline{AB} \leq \overline{CD} < (n+1)\overline{AB}$.

— Se duas escalas têm unidades $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'B'} < \overline{AB}$ (isto é, existe um segmento $\overline{B'C'}$ tal que $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{AB}$), e existe um número natural n tal que $n\overline{A'B'} > \overline{AB}$, os campos das duas escalas são iguais em relação às sequências de segmentos das duas escalas. Como corolário, tem-se que as regiões de duas escalas são iguais se a unidade de uma é múltiplo da unidade da outra.

Mas pode acontecer[20] que o campo de uma escala cuja unidade é igual a um segmento $\overline{AD}$ dado, e o campo de outra escala, com unidade $\overline{A'B'}$, e não existe nenhum número natural n tal que $n\overline{AD} > \overline{A'B'}$ se $\overline{AD} < \overline{A'B}$ ou $n\overline{A'B} < \overline{AD}$ se $\overline{AD} > \overline{A'B}$. Nesse caso o campo da escala de $\overline{AD}$ e o campo da escala de $\overline{A'B}$ não são iguais. É o caso não-arquimediano. Tem-se os seguintes resultados:

— Se A e B são dois elementos no campo de uma escala de uma forma fundamental, então o campo da escala que começa em A, no sentido de A para B, é congruente (igual em relação à sequência de segmentos consecutivos) com o campo da escala, da parte da escala que começa em B.

— No campo da escala de unidade $\overline{AB}$, seja $\overline{BX}$ um segmento que começa em B. Pelo resultado precedente, tem-se $\overline{AB} + \overline{BX}$ é congruente com $\overline{BX}$. Nesse caso diz-se que $\overline{AB}$ é *negligenciável* em relação a $\overline{BX}$.

Como corolário tem-se que todo o segmento limitado do campo de uma escala é negligenciável em relação ao segmento restante do campo, que começa no fim do segmento limitado.

O passo seguinte na construção veronesiana é postular que, numa dada direcção da forma fundamental, existe pelo menos um elemento da forma, que está *fora* da região de **qualquer** escala sobre ela, cuja unidade é um segmento limitado (secção 82, hipótese III).

Portanto, se na forma fundamental se escolher como unidade um segmento $\overline{AB}$, e se considerar a sua escala, (que consiste nos múltiplos do segmento unidade por números naturais), existe sempre outro elemento da forma fundamental que não é nenhum desses múltiplos[21].

Supondo um conjunto ordenado N, tal que, partindo de qualquer um dos seus elementos, é ilimitado da primeira espécie (isto é, N equivalente a $\mathbb{N}$), que é dado por segmentos consecutivos iguais, na ordem do grupo (isto é, é gerado por multiplos de um segmento de N, escolhido como unidade, e considerando o campo assim obtido), então pode-se considerar a estrutura N como um elemento, e tomar outro elemento N', idêntico a N (isto é, o mesmo, excepto a posição), mas que está fora de N, e que não tem nenhuma forma fundamental comum com N. Além disso, pode-se considerar as formas N e N' como estando na ordem NN'. Então NN' é uma sequência finita consistindo de duas subsequências N e N', na qual cada elemento de N precede todo o elemento de N'.

[19] No sentido de $\overline{AB}$ ser congruente com uma parte própria de $\overline{CD}$.

[20] O que não é contraditório em relação às anteriores hipóteses.

[21] Evidentemente Veronese pretende que o segmento determinado pelo elemento inicial de qualquer um escala e o novo elemento fora da escala tenha o mesmo sentido que a escala.

Pode-se construir uma sequência finita de três cópias de N, nomeadamente N, N', N'', de tal forma que $\overline{NN'}$ seja congruente com $N'N''$, e assim sucessivamente. Considerando um segmento limitado $\overline{AA'}$ com A em N e A' em N', então existe um e um só elemento A'' de N'' tal que o segmento limitado $\overline{A'A''}$ corresponde (é congruente) a $\overline{AA'}$. Diz-se então que *a forma fundamental se estende para além do campo de qualquer escala sobre ela.*

Quando se começa com uma escala e se toma um elemento fora dela, nota-se esse elemento por ∞ em combinação com alguma letra do alfabeto (as usuais para representar pontos).

Verifica-se que um segmento (limitado) que tem uma extremidade no campo de uma escala e a outra extremidade fora desse campo, é maior que qualquer segmento definido por dois elementos da escala.

Estes resultados levam ao seguinte teorema (secção 82, c):

— Todo o segmento que gera o campo de uma escala é menor que todo o segmento com o mesmo sentido que a escala, e que tem uma extremidade na região de uma escala, e a outra fora da região dessa escala.

Veronese diz (secção 82, def II):

— Com vista a distinguir os segmentos limitados por extremos que geram o campo de uma escala com uma unidade arbitrária $\overline{AA_1}$, dos que não geram a escala, e são maiores que aqueles, (isto é, maiores que os segmentos da escala), chama-se *finitos* aos primeiros e *infinitamente grandes actuais* ou *infinitamente grandes em relação à unidade da escala dada,* aos segundos. Porém, se o segundo é menor que o primeiro, diz-se que ele é *infinitamente pequeno actual* ou *infinitamente pequeno em relação à unidade dada.*[22] Por exemplo, a unidade $\overline{AA_1}$ ou um segmento limitado arbitrário de uma dada escala é infinitamente pequeno em relação a um infinitamente segmento grande $\overline{AA_\infty}$.

Naturalmente Veronese espera que as operações usuais e as relações de ordem sejam válidas para os segmentos generalizados. Por exemplo, um segmento é ou finito ou infinitamente pequeno ou infinitamente grande em relação a outro segmento, e a adição de dois segmentos que partilham apenas uma extremidade, que são finitos (*ip*, *ig*) em relação a outro segmento resulta num segmento que é ainda da mesma natureza. O campo de uma escala é *ig* em relação a qualquer segmento nele contido, e segue-se da hipótese III que o campo está num segmento limitado que é *ig* em relação a qualquer segmento do campo da escala, mas que não é igual à própria região.[23]

Na hipótese IV sobre as formas fundamentais, Veronese estabelece que: se se inicia com segmento unitário arbitrário $\overline{AA_1}$, e se escolhe um elemento arbitrário $B^{(\infty)}$ tal que o segmento $\overline{AB^{(\infty)}}$ seja *ig* em relação a $\overline{AA_1}$, então existe um elemento X em $\overline{AB^{(\infty)}}$ tal que $\overline{AX}$ e $\overline{XB^{(\infty)}}$ são *igs* em relação a $\overline{AA^1}$, e existe um elemento $A^{(\infty)}$ tal que o segmento $\overline{AX}$, para qualquer X em tais condições, é finito em relação a $\overline{AA^{(\infty)}}$.

Este axioma leva à definição de *ordens de infinitamente grande* (secção 86, def II):

— Se se iniciar com um segmento unitário $\overline{AA_1}$, e se tomar qualquer ponto $A^{(\infty)}$ nas condições da hipotese IV, diz-se que o segmento $\overline{AA^{(\infty)}}$ é um *segmento infinitamente grande de primeira ordem* em relação a $\overline{AA_1}$. Se se aplicar a Hip. IV ao segmento $\overline{AA^{(\infty)}}$, e obter um segmento infinitamente grande de primeira ordem em relação a $\overline{AA^{(\infty)}}$, esse

[22] É absolutamente notório o carácter de relatividade dos adjectivos finito, infinitamente grande e infinitamente pequeno, que é uma das principais chaves para a compreensão de Veronese.

[23] Regras de Leibniz.

segmento é *infinitamente grande de segunda ordem* em relação a $\overline{AA_1}$. E assim indutivamente, encontram-se segmentos *infinitamente grandes da n-ésima ordem* em relação ao segmento unitário $\overline{AA_1}$.

É claro que se um segmento é *ig* de ordem n em relação a outro segmento, este é *ip de ordem n* em relação ao primeiro.

Segmentos finitos em relação um ao outro são ditos *segmentos da mesma espécie.* Segmentos *ip* da mesma ordem em relação a um segmento dado, são da mesma espécie, e similarmente para os segmentos *ips*.

Veronese introduz a notação para números que correspondem às segundas extremidades dos segmentos que são *ig* em relação à unidade, como se segue: para os números correspondentes à segunda extremidade de um segmento *ig* de primeira ordem em relação à unidade $\overline{AA_1}$, começa-se com ∞_1 como origem (correspondendo ao elemento $A^{(\infty)}$ acima, e escrevendo $\infty_1 + n$ ou $\infty_1 - n$ para os números correspondentes às extremidades de segmentos obtidos juntando a unidade $\overline{AA^1}$ n vezes numa direcção ou noutra. Para além disso, constrói-se uma escala com a unidade $\overline{AA_1^{\infty}}$ tomando múltiplos desta unidade por números naturais n, e pode-se juntar múltiplos de $\overline{AA_1}$ a estes em todos os sentidos. Neste caso, diz-se que a unidade maior contém a unidade menor ∞_1 vezes.

Quando se itera este processo, obtém-se para um *sistema ou forma de segunda ordem em relação a* $\overline{AA_1}$ (portanto, de primeira ordem em relação a $\overline{AA_1^{\infty}}$, números da forma $\infty_2 + n$ (ou $-n$), onde agora n é o número de vezes que se junta a unidade $\overline{AA_1^{\infty}}$). E assim indutivamente, para um sistema de ordem m em relação a $\overline{AA_1}$.

Veronese distingue muito bem os seus números infinitos dos transfinitos de Cantor, mostrando, aliás, maior consciência dessas diferenças do que o próprio Cantor (secção 90):

— *A diferença entre os nossos números infinitamente grandes e os ω de Cantor, é que não reconhecemos um primeiro número infinitamente grande...*[24] *enquanto que para os números infinitamente grandes de Cantor, ω é o primeiro no sentido absoluto. Portanto: isto significa que dado um dos nossos números infinitamente grandes, por exemplo ∞_1, então existem números $\infty_1 - n$ diferentes de ∞_1 que está entre os números finitos e ∞_1.*

Para dar uma ideia da profusão vertiginosa de escalas que tem em mente, Veronese enuncia a sua hipótese V, "*sobre a construção de segmentos infinitamente grandes da forma fundamental*"

— Todo o segmento infinitamente grande, que não de ordem finita, é obtido aplicando o princípio da hipótese IV, um número infinitamente grande de vezes, o número tendo já sido dado ou produzido pelos novos segmentos construidos dessa forma.

Esta hipótese acaba esta síntese. Para uma visita mais exaustiva, ver o Anexo III.

4.2 O problema e as hipóteses do contínuo

Veronese faz depender a continuidade de um segmento $\overline{XX'}$, da garantia de existência de um elemento no seu interior, isto é, da existência de um elemento fora do campo de variabilidade de X e de X'[25], quando esses dois elementos se aproximam um do outro, indefinidamente. Começa por colocar o problema na observação I, 96:

[24] Na teoria dos ordinais de Cantor, ω é o primeiro ordinal infinito.

[25] Repare-se que, na ausência do axioma de Arquimedes, se X e X' não devem afastar-se indefinidamente um do outro (só o podem fazer dentro do seu respectivo campo arquimediano de variação), também não devem aproximar-se indefinidamente, até à "colagem", pois nesse caso o segmento $\overline{XX'}$ resultaria num ponto (sem partes, absolutamente indivisível).

> «— *Havíamos suposto [acima] que o segmento finito variável $\overline{XX'}$ tinha um elemento A fora do campo de variabilidade dos elementos X e X'. Mas, se com uma lei dada, se tem um segmento, cujos extremos são variáveis em sentidos opostos e que se torna idp, dos princípios precedentes, não resulta que existe um dos seus elementos fora do campo de variabilidade dos seus extremos, porque a hipótese oposta não conduz a qualquer contradição em relação a esses princípios, excepto se se sabe de antemão que tal elemento existe».*[26]

A seguir, na mesma observação, demonstra a seguinte

Proposição 4.1 *Se se considerar em torno de cada elemento, um campo infinitésimo, de modo que os elementos desse campo satisfaçam à definição de sistema homogéneo, será então satisfeita a hipótese IV dos segmentos finitos em relação aos segmentos infinitésimos.*

E continua:

> «— *Embora todo o elemento seja limite de um ou mais segmentos variáveis*[27] *$\overline{XX'}$, não se pode dizer que, inversamente, um segmento variável $\overline{XX'}$ que se torna idp e cujos extremos são elementos do conjunto, contenha outros elementos fora do campo de variabilidade dos seus extremos e que, portanto, tenha um elemento limite*[28]*; como também não está excluída a hipótese de existir sempre um tal elemento*[29].»

O próprio Veronese reconhece que este problema é o cerne da questão da continuidade da sua forma fundamental e, de novo, recorre ao contínuo intuitivo para o solucionar:

> «—*Recorrendo ao contínuo intuitivo determinado pelos pontos do objecto rectilíneo somos conduzidos a admitir que, em todos os casos, o segmento variável $\overline{XX'}$ contém elementos fora do campo de variabilidade entre X e X'*.»

Portanto estabelece a

Hip.VI (hipótese de continuidade relativa) *Todo o segmento que, tendo os extremos sempre variáveis em sentidos opostos, se torna indefinidamente pequeno, contém um elemento fora do campo de variabilidade dos extremos referidos.*

4.2.1 Consequências da hipótese de continuidade relativa

Esta hipótese permite a Veronese definir *sistema contínuo* e *sistema discreto* em relação a uma dada unidade:

Definição 4.1 *(sistema homogéneo contínuo, sistema homogeneo discreto) Um sistema homogéneo no qual a hipótese VI tem lugar, diz-se um sistema homogéneo contínuo relativo ou em relação a uma unidade dada. Um sistema homogéneo no qual a hipótese VI não tem lugar, diz-se um sistema homogéneo discreto em relação à unidade dada.*

[26] Isto é, pode existir uma lacuna entre dois estados de aproximação de X e X'.

[27] Esta observação crucial, carece de demonstração, pois é exactamente este o problema que Veronese quer resolver.

[28] O elemento limite está fora do campo de variabilidade.

[29] A existir sempre o espaço é completo no sentido de Cauchy, Cantor e Veronese.

A hipótese VI garante a existência e unicidade do limite de uma sucessão X, decrescente e limitada, sobre a forma fundamental, numa unidade pré-fixada:

Teorema 4.1 *(96,a) (existência) Em todo o segmento que se torna indefinidamente pequeno em relação a uma dada unidade, com extremos variáveis em sentidos opostos, existe pelo menos um campo infinitésimo de elementos fora do campo de variabilidade dos extremos do segmento variável;*

Dem.(Veronese) Com efeito, se A é o elemento dado pela hipótese IV, assim como existe sempre um campo infinitésimo em relação à unidade dada (def. II, 94), também existe um idêntico em torno de todo o elemento do sistema (def. I,68), e por isso, também em torno de A. Nenhum elemento deste campo pode pertencer ao campo de variabilidae dos extremos do segmento sempre variável, pois no caso contrário, existiriam estados infinitamente pequenos do segmento, contra a hipótese (def. I,95) .■

Teorema 4.2 *(96,b) (unicidade) Todo o segmento que se torna indefinidamente pequeno em relação a uma dada unidade, com extremos variáveis em sentidos opostos, tem por limite um único elemento do sistema, e em sentido absoluto um campo infinitésimo.*

Dem. Seja $\overline{XX'}$ o segmento variável, e Y e Y' dois dos seus elementos, mas não contidos no campo de variabilidade dos elementos X e X'. O segmento $\overline{YY'}$ deve ser infinitamente pequeno, se Y e Y' são diferentes (def. II, 82, e def. II, III, 57), visto que, de contrário, na sua variação, $\overline{XX'}$ permaneceria sempre maior que um segmento finito $\overline{YY'}$, contra a hipótese.■

Teorema 4.3 *(96,b') Dado um segmento variável $\overline{AX}$ crescente, e um segmento variável $\overline{AX'}$ decrescente, no sentido oposto, e se $\overline{XX'}$ se torna idp em relação à unidade*[30]*, existe um único Y tal que $\overline{AY}$ é segmento limite dos dois segmentos variáveis. Se $\overline{AX}$ for estritamente crescente e $\overline{AX'}$ estritamente decrescente, $\overline{AY}$ não é estado de uma das variáveis (e portanto) $\overline{XX'}$ não converge.*

O teorema seguinte refere à majoração das unidades:

Teorema 4.4 *(96,c) O sistema homogéneo contínuo em relação a uma unidade de medida, é-o em relação a qualquer unidade infinita, mas pode não sê-lo em relação a uma unidade infinitésima.*

Dem. Com efeito, nesse caso, todos os segmentos finitos são iguais em relação à unidade infinita,, porque nulos (teorema g,85) e todo o campo finito reduz-se assim a um so elemento em relação à unidade infinita; embora o sistema pudesse ser discreto, em relação a uma unidade infinitamente pequena em torno de um seu elemento dado qualquer, do campo finito.■

Têm-se também os teoremas seguintes:

[30]Veronese fala da unidade, como se houvesse uma unidade padrão estandardizada (como na física), ou abstracta, como na matemática usual. A verdade é que ele, para concretizar e tornar menos pedante o discurso, tem de admitir sempre que o geómetra tem uma unidade de partida, que poderá cambiar no decorrer da geometria. Uma geometria não-arquimediana veronesiana é uma geometria de unidades variáveis e incomensuráveis.

Teorema 4.5 *(97,a) Os estados sucessivos de uma variável estritamente crescente ou decrescente e ilimitada de 1ª espécie a partir de um deles, podem-se indicar com números da sucessão (*$\mathbb{I}$*).*

Dem. Com efeito, entre dois estados consecutivos dados $\overline{AX}, \overline{AX'}$ de um segmento variável, basta considerar aqueles pelos quais $\overline{AX'}$ (se $\overline{AX} > \overline{AX'}$), ou então $\overline{XX'}$ (se $\overline{AX'} > \overline{AX}$) seja finito, porque se fosse ip, poder-se-ia desprezá-lo em relação aos segmentos finitos; por outro lado, não pode ser infinito (teorema h,85) Portanto se a variável é estritamente crescente ou decrescente, em relação à unidade de medida $\overline{XX'}$, no primeiro caso ($\overline{X'X}$ no segundo) é sempre finito, quando se trata de dois estados diferentes. Mas os estados dos esegmentos variáveis constituem uma sucessão ilimitada de primeira espécie, que corresponde univocamente e na mesma ordem que a sucessão ($\mathbb{I}$); portanto os estados da variável podem ser indicados com número da sucessão ($\mathbb{I}$), isto é

$$\overline{AX_1}, \overline{AX_2}, ..., \overline{AX_n}, ...$$

.■

Vê-se que a hipótese de continuidade relativa permite estabelecer uma bijecção entre um segmento (aberto) graduado e o conjunto $\mathbb{I}$. A mesma hipótese permite demonstrar os seguintes teoremas, sobre intervalos na recta:

Teorema 4.6 *(97,b) Dada uma variável finita estritamente crescente* $\overline{AX}$ *(crescente) e a variável finita decrescente (estritamente decrescente)* $\overline{AX'}$ *no mesmo sentido tal que* $\overline{AX}$ ($\overline{AX'}$) *seja sempre menor (maior) de todo o estado de* $\overline{AX'}(\overline{AX})$*, e todo o segmento* $\overline{AY}$ *menor (maior) de* $\overline{AX'}(\overline{AX})$ *pertence à primeira (segunda) variável, o segmento* $\overline{XX'}$ *torna-se idp em relação à unidade dada.*

Teorema 4.7 *(97,c) O segmento* $\overline{X_nX_{n+r}}$ *compreendido entre dois estados sucessivos* $\overline{AX_n}$,$\overline{AX_{n+r}}$ *da variável finita, se for estritamente crescente, ou* $\overline{X_{n+r}X_n}$ *se for estritamente decrescente, e se tiver como limite o segmento* $\overline{AB}$*, torna-se idp quando* n *cresce indefinidamente e fazendo* r *constante,* $(n, r \in \mathbb{I})$.

Teorema 4.8 *(97,d) Para um segmento finito* $\overline{AX_n}$ *variável estritamente crescente (ou decrescente) há sempre, em relação à unidade de medida, um e apenas um segmento limite maior (ou menor) que todos os estados da variável.*

Faz a seguinte observação:

> «— *Obs. Assim como supomos que as sucessões correspondentes à variável sejam limitadas naturais, ou ilimitadas de primeira espécie, assim pode haver num dado sentido um só elemento ou segmento limite. No caso de sucessões que têm outros limites, o limite referido no teorema 4.8 é aquele ordinariamente chamado segundo Weirstrass limite superior ou limite inferior.*»

Teorema 4.9 *(97,d') Duas sucessões de segmentos estritamente crescentes ou decrescentes, respectivamente iguais, determinam segmentos iguais em relação à unidade dada.*

Teorema 4.10 *(97,d") Duas sucessões $\overline{AX}$ e $\overline{AX'}$ uma crescente e outra decrescente, têm um segmento limite comum, se $\overline{AX'}$ é sempre maior que $\overline{AX}$, e todo o segmento $\overline{AC}$, maior que um estado de $\overline{AX}$, é menor que um estado de $\overline{AX'}$ é um estado de $\overline{AX}$ ou de $\overline{AX'}$.*

Teorema 4.11 *Um elemento A chama-se elemento limite em relação a uma unidade de uma sucessão de elementos $X_1, X_2, ..., X_n...$ ordenada num dado sentido da forma fundamental; ou quando é o primeiro ou último elemento da sucessão; ou também quando a sucessão é tal que um segmento $\overline{ANM}$ finito tão pequeno quanto se queira, no sentido oposto dela, existe um elemento da sucessão dada.*

Teorema 4.12 *(98,a) Se $\overline{AB}$ é o segmento limite de um segmento $\overline{AX_n}$, o elemento B é elemento limite da sucessão dada dos elementos X_n.*

Teorema 4.13 *(98,b) Um conjunto com um número infinito (∞) de elementos distintos (X), compreendidos num segmento dado $\overline{AB}$, tem sempre, pelo menos, um elemento limite em relação à unidade de medida.*

Teorema 4.14 *(98,b') Uma sucessão de elementos (X_n) sobre a forma fundamental, tal que o segmento $\overline{X_nX_{n+r}}$, com o aumentar de n, se torna idp, tem um só elemento limite em relação à unidade de medida.*

O problema da decomposição de um segmento finito em partes é tratado no §8. Tem-se:

Teorema 4.15 *(99,a) O segmento $\overline{X_1X_1'}$ ou $\overline{X_1', X_1}$, dado por dois segmentos $\overline{AX_1}, \overline{AX_1'}$ torna-se indefinidamente pequeno se o segmento dado pelas extremidades dos múltiplos de $\overline{AX_1}$ e $\overline{AX_1'}$, segundo o mesmo número n torna-se também indefinidamente pequeno. E inversamente.*

Teorema 4.16 *(99,b) Todo o segmento pode ser dividido, de uma só maneira, num número finito n qualquer de partes consecutivas iguais, do mesmo sentido, em relação à unidade de medida.*

Corolário 4.1 *Se a forma fundamental é fechada, então pode ser dividida em n partes iguais.*

Corolário 4.2 *Dado um segmento $\overline{AB}$ finito, existe sempre um segmento $\frac{1}{n}\overline{AB}$.*

Teorema 4.17 *(99,c) A hipótese VI é independente das hipóteses precedentes.*

Teorema 4.18 *(99,d) Se $\overline{AA'}$ é a n-ésima parte, e $\overline{AA''}$ a n'-ésima parte, de um segmento qualquer $\overline{AB}$ ($n' > n$), $\overline{AA''}$ é menor que $\overline{AA'}$, e se n aumenta indefinidamente, então $\overline{AA'}$ torna-se idp.*

Corolário 4.3 *Se se divide um segmento $\overline{AB}$, qualquer em n partes iguais ($n \geq 1$), e este de novo em n partes iguais, e assim por diante, as partes tornam-se idp.*

Álgebra dos segmentos

Teorema 4.19 *(99,e) Se se adiciona um segmento* $\overline{BC}$ *a um segmento* $\overline{AB}$*, a partir de* B*, do mesmo sentido, ou de sentido oposto em relação à unidade de medida, tem-se o mesmo resultado, somando ao segmento* $\overline{BC}$*, a partir de* C*, o segmento idêntico a* $\overline{AB}$*, e do mesmo sentido que* $\overline{AB}$*. O resultado é independente do elemento do qual se começa a aplicar a operação, isto é,* $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$*,* $\overline{BC}+\overline{AB}=\overline{AC}$*.*

Corolário 4.4 *Dado um segmento* $\overline{AB}$ *há sempre um segmento* $\overline{AC}$ *tal que*

$$m\overline{AC} < \overline{AB} < (m+1)\overline{AC},$$

sendo m *um número dado.*

Teorema 4.20 *(99,f) O segmento, múltiplo segundo um número* m*, da* n*-ésima parte de* $\overline{AC}$*, de um segmento* $\overline{AB}$*, é submúltiplo, segundo o número* n*, de um segmento múltiplo de* $\overline{AB}$*, segundo o número* m*.*

Teorema 4.21 *(99,g) Um segmento qualquer finito* $\overline{AB}$ *é igual, em relação à unidade de medida, ao próprio segmento* $\overline{BA}$*, percorrido no sentido oposto.*

Teorema 4.22 *(99,h) Dividindo um segmento* $\overline{AB}$ *num número* n *de partes iguais e as partes resultantes em* n *partes iguais e assim sucessivamente, obtém-se um conjunto de elementos do segmento dado, compreendido entre os extremos, cujos outros elementos são elementos limitados do conjunto dado em relação à unidade de medida.*

Corolário 4.5 *As partes* $\overline{AX}$ *de um segmento* $\overline{AB}$*, considerado como unidade, cujos elemento* X*, sejam elementos da divisão sucessiva de* $\overline{AB}$ *pela metade, podem ser representados pelo símbolo*

$$(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+...+\frac{\alpha_n}{2^n})\overline{AB},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *são iguais a 0 ou 1, mas não todos nulos. Nos outros casos podem ser representados pelo símbolo*

$$\lim(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+...+\frac{\alpha_n}{2^n}+...)\overline{AB}$$

com $\lim n = \infty$*.*

Corolário 4.6 *No caso em que* n *não tem, no símbolo dado um último valor, e se a operação se considera como efectuada, pode-se representar as partes do segmento* $\overline{AB}$ *com o símbolo*

$$(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+...+\frac{\alpha_n}{2^n}+...)\overline{AB}$$

com $n = 1, 2, ..., m, ...(n = \infty)$*.*

Definição 4.2 *(II,99)(segmento racional, irracional) Se* $(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+...+\frac{\alpha_n}{2^n}+...)\overline{AB}$ *determina um segmento* $\overline{AX}$*, sendo* X *um elemento obtido com a divisão sucessiva em* n *partes iguais do segmento* $\overline{AB}$*, o símbolo* $(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+...+\frac{\alpha_n}{2^n}+...)\overline{AB}$ *diz-se racional, no caso contrário diz-se irracional.*

Para demonstrar a pertinência da sua hipótese VII, Veronese observa que:

«Considerando agora de novo toda a forma fundamental, e o segmento $\overline{AB}$ *que serviu para a construção da primeira escala, temos as seguintes hipóteses:*

1ª $\overline{AB}$ *é indivisível*

2ª $\overline{AB}$ *é soma de um número finito de segmentos indivisíveis;*

3ª $\overline{AB}$ *é divisível num número qualquer finito n de partes finitas entre si, caso em que, pela defI68 e pela hipVI,* $\overline{AB}$ *é contínuo relativo;*

4ª existe um campo infinitésimo em relação ao segmento primitivo dado $\overline{AB}$, *por exemplo de ordem* η *(obs. III, 91 e defVI86). Em tal caso todo o segmento infinitésimo de primeira ordem em relação a* $\overline{AB}$ *teria um último campo infinitésimo de ordem* $n-1$. *E pode dar-se ainda neste caso que no último campo infinitésimo de ordem* η *em relação a* $\overline{AB}$ *nele exista um último segmento indivisível que não contenha outros elementos (def. V,62). Em tal caso a forma fundamental não poderia ser contínua neste campo (hip. VI).*

5ª pode dar-se ainda o caso em que o segmento $\overline{AB}$ *não contenha um último campo infinitesimo de modo que a série das ordens dos campos unfinitesimos seja limitada, mas ultrapasse um número infinito determinado. Assim sucederia se as ordens dos campos infinitesimos fossem dados pelos números* $1, 2, 3, \ldots n \ldots$ *da sucessão* ($\mathbb{I}$).

Em todo o caso os segmentos dados da forma fundamental não têm a mesma propriedade em relação à sua composição em campos infinitesimos e portanto, para a própria uniformidade, a este respeito, dos segmentos dados estabelecemos a seguinte:»

Hip VII. *O segmento* $\overline{AB}$ *que serviu para construir a primeira escala, contém infinitésimos da mesma ordem das de qualquer outro segmento limitado da forma fundamental maior que* $\overline{AB}$.

Depois de provar a independência desta hipótese das precedentes, Veronese apresenta uma série de resultados de caracterização da forma fundamental e das suas partes, bem como da álgebra de segmentos associada:

Teorema 4.23 *(100,b) Todo o segmento limitado da forma fundamental satisfaz a hip VII.*

Observação. Da hipótese VII resulta que não há um último segmento dado $\overline{AB}$ indivisível, isto é um segmento $\overline{AB}$ menor que qualquer segmento dado.

Teorema 4.24 *(100,c) A diferença entre dois segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *finitos absolutos, não idênticos, é um segmento finito absoluto.*

Definição 4.3 *(100,I) Não há um infinitésimo em relação à unidade absoluta no sentido até aqui usado dessa palavra, caso contrário, existiria um último infinitésimo, contra a hipótese VII. Mas para uniformidade de linguagem pode-se dizer que existe um infinitésimo absoluto cujos extremos devem ser considerados como um só elemento, em sentido absoluto, com base nos princípios já admitidos, isto é, o infinitésimo absoluto é nulo em relação à unidade absoluta, ou seja em relação a todo o segmento* $\overline{AB}$, *tomado como unidade de medida.*

Teorema 4.25 *(100,d) Dois esgmentos que diferem de um segmento infinitésimo absoluto são iguais, em sentido absoluto.*

Teorema 4.26 *(100,e) Todo o segmento* $\overline{AB}$ *da forma fundamental, orientado de* A *para* B*, pode-se decompor num número infinito* η *determinado por segmentos consecutivos infinitésimos, sucessivamente de ordem* $\eta, \eta + 1, ...,$.

Teorema 4.27 *(100,f) Em todo o segmento* $\overline{AB}$ *há sempre um segmento cujo múltiplo segundo o número dado* η *é menor que* $\overline{AB}$ *e um cujo múltiplo segundo o mesmo múltiplo é maior que* $\overline{AB}$.

Elementos de topologia do segmento absoluto

O axioma de continuidade absoluta, é introduzido num contexto de segmentos que variam em relação à escala absoluta. Neste parágrafo vêm-se os resultados de Veronese a respeito de segmentos considerados nessa escala.

Definição 4.4 *(100,II) Um segmento* $\overline{AX}$ *finito absoluto que se torna menor que todo o segmento absoluto dado, diz-se que se torna idp absoluto ou que tende a tornar-se ip absoluto, ou ainda, que tem por limite um ip absoluto, e escreve-se*

$$\lim_{abs} \overline{AX} = ip \quad abs$$

Definição 4.5 *(100,III) Um segmento finito absoluto* $\overline{AX}$ *tal que* X *se aproxime id em sentido absoluto de um outro elemento* B *diz-se que tem por limite o segmento* $\overline{AB}$*, e escreve-se*

$$\lim_{abs} \overline{AX} = \overline{AB}$$

Definição 4.6 *(100,IV) (Variável absoluta estritamente crescente, decrescente) Por variável absoluta estritamente crescente ou estritamente decrescente entende-se um segmento variável estritamente crescente ou estritamente decrescente tal que as diferenças entre dois estados quaisquer de um estado qualquer dado da variável não permaneçam sempre finitos entre si, ou não sejam sempre infinitas ou infinitesimos entre si de uma ordem que não supere um número dado de (III).*

Teorema 4.28 *(100,g) Se um segmento absoluto* $\overline{AX}$ *com o extremo* X *variável torna-se menor que todo o segmento finito absoluto dado então tem por limite o zero absoluto, isto é:*

$$\lim_{abs} \overline{AX} = 0$$

Teorema 4.29 *(100,h) Um segmento* $\overline{AX}$ *pode tornar-se indefinidamente pequeno em sentido absoluto, num e no outro sentido.*

Teorema 4.30 *(100,i) Se os elementos* X *e* X' *se aproximam indefinidamente em sentido absoluto e em sentidos opostos de um dado elemento* A*,* $\overline{XX'}$ *torna-se indefinidamente pequeno absoluto.*

Teorema 4.31 *(100,l) Um segmento que se torna indefinidamente pequeno em sentido absoluto com os extremos variáveis em sentidos opostos e contém um elemento fora do campo de variação dos seus extremos tem por limite um só elemento.*

Teorema 4.32 *(100,m) Se X se aproxima indefinidamente de um elemento X' em sentido absoluto, e este se aproxima no mesmo sentido de um elemento A, X se aproxima em sentido absoluto de A.*

Teorema 4.33 *(100,n) Se X e X' se aproximam indefinidamente, em sentido absoluto, e no mesmo sentido, de um elemento A, $\overline{XX'}$ ou $\overline{XX'}$, torna-se indefinidamente pequeno em sentido absoluto.*

A preparação da introdução da hipótese de continuidade absoluta é feita na seguinte observação:

> «*A hipótese VI diz que se $\overline{XX'}$ se torna indefinidamente pequeno em relação a todo o segmento dado $\overline{AB}$ tomado como unidade, quando X e X' se aproximam em sentidos opostos, o segmento $\overline{XX'}$ contém sempre pelo menos um elemento Y diferente de X e de X'. Mas pela hipótese VII contém sempre infinitésimos em relação a $\overline{AB}$. Quando, ao contrário, $\overline{XX'}$ se torna indefinidamente pequeno em sentido absoluto se torna menor que todo o segmento infinitésimo dado, e portanto os dois casos são distintos, e apenas da hipótese VI como se verá em seguida, não deriva que, no segundo caso, $\overline{XX'}$ contenha um elemento fora do campo de variação dos extremos. Por isso, e também pela uniformidade que em sentido restrito intuimos entre as partes indefinidamente pequeno do objecto rectilíneo estabelecemos a seguinte:*»

Hip. VIII (da continuidade absoluta) *Todo o segmento $\overline{XX'}$com os extremos variáveis em sentidos opostos que se torne idp em sentido absoluto, contém um elemento fora do campo de variação dos seus elementos.*

4.2.2 Consequências da hipótese da continuidade absoluta

Teorema 4.34 *(101,a) Não pode existir mais do que um elemento do segmento $\overline{XX'}$ que goza da propriedade da hipótese VIII.*

Dada a variável $\overline{AX}$, estritamente crescente, e a variável $\overline{AX'}$, estritamente decrescente, e orientada no mesmo sentido, se $\overline{XX'}$ se torna *idp* em sentido absoluto há um só elemento Y tal que $\overline{AY}$é limite dos dois segmentos variáveis, e não é um estado das duas variáveis.

Definição 4.7 *(Sistema contínuo em sentido absoluto) Um sistema que satisfaz a hipótese VIII, é dito contínuo absoluto, enquanto que os outros serão chamados discretos absolutos.*

Teorema 4.35 *(101,b) Um sistema homogeneo contínuo em sentido absoluto é contínuo relativamente atodo o segmento dado como unidade de medida, ou, por outras palavras: se é satisfeita a hipótese VIII fica também satisfeita a hip. VI em relação a qualquer unidade.*

Veronese complementa este teorema com a observação seguinte:

«Entre dois estados consecutivos de um segmento variável $\overline{AX}$ e $\overline{AX'}$ basta considerar aqueles pelos quais os extremos X e X' são distintos, pois que de contrário X e X' coincidem em sentido absoluto. Os estados sucessivos portanto da variável em sentido absoluto estritamente crescente ou estritamente decrescente podem ser indicdos com números cada vez maiores da sucessão (III)*.»*[31]

A seguir exibem-se alguns resultados de caracterização da continuidade absoluta.

Teorema 4.36 *(102,a) Se $\overline{AB}$ é um segmento limite de um segmento variável $\overline{AX\eta}$ tem-se:*

$$\lim \overline{AX\eta} = \overline{AB}$$

com $\lim \eta = \Omega$.

Teorema 4.37 *(102,b) Dada a variável estritamente crescente (crescente) $\overline{AX}$ e a variável decrescente (estritamente decrescente) $\overline{AX'}$ em sentido absoluto, e todo o segmento $\overline{AY}$ representando o menor (maior) dos estados de $\overline{AX}$ [$\overline{AX'}$], pertence à variável $\overline{AX}$ [$\overline{AX'}$], o segmento $\overline{XX'}$ torna-se idp em sentido absoluto.*

Teorema 4.38 *(102,c) O segmento $\overline{X_\eta X_{\eta+\rho}}$ compreendido entre dois estados sucessivos de $\overline{AX_\eta}$ e $\overline{AX_{\eta+\rho}}$ da variável se for estritamente crescente, ou $\overline{X_{\eta+\rho}X_\eta}$ se é estritamente decrescente, e se $\overline{AB}$ é o seu segmento limite, com o crescer indefinidamente de η torna-se menor que todo o segmento dado.*

Teorema 4.39 *(102,d) Um segmento $\overline{AX_\eta}$ variável estritamente crescente (ou decrescente) em sentido absoluto tem sempre um e um só segmento limite maior (ou menor) que todo o estado da variável.*

Corolário 4.7 *Se duas sucessões estritamente crescentes ou decrescentes em sentido absoluto de segmentos respectivamente iguais determinam dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, estes segmentos são iguais em sentido absoluto.*

Definição 4.8 *Um elemento A diz-se um elemento limite absoluto de uma sucessão de elementos $X_1X_2...X_\eta... = (X_\eta)$, ordenado segundo um sentido da forma fundamental, quando em todo o segmento $\overline{AB}$ tão pequeno quanto se queira dado, existe um elemento da sucessão.*

Teorema 4.40 *(102,e) Se $\overline{AB}$ é um segmento limite absoluto de um segmento variável $\overline{AX_\eta}$, o elemento B é o elemento limite absoluto da série dada pelos elementos X_η.*

[31] Esta observação mostra bem a distinção de papéis entre o axioma de continuidade absoluta e o axioma de continuidade relativa, dentro da preocupação geral de assegurar uma continuidade local, relativamente a uma escala, e uma continuidade global, relativamente a qualquer escala. De facto a continuidade relativa permite estabelecer essa propriedade em relação a uma métrica dada — e essa é uma grande inovação, a continuidade absoluta, tem um papel comparável ao axioma de Dedekind, portanto dentro da tradição das escalas absolutas. O primeiro axioma aparece como imperativo da complexidade da coexistência de diversas escalas e ordens (constituindo a origem histórica da continuidade em sistemas ordenados muito complexos), o segundo aparece para estabelecer a normalidade, no quadro habitual, em que se considera apenas uma unidade absoluta e uma ordem total.

4.3 Introdução à GNA de Veronese

A geometria de Veronese é baseada no isomorfismo entre uma recta geométrica e o conjunto numérico $\mathbb{II}$.

Antes de se proceder a uma breve digressão pelas ideias básicas da geometria não-arquimediana de Veronese, vai-se apresentar a lista completa dos seus axiomas, com vista a fornecer uma antevisão das bases fundacionais dessa geometria, mas também para que as referências sejam facilitadas[32].

A lista dos axiomas

Veronese distingue entre *axiomas*, *hipóteses*, e *axiomas práticos*. Os primeiros são proposições sugeridas directamente pela experiência; os segundos não são sugeridos pela experiência mas são proposições que, não estando em contradição com os axiomas, ajudam a edificar a teoria; os terceiros são meros guias para aplicações práticas, sugeridos por estas e visando as mesmas.

Tem-se então:

Axioma I (V-1): [p. 210] Existem pontos distintos — Todos os pontos são idênticos.

Axioma II a)(V-2a))[p. 214] Existe um sistema de pontos a uma dimensão idêntico na posição das suas partes, determinado por dois dos seus pontos distintos e contínuo.

Axioma II b)(V-2b) [p. 216] Existem pontos fora da recta. Todos os pontos que não pertencem à recta determinam com todo o ponto da recta uma outra recta.

Axioma III (V-3)[p. 221] Se duas rectas quaisquer têm um ponto comum A, e um segmento $\overline{AB}$ duma delas, existe um segmento idêntico $\overline{A, B'}$ da outra.

Axioma IV (V-4) [p. 223] Se um lado de um triângulo qualquer torna-se indefinidamente pequeno, a diferença entre os outros dois torna-se indefinidamente pequena.

Axioma V(V-5) [p. 240] Se em dois pares de raios quaisquer $AB, AC; A'B', A'C'$, se escolher dois pares de pontos B e C, B' e C' tais que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}; \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'},$$

e o segmento $\overline{BC}$ seja idêntico a $\overline{B'C'}$, os dois pares das rectas são idênticas.

Hipóteses e axiomas práticos

Hipótese I (V-H1) [p. 244]. A recta é um sistema de pontos a uma dimensão idêntica na posição das suas partes, contínuo absoluto e determinado por dois dos seus pontos distintos.

Hipótese II (V-H2) [p. 245]. Duas rectas coincidem em sentido absoluto se têm em comum o campo relativo a uma unidade qualquer, a partir de qualquer ponto tomado como origem.

Hipótese III (V-H3) [p. 248]. No campo finito absoluto à volta de um ponto S são válidos os axiomas II b), III, IV e V.

Hipótese IV (V-H4) [p. 251]. Duas rectas distintas quaisquer num campo finito à volta (na vizinhança) de um ponto S, e passantes por S, são distintas, ainda que em todo o campo infinito ou infinitésimo em relação à unidade desses campos, e inversamente.

Hipótese V (V-H5) [p. 262]. Uma recta é uma linha fechada.

Axioma prático I (V-P1) [p. 262]. No campo das nossas observações actuais é verificada com grande aproximação a propriedade de que por um ponto se pode conduzir uma e apenas uma paralela a uma recta dada. (Axioma hiperbólico de paralelismo).

[32] No Apêndice B encontra-se uma lista alternativa, onde se tenta a separação, o reagrupamento e uma ordenação dos axiomas de Veronese, na esteira da tradição hilbertiana.

Hipótese VI (V-H6) [p. 266]. Sobre uma recta existem cópias de pontos que não a determinam.

Axioma prático *II (V-P2*) [p. 279] Um corpo pode mover-se sem deformação (existência de movimentos rígidos, ou isometrias).

Axioma prático II(V-P2) [p. 279] Os pontos de uma figura qualquer podem mover-se livremente e independentemente uns dos outros, descrevendo cada um deles uma linha intuitiva, de modo que as posições dos pontos da figura correspondem unívocamente e na mesma ordem às posições sucessivas, mas não excluindo que muitos pontos possam ocupar o mesmo lugar numa posição sucessiva.

Hipótese VII (V-H7) [p. 361] A figura rectilínea determinada por duas rectas quaisquer passantes por um ponto S, em todo o campo finito na vizinhança de S, permanece a mesma, relativamente à unidade desse campo, mesmo quando se consideram os pontos nos campos no infinito ou nos campos infinitésimos na vizinhança do referido ponto S, sobre as duas rectas.

Axioma prático III(V-P3) [p. 454] O espaço intuitivo é uma figura a três dimensões em relação aos seus pontos.

4.3.1 Elementos

O ponto

A geometria de Veronese começa na primeira parte de *FG*, livro I. A introdução é feita no §1 com os seguintes títulos: *Ponto — axioma I — figura (geométrica) — espaço geral — Geometria. Sistema de pontos a uma dimensão.*

A epistemologia de referência é lançada no nº1, naquilo que Veronese chama "*observações empíricas*", que, como explica em nota de rodapé, servem para estabelecer os axiomas, mas não são tidas em conta no enunciado das propriedades e nas demonstrações geométricas, nas quais apenas se recorre a resultados que, independentemente dessas considerações empíricas, são estabelecidas nos axiomas [72].

Nessas considerações o autor considera que

— Existe um espaço intuitivo ou ambiente externo [ao geómetra] que é onde se encontram os objectos que, são apreendidos através dos sentidos;

— Os objectos ocupam um lugar [*locus*] ou *posto* no espaço intuitivo;

— No entanto, o lugar ocupado por um corpo, é independente desse corpo (ontologicamente anterior e posterior ao mesmo);

— O lugar não ocupado por um corpo, ou se deste se faz abstracção, é vazio — o que não implica a existência efectiva de um lugar vazio;

— O vazio (ou lugar vazio) não é nulo[33];

— O vazio é imóvel;

— Objecto de estudo da geometria, é fornecido efectivamente no espaço intuitivo, por exemplo, como extremidade de um fio: resulta da abstracção das suas qualidades físicas, e é o que separa duas partes consecutivas.

Tem-se então a

Definição 4.9 *(ponto) O elemento fundamental que compõe as formas chama-se ponto.*

[33] Não se percebe em que sentido.

Ou ainda: ponto é o objecto que compõe todos os outros objectos ou as suas representações.

Como observa, a intuição do ponto leva a que todos os pontos sejam idênticos, o que porém é fixado em axioma:

AXIOMA I. Existem pontos distintos [não coincidentes]. Todos os pontos são idênticos.

Definição 4.10 *(figura geométrica) Toda a forma [geométrica] cujo elemento fundamental é o ponto chama-se figura ou ente geométrico.*

Uma figura é, portanto, um conjunto, no sentido veronesiano, de pontos, no sentido veronesiano, e aplica-se-lhes as operações definidas para conjuntos: reunião, intersecção, etc...

Uma definição importante para a compreensão do pensamento veronesiano[34] é o de espaço geral:

Definição 4.11 *O espaço geral é um sistema [ou conjunto] de pontos tal, que dada ou construida nele uma figura, existe sempre um ponto [do espaço geral] fora da mesma*[35].

Em cosequência trata-se, por definição, de um espaço infinito, quanto ao número de elementos[36], e repete-se o tipo de raciocínio, clássico em Veronese, que está presente na definição de forma fundamental. No entanto esta definição contém um axioma implícito:

> «— *Existe um espaço tal que, existe sempre, pelo menos um ponto fora de qualquer figura, dada ou construída nesse espaço*».

Este axioma é correspondente à **hipótese VIII** sobre a forma fundamental. De facto, o espaço geral parece ser uma espécie de forma fundamental, multidimensional.

Neste ponto Veronese introduz a sua definição de geometria

Definição 4.12 *A geometria é a ciência do espaço geral.*

A operacionalização da definição é feita na observação seguinte:

— *O objectivo da geometria é a construção de figuras concretas no campo da nossa observação externa.*[37]

Esta sentença justifica a firmação de Veronese de que a geometria é "*a mais exacta das ciências experimentais*". Com efeito, Veronese acaba de apontar para a geometria um objectivo completamente fora do quadro do idealismo platónico — que constitui um meio e não um fim: a actuação no meio que envolve o homem.

Definição 4.13 *(figura a uma dimensão) Uma figura a uma dimensão é um sistema de elementos a uma dimensão*[38] *cujos elementos são pontos.*

[34] Embora o próprio diga que se pode fazer toda a sua geometria sem essa noção [72].

[35] É inesgotável através de meios humanos, físicos ou mentais.

[36] O que não implica a existência de qualquer escala.

[37] É absolutamente contrária à tradição euclidiana a consideração de dois campos geométricos: um campo abstracto e um campo da observação externa, isto é, físico. Porém, não se trata de uma colocação inédita, podendo ser identificada em Arquimedes, Galileu, Helmholtz, entre outros.

[38] Um sistema a uma dimensão é um conjunto totalmente ordenado, embora Veronese não tenha dado explicitamente essa definição, como se viu em 4.5.

A unificação das abordagens clássicas da geometria, estática e dinâmica, é feita do seguinte modo: os elementos de um sistema a uma dimensão podem ser consideradas como posições diversas de um só elemento do sistema[39], donde se pode dizer, sem introduzir novos princípios, que os pontos de um sistema a uma dimensão, são posições diversas de um ponto que se move sobre o sistema. Pela mesma razão , se se considerar os pontos consecutivos $A, A^1, A^2, ...,$ do sistema, pode-se dizer que os segmentos $\overline{AA^1}$, $\overline{A^1A^2}$, ... são posições diferentes de um mesmo segmento que se move (ou se escorre) sobre o sistema, sem que disso derive a identidade desses segmentos e a continuidade do referido sistema, e sem que esta expressão dependa do movimento real dos corpos.

Observe-se que com estas considerações, Veronese define a translação de um segmento que, ao longo da mesma, pode mudar de comprimento (casos de não homogeneidade) e, por não ser forçosamente uma operação contínua, é quantificada, isto é, pode-se fazer aos saltos.

Aplicando o conceito de movimento, Veronese define um sistema linear fechado (no qual um elemento em movimento num determinado sentido volta ao ponto de partida) e sistema linear aberto (no qual um elemento em movimento num determinado sentido não volta ao ponto de partida).

A recta

A recta deve ser a concretização (isto é, uma realização "material") da forma fundamental, é introduzida através da fixação do

AXIOMA II a) *Existe um sistema de pontos a uma dimensão idêntico na posição das suas partes, determinado por dois dos seus pontos distintos, e contínuo.*

Definição 4.14 *O sistema a que se refere o axioma acima, chama-se linha recta ou recta.*[40]

Observe-se que o axioma **IIa** é um axioma de metrização, tal como o axioma **A4** de Birkhoff [capítulo 11] pois através dele se postula a existência de uma recta com a mesma estrutura que a forma fundamental. Estabelece portanto um isomorfismo entre a forma fundamental (o conjunto $\mathbb{I}$) e a recta geométrica.

Uma observação importante é a seguinte: este axioma fixa a existência de uma recta determinada por dois quisquer dos seus pontos (distintos), tal como em Hilbert, isto é, existe, pelo menos, uma recta hilbertiana. Não está em contradição com a hipótese VI (mais adiante), que é também um resultado de existência (existem pares de pontos que não definem uma recta não hilbertiana), pois em Veronese existem dois tipos de rectas.

Outras propriedades são consequências do axioma acima:

AXIOMA II b) *Existem pontos fora da recta. Todo o ponto que não pertence à recta determina com todo o ponto desta uma outra recta.*

Obs: se o ponto está "alinhado"com a recta, determina uma nova recta, com duas sub-rectas alinhadas, e assim sucessivamente para cada ponto considerado fora das novas retas; se o ponto não estiver "alinhado" com a recta, então definem um plano.

[39] Translações dum elemento.

[40] Observe-se que a recta de Veronese é constituida por pontos, tal como a de Euclides ou a de Hilbert. O que é diferente entre elas é a estrutura, que no caso de Veronese, comporta a existência de segmentos infinitesimais actuais, graças ao isomorfismo entre ela e o conjunto dos números $\mathbb{I}$. O facto de Veronese dizer que o ponto é apenas uma marca na recta , e não seu elemento, não é contraditório com a definição de recta acima apresentada, se se considerar que a afirmação de Veronese implica (como é intuitivamente verdade) que num segmento há um número potencialmente infinito (*idg*) de pontos, e consequentemente de segmentos *ip* delimitados por eles.

4.3.2 Alguns resultados

Teorema 4.41 *Se dois pontos não determinam uma recta, toda a recta que contem um contém também o outro [estão infinitamente próximos].*

Corolário 4.8 *Se 3 pontos não estão numa dada recta determinam dois a dois 3 rectas.*

Corolário 4.9 *Os pontos que com um ponto dado não determinam uma dada recta não a determinam entre si.*

Teorema 4.42 *Se um ponto de uma recta não determina com outro ponto da mesma, essa recta, então todo o ponto da recta tem essa propriedade, e a partir de um ponto, num e noutro sentido, existem infinitos segmentos iguais consecutivos cujos extremos não determinam a recta.*■

Teorema 4.43 *Um segmento* $\overline{AB}$ *pertence a uma e uma só recta.*

Teorema 4.44 *Todo o ponto está situado em muitas rectas distintas.*

Teorema 4.45 *O conjunto das rectas passantes por um ponto, determinam o espaço geral.*

Congruência de segmentos
A iniciação à relação de congruência é feita no §3.

Definição 4.15 *Comprimento de um segmento* $\overline{AB}$*, é o segmento* $\overline{AB}$ *considerado como substituível por um segmento idêntico, em toda união com outros segmentos.*

É oportuno observar que a falta de clareza é evidente nesta definição, central nesta secção. Com efeito, comprimento dum segmento $\overline{AB}$ é considerado um estado do segmento $\overline{AB}$: é quando ele é considerado substituível por um idêntico nas uniões, isto é por outro segmento com as mesmas propriedades, excepto a posição. Acaba-se por chegar à conclusão de que o comprimento de um segmento é uma propriedade comum aos segmentos com todas as propriedades comuns, excepto a posição. É legítimo questionar se a outras propriedades, como a de terem ou não a mesma recta suporte, foi considerada. De facto, ou não é considerada e estamos face a um erro de definição, ou é considerada como estando incluída na diferença de posição, e esta diferença passa a incluir mais do que uma propriedade, (possivelmente um conjunto infinito delas) e esta-se face a uma estratégia pouco clara. Todavia pode-se encarar esta definição como indicando que o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é o representante canónico de uma classe de equivalência de segmentos equivalentes (isto é, iguais, excepto na posição)

Definição 4.16 *O comprimento de* $\overline{AB}$ *é a distância dos extremos* A*,* B *do segmento* $\overline{AB}$.

O exemplo apresentado é algo confuso:

Exemplo 4.1 *Dados dois segmentos* $\overline{AB} = \overline{A'B'}$*,* $\overline{A_1B_1} = \overline{A'_1B'_1}$ *situados ou não na mesma recta, em geral a cópia* $\overline{AB}, \overline{A_1B_1}$ *pode não ser idêntica à cópia* $\overline{A'B'}$*,* $\overline{A'_1, B_1}$*, mas considerando apenas o comprimento dos segmentos tem-se que as duas cópias de comprimentos são iguais.*

A ideia de congruência de segmentos é ontologicamente anterior à de comprimento, pois vem da identidade. O problema aqui é não haver nenhum critério nem axioma geométrico que permita decidir duma identidade. Veronese deixa a cada um a capacidade de comparar e decidir se todas as propriedades dos objectos em comparação são ou não as mesmas (axioma implícito **AIO-I**, **AIO-II**, ver anexo III).

Teorema 4.46 *Se os comprimentos de dois segmentos sobre a mesma recta são iguais, os dois segmentos são iguais*[41].

Trata-se de um teorema métrico. A abordagem veronesiana da congruência é métrica.

Definição 4.17 *Segmento de dois pontos sobre uma recta aberta é o segmento que os dois pontos determinam sobre a recta. Segmento de dois pontos A, B sobre uma recta fechada é o menor dos dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ do mesmo sentido determinado pela sequência A,B sobre a recta.*

A primeira parte da definição é desnecessária, a segunda está errada pois dois pontos A, B sobre uma recta fechada não determinam na mesma um sentido.

Definição 4.18 *A recta tem dois sentidos. A recta percorrida num determinado sentido é chamada de raio, e portanto tem dois raios, cujos pontos coincidem. Os raios de uma recta dizem-se opostos*

Definição 4.19 *Dois raios coincidem quando pertencem à mesma recta e têm o mesmo sentido.*

Nota 4.1 *i) Um raio não é uma semirecta, mas uma recta orientada;*

ii) É interessante a introdução deste elemento na geometria. Mas impõe-se uma questão: quando é que dois raios sobre uma mesma recta e com o mesmo sentido são diferentes? Na definição de raio há um elemento cinemático — percorrer — que é logo substituído por um estático: um raio é constituído por pontos.

4.3.3 Congruência de figuras

Para garantir a congruência de todas as rectas e começar a explorar a congruência de figuras no plano, Veronese inicia o § 4. O principal instrumento do parágrafo, e fundamental no resto do texto é o

Axioma III — Se duas rectas quaisquer têm um ponto comum A, o segmento $\overline{AB}$ duma delas é idêntico congruente a um segmento $\overline{AB'}$ da outra.

Este axioma é muito importante pois permite a realização de transformações geométricas no plano, ao determinar a existência de translações não deslizantes, isto é, aplicações duma recta noutra.

Como resultado imediato, tem-se o

Teorema 4.47 *Todas as rectas são idênticas.*

[41] Em que sentido? Se os comprimentos são iguais, os segmentos têm todas as propriedades comuns, excepto a posição, sendo portanto equivalentes. Segmentos equivalentes, são *congruentes*, em linguagem moderna.

Definição 4.20 *(figura rectilínea) Uma figura rectilínea de um sistema ou de muitos sistemas distintos de pontos, entenderemos a individualidade dos segmentos que têm por extremo os pontos dados, e os segmentos determinados pelos pontos dos segmentos anteriores e assim por diante.*

Uma figura rectilínea de um conjunto de pontos é o seu envolvente convexo. Tem portanto as seguintes propriedades:
— É um conjunto convexo;
— É conexo.
Trata-se de um polígono convexo ou simplexo.
Segue-se uma definição importante

Definição 4.21 *(triângulo) A figura rectilínea determinada por 3 pontos A, B, C, não colineares chama-se triângulo, de vértices A, B, C e lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.*

Antes de continuar a teoria dos triângulos (congruência, semelhanças, ...) Veronese demora-se um pouco para fazer a transferência da topologia da forma fundamental para a recta. Inicia esse assunto no §5. Tem-se:

Definição 4.22 *(vizinhança) Por vizinhança de um ponto dado A entende-se o conjunto determinado por todos os segmentos rectilíneos que emanam de A, iguais*[42] *a um segmento qualquer dado ε, tão pequeno quanto se queira. A distância 2ε chama-se amplitude da vizinhança de A.*

Nota 4.2 *A noção de vizinhança está aqui definida num sentido absoluto, independente de unidades. Com efeito, ε é um segmento de comprimento indefinidamente pequeno, e não ip, relativo a uma certa unidade.*

Definição 4.23 *(ponto limite) Um ponto L diz-se ponto limite de um conjunto de pontos (X) ou de uma sucessão de pontos (X_n) quando, em toda a vizinhança de L, de amplitude arbitrariamente pequena, existe um ponto de (X) ou (X_n). No caso da sucessão diz-se também que um ponto da sucessão se aproxima indefinidamente do ponto L.*

Trata-se da definição clássica de ponto limite ou de acumulação.

Teorema 4.48 *Num conjunto qualquer (X) que tem ponto limite L, existe uma sucessão (X_n) de pontos que tem por limite L.*

Definição 4.24 *A expressão: um triângulo variável ou com lados variáveis equivale à seguinte: uma sucessão de triângulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, ...*

Esta definição coloca o problema da variabilidade dos lados de um triângulo. O axioma seguinte «domestica» esse problema:

Axioma IV. Se um lado de um triângulo qualquer se torna indefinidamente pequeno, a diferença dos outros lados se torna também indefinidamente pequena.

O §6, intitulado "*conjuntos de pontos que, dois a dois, podem não determinar uma recta dada*" reveste-se de grande interesse, pelas diferenças que introduz em relação à geometria de Hilbert:

[42] Congruentes.

Teorema 4.49 *Se dado um conjunto (A) de pontos da recta tal que:*

1º escolhido um segmento qualquer cujos extremos sejam pontos do conjunto, os extremos dos segmentos consecutivos, iguais ao dado, num dado sentido, a partir de qualquer ponto do conjunto tomado como origem, pertencem ao referido conjunto;

2º um ponto A de (A) não tenha um primeiro ponto consecutivo do conjunto no sentido dado; em todo o segmento de recta, tão pequeno quanto se queira da, existe sempre um ponto do conjunto.

Corolário 4.10 *Todo o ponto da recta, que não é ponto de (A), é ponto limite do conjunto (A).*

Teorema 4.50 *Todo o conjunto (X) de pontos que, dois a dois, não determinam a recta, contém os seus eventuais pontos limite.*

Teorema 4.51 *Os pontos de um segmento $\overline{AB}$ que com um dos seus extremos, por exemplo A, não determinam uma dada recta, não podem ser em número infinito.*

Teorema 4.52 *a) Os segmentos consecutivos de uma sucessão de pontos, que com um ponto dado determinam uma dada recta, são iguais entre si, em qualquer recta que contenha a sucessão dada;*

b) Os segmentos determinados por dois pontos quaisquer da sucessão, em duas rectas passantes por eles, são iguais.

Teorema 4.53 *a) Dois conjuntos de pontos, cada um dos quais não determina uma recta, estão situados numa só recta (determinam uma recta);*

b) Os segmentos que têm por extremo, duas cópias de pontos consecutivos, que não determinam uma recta, são iguais.

Esta ideia de existirem pontos distintos de uma recta, mas que não a determinam é pura e simplesmente nova. São pontos infinitamente próximos. Evidentemente, não se encontra em Hilbert.[43]

Continuando no mesmo registo, Veronese passa para o §7.

Definição 4.25 *Um segmento rectilíneo $\overline{AB}$ diz-se limite de uma sucessão de segmentos rectilíneos dados $\overline{XY}$, se os pontos A e B são pontos limite dos pontos X e Y, supondo que os pontos A e B determinam a recta.*

4.3.4 Geometria não-arquimediana de Hilbert versus geometria não-arquimediana de Veronese

A primeira comparação entre as geometrias de Hilbert e Veronese foi feita por Bidoni na sua tese de doutoramento, e dizia respeito, sobretudo, em relação à diferença de métodos adoptados pelos dois geómetras: Hilbert, com uma preocupação formal e minimalista, Veronese com uma preocupação intuicionista e maximalista.

Muitas são, com efeito, as diferenças. Contudo vai-se propor uma breve análise duma diferença essêncial entre a Geometria de Hilbert e a de Veronese, que advém do conceito de escala

[43] Ela nem é consequência nem contradiz os axiomas de incidência de Hilbert. Com efeito, quando se está apenas nas geometrias de Incidência, ordem e congruência de Hilbert, já se viu que o axioma de Arquimedes é independente. Na ausência desse axioma, existem elementos *ips*. Logo, a existência de segmentos *ips* (que não determinam a recta em que se encontram) é independente dos axiomas I, II e III de Hilbert.

Rectas com estruturas diferentes

Um dos axiomas propostos por Veronese (hipótese **VI**) é o seguinte:

«— Existem (pares de) pontos que não definem uma recta.»

Este axioma está em aparente contradição com os axiomas de incidência de Hilbert, em particular, com o axioma I1 (dois pontos quaisquer definem uma recta hilbertiana). Com efeito, em Hilbert, o caracteriza a recta é apenas a sua "linearidade" ou "direcção". Mas em Veronese, para além da "direcção" existe outra propriedade fundamental da recta: a sua estrutura[44]. Essa estrutura é imposta pelas diversas escalas (não-arquimedianas) possíveis, enquanto que em Hilbert só existe uma escala (arquimediana), pelo que é desnecessário falar em escalas — donde resulta que não há diferença de "estrutura" (ver o capítulo 10 e o Apêndice C).

Vários tipos de rectas

Assim, em Veronese há vários tipos de rectas: as rectas a uma só escala (arquimediana) determinadas por dois quaisquer dos seus pontos, iguais às rectas de Hilbert (existe pelo menos uma), e as rectas a várias escalas (não-arquimedianas) que consistem em rectas constituidas por rectas a um número qualquer de escalas, nas quais existem pares de pontos que não a determinam. Assim, pode-se considerar que em Veronese há rectas de tipo I, as que possuem apenas uma escala arquimediana; as rectas de tipo II, constituidas por rectas de tipo I "alinhadas", separadas por "buracos" de tipo I, as rectas de tipo III, constituidas por rectas de tipo II, "alinhadas", separadas por "buracos" de tipo II, enfim, em geral, rectas de tipo n constitudas por rectas de tipo $n-1$, alinhadas, separadas por "buracos" de tipo $n-1$ (ver o capítulo 10 e o Apêndice C).

As rectas hilbertianas são apenas um tipo de rectas veronesianas, as de tipo I, e constituem partes localizadas de uma recta de Veronese.

Pontos que não "definem" uma recta

Seja r uma recta de Veronese do tipo II. Sejam dados dois pontos P, Q distintos, pertencentes à mesma recta s, de tipo I contida em r. É evidente que P e Q definem a "direcção" de r, mas não a sua "estrutura". O segmento $\overline{PQ}$ não inclui todos os tipos de segmentos de r (o que seria uma forma de caracterizar a estrutura de r). Seja agora R um ponto de r situado numa "sub-recta" t de r, componente de r, disjunta de s. O segmento $\overline{PR}$ já possui uma estrutura que permite adivinhar, por simetria, a estrutura de r: inclui sub-segmentos com um "buraco" (como os "buracos" de r) e sub-segmentos sem "buracos" (como os subsegmentos arquimedianos de r). Pode-se dizer que o segmento $\overline{PR}$ caracteriza r por dar, não apenas a sua direcção, mas também a sua estrutura[45], ao contrário de $\overline{PQ}$.

Daí a necessidade de Veronese em postular a existência, numa recta, de pontos que não a definem, no sentido em que o segmento que une esses dois pontos não espelha, como a direcção, a estrutura da recta[46].

[44] Em Hilbert as rectas são absolutamente homogéneas. Em Veronese, há que considerar a "distribuição" dos pontos na recta, ou mais precisamente, a distribuição dos sub-conjuntos "densos" de pontos.

[45] A recta r pode ser reconstruida por "translação" do segmento $\overline{PR}$, pelo que este pode ser considerado um segmento "quociente".

[46] Para Hilbert, a "direcção" é a única característica da recta.

Pode-se dizer que: dada uma recta de tipo n, e dois pontos A e B de r, A e B definem r, se r puder ser construido a partir duma tranlação do segmento $\overline{AB}$ — isto é, se $\overline{AB}$ contém toda a estrutura local de r.

Uma conciliação imediata entre os dois pontos de vista

Sabe-se, portanto, que a estrutura (micro)local de qualquer recta de Veronese, é uma recta de Hilbert, isto é, a apenas uma escala, portanto, arquimediana. Assim, uma adaptação adequada dos axiomas de Hilbert, com vista à sua "localização" resultaria numa axiomática que descreve as rectas de Veronese.

É claro que os axiomas da geometria absoluta de Hilbert, não incluindo o axioma de Arquimedes, possuem intrinsecamente o germe das rectas de Veronese. A conciliação de que aqui se fala, é apenas em termos de linguagem e de métodos (ver Apêndice C).

O axioma I3, linearização e dimensão

Há um grande paralelismo entre o conceito de "fora" em Veronese [hipótese **V2b**: existe pelo menos um ponto *fora* da escala gerada por uma unidade qualquer] e o mesmo conceito em Hilbert, por exemplo, no axioma **I3** (para se ficar no caso mais simples). Com efeito, o axioma **I3** diz que existem três pontos não na mesma recta, isto é, dada uma recta existe sempre um ponto *fora* dela. Ora mesmo quando se consideram os modelos de **I1**, **I2**, **I3**, nada garante que o ponto P considerado fora da recta r, não seja "colinear" com r. É evidente a intenção de Hilbert: o ponto P definirá com r um "plano", isto é, haverá um aumento de dimensão, aliada à perda (assumida) de linearidade. Ora, sejam P um ponto fora de r (que existe, por **I3**), A, B dois pontos distintos de r. Por **I1**, P define com A uma recta s e com B uma recta t. A relação de t com r e s depende do seguinte facto crucial: P é ou não é colinear com A e B. A definição usal de colinearidade, em Hilbert é a seguinte:

— *Três pontos são colineares se pertencerem à mesma recta.*

Mas recta é um conceito primitivo, que exactamente se pretende caracterizar com os axiomas **I1**–**I3**.

Para a demonstração de que r, s e t são diferentes entre si, é crucial a consideração de que P não é colinear com A e B, isto é, P não está na mesma recta. O conceito de colinearidade e o de recta são equivalentes, em Hilbert.

Para Veronese, tudo se passa de forma diferente: a colinearidade[47] é um conceito primitivo[48], diferente do de recta, uma vez que o primeiro é absoluto, e o segundo é relativo: as rectas não são todas localmente isomorfas entre si, o que leva à sua classificação, e consequente relativação. Assim, pontos colineares podem ou não estar na mesma recta, isto é, em rectas do mesmo tipo. Assim, para o caso acima, haveria que se distinguir dois sub-casos: P não colinear com A e B, e nesse caso tudo tudo se passa à moda hilbertiana; P é colinear com A e B, e nesse caso P pertence a uma recta com A e B, mas de tipo diferente (superior) ao tipo da recta definida apenas por A e B.

No meio desta discussão, o conceito "usual" de dimensão é afectado, pois a recta definida por A, P (segundo sub-caso) não tem dimensão "usual" diferente da da recta

[47] Ordem total absoluta, suporte de qualquer forma linear.

[48] Ver a Anexo III.

definida por A, B. Em $\overleftrightarrow{AP}$ existem segmentos comensuráveis entre si e segmentos incomensuráveis entre si. Porém, por se tratar duma recta, geralmente se lhe atribui a dimensão usual de um. Mas comparando a recta $\overleftrightarrow{AP}$ com um plano euclidiano usual (o definido por A, B e $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ (primeiro sub-caso), as semelhanças são mais que muitas: são ambos gerados por uma recta (usual) e um ponto fora dela; têm ambas duas classes de subconjuntos, umas comensuráveis entre si (os segmentos entre si, as áreas entre si) e outras incomensuráveis entre si; possuem ambas duas classes arquimedianas. Parece que têm a mesma estrutura (isomorfos), sendo um linear e outro não. Assim sendo, porque não assumir o isomorfismo (de ordem), e consequentemente, que uma recta de Veronese pode ter um aspecto "plano" e um "plano" pode ter um aspecto linear?[49]

Assim, um conceito de dimensão possível seria o de número de classes arquimedianas, retirando desse conceito qualquer intuitividade espacial[50].

OBS: para mais precisões sobre este assunto, ver Apêndice C.

4.4 Conclusões

A abordagem dos fundamentos da geometria por Veronese, assenta nos seguintes princípios:

— A geometria é uma ciência experimental, mas exacta: como tal deve procurar não fugir da intuitividade empírica, mas essa intuitividade não deve estar reflectida nos axiomas. Estes devem reger-se pelos princípios lógicos de consistência e independência, e todos as hipóteses não contraditórias com os axiomas e independentes deles, podem ser adicionados, com vista ao desenvolvimento da própria geometria;

— As hipóteses da dimensão três, de Arquimedes e de que a recta é aberta, não são necessárias aos fundamentos da geometria, mas apenas contingentes.

Como método para a Geometria, Veronese assume a via (sintética) métrica, mas para a construção do seu corpo numérico ($\mathbb{H}$) escolhe a via sintética pura, na esteira de Eudóxio e Euclides, porém abandonando explicitamente o axioma de Arquimedes. Com efeito, Veronese sabe que, desde Descartes, é importante poder-se atribuir, numa geometria, a cada ponto, uma lista de números, ditas as suas coordenadas. Embora defenda a via sintética para a construção dos fundamentos, visa — tal como Hilbert veio a fazer mais tarde — um isomorfismo entre um corpo numérico e uma recta, que venha mais tarde a possibilitar o desenvolvimento da geometria analítica. Essa abordagem, que é, mais tarde, explicitada por G. D. Birkhoff, foi a escolhida por Veronese, apenas com uma dificuldade acrescida: a de não haver um corpo numérico não-arquimediano satisfatóriamente construido, tal como o corpo (arquimediano) dos números reais, no tempo de Birkhoff. Assim, boa parte da investigação de Veronese, assim como cerca de um terço dos *FG* são dedicados à construção (sintética) dos seus corpos numérico e de segmentos não-arquimedianos.

Tendo o corpo de referência, Veronese inicia a sua geometria por axiomas de existência de pontos e rectas, mas imediatamente impõe um axioma de metrização, para a transferência da estrutura do seu corpo numérico para a recta.

O resto da sua geometria que, por falta de tempo, não foi analisado, desenvolve-se com

---

[49] Tudo isso, é claro, longe da atitude logicista que consiste em considerar que pontos rectas e planos podem ser "mesas cadeiras ou canecas de cerveja". Trata-se duma discussão absolutamente dentro da intuição geométrica empírica (ver capítulo 10).

[50] O que é indiscutivelmente benéfico para a geometria.

as preocupações acima referidas: espaço n-dimensional, tendo-se atardado na dimensão 4, como que à procura de uma intuição gráfica (que se pode dizer, muito bem conseguida), projectividade e não-euclidianismo.

Pode-se dizer que Hilbert e Veronese fizeram muitas jornadas juntas, mas nos pontos de separação, Veronese tem ambições profundamente diversas das de Hilbert: este é "logicista" e minimalista, aquele é "intuicionista" e maximalista.

Parte III

Análise não-standard e geometria não-standard

CAPÍTULO 5

Métodos da análise não-standard

5.1 Introdução

Neste capítulo recordam-se alguns resultados e métodos básicos da ANS. Na primeira secção faz-se uma digressão por uma das muitas formas existentes de análise com ordens de grandeza[1]. Na secção seguinte introduz-se a ANS nelsoniana, que será a ferramenta para a proposta de fundamentação da GNS a ser apresentada na parte IV desta dissertação.

5.2 Análise com ordens de grandeza

As relações de conhecimento e de acção do homem sobre a natureza são balizadas por aquilo que se chama a "*escala humana*". Ora, a noção de escala é suscitada pela operação de medição e a necessária adopção de uma unidade. Trata-se sem dúvida de um dos assunto bastante complexo.

A assumpção, quase generalizada na matemática, do axioma de Arquimedes, indica o facto de, na maior parte das vezes, se optar por uma só ordem de grandeza. No entanto, a voz gritante das aplicações (física, ciências da natureza, etc.) que reclamam constantemente mais do que uma oredem de grandeza, permitiu que a questão das escalas com diversas grandezas, ou ordens de grandeza, estivesse sempre na ordem do dia, e se tenha desabrochado sob a forma das modernas teorias de ordens de grandezas.

Nesta secção vai-se rever alguns resultados de uma análise com ordens de grandeza, num conjunto que inclui o dos números reais. Também se verão algumas aplicações.

5.2.1 Ordens de grandeza no conjunto dos números reais

A definição de ordens de grandeza no conjunto dos naturais faz-se de forma relativamente simples: *sejam números naturais standard*[2] *os números naturais intuitivos; os outros serão números naturais não-standard. Qualquer natural menor que algum natural "standard" é também "standard"* e do mesmo modo *qualquer natural maior que algum natural "não-standard" também é "não-standard"*. Os naturais não-standard são chamados *infinitamente grandes*, ou *ilimitados*, por serem maiores que qualquer natural standard.

[1] Trata-se de uma forma utilizada pela escola de Reeb, muito divulgada por Francine e Marc Diener [23], Imme van den Berg [70] e outros.

[2] O termo *standard*, cujo sentido vai-se tornar preciso mais adiante, pode-se entender como *vulgar*, *naïve*, *explícito*, etc.

Têm-se assim as seguintes ordens de grandeza:
— Números naturais infinitamente grandes, ou não-standard;
— Números naturais não infinitamente grandes, ou standard.
Para os números reais, a situação é mais complexa:

Definição 5.1 (número infinitamente grande ou ilimitado) *Um número real μ é infinitamente grande (ig) ou ilimitado, se seu valor absoluto $|\mu|$ é maior que qualquer natural standard, n, isto é,*

$$\mu \text{ é } ig \;\Leftrightarrow |\mu| > n, \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ standard}$$

Exemplo 5.1 *Um número natural não-standard μ é um número real ilimitado;*

Exemplo 5.2 $\mu + \frac{1}{3}$, *é um número real ilimitado não natural, se μ é real ilimitado.*

No conjunto dos números reais há números "não-standard", para além dos números naturais não-standard. Entre eles estão os infinitamente pequenos não nulos, que são definidos a seguir.

Definição 5.2 (número infinitamente pequeno) *Um número real ε é infinitamente pequeno (ip), se o seu valor absoluto $|\varepsilon|$ é menor que $\frac{1}{n}$, qualquer que seja n, natural standard,*

$$\varepsilon \text{ é } ip \;\Leftrightarrow |\varepsilon| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ standard}$$

Exemplo 5.3 0 *é ip. É o único ip standard.*

Exemplo 5.4 *Sendo μ ilimitado, $\varepsilon = \frac{1}{\mu}$ é ip.*

Enuncie-se agora um princípio importante para o cálculo com ordens de grandeza:

Axioma 5.1 *(Princípio de Carnot) Dois números standard, cuja diferença é ip, são iguais.*

Este princípio permite, durante a computação de uma quantidade standard, como um integral ou um limite, por exemplo, fazer estimativas, a menos de uma quantidade *ip*, e desprezar o número *ip* correspondente, no término da computação, tal como faziam Leibniz, Euler, Lagrange, e tantos outros.

Definição 5.3 (número limitado) *Um número real x é dito limitado (lm) se não for ig.*

Exemplo 5.5 *Todo o número natural standard é limitado.*

Definição 5.4 (número apreciável) *Um número real x é dito apreciável (ap) se não for nem ig nem ip.*

Definição 5.5 (número real não-standard) *Um número real não nulo é não-standard se a sua definição envolve igs ou ips, de forma essencial.*

Exemplo 5.6 *Se μ é um natural não-standard, os números $1/\mu$ e 2μ são não apreciáveis por serem respectivamente ip e ig. Por outro lado $(\frac{2}{3\mu}+5)$ é ap, mas não-standard.*

Exemplo 5.7 *No caso $x = 0 \times \varepsilon + 1$, com ε um ip não nulo, tem-se que x é stndard $(x = 1)$.*

Definição 5.6 (números infinitamente próximos) *Dois numeros reais x e y são infinitamente próximos (i-próximos) e nota-se $x \approx y$, se a sua diferença, $x - y$, é ip.*

Nota 5.1 *Nem todo número real limitado é standard: se $\varepsilon \neq 0$ é ip e se y é standard, então $x := y + \varepsilon$ é limitado mas não-standard (caso contrário a diferença $\varepsilon = x - y$ seria standard);*

Nota 5.2 *A noção de número ig é diferente da noção de conjunto infinito. Por exemplo, um conjunto como $\{0, 1, 2, ..., \omega\}$ é finito, mas o seu cardinal, ω +1, é ig*[3].

Por outro lado, o cardinal de um conjunto infinito não é por definição (de cardinal) um natural, mas é standard se o conjunto for standard[4].

Proposição 5.1 *Todo o número real limitado x está i-próximo de um único número real standard. Esse número real é chamado a sombra de x ou a parte standard de x é denotado por ${}^{o}x$.*

Dem. .■

Nota 5.3 *A existência da parte standard de um número real é devida ao facto de $\mathbb{R}$ ser completo, no sentido de Dedekind.*

Em $\mathbb{R}$, pode-se falar no operador ^{o} (*operador parte standard*), para o qual são válidos os resultados do próximo parágrafo.

Operações com ^{o}

As regras seguintes indicam o comportamento do operador ^{o} em relação às operações elementares e à ordem em $\mathbb{R}$. Tem-se a

Proposição 5.2 *Para $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se*
(i) ${}^{o}(x + y) = {}^{\circ}x + {}^{\circ}y$
(ii) ${}^{o}(xy) = {}^{\circ}x^{o}y$
(iii) ${}^{o}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{{}^{o}x}$ *com* ${}^{\circ}x \neq 0$
(iv) $x \leq y \Rightarrow {}^{\circ}x \leq {}^{o}y$
(v) ${}^{\circ}x < {}^{o}y \Rightarrow x < y$.

Com base nesta proposição, são usuais as seguintes notações:

$$x \lessapprox y \text{ se ou } x < y \text{ ou } x \approx y \text{ isto é se } {}^{\circ}x \leq {}^{o}y$$
$$x \not\approx y \text{ se } x \text{ não está } i\text{-próximo de } y$$
$$x \lnapprox y \text{ se } x < y \text{ e } x \not\approx y, \text{ isto é se } {}^{\circ}x < {}^{o}y.$$

[3] Conjunto finito com um número infinitamente grande de elementos, tal como previsto por Veronese.
[4] Pode haver conjuntos infinitos standard (o que esta de acordo com a ideia de Veronese).

5.2.2 Álgebra das ordens de grandezas

As regras de Leibniz

As regras de cálculo com ordens de grandezas são muito simples e foram estabelecidas, de forma completa, por Leibniz. Constam das seguintes tabuadas para operações com ordens de grandeza:

ip	ip				ip	ip				ip	?	?	ip	ip
lm	lm				lm	ip	lm			lm	?	?	lm	ip
ap	ap	lm	lm		ap	ip	lm	ap		ap	ig	?	ap	ip
ig	ig	ig	ig	?	ig	?	?	ig	ig	ig	ig	ig	ig	?
$\pm$	ip	lm	ap	ig	$\times$	ip	lm	ap	ig	$\uparrow / \rightarrow$	ip	lm	ap	ig

A soma de dois *ips* é *ip*; o produto de um *ip* por qualquer número *lm* também é um *ip*. Por outro lado, sem mais precisão sobre os seus valores, não é possível determinar a ordem de grandeza da adição de um *ip* com um número *ig*.

O cálculo assimptótico de Van den Berg

Muitas vezes não é necessário procurar o valor exacto de uma grandeza numérica: basta conhecer a sua ordem de grandeza. Esse ponto de vista foi adoptado por Imme van den Berg e F. Koudjeti, que lhes motivou a introdução de uma nova simbologia.

As notações, $\emptyset$, $\pounds$, @, e ∞ introduzidas por Imme van den Berg, são usadas como notação genérica para números cujo valor preciso não interessa conhecer, mas apenas sua ordem de grandeza, respectivamente, para um *ip*, um *lm*, um *ap* positivo, e um número *ig* positivo[5]. Por essa razão ocorrências diferentes de um destes símbolos normalmente não representam números iguais, mas números com a mesma ordem de grandeza.

Tem-se a

Definição 5.7 $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é } ip\} = \oslash$, $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é } ig\} = \infty$, $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é } ap\} = @$ e $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é } lm\} = \pounds$

A tradução das regras de Leibniz é imediata:

$\oslash$	$\oslash$				$\oslash$	$\oslash$				$\oslash$	?	?	$\oslash$	$\oslash$
$\pounds$	$\pounds$	$\pounds$			$\pounds$	$\oslash$	$\pounds$			$\pounds$	?	?	$\pounds$	$\oslash$
@	@	$\pounds$	$\pounds$		@	$\oslash$	$\pounds$	@		@	∞	?	@	$\oslash$
∞	∞	∞	∞	∞	∞	?	?	∞	∞	∞	∞	∞	∞	?
$\pm$	$\oslash$	$\pounds$	@	∞	$\times$	$\oslash$	$\pounds$	@	∞	$\uparrow / \rightarrow$	$\oslash$	$\pounds$	@	∞

Proposição 5.3 *Seja B um conjunto (standard) limitado de números reais da mesma ordem de grandeza. Então* $\sup B$ *e* $\inf B$ *são também dessa mesma ordem de grandeza.*

Dem. Basta ver que por definição de $\sup B$ e $\inf B$, existem elementos $B^+ \in B$ e $B^- \in B$ tais que $B^+ \approx \sup B$ e $B^- \approx \inf B$.■

As regras de Leibniz mostram então que dois números *i*-próximos quaisquer são da mesma ordem de grandeza.

[5] Impondo a positividade de @ e ∞ obtemos que $@ + @ = @$ e $\infty + \infty = \infty$ enquanto que $ap + ap = lm$ e $ig + ig = ?$

Corolário 5.1 *A totalidade dos números reais duma mesma ordem de grandeza não pode formar um conjunto standard.*

Dem. A suposição de que se pode formar um conjunto ao qual se pudesse aplicar os teoremas clássicos conduziria a um absurdo. Assim, por exemplo, se os *ip* formassem um conjunto standard, como esse conjunto seria limitado, (por -1 e 1, por exemplo), o seu limite superior ou supremo $\sigma > 0$, existiria: como acaba-se de demonstrar, esse número seria *ip*; mas $\sigma + \sigma$ seria então igualmente *ip* e $2\sigma > \sigma$, o que contradiz a hipótese de ser σ o supremo dos reais *ip*. ■

Corolário 5.2 $\oslash, \infty, @$, $\pounds$ *não são conjuntos standard.*■

Em particular, tem-se a

Proposição 5.4 $-\pounds = \pounds$, $\frac{1}{@} = @$, $log@ = \pounds$, $exp\pounds = @$, $\pounds + \pounds = \pounds$ e $\varnothing\pounds = \varnothing$.■

Definição 5.8 (mesma ordem de grandeza) *Dois números reais x e y são da mesma ordem de grandeza se*

$$x = @y$$

Assim a ordem de grandeza de um número real x é $@x$.

Proposição 5.5 *A relação "ter a mesma ordem de grandeza", notada por " $= @$" é de equivalência, e divide $\mathbb{R}$ nas seguintes classes:*
i) classes dos ip, $\underline{\varnothing} = \{x \in \mathbb{R} : x = @\varnothing\}$
ii) classe dos ap
iii) classe dos lm
iv) classe dos ig.■

Proposição 5.6 *(factorização das ordens de grandeza) Seja I um conjunto finito de índices, $(p_i)_{i \in I}$ um conjunto de números positivos ou nulos, e $(\beta_i)_{i \in I}$ números reais com a mesma ordem de grandeza, e do mesmo sinal se esta ordem de grandeza é ap ou ig. Então existe um número real β da mesma ordem de grandeza tal que*

$$\sum_{i \in I} p_i \beta_i = \beta \sum_{i \in I} p_i$$

Dem. Faça-se $\lambda_j := \frac{p_j}{\sum_{i \in I} p_i} \geq 0, \forall j \in I$; tem-se

$$\sum_{j \in I} \lambda_j = \sum_{j \in I} \frac{p_j}{\sum_{i \in I} p_i} = \frac{\sum_{j \in I} p_j}{\sum_{i \in I} p_i} = 1$$

Ponha-se então $\beta := \sum_{j \in I} \beta_j \lambda_j$ que é da mesma ordem de grandeza que os β_i pois está compreendido entre o menor e o maior dos elementos de $(\beta_i)_{i \in I}$. Tem-se então

$$\begin{aligned} \beta \sum_{i \in I} p_i &= (\sum_{j \in I} \beta_j \lambda_j)(\sum_{i \in I} p_i) = \sum_{j \in I} \beta_j (\lambda_j \sum_{i \in I} p_i) = \\ &= \sum_{j \in I} \beta_j \frac{p_j}{\sum_{i \in I} p_i} \sum_{i \in I} p_i = \sum_{j \in I} \beta_j p_j. \end{aligned}$$

Finalmente tem-se $\sum_{j \in I} \beta_j p_j = \beta \sum_{j \in I} p_j$, o que demonstra o resultado.■

Corolário 5.3 *Seja I um conjunto finito de índices, e $(p_i)_{i \in I}$ um conjunto de números positivos ou nulos. Tem lugar as quatro igualdades seguintes:*

1. $\sum_{i \in I} p_i \varnothing = \varnothing \sum_{i \in I} p_i$
2. $\sum_{i \in I} p_i \pounds = \pounds \sum_{i \in I} p_i$
3. $\sum_{i \in I} p_i @ = @ \sum_{i \in I} p_i$
4. $\sum_{i \in I} p_i \infty = \infty \sum_{i \in I} p_i$.■

Observe-se que quando situado à direita do símbolo de soma $\sum_{i \in I}$, o símbolo $\varnothing$, representa um *ip*, *a priori* diferente para cada índice i. O mesmo acontece para cada um dos símbolos assimptóticos $@$, $\pounds$, e ∞.

5.2.3 Algumas aplicações

Ordens de grandeza em espaços normados

As noções de ordens de grandeza extendem-se de forma imediata aos vectores de um espaço vectorial normado:

Definição 5.9 *Um vector é dito ip se a sua norma for ip; define-se da mesma forma vectores limitados, apreciáveis e igs.*

Por aplicação da desigualdade triangular, a proposição 5.6 generaliza-se imediatamente aos *ips* e aos *igs* dos espaços normados.

Acontece que *duas normas standard num espaço normado standard são equivalentes sse determinam as mesmas ordens de grandeza.* Tem-se:

Proposição 5.7 *Para duas normas standard quaisquer $\|.\|'$ e $\|.\|''$ sobre um mesmo espaço standard, são equivalentes as seguintes propriedades:*

1) $\|.\|'$ e $\|.\|''$ determinam os mesmos vectores: i) ips; ii) lm; iii) ap; iv) igs.

2) existem dois números reais M e $m, M \geq m > 0$, tais que para todo o $v \in E$,

$$m \|v\|' \leq \|v\|'' \leq M \|v\|'.$$

■

Lupas

No cálculo com ordens de grandeza não é preciso fixar uma unidade de grandeza para se fixar uma escala de trabalho. Basta recorrer à noção de lupa: a escolha de um ε, *ip*, permite introduzir uma adequada restrição do campo de investigação e, depois de uma amplição, uma capacidade de distinção entre o apreciável, o *ip* e o *ig*. O estudo através da lupa de objectos da matemática clássica ajuda a compreender a natureza da informação veiculada por quocientes, como a derivada ou o diferencial.

Tem-se a

Definição 5.10 (lupa) *Num espaço normado, seja ε, ip $\neq 0$. Chama-se lupa de ampliação $\frac{1}{\varepsilon}$ centrada no ponto x_1 à mudança de variável $X \mapsto x$ definida pela igualdade*

$$x = x_1 + \varepsilon X$$

definida para os X limitados.

É muito interessante a observação de conjuntos à lupa.

A seguir vai-se apresentar alguns exemplos clássicos do exame à lupa de gráficos de funções elementares, $w = f(v)$ e u e U serão então um produto e ter-se-à por isso $u = (v, w)$ e $U = (V, W)$. As lupas serão centradas num ponto $u_1 = (v_1, f(v_1))$ do gráfico. A imagem do gráfico de f através da lupa é o gráfico de uma função $W = F(V)$. Diz-se também que $F = Fv_1, \varepsilon$ é a imagem de f através desta lupa; ela é caracterizada pela relação $w = f(v)$ sse $W = F(V)$, que dá imediatamente

$$F(V) := Fu_1, \varepsilon(V) := \frac{1}{\varepsilon}[f(v_1 + \varepsilon V) - f(v_1)].$$

Nos exemplos seguintes serão considerados apenas conjuntos V limitados, e se limitará apenas aos casos em que $v = x \in \mathbb{R}$ ou $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e os w com valor real.

Exemplo 5.8 $f(x) = x^2$; *Suponha-se* x_1 *limitado. Obtém-se*

$$F(X) = 2x_1X + \varepsilon X^2 \approx 2x_1X$$

Para X *limitado, a imagem através da lupa de* f *é uma função* F *i-próxima da função linear* $X \mapsto 2x_1X$. *Diz-se que* $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemplo 5.9 $g(x) = senx$; *Seja* $x_1 \in \mathbb{R}$ *arbitrário. Obtém-se*

$$G(X) = \frac{1}{\varepsilon}[sen(x_1 + \varepsilon X) - sen(x_1)] = \frac{1}{\varepsilon}[\varepsilon X(\cos x_1 + \emptyset] \approx c_1X$$

com $c_1x = cosx_1$; *Igualmente, para* X *limitado,* $G(X)$ *é i-próxima duma função linear.*

$h(x) = x^2 sen1/x$. *Se* $x \neq 0$ *tem-se*

$$H(X) = \frac{x_1^2}{\varepsilon}\left[sen\frac{1}{x_1 + \varepsilon X} - sen\frac{1}{x_1}\right] + 2x_1X sen\frac{1}{x_1 + \varepsilon X} - x_1^2 sen\frac{1}{x_1}.$$

Se for $x_1 \approx 0$ *limitado, obtém-se* $H(X) \approx (2x_1s_1 - c_1)X$,
com $s_1 := sen\frac{1}{x_1} \in [-1, 1]$ *e* $c_1 := \cos\frac{1}{x_1} \in [-1, 1]$.
Se $x_1 \approx 0$, *para* x *limitado, tem-se*

$$H(X) = \frac{x_1^2}{\varepsilon}\left[sen\frac{1}{x_1 + \varepsilon X} - sen\frac{1}{x_1}\right].$$

Para explicitar o comportamento de H, *convém distinguir os casos, conforme a ordem de grandeza de* x_1^2/ε.

Se x_1^2/ε *for ip (em particular se* $x_1 = 0$*), como o seno é limitado, tem-se simplesmente* $H \approx 0$ *(em particular* H *é difernciável em zero, de derivada nula).*

Se $x_1^2/\varepsilon := \omega$ *for ig tem-se* $\frac{x_1}{\omega} = \frac{\varepsilon}{x_1}$ *que é ip visto que* $x_1 \approx 0$ *e* ω *é ig, pelo que*

$$\frac{1}{x_1 + \varepsilon X} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{1 + \frac{x_1}{\omega}X} = \frac{1}{x_1}\left(1 - \frac{x_1}{\omega}X(1 + \emptyset)\right) = \frac{1}{x_1} - \frac{X}{\omega}(1 + \emptyset)$$

donde

$$sen\frac{1}{x_1 + \varepsilon X} = sen\left(\frac{1}{x_1} - \frac{X}{\omega}(1 + \emptyset)\right) = sen\frac{1}{x_1} - \frac{X}{\omega}(1 + \emptyset)\left(\cos\frac{1}{x_1} + \emptyset\right).$$

e finalmente

$$\begin{aligned} H(X) &= \frac{x_1^2}{\varepsilon}\left[sen\frac{1}{x_1+\varepsilon X} - sen\frac{1}{x_1}\right] = -\frac{x_1^2 X}{\varepsilon\ \omega}\left[\cos\frac{1}{x_1}+\emptyset\right] = \\ &= X(c_1+\emptyset) \approx c_1 X. \end{aligned}$$

Aqui também H é i-próximo de uma função linear; contudo esta função linear, caracterizada pelo valor de $c_1 := cos\frac{1}{x_1}$, muda muito rapidamente quando se varia infinitamente pouco o centro $(x_1, h(x_1))$ da lupa.

Se $x_1^2/\varepsilon := a$ é apreciável, ponha-se $S := sen\frac{1}{x_1}$ e $C := cos\frac{1}{x_1}$; tem-se

$$H(X) = \alpha\left[S\left(\cos\frac{x}{a} - 1\right) - Csen\frac{x}{A}\right]$$

sendo esta última expressão não linear. Com x_1 fixo, a amplitude medida por $a = \frac{x_1^2}{\varepsilon}$ cresce com a ampliação $\frac{1}{\varepsilon}$ enquanto que a frequencia medida por $\frac{1}{a}$ diminui, o que é de facto natural. Como se viu no caso precedente, é o alargamento das oscilações mais importante em relação à ampliação das amplitudes quando $\frac{x_1^2}{\varepsilon}$ for finalmente ig.

Exemplo 5.10 *$i(x,y) = x^2 + y^2$. Suponha-se (x_1, y_1) limitado. Tem-se naturalmente*

$$I(X,Y) = 2x_1X + \varepsilon x_1 X^2 + 3\varepsilon y_1 2Y + 3\varepsilon y_1 Y^2 + \varepsilon 2Y^3 \approx 2x_1X + 3y_1Y$$

Exemplo 5.11 *$j(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Se $(x,y) \neq (0,0)$, e $j(0,0) = 0$*

Exemplo 5.12 *Veja-se o caso em que $(x_1, y_1) = (0,0)$. Encontra-se*

$$J(X,Y) = \frac{XY}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

isto é $J = j$. O Gráfico de j é invariante em relação a toda a lupa centrada na origem (a função é homogénea de grau 1 como as funções lineares). Por não ser quase linear através da lupa, esta função não é diferenciável em $(0,0)$.

5.3 Fundamentos da análise não-standard

5.3.1 Introdução: duas vias para a ANS — a construtiva e a axiomática

Em 1960 Abraham Robinson [62] mostrou, que se podem construir extensões próprias $^*\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ que contêm números *igs* e *ips*. A teoria, inicialmente envolvendo ultrafiltros livres e classes de equivalência de números reais, desenvolvida por Robinson [62],[63], foi mais tarde axiomatizada por E. Nelson [57] como uma extensão da axiomática de Zermelo Fraenkel (ZF), para a mais vulgar teoria dos conjuntos.

Nesta introdução não se pretende fazer uma descrição exaustiva da teoria de Robinson, mas apenas delinear as suas ideias principais com vista a relevar a intuitividade que está na sua origem, bem como a dos objectos em causa (números, conjuntos, funções,..., — hiperreais) e os métodos usados na sua construção.

Recorde-se portanto, de forma breve, a construção de Robinson via ultraprodutos: tida como menos directa que a abordagem axiomática (que na realidade compactou em axiomas adicionais todas as propriedades novas essênciais da construção de Robinson), leva a um contacto mais intuitivo com as origens da nova estrutura. Com efeito, os números hiperreais (entre os quais os *ips* e os *igs*) são construídos como classes de equivalência de sucessões de números reais, de forma bastante semelhante à construção de $\mathbb{R}$ a partir do conjunto dos números racionais, a partir das sucessões de Cauchy. Na realidade, o "carácter ideal" ou "não-standard" dos novos números já está presente em certos números reais.

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ é definido da seguinte maneira:

Definição 5.11 *$\mathcal{U}$ é um conjunto não vazio de subconjuntos de $\mathbb{N}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \supset \mathcal{U} \supset \emptyset)$ tal que:*

(1) $\emptyset \notin \mathcal{U}$

(2) $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$

(3) $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{U}$

(4) $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow$ *ou* $B \in \mathcal{U}$ *ou* $\{j \in N : j \neq B\} \in \mathcal{U}$ *mas não ambos os casos (maximalidade)*

(5) $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *e* B *finito* $\Rightarrow B \notin \mathcal{U}$

O conjunto $^*\mathbb{R}$ é definido como o conjunto das classes de equivalência de todas as sucessões de números reais modulo a seguinte relação de equivalência:

$$a \equiv b \Leftrightarrow \{j : a_j = b_j\} \in \mathcal{U}$$

sendo a e b duas sucessões $\{a_j\}$ e $\{b_j\}$.

Similarmente, diz-se que uma relação está estabelecida entre elementos de $^*\mathbb{R}$ se for verdadeira, termo a termo, para o conjunto de índices que pertencem ao ultrafiltro. Por exemplo,

$$a < b \Leftrightarrow \{j : a_j < b_j\} \in \mathcal{U}$$

$\mathbb{R}$ é isomorfo a um subconjunto de $^*\mathbb{R}$, visto que se pode identificar qualquer número real $r \in \mathbb{R}$ com a classe de equivalência $C_L(r, r, r, ...)$. É o axioma da maximalidade (4) que assegura que $^*\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. Em particular, graças a esse axioma, uma sucessão que toma valores num conjunto finito de números é equivalente a um desses números, dependendo do ultrafiltro $\mathcal{U}$. Isso traz o problema dos divisores de zero: com efeito, o facto de ser $(0, 1, 0, 1, 0, ...) \cdot (1, 0, 1, 0, 1, ...) = (0, 0, 0, 0, ...)$ não implica que hajam divisores nulos, visto que o axioma (4) assegura que uma das sucessões é igual a zero e a outra igual a um.

Torna-se evidente que $^*\mathbb{R}$ contém novos elementos em relação a $\mathbb{R}$ quando se considera a sucessão $\{\omega_j = j\} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. A classe de equivalência desta sucessão, ω, é maior que qualquer número (classe) real. Com efeito, para qualquer $r \in \mathbb{R}, \{j : \omega_j > r\} \in \mathcal{U}$, para qualquer que seja $r \in \mathbb{R}$. É claro que o inverso de ω é um infinitesimal.

Então o conjunto dos números hiperreais $^*\mathbb{R}$ é totalmente ordenado e é um corpo não-arquimediano, do qual o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais standard é um subcorpo. $^*\mathbb{R}$ contém elementos infinitos, isto é, números A tais que $\forall n \in \mathbb{N}, |A| > n$. Também contém números infinitesimais, isto é, números ε tais que $\forall n \neq 0, n \in \mathbb{N}, |\varepsilon| < \frac{1}{n}$. Um elemento finito C é definido assim: $\exists n \in \mathbb{N}, |C| < n$. Todos os números hiperreais podem ser adicionados e subtraídos, multiplicados e divididos; subconjuntos como hiper-inteiros $^*\mathbb{N}$ (do qual $\mathbb{N}$, o conjunto dos hiperinteiros finitos ${}^*\mathbb{N}_\infty$ é um subconjunto), hiperracionais ${}^*\mathbb{Q}$, números positivos e negativos, números hiperinteiros pares e ímpares, etc..., podem ser definidos, e de forma geral a maior parte dos métodos standard e definições podem ser aplicados da mesma maneira como para o conjunto standard $\mathbb{R}$. Mas os diferentes conjuntos e propriedades são classificados como sendo *internos* ou *externos*.

Tal como na secção anterior, um resultado importante é que todo o número finito a pode ser separado de forma única, como a soma de um standard $x \in \mathbb{R}$ e de um número ip, ε tal que $a = x + \varepsilon$. Por outras palavras, o conjunto dos hiperreais finitos contém os reais ordinários mais um número (a) infinitamente próximo à volta de um real standard ordinário x. O conjunto desses números adicionais $\{a\}$ é dito o *halo* ou a *mónada* de x. Mais geralmente, pode-se demostrar que qualquer número hiperreal A pode ser decomposto de uma forma única como $A = N + x + \varepsilon$, onde $N \in^* \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \cap [0, 1[$ e ε ip.

Esta abordagem tem, em relação à abordagem axiomática, a vantagem de ajudar a desenvolver a intuição dos números hiperreais, como objectos constructíveis, pelo que é conceptualmente mais vantajoso revê-la antes de partir para o "acto de fé", que é a axiomatização. A sua grande desvantagem é que, para essa revisão, é necessário proceder à demonstração de um punhado de teoremas, o mais importante dos quais é o *princípio de transferência*, que requer um pesado aparato lógico, através da semântica tarskiana para as linguagens da primeira ordem.

Nesta tese optou-se por adoptar a linguagem duma teoria axiomática não-standard dos números reais, por ser moderna, imediata, para além de dispensar o aparato lógico referido — o que parece mais adequado aos objectos geométricos. Essa teoria é o objecto das próximas subsecções.

5.3.2 A teoria dos conjuntos internos (I.S.T)

O predicado "standard"

Considere-se o termo *standard* ($st(\cdot)$) como primitivo. Nesta secção apresentam-se os axiomas que governam o uso desse predicado (na análise e na geometria).

Proposições internas (standard ou não) e proposições externas

A linguagem não-standard adiciona à linguagem clássica o predicado novo (ou *externo*), $st()$. Este predicado permite definir muitos outros predicados, como ip, ig, lm, ap, sendo todos predicados *externos*.

Definição 5.12 (condição interna, externa) *Uma condição é interna se, para a sua formulação, não se recorre, de maneira essencial, a nenhum predicado não-standard; no caso contrário, é externa.*

Exemplo 5.13 *A condição "para todos os numeros reais $a > 0$ e $b > 0$, existe algum natural n tal que $na \geq b$" (axioma de Arquimedes) é uma condição interna, e a condição "existem números reais $a > 0$ e $b > 0$ tal que para todos os naturais standard n, $na < b$" é uma condição externa.*

Proposição 5.8 *Uma condição interna é standard se todas suas constantes e todos seus parâmetros são standard.*■

Exemplo 5.14 *Para $\varepsilon > 0$, ip, as condições $P(x) \equiv [|x| < \frac{1}{10} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{100}]$, $Q(x) \equiv [0 < x < \varepsilon \Rightarrow 0 < x^2 < \varepsilon^2]$ e $R(x) \equiv [0 < x < \varepsilon \Rightarrow x^2$ é ip$]$ são respectivamente standard, interna mas não-standard, e externa.*

Nota 5.4 *Observe-se que só condições internas podem ser standard ou não. Uma condição interna sem qualquer constante ou parâmetro é necessariamente standard.*

Classes ou "conjuntos" externos

Dada uma condição $P(x)$, na variável x (a única variável livre em P), e um conjunto $\mathcal{C}$, considere-se a classe de todos os objectos x de $\mathcal{C}$ que satisfazem a proposição $P(x)$, isto é,

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{C} : P(x)\}$$

O axioma de separação da teoria (usual) de conjuntos assegura a existência de $\mathcal{P}$. Todos os teoremas clássicos são aplicáveis.

No caso em que $P(x)$ é uma proposição externa, o axioma de separação, já não se pode aplicar. Para se poder continuar a considerar a colecção $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ de todo o x de $\mathcal{C}$ que satisfaz $P(x)$, tem-se que aceitar que alguns teoremas clássicos já não se apliquem a $\mathcal{P}$; neste caso, diz-se que uma tal colecção é um *conjunto externo*; estritamente falando, os conjuntos externos não são conjuntos.

Exemplo 5.15 *O halo de 0 definido por:*

$$hal(0) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é } ip\}$$

é um conjunto externo. Com efeito, qualquer número real standard $x > 0$ é maior que qualquer $y \in hal(0)$. E ainda: $hal(0)$ não tem supremo (embora seja limitado). Com efeito, seja s um tal supremo, e seja $\varepsilon > 0$ ip. Se s fosse ip seria $s + \varepsilon$ ip o que é impossível porque s é o supremo de $hal(0)$. Nem s pode ser apreciável porque $s - \varepsilon$ também seria apreciável, o que significaria que s não era, a final de contas, o supremo.

Definição 5.13 (conjunto externo) *Chama-se conjunto externo a qualquer colecção do tipo*

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{C} : P(x)\},$$

onde $\mathcal{C}$ é um conjunto interno e P uma proposição externa, cujos elementos não constituem um conjunto.

Nota 5.5 *Normalmente o carácter estritamente externo de um conjunto pode ser mostrado observando que, pelo menos, um resultado standard é falso para os elementos desse conjunto.*

Exemplo 5.16 *O halo de 0 é externo porque o resultado standard segundo o qual qualquer subconjunto não vazio e majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo, não é verdadeiro em $hal(0)$.*

Exemplo 5.17 *O facto de ser P uma proposição externa não significa que $\mathcal{P}$ o seja necessariamente, caso contrário o conjunto dos naturais ips (isto é, $\{0\}$) seria externo.*

Nota 5.6 *Na prática, mostra-se que uma classe $\mathcal{U}$ é um conjunto externo, mostrando que é possível construir, a partir de $\mathcal{U}$ e usando operações internas (exceptuando-se o complemento absoluto*[6] *ou a pré-imagem por uma função), o halo de zero ou de algum outro conjunto conhecido. Com efeito, qualquer conjunto C que possibilita, por operações clássicas (internas), definir algum conjunto externo, tem de ser externo, caso contrário a teoria dos conjuntos internos seria contraditória.*

Têm-se os seguintes exemplos paradigmáticos:

Exemplo 5.18 *O conjunto de números reais infinitamente grandes $hal(\infty)$, definido por*

$$hal(\infty) = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \quad ig\}$$

é externo porque, se fosse interno, $hal(0)$ também seria, como $hal(0) = \{0\} \cup inv(hal(\infty))$, com $inv(\mu) = 1/\mu$.

Exemplo 5.19 *A galáxia principal*

$$\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ limitado}\}$$

é externo visto que $hal(\infty) = \mathbb{R} - \mathbb{G}$, como também é o conjunto dos números reais apreciáveis

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ apreciável}\}$$

visto que então $\mathbb{G}$ é a envolvente convexa de $\mathbb{A}$.

Exemplo 5.20 *O conjunto $\underline{\mathbb{N}}$ de todos os naturais standard, e o conjunto $\underline{\mathbb{R}}$ de todos os números reais standard, são externos, porque $\mathbb{G}$ também é o envolvente convexa de ambos.*

De facto têm-se as seguintes uniões disjuntas:

$$\mathbb{R} = \mathbb{G} \sqcup hal(\infty)$$

e

$$\mathbb{G} = hal(0) \sqcup \mathbb{A}.$$

Abaixo seguem-se alguns exemplos de conjuntos externos muito úteis na análise não-standard assimptótica, e que são definidos usando um $\varepsilon > 0$, *ip* e são chamados a $\varepsilon-$*galáxia*, o $\varepsilon-$*halo*, o $\varepsilon-$ *microhalo*, a $\varepsilon-$*microgalaxia* e a $\varepsilon-$*megagalaxia* respectivamente.

Exemplo 5.21 $\varepsilon - gal(0) = \{x \in \mathbb{R} : (x/\varepsilon) \text{ limitado}\}$
$\varepsilon - hal(0) = \{x \in \mathbb{R} : (x/\varepsilon) \text{ ip}\}$
$\varepsilon - microhal(0) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \varepsilon^n \text{ para todo o } n \text{ standard}\}$
$\varepsilon - microgal(0) = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe um } r > 0 \text{ limitado tal que } |x| < e^{-\frac{1}{r\varepsilon}}\};$
$\varepsilon - megagal(0) = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe } n \text{ limitado tal que } |x| < 1/\varepsilon^n\}.$

Até à *megagal*, estão todos contidos no halo de 0 e formam, nessa ordem, uma sucessão decrescente sob a inclusão.

[6] Isto é, relativamente ao universo.

Nota 5.7 *Como uma função $f : E \to F$, do ponto de vista da teria de conjuntos, não é nada mais que o seu gráfico $G(f) \subset E \times F$, existem funções internas, que são funções cujo gráfico é um conjunto interno, e funções externas, no caso contrário. Veja-se o*

Exemplo 5.22 (função característica dos números standard) *A função característica dos números standard em $\mathbb{R}$ que é a função χ definida por $\chi(x) = 1$ se e só se $st(x)$, é externo.*

A linguagem do predicado "standard"

Para se usar o predicado *standard* e todos seus derivados correctamente, precisa-se de alguns axiomas que são adicionados aos habituais do ZFC, obtendo-se assim a teoria nelsoniana ZFNC.

As regras para manipular o predicado "standard", aparecem sob a forma de três axiomas-esquemas: *transferência, idealização e standartização.*

Na ANS são usuais as seguintes simplificações de notação, usadas para exprimir os axiomas:

$$\forall^{st} x, \text{ para significar } [\forall x(st(x) \Rightarrow ...)]$$

e

$$\exists^{st} x, \text{ para significar } [\exists x(st(x) \wedge ...)]$$

Axioma 5.2 (Transferência) *Para qualquer fórmula standard $P(x)$, tem-se*

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow \forall^{st} x P(x)$$

Uma consequência imediata é a

Proposição 5.9 *Se $P(x)$ é uma proposição standard, $P(x)$ é verdadeira para todo o x, se e só se $P(x)$ é verdadeira para todo o x standard.*■

Usando a negação $Q(x) := \neg P(x)$ de $P(x)$, é fácil ver que uma versão equivalente do princípio de transferência é

Proposição 5.10 *Para qualquer fórmula standard $Q(x)$, existe um x que satisfaz $Q(x)$ se e só se existe um x standard que satisfaz $Q(x)$.*■

O caso em que a propriedade $Q(x)$ é satisfeita por um único x_0 é interessante pois assegura que este x_0 é necessariamente standard. Assim, qualquer objecto que pode ser caracterizado de forma única, é standard.

Exemplo 5.23 $\emptyset$, 0, 1, 2, π, e, $\sin(.)$, $\log(.)$, ..., $+, ., \leq, ...,$ $[0,l]^{\mathbb{R}}$, $C^{\infty}[0,1]$,... *são standard.*

Uma consequência importante do axioma de transferência é a

Proposição 5.11 *Toda a função standard tem valores standard em pontos standard.*

Dem. necessária■

Outra consequência útil é a seguinte:

Proposição 5.12 *Para $n, E_1, E_2, ..., E_n$, todos standard, o conjunto*

$$E := E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$$

é standard, e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ é standard se e só se todas suas coordenadas x_p são standard.■

Axioma 5.3 (Idealização) *Para qualquer condição ou relação interna $R(x, y)$, tem-se*

$$[\forall^{st} Y,\ (Y\ finito \Rightarrow \exists x \forall y \in Y \quad R(x, y))] \Longleftrightarrow [\exists x \forall^{st} y\ R(x, y)]$$

Têm-se as consequências imediatas:

Proposição 5.13 *Existe um conjunto finito que contém todos os objectos standard.*

Dem. necessária■

Corolário 5.4 *Todos os conjuntos infinitos têm elementos não-standard.*■

Considere-se agora uma relação binária (interna) $xRy(\Leftrightarrow R(x, y))$ que se pode ler "x domina y". Tem-se a

Definição 5.14 (relação concorrente) *$R(x, y)$ é concorrente se para todo o conjunto finito standard Y, existe um x tal que xRy, para qualquer elemento $y \in Y$.*

Exemplo 5.24 *A relação $R(x, y) \equiv (x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \geq y)$ é concorrente em $\mathbb{N}$. Conduz à existência de naturais infinitamente grandes.*

O axioma de idealização assegura que,

Proposição 5.14 *Para toda a relação interna concorrente $R(x, y)$, existe um a que domina todo o b standard, e reciprocamente.*■

Vejam-se alguns exemplos de relações internas concorrentes e as consequências das idealizações correspondentes:

Exemplo 5.25 *A relação $R(x, y) \equiv (x \in C) \wedge (x \neq y)$ conduz ao facto de que qualquer conjunto C é standard e finito se e só se tem apenas elementos standard. Uma consequência é que qualquer natural limitado (isto é, menor que algum natural standard) é também standard.*

Exemplo 5.26 *A relação $R(\mathcal{P}, y) \equiv (\mathcal{P} finito) \wedge (y \in \mathcal{P})$ conduz à existência de um conjunto finito que contém qualquer conjunto standard como elemento, um resultado que já se tinha mencionado.*

Axioma 5.4 (Standartização) *Para qualquer fórmula $P(x)$, interna ou externa, tem-se:*

$$\forall^{st} \mathcal{C}\ \exists^{st} \mathcal{S}_P\ \forall^{st} x[x \in \mathcal{S}_P \Leftrightarrow x \in \mathcal{C} \wedge P(x)]$$

Observe-se que

(i) o axioma de transferência *só pode ser aplicado a fórmulas standard*,

(ii) o axioma de idealização só *pode ser aplicado a fórmulas internas*,

mas que

(iii) o axioma de standartização *aplica-se a qualquer fórmula, interna ou não.*

Seja $P(x)$ uma proposição; já se mostrou que, se P não é interna, o conjunto de todo o x que satisfaz $P(x)$, tem uma boa chance de não ser um conjunto da matemática standard. Seja $\mathcal{S}_P$ um conjunto standard tal que um objecto standard arbitrário x é elemento de $\mathcal{S}_P$ sse é elemento de $\mathcal{C}$ e satisfaz $P(x)$. O princípio de standartização assegura que

Proposição 5.15 *Para todo o conjunto standard $\mathcal{C}$ existe um subconjunto standard $\mathcal{S}_P$.*■

É fácil ver que, nesse caso

Proposição 5.16 *O conjunto $\mathcal{S}_P$ é único.*

Dem. Com efeito, o princípio de transferência implica que qualquer conjunto standard é caracterizado pelos seus elementos standard.■

Definição 5.15 (standardização) *Chama-se ao processo implicado nas proposições 5.16 e 5.15 a standardização do conjunto (interno ou externo) de todos os x em $\mathcal{C}$ tal que $P(x)$, e é denotado por*

$$\mathcal{S}_P :=^S \{x \in \mathcal{C} : P(x)\}.$$

É importante observar que

(i) se x é não-standard, é possível que x pertença a $\mathcal{S}_P$ e, não obstante, que x não satisfaça $P(x)$;

(ii) é possível que x não pertença a $\mathcal{S}_P$ e contudo verifique $P(x)$.

Os exemplos seguintes são elucidativos:

Exemplo 5.27 *Se $P(x)$ é a proposição $0 \lnapprox x \lnapprox 1$ para qual $\mathcal{S}_P =]0,1]$, qualquer ip $\varepsilon > 0$ pertence a $\mathcal{S}_P$ embora $P(\varepsilon)$ seja falso, e qualquer número $1+\ \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ ip não pertence a $\mathcal{S}_P$ embora $P(1+\varepsilon)$ seja verdadeira.*

Proposição 5.17 *Em $\mathbb{R}$, qualquer número limitado a está infinitamente próximo de algum número standard.*

Dem. Tem-se que: através da standardização, pode-se considerar o (único) subconjunto standard $\mathcal{S}_+$ de $\mathbb{R}$, cujos elementos standard são exactamente os elementos x tais que $x \geq a$ (aqui $P(x) \equiv x \geq a$). Como a é limitado, $\mathcal{S}_+$ é não vazio (existe um n standard $n \geq |a|$ por ser a por suposição limitado); analogamente, $\mathcal{S}_- := \mathbb{R} - \mathcal{S}_+$ é não vazio (tome-se $-n$). Aplicando a transferência, com vista a considerar apenas os elementos standard de $\mathcal{S}_+$ que são os únicos "bem conhecidos", vê-se que $(\mathcal{S}_-, \mathcal{S}_+)$ é um corte standard de $\mathbb{R}$; este corte caracteriza um número real b, standard, através de transferência. É então claro que que b tem que estar i-próximo de a.□

Sombras e noções S-topológicas

Para todo o subconjunto standard, $\mathcal{A}$, de um espaço topológico standard $\mathcal{E}$, o fecho $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{E}$ é o único conjunto standard cujos elementos standard são exactamente todos os $x_0 \in \mathcal{E}$ tais que o halo de x_0 intersecta $\mathcal{A}$. Para um $\mathcal{A}$ geral, possivelmente externo, a mesma definição conduz à noção de sombra:

Definição 5.16 (sombra de um conjunto) *A sombra de $\mathcal{A}$, notada por $^\circ\mathcal{A}$, é o único conjunto standard cujos elementos standard são exactamente aqueles cujo halo intersecta $\mathcal{A}$:*

$$^\circ\mathcal{A} :=^S \{x_0 \in \mathcal{E} : hal(x_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}.$$

Exemplo 5.28 *Sendo $\mathcal{A}$ standard, $^\circ\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ é interno, mostra-se que $^\circ\mathcal{A}$ é fechado. Mas isso não é necessariamente verdade para um conjunto externo.*

Exemplo 5.29 *Para qualquer $\varepsilon > 0$, ip, a sombra do conjunto interno $\mathcal{A} = \{x : \varepsilon < x \leq 1 + \varepsilon\}$ é o intervalo fechado $[0, 1]$; mas a sombra do conjunto externo $\mathcal{A} = \{x : 0 \gnapprox x \lessapprox 1\}$ é o intervalo semi-aberto $]0, 1]$.*

Observe-se que a noção de sombra de um subconjunto é obtida estendendo a conjuntos, outros que não os standard, uma propriedade que corresponde ao fecho, no caso de um conjunto standard: assim a sombra é também chamada o "S-fecho".

Definição 5.17 (sombra interior) *Seja $\mathcal{A}$ qualquer subconjunto de um espaço topologico standard $\mathcal{E}$. A sombra interior de $\mathcal{A}$, notada $^i\mathcal{A}$, é o único subconjunto standard de $\mathcal{E}$ cujos elementos standard são exactamente aqueles cujo halo está contido em $\mathcal{A}$:*

$$^i\mathcal{A} := \{x_0 \in \mathcal{E} : hal(x_0) \subset \mathcal{A}\}$$

Se $\mathcal{A}$ é um conjunto standard, $^i\mathcal{A}$ é o interior de $\mathcal{A}$: por isso pode-se interpretar a sombra interior como uma noção de S-interior. Se $\mathcal{A}$ é interno, $^i\mathcal{A}$ é sempre um subconjunto aberto de $\mathcal{E}$.

Exemplo 5.30 *A sombra interior do conjunto interno $\mathcal{A} = \{x : \varepsilon < x \leq 1 + \varepsilon\}$ é o intervalo aberto $]0, 1[$; mas a sombra interior do conjunto externo $\mathcal{A} = \{x : 0 \gnapprox x \lessapprox 1\}$ é o intervalo semi-aberto $]0, 1]$.*

Viu-se que para qualquer aplicação $f : E \to F$ entre espaços métricos standard (E, d_E) e (F, d_F), se f e $x_0 \in E$ são standard, f é contínua em x_0 se e só se

$$x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0)$$

Tem-se a S-noção correspondente:

Definição 5.18 (função S-continua) *Sejam E e F dois espaços métricos standard. Uma função (interna) $f : E \to F$ é dita S-contínua em x_0 se e só se para todo o $x \approx x_0$, for $f(x) \approx f(x_0)$.*

Exemplo 5.31 *Seja $\varepsilon > 0$ algum número ip. A função real $Arctan(x/\varepsilon)$ é contínua mas não é S-contínua em 0. A função $\varepsilon Int(x/\varepsilon)$ (onde $Int(y)$ é o maior natural menor que y) é S-contínua em qualquer ponto, mas é descontínua em qualquer ponto de $\varepsilon\mathbb{Z}$.*

Pode-se mostrar que

Proposição 5.18 *f é S-contínua em x_0 se e só se satisfaz a fórmula habitual*

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \ \ (d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

com ε e η standard.■

Nota 5.8 *A S-topologia "engrossa" tudo. Se não se olhar uma função S-contínua f "de muito de perto", então f parece ser contínua. É por isso que a S-continuidade às vezes é chamada "continuidade para míopes" [23].*

Definição 5.19 (elemento próximo-standard) *Para qualquer subconjunto X de um espaço métrico standard E, um ponto $x \in E$ é dito próximo-standard em X se existe um ponto standard $x_0 \in X$ tal que $x \approx x_0$.*

A expressão "x é próximo-standard", significará "x é próximo-standard em $X = E$".

Há dois objectos matemáticos usualmente considerados como *a sombra de uma função* f:

(i) A sombra do gráfico $\mathcal{G}(f)$ de f ;

(ii) O único conjunto standard cujos elementos standard são $(x_0, {}^o f(x_0))$ para todo o x_0 standard tal que $f(x_0)$ é próximo-standard.

No caso (i), o exemplo da função $Arctan(x/\varepsilon)$, vista na secção anterior, mostra que esta sombra nem sempre é o gráfico de uma função: na abscissa $x = 0$, a sombra considerada contém todos os pontos com ordenada $y \in [-\pi/2, +\pi/2]$.

No caso (ii) o conjunto considerado é sempre o gráfico de alguma função standard, e tem-se a

Definição 5.20 (standardização de uma função) *O conjunto referido em (ii) é chamado a standardização de f e notado por ${}^S f$.*

Exemplo 5.32 *Para a função $f(x) = Arctan(x/\varepsilon)$, ${}^S f(x) = -\pi/2$ para $x < 0$, ${}^S f(0) = 0$ e ${}^S f(x) = \pi/2$ para $x > 0$.*

${}^S f$ pode ser muito irregular, como mostra o exemplo seguinte

Exemplo 5.33 *Se $f(x) = cos(\omega x)$ com ω ig, então para alguma escolha de ω, ${}^S f$ pode ser não mensurável.*

Nota 5.9 *Há situações em que ambas as noções coincidem. É o que acontece quando f é S-contínua em "pontos todos razoáveis". Corresponde ao caso em que a sombra do gráfico de f é o gráfico de uma função contínua standard f_0, chamada a sombra da função f .*

Abaixo exibem-se dois exemplos em que, o domínio da sombra é menor que o domínio da função (1^{o}exemplo), e vice-versa (2^{o}exemplo).

Exemplo 5.34 $f(x) = 1/(x^2 + \varepsilon)$ *(com* $\varepsilon > 0$ *ip), no caso* $f_0(x) = 1/x^2$.

Exemplo 5.35 $f(x) = Arcsen((1 + \varepsilon)x)$, *que é definida em* $]-\pi/2(1+\varepsilon), +\pi/2(1+\varepsilon)$, *enquanto que a sua sombra* $f_0(x) = Arcsen(x)$ *é definida em* $]-\pi/2, +\pi/2[$.

Para qualquer função f note-se o seu domínio por $\mathcal{D}(f)$, seu contradomínio por $\mathcal{D}'(f)$, e seu gráfico por $\mathcal{G}(f)$. Será sempre suposto que $\mathcal{D}(f)$ e $\mathcal{D}'(f)$ são subespaços de espaços métricos standard.

Com as novas noções pode-se considerar a noção de uma função que é S-contínua, não apenas num determinado ponto, mas em todo o seu domínio.

Definição 5.21 (função S-contínua num espaço métrico) *Sejam* E *e* F *espaços métricos standard, e* f *uma função interna, tal que* $\mathcal{D}(f) \subset E$ *e* $\mathcal{D}'(f) \subset F$. *A função* f *é dita* S*-contínua em* $E \times F$ *se e só se é* S *- contínua em cada ponto* $x \in \mathcal{D}(f)$ *tal que* $(x, f(x))$ *é próximo-standard em* $E \times F$.

Exemplo 5.36 *A função* $Arctan(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$, *não é* S*-contínua (em* $\mathbb{R}$*), mas a função* $1/(x^2 + \varepsilon), x \in \mathbb{R}$, *é* S*-contínua (em* $\mathbb{R}$*).*

Exemplo 5.37 *A restrição de* $Arctan(x/\varepsilon)$ *a qualquer subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que não contém* 0 *é* S*-contínua em* $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$.

Pode-se ver que se f é uma função standard, f é contínua se e só se é S-contínua em $\mathcal{D}(f) \times \mathcal{D}'(f)$.

Observe-se que não seria razoável esperar a S-continuidade de f em todos os pontos de $\mathcal{D}(f)$. Nesse caso, a função $f(x) = x^2$ não seria S-contínua.

A sombra em $E \times F$, do gráfico da função S-contínua f, é o gráfico de uma função continua (standard) f_0, chamado a sombra de f, e notado por ${}^\circ f$. Mais exactamente, tem-se o

Teorema 5.1 (da sombra contínua) *Sejam* E *e* F *espaços métricos standard , e* f *é uma função definida em* $\mathcal{D}(f) \subset E$ *e com valores em* F. *A função* f *é* S*-contínua em* $E \times F$ *se e só se existe uma função contínua standard* f_0, *com domínio* $\mathcal{D}(f_0)$ *em* E *com as duas propriedades seguintes:*

(i) Para qualquer $(x, f(x))$ *próximo-standard em* $E \times F$, ${}^\circ x$ *está em* $\mathcal{D}(f)$;

(ii) Para qualquer x_0 *standard,* $x_0 \in \mathcal{D}(f_0)$ *e qualquer* $x \in \mathcal{D}(f)$, *se* $x \approx x_0$ *então* $f(x) \approx f_0(x_0)$.■

S-diferenciabilidade

Recorde-se que, para uma função f definida num subconjunto aberto $\mathcal{D}(f)$ de um espaço normado standard E e com valores num espaço normado standard F, se f é standard, f é estritamente diferenciável no ponto standard x_0 se existe uma função linear contínua standard $L : E \to F$ tal que para qualquer $X \in E$ limitado, qualquer $\varepsilon \neq 0$ *ip*, e qualquer $x \approx x_0$, $(f(x + \varepsilon X) - f(x))/\varepsilon \approx L[X]$ tem lugar. Tem-se a S-propriedade correspondente.

Definição 5.22 (função S-diferenciável num ponto) *Sejam* E *e* F *dois espaços normados standard. Uma função com domínio e contradomínio em* E *e* F *respectivamente* *é dita S-diferenciável no ponto standard x_0 com diferencial L, se f é definida a qualquer ponto $x \approx x_0$, se $L : E \to F$ é uma função linear contínua standard, e para todo o X limitado, todo $\varepsilon \neq 0$ ip, e todo o $x \approx x_0$, tem-se*

$$\frac{1}{\varepsilon}(f(x+\varepsilon X) - f(x)) \approx L[X]$$

Definição 5.23 (função S-diferenciável) *Seja f uma função definida num subconjunto aberto standard $\mathcal{D}(f)$ de um espaço normado standard E com valores num espaço normado standard F. A função f é dita S-diferenciável se for S-diferenciável em todo o x_0 standard do seu domínio para qual o seu valor $f(x_0)$ é próximo-standard em F.*

Tem-se o importante teorema que afirma que, de um modo análogo para funções S-contínuas que são as que têm uma sombra contínua, as funções de S-diferenciáveis são as que têm uma sombra de diferenciável.

Teorema 5.2 (da sombra diferenciável) *Sejam E e F dois espaços normados standard, e seja f uma função interna definida e S-diferenciável num subconjunto aberto standard $\mathcal{D}\ (f) \subset E$, com valores em F. A sombra ^of de f existe, e está definida num subconjunto aberto standard $\mathcal{D}\ (^of)$ e é C^1. Além disso, para qualquer $x_0 \in \mathcal{D}$ standard (^of), o diferencial $\mathcal{D}\ (^of)\ (x_0)$ é o S-diferencial de f no ponto x_0.*■

Princípios de Permanência

Os princípios de permanência são resultados, específicos de conjuntos externos, de modo a que estes se tornem mais manipuláveis.

Princípio de Cauchy Muitas vezes é possível estender o alcance de uma propriedade, simplesmente tirando proveito da diferença interno *versus* externo, sem qualquer outro argumento. Essa forma de raciocínio é uma das técnicas particulares da análise não-standard, com a denominação de *princípio de Cauchy.*

Exemplo 5.38 *Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sucessão standard de números reais positivos, e seja $\varepsilon > 0$ um infinitesimal qualquer. Sendo n limitado, a sucessão $b_n = a_n\varepsilon^n$ é decrescente (desde $b_n/b_{n-1} = (a_n/a_{n-1})\varepsilon \approx 0$). O conjunto (interno) $\mathcal{D}$ de todos os indices a partir dos quais a sucessão $(b_n)_{n\geq 0}$ é decrescente e por isso contém o conjunto (externo) $\underline{\mathbb{N}}$ de todos os naturais standard. É claro que não pode ser $\mathcal{D} = \underline{\mathbb{N}}$, porque $\mathcal{D}$ é interno (a propriedade "ser decrescente até n ") e $\underline{\mathbb{N}}$ é externo. Assim, existe um ω ig tal que $(a_n\varepsilon^n)$ é decrescente para todo o $n \leq \omega$. E isto sem qualquer suposição adicional sobre a sucessão (a_n).*

Tem-se a

Proposição 5.19 ***(Princípio de Cauchy).*** *Nenhum conjunto externo é interno.*■

Princípio de Fehrele Antes de chegar ao princípio de Fehrele, é necessário recordar o

Lema 5.1 *(Robinson).* *Se $(U_n)_{n\geq 0}$ é uma sucessão tal que $U_n \approx 0$ para todo o n standard, existe um N ig tal que $U_n \approx 0$ para todo o $n \approx N$.*$\square$

Exemplo 5.39 *Para mostrar que o limite uniforme f de uma sucessão $(f_n)_{n\geq 0}$ de funções contínuas é também contínuo, podere-se-ia querer proceder do seguinte modo: primeiro assumir, através de transferência, que a sucessão $(f_n)_{n\geq 0}$, bem como o seu limite f, são standard. Mas, para mostrar que a função standard f é contínua precisa-se ter $f(x) \approx f(y)$ a partir de $x \approx y$, recorrendo a algo como,*

$$f(x) \approx^{(i)} f_n(x) \approx^{(ii)} f_n(y) \approx^{(iii)} f(y). \qquad (*)$$

Infelizmente as quase-igualdades (da convergência uniforme) (i) e (iii), só têm lugar para n ig, quando (ii), a priori, só é verdadeira para n standard (visto que o critério não-standard para a continuidade só é verdadeira para funções standard). Assim, fazendo $U_n := f_n(x) - f_n(y)$, pode-se escolher um n ig tal que a proposição (*) seja verdadeira, e consequentemente, concluir o que se deseja.

Para o que se segue, são necessárias as noções de *halo* e *galáxia.*

Definição 5.24 (prehalo) *Seja $H \subset E$; H é um prehalo se existe uma família interna $(H_n)_{n\in J}$, J standard, de subconjuntos (internos) de E tal que*

$$H = \bigcap_{st(n)} H_n.$$

Definição 5.25 *(pregaláxia) Seja $G \subset E$; G é uma pregaláxia se existe uma família interna $(G_n)_{n\in J}$, J standard, de subconjuntos (internos) de E tal que*

$$G = \bigcup_{st(n)} G_n$$

Exemplo 5.40 *Um halo é um prehalo externo. Uma galáxia é uma pregaláxia externa.*

Exemplo 5.41 *$hal(a)$, $hal(\infty)$ são halos: tome-se $J = \mathbb{N}$, $H_n^a := [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$ para o primeiro e $H_n^\infty =]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[$ para o segundo.*

Exemplo 5.42 *$\mathbb{G}$, $\mathbb{A}$ são galáxias: tome-se $J = \mathbb{N}$, $G_n^G = [-n, n]$ para o primeiro e $G_n^A =]-n, -\frac{1}{n}[\cup]\frac{1}{n}, n[$ para o segundo.*

Proposição 5.20 *Seja $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função interna.*

Se $H = \{x : f(x) \text{ é ip}\}$ é um conjunto externo, então é um halo.

Se $G = \{x : f(x) \text{ é limitado}\}$ é um conjunto externo, então é uma galáxia.

Seja E um espaço métrico conexo. Se f (resp. g) é contínua ou S-contínua, e toma valores apreciáveis e ips (resp. igs) então H (resp. G) é externo.

Proposição 5.21 ***(princípio de Fehrele).*** *Um halo não é uma galáxia.*

Para o exemplo do lema de Robinson acima, $G = \mathbb{G}$ é uma galáxia, e H é *a priori* apenas um pré-halo: u_n poderia ser ip para todo o n, e nesse caso $H = \mathbb{N}$ claro que seria um conjunto interno. Se H é interno, o lema de Robinson é uma consequência do princípio de Cauchy. Se H é um conjunto externo, o lema segue-se do princípio de Fehrele.

É claro que o complemento de um halo em qualquer conjunto interno é uma galáxia e reciprocamente; a intersecção ou a união de um halo com um prehalo é um prehalo e a intersecção ou a união de uma galáxia com uma prégalaxia é uma prégalaxia.

Observe-se, porém, que existem conjuntos externos que não são nem halos nem galáxias, como $\{x \in \mathbb{R} : 0 \lessapprox x \lnapprox 1\}$. Não obstante, se (A, B) é um corte de $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R} = A \sqcup B$, A, $B \neq \emptyset$, com $a < b$ para todo o $a \in A$ e todo o $b \in B$, então um dos dois é um prehalo e o outro uma pregaláxia. Se o corte é interno, caracteriza um número real; se é externo, caracteriza um "número" externo.

Dem. (do princípio de Fehrele) Esta demonstração consiste em estabelecer um princípio de separação, isto é, se $G \subset H$ com G uma galáxia e H um halo, existe um conjunto interno I tal que $G \subset I \subset H$. A conclusão segue-se então do princípio de Cauchy.

Para qualquer conjunto E, seja $\underline{E}$ o subconjunto de todos os elementos standard de E; para E standard, $\underline{E}$ é externo assim que E seja infinito. Sejam X e Y standard, e seja $(G_x)_{x \in X}$ e $(H_y)_{y \in Y}$ duas famílias internas tal que $G = \bigcup_{x \in \underline{X}} G_x$ e $H = \bigcap_{y \in \underline{Y}} H_y$. Seja R o conjunto interno de todos os $(x, y) \in X \times Y$ tal que $G_x \subset H_y$. A hipótese $G \subset H$ implica que $\underline{X} \times \underline{Y} \subset R$ o que, por sua vez, implica que a relação $B(P, c)$ em $\mathcal{P}(X \times Y) \times (X \times Y)$ definida pela condição seguinte,

$$P \text{ é um produto cartesiano, } P \subset R, \text{ e } c \in P.$$

é concorrente. Do princípio de idealização, existe $p = X' \times Y' \subset R$ tal que $\underline{X} \times \underline{Y} \subset X' \times Y'$. Basta então considerar $I = \bigcup_{x \in X'} G_x$ (ou $I = \bigcap_{y \in Y'} G_Y$).■

O lema de Robinson também tem uma demonstração directa elementar, considerando apenas o conjunto interno $I := \{n \in \mathbb{N} : nu_n \leq 1\}$. Das regras de Leibniz, é fácil de ver que $G \subset I \subset H$. Mas a relação $nu_n \leq 1$ nada tem a ver com o problema considerado e $nu_n \leq 1000$ ou $nu_n \leq 0.001$ também serviriam.

5.4 Conclusões

Neste capítulo fez-se uma breve visita aos conceitos da "verdadeira análise infinitesimal", utilizando linguagem e simbologia modernas. Por se tratar de um capítulo de revisão, não se procedeu a qualquer aprofundamento.

Este capítulo serve de fundamento, quer em termos de conceitos, quer em termos de linguagem e simbologia, para a fundação da Geometria não-standard que se tem em vista, e que será objecto dos próximos capítulos.

CAPÍTULO 6

O conceito de geometria não-standard

6.1 Introdução

A geometria não standard[1] considerada nesta dissertação, tem como objectivo aplicação dos novos desenvolvimentos na fundamentação da análise não-standard (Robinson e Nelson — últimas décadas do século XX) nos domínios da geometria[2].

Pode-se considerar que os fundamentos da GNS foram lançados nos finais do século XIX, com o desenvolvimento da geometria não-arquimediana, por Veronese, Hilbert, Poincaré, e outros [ver Parte I]. Mas, como explica Franco de Oliveira [relatório de orientação],

"O desenvolvimento desta geometria ficou, em certo sentido, bloqueado, no mesmo sentido em que ficou bloqueado o desenvolvimento da análise não-arquimediana baseada em corpos não-arquimedianos que estendem propriamente o corpo dos números reais, por dificuldades intrínsecas que só vieram a ser ultrapassadas com a moderna análise não-standard".

O objectivo deste capítulo é o de definir tentativamente esta (nova) área da geometria.

6.2 Definições tentativas

Não é nova a constatação da dificuldade da construção de um enunciado que caracterize univocamente o que foi, o que é, e o que será a geometria[3]. Por isso, seria vão tentar-se dar aqui uma definição do que se pretende significar com a expressão *geometria não-standard*, por "oposição" à *geometria standard*.

Aqui pretende-se caracterizar modelos não-standard de geometria, que serão então denominados de geometrias não-standard.

[1] O termo "Geometria não-standard" ainda não existe na literatura especializada nem nas classificações habituais (AMS) das ciências matemáticas.

[2] Ver a secção 12.1 do capítulo 12.

[3] Paulo Almeida, em textos (ainda não publicados) de apoio às conferências realizadas na Universidade de Évora, sobre a *Geometria não Comutativa dos Números*, dá conta dessa dificuldade. Em consequência adopta uma definição dinâmica, quer do ponto de vista temporal, quer do ponto de vista da constituição do grupo humano que pratica a geometria:

«— [...] *em cada momento histórico a geometria tem sido um exercício de pensamento sobre a concepção particular de espaço em vigor nesse momento histórico*;[...]».

6.2.1 Modelos standard e modelos não-standard de geometria

Definição 6.1 (modelo standard de geometria (ZFC)) *Coloquemo-nos na linguagem ZFC da teoria de conjuntos. Um modelo standard de geometria é um modelo de geometria definido sem recurso a qualquer predicado externo a ZFC.*

Isto é, dado um modelo de geometria, ele é standard (em ZFC) se todos os objectos e todas as relações definidas pelo modelo são formuláveis em ZFC, apenas.

Exemplo 6.1 *A geometria euclidiana, tal como modelizada por Hilbert, é um modelo standard de Geometria.*

Definição 6.2 (modelo não-standard de geometria) *Um modelo não-standard de geometria é modelo obtido através de uma extensão (conservativa) de um modelo standard de geometria.*

Um modelo de não-standard de geometria é dito uma geometria não-standard.

Conclui-se que um modelo não standard de geometria é-o sempre relativamente a um modelo de ZFC.

A extensão a que refere a definição 6.2, pode ser feita através de um puro enriquecimento da linguagem ZFC dos modelos standard, predicando certos elementos da geometria como sendo "elementos não-standard", num sentido puramente abstracto — à semelhança do que fez Edward Nelson para a ANS.

Exemplo 6.2 *Considere-se, na linguagem ZFC, o modelo euclidiano de geometria, tal como formulado por Hilbert, tendo como suporte um espaço (euclidiano) $\mathcal{E}$. Por ZFC, existem elementos fora de $\mathcal{E}$. Considere-se então um modelo de geometria que para além de incluir o espaço euclidiano $\mathcal{E}$, inclui também elementos não pertencentes a esse espaço, constituindo um conjunto $\mathcal{E}'$. Pelo axioma da completude de Hilbert (formulado em ZFC), são necessários novos axiomas para caracterizar este novo modelo de geometria. Considere-se o novo modelo de geometria, com base no conjunto $\mathfrak{E} = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$: esses novos axiomas servirão para caracterizar os conjuntos de pontos que incluem pontos de E'. Chame-se fora a esses pontos. O modelo com base em $\mathfrak{E}$ é uma extensão conservativa do modelo inicial. Uma tal geometria é quadridimensional*[4]*. Se se postular, para os elementos não-standard de $\mathfrak{E}$, propriedades que, intuitivamente, correspondam ao chamado "tempo", $\mathfrak{E}$ é equivalente ao espaço-tempo da física. Se se postular para esses mesmos elementos não-standard, propriedades que, intuitivamente, correspondam ao chamado "espaço", $\mathfrak{E}$ é equivalente às geometrias quadridimensionais, estudadas por Veronese [72], Maning [54], Rossier [64] e outros. No primeiro caso os elementos não-standard são o "tempo" (e seus derivados) e no segundo caso, os elementos da quarta dimensão são o "espaço" (e seus derivados).*

Exemplo 6.3 *Uma geometria euclidiana, provida de objectos infinitamente pequenos actuais e objectos infinitamente grandes actuais (geometria euclidiana não-arquimediana) é um modelo de geometria não-standard, pois os seus objectos não podem todos ser caracterizados na linguagem ZFC. Neste caso a linguagem ZFNC permite a caracterização de todos os objectos: os elementos não-standard são os ips, igs e derivados. Trata-se de uma geometria não-standard não-arquimediana.*

[4] Num sentido puramente numérico da palavra "dimensão".

6.2.2 Exemplos de geometrias-não standard

A seguir apresentam-se dois exemplos (equivalentes) de uma geometria não-standard: a geometria quadridimensional espacial.

1. Geometria quadridimensional de pontos luminosos

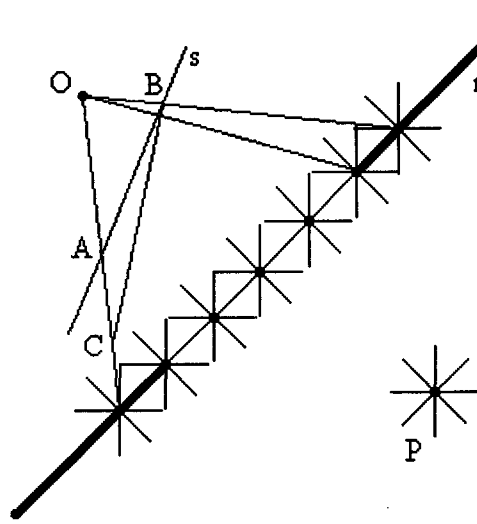
Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano onde cada ponto é uma fonte luminosa (pontual), P. Considere-se o predicado *"fora"*, a ser adicionado à linguagem da geometria euclidiana que rege $\mathcal{E}$, sujeito aos seguintes axiomas:

— ***Dado um espaço euclidiano n-dimensional, existem pontos que não pertence a esse espaço, ditos situados fora dele;***[5]

— ***O conjunto dos pontos fora, está sujeito aos axiomas da geometria euclidiana.***

Tem lugar a seguinte definição: Seja $\mathfrak{E}$ o espaço resultante da união do espaço euclidiano n-dimensional $\mathcal{E}$, com os pontos fora de $\mathcal{E}$. Os pontos de $\mathcal{E}$ dizem-se do ***tipo*** I; os pontos fora de $\mathcal{E}$, dizem-se do *tipo* II.[6]

Seja O um observador (receptor luminoso), fixo, situado num ponto fora do espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{E}$ (figura abaixo).



Ora, o observador O só "vê" as fontes luminosas (pontos de tipo I) — não "vê" os raios de luz que não lhe são dirigidos, que se vai supôr são rectas, constituídas por pontos do tipo II, de acordo com a regra: os tipos de pontos dão origem a tipos de rectas, planos, espaços, etc. — tipo I e tipo II. Têm-se as seguintes características do espaço $\mathfrak{E}$:

i — Todo o ponto de tipo I incide com o (está ligado ao) observador O por uma recta de tipo II;

ii — Toda a recta de tipo I incide com o (está ligada ao) observador por um feixe de rectas de tipo II, constituindo um plano de tipo II

iii — Todo o plano de tipo I, que não passe pelo observador, incide com este, por um espaço de tipo II;

iv — Os planos e espaços de tipo II, que ligam o observador às figuras de tipo I, são feixes de rectas (de tipo II, obviamente);

[5] Conceito veronesiano de *fora*.

[6] Os tipos, I e II, são predicados derivados do predicado *fora*.

Também são evidentes os seguintes resultados:

— As figuras geométricas existentes em planos de tipo II, só são "visíveis" ao observador quando são constituídas por figuras de tipo II, *principais*, isto é, que passam pelo observador: rectas, planos e espaços. Neste caso, uma recta principal é vista, pelo observador, como um ponto do tipo I, um plano principal como uma recta de tipo I, um espaço principal, como um plano de tipo I.

— Todas as outras figuras de tipo II são "invisíveis". Por exemplo, na figura acima, a recta s, o segmento $\overline{BC}$ e o triângulo $\triangle ABC$ não são visíveis;

— Todas as figuras de tipo I são visíveis, directamente ou pelas suas projecções. Por exemplo, na figura acima, a recta r é visível.

Esta geometria é espacial quadridimensional, e equivalente à geometria em dimensão quatro, de Veronese [*FG*].

Verifica os resultados clássicos:

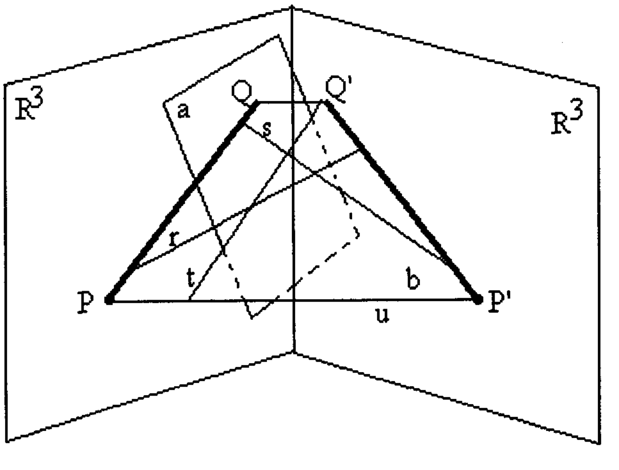
— Dois planos de tipo II, principais, intersectam-se num ponto, de tipo I;

— Dois planos de tipo II, intersectam-se numa recta de tipo II, mas nem, esses planos, nem a sua intersecção, são visíveis — por isso, são muitas vezes considerados paralelos;

Considerem-se *standard* os pontos do tipo I, bem como as figuras de tipo I, e *não-standard* os outros elementos e figuras. Trata-se de uma geometria não-standard.

2. Geometria quadridimensional do biombo

Considere-se um *biombo* de duas abas (bi-biombo[7], figuras abaixo), representando cada aba o espaço $\mathbb{R}^3$, sendo uma aba a imagem da outra por uma rotação espacial, de eixo na charneira do biombo.



Assim, a união de um ponto P com a sua imagem P', é uma linha que não está em $\mathbb{R}^3$ (nem objecto, nem imagem): está *fora* de $\mathbb{R}^3$ usual. Qualquer ponto do espaço, entre as

[7]Chama-se um n-biombo a um biombo com n abas e $(n-1)$ charneiras (intersecções das abas).

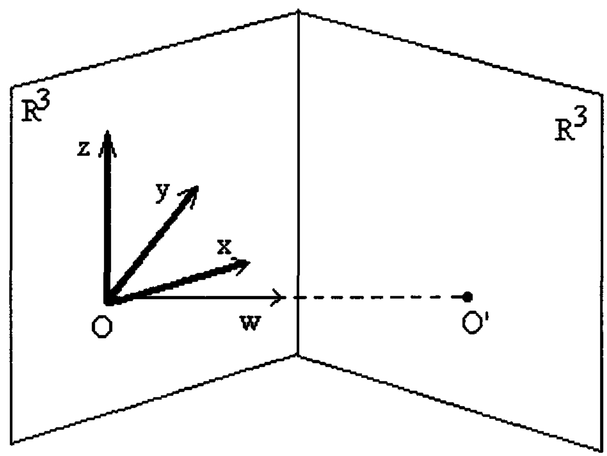
abas do bi-biombo, bem como qualquer figura desse espaço, não pertence a $\mathbb{R}^3$: é o caso do plano a e das rectas r, s, t (sendo esta recta a intersecção de a com b) [figura acima].

Têm-se os seguintes resultados:

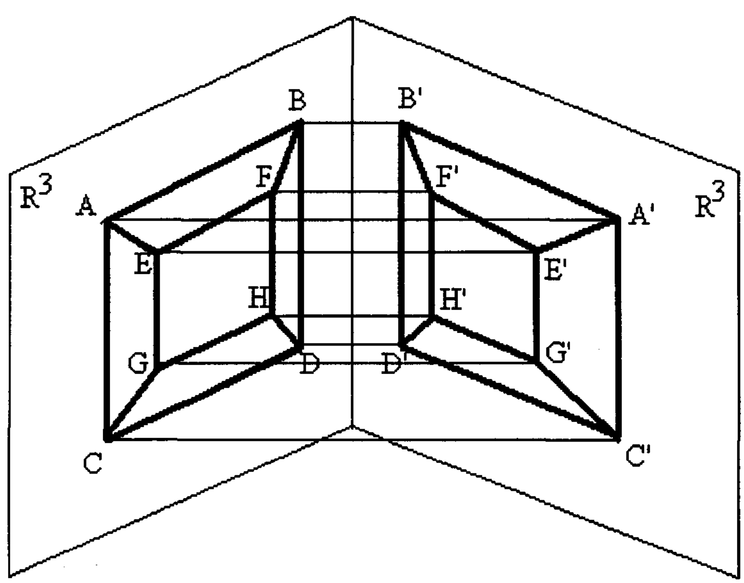
— A todo o par de pontos P, P' de $\mathbb{R}^3$, corresponde uma recta u, que não está em $\mathbb{R}^3$;

— A todo o par de rectas $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{P'Q'}$, corresponde um plano, que não está em $\mathbb{R}^3$.

O conjunto, bi-biombo mais espaço intermédio, é equivalente ao espaço $\mathbb{R}^4$, onde se pode representar uma base (x, y, z, w):



Para a representação do cubo em $\mathbb{R}^4$, tem-se



Tal como no exemplo anterior, esta geometria é também *não-standard*, por conter elementos *fora* de um espaço euclidiano.[8]

[8]Esta geometria pode ser construida experimentalmente numa oficina — foi a pensar nisso que ela foi

Porém, intencionalmente, neste projecto de investigação, restringiu-se se ao estudo das geometrias não-standard não-arquimedianas (GNSA). Até porque, historicamente, tiveram grande importância, como se viu na Parte I. As geometrias não-standard abstractas não são estudadas nesta dissertação — serão objecto de estudos futuros (Ver capítulo 12, secção ??, Perspectivas e trabalho futuro).

6.2.3 Definição clássica de GNSNA (analítica)

Como se sabe desde Hilbert e como mais adiante rever-se-à (Parte IV), qualquer corpo de segmentos é isomorfo a um corpo numérico. Assim uma geometria sintética é associada a uma geometria analítica correspondente. Ora toda a geometria analítica é caracterizada por admitir como modelo um corpo numérico, dito o *corpo base da geometria.* Assim, tem-se a

Definição 6.3 (geometria não-standard não-arquimediana) *Uma geometria não-standard não-arquimediana (GNSA) é uma geometria cujo corpo base é um corpo não-arquimediano.*

Tal como na ANS, pode-se, na GNSA, utilizar os corpos fundados na ANS, bem como as teorias fundadoras (em particular, IST), como bases da GNSA. Do mesmo modo como os corpos fundados na ANS ajudaram no progresso da análise, também vieram dar o seu contributo ao progresso da geometria, através da fundamentação da geometria não-arquimediana,

i) provendo-a de bases rigorosas (modelos não-standard);

ii) enquadrando-a devidamente numa teoria de conjuntos, a saber, a teoria IST (equivalente a ZFNC);

e com isso ajudando-a na legitimação de certos métodos — como o da exaustão, por exemplo — bem como na legitimação de certas definições e construções, reconhecidamente mais intuitivas, logo mais acessíveis a mentes mais precoces (com as vantagens pedagógicas advenientes). Certamente também ajudará na procura de novos desenvolvimentos da geometria, tal como aconteceu na ANS.

A fundamentação da GNSA pode ser feita de várias maneiras:

— 1 — Colocando-se no quadro da teoria ZFNC de conjuntos de Edward Nelson, e interpretando os axiomas, de Hilbert, por exemplo, tal como são vulgarmente apresentados, mas re-interpretando os axiomas de continuidade, no quadro da teoria IST. Tal re-interpretação introduz entes não-standard.

— 2 — Colocando-se no quadro de Hilbert, substituir o axioma de continuidade de Dedekind por axiomas de continuidade não-arquimedianos (veronesianos, por exemplo).

— 3 — Do ponto de vista métrico, que também é desenvolvido neste texto (capítulo 11), aproveitam-se os axiomas de Birkhoff, e no teorema da colocação da régua, usando réguas não-standard, define-se, por exemplo, distância infinitesimal.

Nos próximos capítulos vai-se recorrer a estas duas últimas abordagens[9].

---

concebida.

[9]Doravante GNS significará GNSA.

6.2.4 Definição kleiniana de GNSNA

A definição do que é uma geometria elementar[10] foi fixada por Felix Klein quando tinha apenas vinte e três anos de idade e conhecido pelo célebre *programa de Erlangen*. Desde essa época se tem a seguinte

Definição 6.4 *(Geometria num conjunto abstracto) Uma geometria num espaço E (conjunto cujos elementos são chamados pontos) munido de uma estrutura (dita geométrica), é a acção dum grupo G (cujos elementos são chamados simetrias) sobre E.*[11]

Trata-se agora de dar uma definição de geometria não-arquimediana, de acordo com a definição acima. Tem-se:

Definição 6.5 *(Geometria não-arquimediana) Seja E um conjunto qualquer de pontos e G um grupo não-arquimediano que age sobre E. Ao par (E, G) chama-se uma geometria não-arquimediana.*

Exemplo 6.4 *Considere-se a acção do grupo euclidiano (isometrias) não-arquimediano $\mathcal{E}$ sobre o conjunto dos pontos do plano. $\mathcal{E}$ inclui translações e rotações associadas a vectores, possivelmente ip, e ângulos, possivelmente ip, respectivamente. A órbita de um ponto será uma linha não-arquimediana. Esta geometria é euclidiana não-arquimediana.*

Exemplo 6.5 *Do mesmo modo, a rotação de um ponto, associada a ângulos ip, produz ângulos ip e circunferências não-arquimedianas:*

— Seja $\alpha \in]0, 2\pi] \cap \mathcal{R}$, ($\mathcal{R}$ é uma extensão não-arquimediana de $\mathbb{R}$), e $P(x_0, y_0)$ um ponto dum plano cartesiano usual. Então a órbita de P através da acção do grupo (ortogonal) das rotações, é

$$R_P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right\},$$

[10] No sentido de incluir, no máximo, superfícies de curvatura constante.

[11] Recorde-se que dado um conjunto E e um grupo $(G, \cdot, e)$, uma acção de G sobre E à direita (resp. à esquerda) é uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G \times E &\to E \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \psi : G \times E &\to E \\ (g, x) &\mapsto x \cdot g \end{aligned}$$

tal que $\forall g, g' \in G, \forall x \in E$

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot x) &= (g \cdot g')x \\ e \cdot x &= x. \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot x) &= x(g \cdot g') \\ x \cdot e &= x. \end{aligned}$$

uma circunferência não-arquimediana.

Exemplo 6.6 *Uma simetria em relação a um eixo ou a um ponto, infinitamente próximos de um ponto dado, produzem imagens infinitamente próximas do ponto dado.*

Nesta dissertação vai-se cingir a fundamentações dentro do quadro da definição clássica (capítulo 7 e subsequentes). Fundamentações baseadas na definição kleiniana são remetidas para estudos posteriores (ver capítulo 12).

6.3 Conclusões

Fértil parece ser o campo das geometrias não-standard, quer do ponto de vista da sua concepção, quer do ponto de vista da sua tipificação, quer ainda do ponto de vista das ferramentas standard e não-standard à sua disposição. Por isso essa materia será alvo de estudos futuros.

Este capítulo abordou uma das questões fundamentais da tese: a definição de geometria não-standard. Por outro lado também indica o sentido preciso das restrições do campo de investigação da mesma, no âmbito desta dissertação.

Parte IV

Fundamentos da geometria e modelos de geometria não-standard não-arquimediana

CAPÍTULO 7

Revisão do modelo fundacional de Hilbert e da classificação hilbertiana de geometrias

7.1 Introdução

A publicação dos *Grundlagen* de Hilbert constituiu um marco histórico importante na fundamentação da geometria, bem como em toda a matemática. Dado o estilo, completude e alcance, essa obra impôs uma linguagem e um método na geometria sintética, que acabaram por se tornar clássicos. Os outros ramos da matemática, tais como a geometria analítica e a análise usam, por defeito, a linguagem dos *Grundlagen*. Essa obra concebida sob a teoria dos conjuntos de Cantor, Dedekind e Peano, consagrou o método axiomático (lógica e teoria de modelos), e a própria geometria analítica — ramos essênciais da matemática de hoje. Assim, a tradução para a linguagem e métodos hilbertianos, de geometrias provenientes de outros autores, não só torna essas geometrias mais compreensíveis a todas as pessoas de formação matemática contemporânea, como permite a estas o recurso um um grande manancial de resultados já estabelecidos, acumulado ao longo dos cem anos dos *Grundlagen*.

Poucos conseguiram fugir ao estilo, linguagem e métodos, ilustrados pelos *Grundlagen*. Por isso em muitos autores se encontram apenas algumas pequenas reformulações e adaptações, advenientes de razões didácticas, de alguma (pouca) evolução em simbologias, ou pura e simplesmente de razões contextuais. Nesta secção vai-se fixar a terminologia a ser usada nas próximas secções. Também se recorda a classificação das geometrias originárias de Hilbert ou baseadas nos seus axiomas.

7.2 Formulação moderna dos axiomas de Hilbert

Os *Grundlagen* de Hilbert, tal como os *Elementos* de Euclides, têm também um carácter de sistematização. Com efeito, muitos dos axiomas apresentados na lista de Hilbert já haviam sido estabelecidos por Euclides, Pasch, Stolz, Helmholtz, e outros. Porém a sua simplificação, adaptação à recém nascida teoria de conjuntos (Cantor, Dedekind, Peano) e aos novos desenvolvimentos na teoria dos números reais (Dedekind, Cantor,...), a sistematização, a ordenação e o completamento com novos axiomas, são mérito exclusivo de

Hilbert.

Apresenta-se a seguir uma versão ligeiramente modernizada (em relação aos *Grundlagen*) dos axiomas de Hilbert, baseada na teoria ZFC (Zermelo-Fraenkel mais Axioma de Escolha) de conjuntos. O que se pretende nesta secção e nas próximas é a caracterização de sub-modelos (restrições) e super-modelos (extensões) do modelo de geometria absoluta de Hilbert, ao mesmo que se procede a interpretações desses modelos em planos cartesianos.

Trata-se de modelos não-arquimedianos, logo não contínuos no sentido de Dedekind.

A continuidade em certos modelos será introduzida através dos axiomas de Veronese. A completude de Veronese é mais fraca que a de Dedekind, no sentido em que aquela inclui esta, mas é absolutamente satisfatória para a geometria, como observa o próprio Veronese.

As noções primitivas necessárias ao modelo de Hilbert são:

— Um conjunto, M, chamado *plano;*

— Uma classe R_M de subconjuntos de M, chamados *rectas;*

— Três relações entre subconjuntos de M: E_M, $\equiv_M$ e c_M, designadas respectivamente por *ordem*, *congruência* e *continuidade.*

Os elementos de M são chamados pontos, e como usualmente, são notados por $A, B, C, ..., P, Q, R, ...$, possivelmente com índices. As expressões "P está em M", "P incide em M", "P é um ponto de M", são equivalentes a $P \in M$.

Os elementos de R_M são notados por $a, b, c, ..., r, s, t, ...$, possivelmente com índices. As expressões "P é ponto de r", "P incide em r", "r passa por P", equivalem a $P \in r$; a expressão "r corta s" equivale a $r \cap s \neq \emptyset$; a expressão "r é paralela a s" equivale a $r \cap s = \emptyset$.

A expressão $A - B - C$, que significa que B está entre A e C.

Os axiomas de Hilbert são os seguintes[1]:

Grupo I. Axiomas de incidência

I1. (extensão) Em toda recta incidem pelo menos dois pontos;

I2. (determinação) Dois pontos incidem numa e numa só recta;

I3. (existência) Existem três pontos não colineares;

A única recta que passa por A e B denota-se $\overleftrightarrow{AB}$.

Grupo II. Axiomas de ordem

II1. (simetria) Se $A - B - C$ então A, B, C são distintos, colineares, e tem-se também $C - B - A$;

II2. (existência) Se A diferente de B então existem C, D, E em $\overleftrightarrow{AB}$ tais que $A - C - B$, $D - A - B$ e $A - B - E$;

II3. (rectilinearidade) Se A, B, C são distintos e colineares então um e um só deles está entre os outros dois.

II4. (separação) Para qualquer recta r e pontos A, B, C não em r:

a. Se A, B estão do mesmo lado de r e A, C estão do mesmo lado de r então B, C estão do mesmo lado de r

b. Se A, B estão em lados opostos de r e B, C estão em lados opostos de r então A, C estão do mesmo lado de r.

Grupo III. Axiomas de congruência

III1. (movimento de segmentos) Dados os pontos A, B, $A \neq B$, e A', para toda a semirecta r emanando de A' existe um único ponto B' pertencente a r tal que B' diferente de A' e $\overline{AB}$ congruente $\overline{A'B'}$;

[1] As definições são as usuais e podem ser encontradas, por exemplo em [40] e [31].

III2. (Equivalência de segmentos) Todo o segmento é congruente consigo próprio. Além disso se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ então $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$;

III3. (Adição de segmentos) Se $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} = \overline{A'C'}$;

III4. (Movimento de ângulos) Dado um ângulo $\angle BAC$ e uma semirecta $\overrightarrow{A'B'}$ existe uma única semirecta $\overrightarrow{A'C'}$ em um dado lado de $\overrightarrow{A'B'}$ tal que $\angle B'A'C' \equiv \angle BAC$;

III5. (Equivalência de ângulos) Todo o ângulo é congruente consigo próprio. Além disso se $\angle A \equiv \angle B$ e $\angle A \equiv \angle C$ então $\angle B \equiv \angle C$;

III6. (Critério LAL) Se dois lados de um triângulo e o ângulo por eles formado, forem congruentes a dois lados e ao ângulo por eles formado de outro triângulo respectivamente, então os dois triângulos são congruentes;

Grupo IV. Axiomas de continuidade (linear)

IV1 — *Axioma de Arquimedes: Se* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *são dois segmentos quaisquer, então há na recta* $\overleftrightarrow{AB}$ *um número finito de pontos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *tais que os segmentos* $\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$. *são congruentes com o segmento* $\overline{CD}$ *e* $B = A_n$ ou B *está entre* A *e* A_n .

IV2 — *Axioma de Dedekind: Supondo que uma recta* r *é a união de dois conjuntos não vazios,* $r = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ *de tal modo que nenhum ponto de* Σ_1 *está entre dois pontos de* Σ_2 *e vice versa, então existe um único ponto* $O \in r$ *tal que, para quaisquer pontos* P_1, P_2 *de* r, O *está entre* P_1 *e* P_2 *sse* $O \neq P_1$, $O \neq P_2$ *e um dos pontos* P_1, P_2 *está em* Σ_1 *sse o outro está em* Σ_2*;*

Grupo V. Axiomas de paralelismo

V1 — Axioma de Hilbert para a Geometria Euclidiana:

Para toda a recta r *e todo o ponto* P *não pertencente a* r *existe quando muito uma recta paralela a* r *passando por* P.

ou

V'1 — Axioma da Geometria hiperbólica:

Para toda a recta r *e todo o ponto* P *não pertencente a* r*, existem, pelo menos, duas paralelas a* l*, passando por* P.[2]

O modelo *básico* ou *fundamental* de Hilbert é do tipo

$$\mathcal{M} = (M, R_M, E_M, \equiv_M),$$

onde M , o suporte da estrutura, é um conjunto de pontos constituindo um plano; R_M é um conjunto de conjuntos de pontos de M, chamados rectas de modo que $(M,\ R_M)$ constitui um modelo dos axiomas de incidência (planares), isto é, os pontos e rectas de M satisfazem a uma relação de incidência postulada nos axiomas $I_1 \to I_3$ de Hilbert; E_M é uma relação de ordem em M de tal modo que os elementos de (M, R_M, E_M) cumprem os axiomas II1 — II4; $\equiv_M$é uma relação de congruência que satisfaz os axiomas III1 — III5.

[2] Recorde-se que o axioma de paralelismo da Geometria Elíptica (*Para toda a recta* r *e todo o ponto* P *não pertencente a* r*, não existe qualquer paralela a* l*, passando por* P*)* é incompatível com os restantes axiomas.

7.3 Classificação hilbertiana de geometrias e alguns resultados básicos de referência

A classificação hilbertiana ou clássica das geometrias é a que foi standardizada pelos *Grundlagen*, através do agrupamento dos axiomas. Essa classificação inclui as geometrias de *incidência*, *ordem* e *congruência* — *euclidiana*, *não-arquimediana*, *não-pascaliana*, *não-arguesiana*.

7.3.1 Geometria da relação de incidência

Axiomas da relação de incidência e principais consequências

Neste parágrafo recordam-se alguns resultados deduzidos dos axiomas de incidência, com principal relevância para os do plano (I1-I3).

Os axiomas do grupo I constituem os fundamentos da geometria da incidência.

Teorema 7.1 *Duas rectas (distintas) têm quando muito um ponto comum.*

Dem. Sejam dadas as rectas distintas r, s, e suponha-se, com vista a um absurdo, que existem dois pontos distintos, A e B, comuns a r e a s. A e B incidem em r, e também incidem em s. Pela 2^aparte de I2 não pode ser $r \neq s$, o que é absurdo. Portanto, r e s não podem ter mais de um ponto comum.■

Corolário 7.1 *Duas rectas (distintas) [contidas num mesmo plano], não paralelas tem um único ponto comum.*

Dem. Se $r \neq s$ e r não é paralela a s, então, por definição de paralelismo de duas rectas, r e s têm pelo menos um ponto comum, digamos A. Pelo Teorema 7.1, r e s não têm mais nenhum ponto comum, logo A é o único ponto comum a r e s.■

Teorema 7.2 *Para toda a recta r existe pelo menos um ponto A que não incide em r.*■

Teorema 7.3 *Para todo o ponto A existe pelo menos uma recta r que não passa por A.*■

Teorema 7.4 *Para todo o ponto A existem pelo menos duas rectas (distintas) que passam por A.*

Dem. Dado um ponto A, pelo axioma I3, existem pelo menos outros dois pontos, digamos B e C, distintos entre si e distintos de A, tais que A, B, C não são colineares. Por I2, A e B determinam uma única recta, digamos r; analogamente, A e C determinam uma única recta, digamos s. Não pode ser $r = s$, visto A, B, C não serem colineares, logo $r \neq s$, e o ponto A é comum a r e s.■

Teorema 7.5 *Em todo o plano existem pelo menos três rectas (distintas) não concorrentes.*

Dem. Sejam A, B, C três pontos (distintos) não colineares, que existem por I3. Por I2, cada par de pontos de entre A, B, C determina uma recta, digamos $r = \overleftrightarrow{AB}$, $s = \overleftrightarrow{AC}$, $t = \overleftrightarrow{BC}$. Resta ver que r, s, t são distintas duas a duas, e não concorrentes. Tem-se $r \neq s$, pois caso contrário A, B, C seriam colineares. Analogamente $r \neq t$ e $s \neq t$. r e s têm um único ponto comum, que é A (Teorema 7.1); analogamente s e t têm um único ponto comum, que é C; se as três rectas concorressem num ponto, esse ponto teria de ser $A = C$, contrariando a hipótese.■

Considerem-se agora alguns teoremas em cuja demonstração pode ocorrer um qualquer dos axiomas da incidência I1-I6 (não necessariamente planares).

Teorema 7.6 *Uma recta e um ponto que não incide nela determinam um único plano.*

Dem. Sejam dados uma recta r, e um ponto $A \notin r$. Mostre-se, em primeiro lugar que existe um plano α contendo r e passando por A. Por I1, em r incidem (pelo menos) dois pontos distintos, digamos B e C, e, por I2, $r = \overleftrightarrow{BC}$. Visto $A \notin r$, os pontos A, B, C são distintos e não colineares. Por I4 estes pontos determinam um único plano, digamos α. Por I5, $r \subset \alpha$, e é claro que $A \in \alpha$. Resta provar que α é o único plano tal que $r \subset a$ e $A \in \alpha$. Pois se β é um plano tal que $r \subset \beta$ e $A \in \beta$, então também $B, C \in \alpha$. Visto $A, B, C \in \beta$ e $A, B, C \in \alpha$, por I4 é $\alpha = \beta$.■

Nota 7.1 *O plano determinado por três pontos distintos não colineares A, B, C designa-se ABC. Pelo teorema 7.6, dada uma recta r e um ponto $A \notin r$, faz sentido designar o (único) plano contendo r e passando por A por Ar ou rA.*

7.3.2 Geometria ordenada

Axiomas da relação de ordem e principais consequências

Na Geometria da Incidência não se pode falar em segmentos, ângulos, triângulos, perpendicularidade, etc., pois estes conceitos envolvem noções primitivas como a de "entre", sobre a qual os axiomas de incidência nada referem.

Como se viu, Hilbert baseia os seus quatro axiomas da ordem (Grupo II) na noção "situado entre", ou apenas de "entre".

Os axiomas II1-II4, cujas consequências são apresentadas abaixo, constituem, juntamente com os axiomas de incidência, os fundamentos da *geometria ordenada.*

Definição 7.1 (segmento de recta) *Um segmento de recta $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos P tais que $A - P - B$, juntamente com os pontos extremos A e B.*

Definição 7.2 (semirecta) *Semirecta* $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P : A - B - P\}$.

Nota 7.2 *Repare-se que II2 assegura a existência pontos P tais que $A - B - P$, de modo que $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$, pelo que as definições são boas.*

Teorema 7.7 *Para quaisquer pontos distintos A, B tem-se*

(i) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$

(ii) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$.

Dem. (i) Tem-se sempre, em virtude das definições de segmento e de semirecta, $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ e $\overline{AB} \subset \overrightarrow{BA}$, logo $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, de modo que só falta provar que $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \subset \overline{AB}$. Tome-se ao arbítrio $P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Se $P = A$ ou $P = B$ é imediato que $P \in \overline{AB}$; no outro caso $P \neq A$ e $P \neq B$; mas A, B, P são colineares (definição de semirecta e II1) e distintos uns dos outros, logo, por II3, tem-se $A - P - B$ ou $A - B - P$ ou $P - A - B$; não pode ser $A - B - P$, pois então viria $P \in \overrightarrow{AB}$ e $P \notin \overrightarrow{BA}$, por II3; pela mesma razão não pode ser $P - A - B$ logo só pode ser $A - P - B$, e portanto $P \in \overline{AB}$.

(ii) Imediata.■

Nota 7.3 *Note-se que II2 garante que toda a semirecta* $\overrightarrow{AB}$ *tem uma semirecta oposta, digamos* $\overrightarrow{AC}$, *para algum ponto* C *tal que* $C - A - B$.

Definição 7.3 (posição relativa de pontos) *Num dado plano contendo uma recta* r *e dois pontos* A, B *não em* r, *diz-se que*

(i) A *e* B *estão do mesmo lado de* r *sse* $A = B$ *ou* $\overline{AB}$ *intersecta* r;

(ii) A *e* B *estão em dados opostos de* r *sse* $A \neq B$ *e* $\overline{AB}$ *intersecta* r.

Resulta desta definição que dois pontos distintos não em r, ou estão do mesmo lado, ou em lados opostos de r, pois que o segmento que os une ou não intersecta ou intersecta r, respectivamente.

Proposição 7.1 *"Estar estar do mesmo lado de* r*" é uma relação de equivalência.*

Dem. Com efeito, um ponto não em r está do mesmo lado de r que ele próprio (reflexividade) , e que se A está do mesmo lado que B então B está do mesmo lado que A (simetria); o axioma II4a diz que a relação "estar do mesmo lado de r", definida nos pontos de um plano que não estao em r, é transitiva.■

As classes de equivalência são os *semiplanos limitados por* r.

Tem-se a

Definição 7.4 (semiplano) *Dado um plano* α, *e uma recta* r *nele contida, um semiplano* $\alpha_{r,P}$ *limitado por* r *é um conjunto de pontos do plano costituido por todos os pontos que estão do mesmo lado de* r *que um ponto dado* P *de* α, *não em* r.

Teorema 7.8 *Uma recta limita exactamente dois semiplanos sem pontos comuns.*

Dem. Dada uma recta r, existe $A \neq r$ e $O \in r$. Por II2 existe um ponto B tal que $B - O - A$. Por definição, A e B estão em lados opostos de r, logo r limita pelo menos dois semiplanos. Estes não podem ter nenhum ponto comum, pois caso contrário, por II4a, A e B estariam do mesmo lado de r.

Para terminar tem-se que qualquer ponto $P \notin r$ está num daqueles semiplanos.

Assim é, trivialmente, se $P = A$ ou $P = B$. Suponha-se pois que $P \neq A$ e $P \neq B$, e que P não está do mesmo lado que A; mostra-se que P está do mesmo lado que B. Pois por hipótese, P e A estão de lados opostos de r, mas A e B estão de lados opostos de r, por construção, logo, por II4b, P e B estão do mesmo lado de r.■

Teorema 7.9 *Se* $A - B - C$ *e* $A - C - D$ *então* $B - C - D$ *e* $A - B - D$.

Dem. Suponha-se que $A - B - C$ e $A - C - D$. Então A, B, C, D são distintos uns dos outros e colineares, por II1 e I2.

Prove-se, em primeiro lugar, que $B - C - D$. Para tal, considere-se a recta $r = \overleftrightarrow{AB}$ e um ponto $P \notin r$. A recta $t = \overleftrightarrow{PC}$ intersecta r no ponto C, e como $A - C - D$ por hipótese, A e D estão em lados opostos de t.

Por hipótese, também $A - B - C$, logo A e B estão do mesmo lado de t (caso contrario, $\overline{AB}$ intersectaria t, necessariamente no ponto C, logo viria $A - C - B$, contrariando II3).

Então, por II4b, B e D estão em lados opostos de t, logo $\overline{BD}$ corta t, necessariamente no ponto C o que prova que $B - C - D$. Analogamente se prova que $A - B - D$, considerando em vez de t a recta $s = \overleftrightarrow{PB}$.■

Corolário 7.2 *(separação nas rectas) Se $C - A - B$ então para todo o ponto P da recta $r = \overleftrightarrow{AB}$, $P \in \overrightarrow{AB}$ ou $P \in \overrightarrow{AC}$.*

Dem. Sejam dados os pontos A, B, C, P tais que $C - A - B$, $P \in r = \overleftrightarrow{AB}$. Prova-se que se $P \notin \overrightarrow{AB}$ então $P \in \overrightarrow{AC}$, o que prova o resultado. Tem-se que, por definição de $\overrightarrow{AB}$ e por II3, se $P \notin \overrightarrow{AB}$ só pode ser $P - A - B$. No caso $P = C$ é imediato que $P \notin \overrightarrow{AC}$. No caso $P \neq C$, novamente por II3 temos em princípio uma e uma só das alternativas $C - A - P$, $C - P - A$, $P - C - A$; qualquer uma das duas últimas implica $P \in \overrightarrow{AC}$, por definição de $\overrightarrow{AC}$, logo o Corolário fica demonstrado se se provar que a primeira hipótese é impossível, por conduzir a um absurdo.

Suponha-se pois, com vista a um absurdo, que $C - A - P$. Considerando os três pontos (distintos) P, C, B tem-se uma só das posições relativas seguintes, por II3

(i) $P - C - B$, ou seja $B - C - P$ (II1)

(ii) $C - P - B$

(iii) $C - B - P$, ou seja $P - B - C$

Visto ser $C - A - B$ por hipótese, ou seja, $B - A - C$ por II1, combinado com (i) resulta que $A - C - P$, pelo teorema 7.9, o que contradiz II3, com a hipótese $C - A - P$.

(ii) com $C - A - P$ dá também $A - P - B$ pelo teorema 7.9, contrariando a hipótese $P - A - B$ (de $P \notin \overrightarrow{AB}$), por II3. Finalmente, combinando (iii) com $P - A - B$ dá, igualmente pelo teorema 7.9, $(A - B - C)$, contrariando $C - A - B$, por II3.

Em qualquer dos casos (i), (ii), (iii) que resultam de $C - A - P$, chega-se a um absurdo. Logo, não se tem $C - A - P$.∎

Teorema 7.10 *(de Pasch) Dados o ΔABC e uma recta r que intersecta $\overline{AB}$ num ponto entre A e B, então r também intersecta um dos outros lados. Se além disso $C \notin r$ então r não intersecta ambos os outros lados do triângulo.*

Dem. Dados o ΔABC e uma recta r intersectando $\overline{AB}$ num ponto entre A e B, é óbvio que se $C \in r$ então r intersecta ambos os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, precisamente no ponto C.

Mostra-se que, na hipótese $C \notin r$, r intersecta um somente dos lados $\overline{AC}, \overline{BC}$.

Visto por hipótese A e B estarem em lados opostos de r e $C \notin r$, podemos concluir (por II4 e teorema 7.8) que

(i) C está do mesmo lado de r que A, ou

(ii) C está do mesmo lado de r que B.

No primeiro caso C está do lado oposto de B, por II4b, logo r intersecta $\overline{BC}$ e não intersecta $\overline{AC}$. No segundo caso, por argumento análogo, r intersecta $\overline{AC}$ e não intersecta $\overline{BC}$.∎

Definição 7.5 (posição de um ponto em relação a um ângulo) *Um ponto D diz-se interior a um ângulo $\angle CAB$ sse D está do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que B e do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que C. O interior do $\angle CAB$ é o conjunto dos pontos interiores a $\angle CAB$ (e é pois, a intersecção de dois semiplanos).*

Teorema 7.11 *Dado um ângulo $\angle CAB$ e um ponto D sobre a recta $\overleftrightarrow{BC}$, D está no interior de $\angle CAB$ sse $B - D - C$.*∎

Nota 7.4 *Note-se que D é dado sobre a recta $\overleftrightarrow{BC}$. Não se deve assumir que todo o ponto interior a um ângulo dado está sobre um segmento com um extremo em cada um dos* *lados do ângulo. De facto, esta propriedade não se pode deduzir dos axiomas até agora admitidos, sendo mesmo falsa em planos hiperbólicos (modelos da geometria hiperbólica).*

Teorema 7.12 *Se D é interior ao $\angle CAB$ então:*
(a) Todo o ponto de $\overrightarrow{AD}$ excepto A é interior ao $\angle CAB$;
(b) nenhum ponto da semirecta oposta a $\overrightarrow{AD}$ e interior ao $\angle CAB$;
(c) se $C - A - E$ então B é interior ao $\angle DAE$.■

Definição 7.6 (ordem em semirectas) *Dado um $\angle CAB$ e um ponto D, diz-se que $\overrightarrow{AD}$ esta entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ sse D e interior a $\angle CAB$.*

Nota 7.5 *Note-se que, pelo teorema 7.12(a) esta definição não depende do ponto D sobre $\overrightarrow{AD}$, quer dizer, se E e qualquer ponto de $\overrightarrow{AD}$ distinto de A então $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ sse $\overrightarrow{AE}$ esta entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ (e é claro que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$).*

Teorema 7.13 *(Teorema da Barra transvererersal) Dado $\angle CAB$, e um ponto D, se $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AD}$ intersecta $\overline{BC}$.*

Dem. Suponha-se $\overrightarrow{AD}$ entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$. Se $\overline{AD}$ não intersectasse $\overline{BC}$, então B e C estariam do mesmo lado de $\overline{AD}$.

Seja E tal que $C - A - E$, de modo que, pelo teorema 7.12(c), B é interior a $\angle DAE$. Visto $\overline{AD}$ intersectar $\overline{EC}$ no ponto A, B e E estão do mesmo lado de $\overline{AD}$, logo, pelo axioma de separação II4a, C e E estariam do mesmo lado de $\overline{AD}$, o que é absurdo. Portanto, C e B estão em lados opostos de $\overline{AD}$, o que significa que $\overrightarrow{AD}$ corta $\overline{BC}$, necessariamente (pelo teorema 7.12 (b)) num ponto de $\overrightarrow{AD}$.■

Definição 7.7 (posição de um ponto em relação a um triângulo) *Dado um triângulo ΔABC e um ponto D, diz-se que D é interior ao ΔABC sse D é interior a cada um dos ângulos do triângulo; e diz-se que D e exterior ao ΔABC, sse D não é interior nem está sobre nenhum dos lados do ΔABC. O interior de um triângulo é o conjunto dos seus pontos interiores, e o exterior de um triângulo é o conjunto dos seus pontos exteriores.*

Teorema 7.14 *(a) Se uma semirecta com origem num ponto exterior a um triângulo ΔABC intersecta o lado $\overline{AB}$ num ponto entre A e B, então também intersecta um dos outros lados.*

(b) Se uma semirecta tem origem num ponto interior a um triângulo ΔABC, então ela intersecta um dos lados e, se não passar por um vértice, intersecta um único lado.■

Teorema 7.15 *Todo o modelo da geometria ordenada é infinito.*■

7.3.3 Geometria absoluta

Observação notacional

Utiliza-se aqui a designação geometria absoluta, com um significado diferente do usual. Muitos autores chamam *geometria absoluta* ou *neutra* aos modelos baseados nos grupos I, II, III e IV dos axiomas de Hilbert, justificando a sua opção por cada uma das designações[3]. Aqui não se vai entrar nesse debate, havendo a preferência pela designação de *geometria*

[3] Ver Greenberg [40], por exemplo.

absoluta aos modelos baseados apenas nos três primeiros grupos de axiomas (excluindo os axiomas de continuidade e de paralelas), reservando-se a designação de *geometria neutra* para os modelos dos quatro primeiros grupos — excluindo, portanto, apenas os axiomas de paralelas.[4]

Axiomas da relação de congruência e suas principais consequências

A última noção primitiva que falta considerar é a noção da relação de congruência simbolizada por " $\equiv$ ". Trata-se de uma relação incialmente definida apenas entre segmentos e entre ângulos, mas que se estende para definições a outras figuras como triângulos, por exemplo. Considera-se aqui a congruência do ponto de vista intrínseco (sintético) isto é, sem pressupôr um isomorfismo entre os números reais e o conjunto dos segmentos ou dos ângulos.[5]

Definição 7.8 (triângulos congruentes) *Dois triângulos $\Delta ABC, \Delta DEF$ dizem-se congruentes e escreve-se $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, sse existir uma bijecção entre os vértices de um e os vertices do outro de modo que lados correspondentes sejam congruentes e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Para facilitar a notação, vai-se supor, ao escrever $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, que, na bijecção referida, A corresponde a D, B a E, e C a F, o que se notará $A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow E$, $C \longleftrightarrow F$, de modo que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle\, A \equiv \angle D$, etc.

Teorema 7.16 *(pons asinorum) Num ΔABC, se $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ então $\angle B \equiv \angle F$.*

Dem. (Papo, 300 D.C.) Considere-se a correspondência entre os vértices de ΔABC e de ΔACB. É óbvio que, nesta correspondência, dois lados de ΔABC e o ângulo por eles formado são congruentes com os lados correspondentes com o ângulo por eles formado respectivamente de ΔACB (usando III 5 e a hipótese). Por III6, $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$, logo $\angle B \equiv \angle C$, por definição de congruência de triângulos.■

Teorema 7.17 *(Subtracção de segmentos) Se $A - B - C$, $D - E - F$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{AC} = \overline{DF}$, então $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$.*

Teorema 7.18 *Se $\overline{AC} = \overline{DF}$, então para todo o ponto B entre A e C existe um único ponto E entre D e F tal que $\overline{AB} = \overline{DE}$.*

Dem. Se $\overline{AC} = \overline{DF}$ e um ponto B entre A e C, pelo axioma III1 existe $E \in \overrightarrow{DF}$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$. E está entre D e F: pois caso contrário, ter-se-ia $E = F$ ou $D - F - E$, por definição de $\overrightarrow{DF}$. Se $E = F$ viria $\overline{AC} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{AB}$ com $B \neq C$ ambos em $\overrightarrow{AC}$, contradizendo a unicidade no axioma III 1. E se fosse $D - F - E$, por III I existiria G na semirecta oposta a $\overrightarrow{CA}$ tal que $\overline{FE} \equiv \overline{CG}$. Pelo axioma de adição de segmentos III 3 viria $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$. Logo existiriam $B \neq G$ em $\overrightarrow{AC}$ tais que $\overline{AG} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{AB}$, contradizendo novamente a unicidade no axioma III1. Portanto $D - E - F$.■

Pode-se agora definir uma "*relação de ordem*" entre segmentos do seguinte modo:

[4]Poder-se-ia adoptar a designação de *Geometria Surda*. Porém a deselegância, aliada à necessidade de economia de termos, levam à opção tomada.

[5]O ponto de vista métrico é adoptado, mais adiante, no capítulo 10.

Definição 7.9 (comparação de segmentos) *Dados dois segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *diz-se que* $\overline{AB}$ *é menor que* $\overline{CD}$ *(ou* $\overline{CD}$ *é maior que* $\overline{AB}$*), e escreve-se* $\overline{AB} < \overline{CD}$ *(ou* $\overline{CD} > \overline{AB}$*) sse existe* E *entre* C *e* D *tal que* $\overline{AB} \equiv \overline{CE}$.

Teorema 7.19 *(ordenação de segmentos) Para quaisquer segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$,

(a) Tem-se uma e uma só das relações

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \overline{AB} = \overline{CD}, \overline{AB} > \overline{CD} \text{ (tricotomia)}.$$

(b) Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ *então* $\overline{AB} < \overline{EF}$.
(c) Se $\overline{AB} > \overline{CD}$ e $\overline{CD} = \overline{EF}$ *então* $\overline{AB} > \overline{EF}$.
(d) Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF}$ *então* $\overline{AB} < \overline{EF}$.

Nota 7.6 *Note-se que, de (a) resulta imediatamente (em virtude da primeira parte de III2) a irreflexividade: para qualquer segmento* $\overline{AB}$, $\overline{AB} \nless \overline{AB}$ *(*$\nless$ *é a negação de* $<$*).*

Teorema 7.20 *(a) Ângulos suplementares (adjacentes) de ângulos congruentes são congruentes.*

(b) Ângulos verticalmente opostos são congruentes entre si.

(c) Todo o ângulo congruente a um ângulo recto é recto.■

Teorema 7.21 *Para toda a recta* r *e todo o ponto* P *existe uma recta* s *passando por* P *e perpendicular a* r.

Dem. 1ºcaso: ($P \notin r$) Sejam A, B quaisquer dois pontos de r, distintos (axioma I1)

No lado oposto de P em relação a r existem R e $\overrightarrow{AR}$ tais que $\angle RAB = \angle PAB$, pelo axioma III 4.

Por III 1, existe P' em $\overrightarrow{AR}$ tal que $\overline{AP'} \equiv \overline{AP}$. $\overline{PP'}$ intersecta r (pois P e P' estão em lados opostos de r), digamos num ponto Q.

Se $Q = A$ então $\angle RQB = \angle PQB$, logo $\overline{PP'} \perp r$, por definição de perpendicularidade.

Se $Q \neq A$ então tem-se, por III 6 (LAL) $\Delta PAQ = \Delta P'AQ$ logo $\angle PQA \equiv \angle P'QA$ (ângulos correspondentes), logo também $\overline{PP'} \perp r$.

2ºcaso: $P \in r$. Visto haver pontos não em r (axioma I3) por um qualquer deles pode-se fazer passar uma perpendicular a r, pelo 1ºcaso já demonstrado, obtendo-se assim um ângulo recto. Com vértice em P e um lado contido em r obtém-se um ângulo congruente àquele (axioma III4). Ora, o outro lado deste ângulo está contido numa recta $s \perp r$ passando por P, em virtude do teorema 7.19(c) .■

Teorema 7.22 *(Critério ALA) Se nos triângulos* ΔABC *e* ΔDEF *se tem* $\angle A \equiv \angle D$ *e* $\angle C \equiv \angle F$ *e* $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, *então* $\Delta ABC = \Delta DEF$.■

Teorema 7.23 *(Recíproco do "pons asinorum") Se no* ΔABC *se tem* $\angle B \equiv \angle C$, *então* $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ *e* ΔABC *é isosceles.*■

Teorema 7.24 *(Adição de angulos) Dados* $\overrightarrow{BG}$ *entre* $\overrightarrow{BA}$ *e* $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EH}$ *entre* $\overrightarrow{ED}$ *e* $\overrightarrow{EF}$, $\angle CBG \equiv \angle FEH$ *e* $\angle GBA \equiv \angle HED$, *então* $\angle ABC \equiv \angle DEF$.■

Dem. Pelo Teorema da barra transversal, pode-se supôr G entre A e C. Pelo Axioma III 1 pode-se supôr D, F, H escolhidos de tal modo que $\overline{AB} \equiv \overline{ED}$, $\overline{GB} \equiv \overline{EH}$ e $\overline{CB} = \overline{EF}$. Então, pelo critério LAL (axioma III 6) tem-se

$$(1) \quad \Delta ABG \equiv \Delta DEH$$

e

$$\Delta GBC \equiv \Delta HEF$$

Por se tratar de ângulos correspondentes em triângulos congruentes, tem-se

$$\angle DEH \equiv \angle AGB$$

e

$$\angle FHE \equiv \angle CGB$$

Alem disso, por posição de G, $\angle AGB$ é suplementar de $\angle CGB$. Ângulos suplementares de ângulos congruentes são congruentes, logo $\angle DHE$ é suplementar de $\angle FHE$ e, pela parte de unicidade de III4 D, H e F são colineares.

Visto por hipótese $\overrightarrow{EH}$ estar entre $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$, pelo teorema 7.11, H está entre D e F. Então, por (1) e III 3 (Adição de Segmentos), $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, logo, pelo critério LAL, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, e portanto $\angle ABC \equiv \angle DEF$ (ângulos correspondentes em triângulos congruentes).■

Teorema 7.25 *(Subtracção de Ângulos) Dados $\overrightarrow{BG}$ entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EH}$ entre $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$, $\angle CBG \equiv \angle FEH$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$, então $\angle GBA \equiv \angle HED$.*■

Definição 7.10 (comparação de ângulos) *Diz-se que $\angle ABC$ é menor que $\angle DEF$, escreve-se*

$$\angle ABC < \angle DEF \ (ou \ \angle DEF > \angle ABC)$$

sse existe $\overrightarrow{EG}$ entre $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$ tal que $\angle ABC \equiv \angle GEF$.

Teorema 7.26 *(Ordenação de Ângulos) (a) Para quaisquer dois ângulos $\angle P, \angle Q$, verifica-se uma e uma só das condições*

$$\angle P < \angle Q; \angle P \equiv \angle Q; \angle Q < \angle P$$

(tricotomia)

(b) Se $\angle P < \angle Q$ e $\angle Q \equiv \angle R$ então $\angle P < \angle R$ (compatibilidade)
(c) Se $\angle P > \angle Q$ e $\angle Q \equiv \angle R$ então $\angle P > \angle R$ (compatibilidade)
(d) Se $\angle P < \angle Q$ e $\angle Q < \angle R$ então $\angle P < \angle R$ (transitividade).■

Teorema 7.27 *(Critério LLL) Dados ΔABC e ΔDEF, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, então $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.*■

Teorema 7.28 *(4ºpostulado de Euclides) Todos os ângulos rectos são congruentes entre si.*

Dem. 1. Hipótese : dados dois pares de ângulos rectos, $\angle BAD \equiv \angle CAD$, $\angle\ FEH \equiv \angle GEH$

2. Suponhamos, com vista a um absurdo que $\angle BAD$ não é congruente ao $\angle FEH$.

3. Pelo teorema 7.26 um destes ângulos é menor que o outro, digamos que é $\angle FEH < \angle BAD$, de modo que existe $\overrightarrow{AJ}$entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ tal que $\angle BAJ \equiv \angle FEH$.

4. Pelo teorema 7.19(a) $\angle CAJ \equiv \angle GEH$.

5. Por 1, 4 e $\equiv$ ser uma equivalência, vem $\angle CAJ \equiv \angle FEH$.

6. Visto $\angle BAD \equiv \angle CAD$ por hipótese e $\angle BAJ < \angle BAD$ por construção, é $\angle BAJ < \angle CAD$ pelo Teorema 31(b), logo existe $\overrightarrow{AK}$ entre $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC}$ tal que, $\angle BAJ < \angle CAK$.

7. Por outro lado, de 3 e 5, por $\equiv$ ser equivalência, vem $\angle BAJ \equiv \angle CAJ$.

8. De 6 e 7 vem logo, ainda por $\equiv$ ser equivalência, $\angle CAJ \equiv \angle CAK$.

9. Ora, tem-se por construção que $\angle CAK < \angle CAD$, logo por 8 e teorema 7.26(b) $\angle CAJ < \angle CAD$. Mas simultaneamente $\angle CAJ > \angle CAD$, pelo teorema 7.12(c) (pois J é interior ao $\angle BAD$, por construção, logo D é interior ao $\angle CAJ$, isto é, $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AJ}$ e $\overrightarrow{AC}$), o que contradiz a primeira parte do teorema 7.26.

10. O absurdo obtido em 9 resulta de se ter suposto que $\angle BAD$ não é congruente a $\angle FEH$. Portanto, estes ângulos são congruentes.■

7.3.4 Conclusões

Neste capítulo passou-se em revista a classificação hilbertiana das geometrias elementares, utilizando uma linguagem moderna — baseada em ZFC, tal como Greenberg [40], Franco de Oliveira [31] e outros. Essa linguagem e as notações são fixadas para o resto da dissertação.

CAPÍTULO 8

Modelo geral Hilbert-veronesiano de geometria não-standard não-arquimediana

8.1 Introdução

No seu caminho para a fundação da geometria, como se disse, quer Hilbert, quer Veronese, incorporaram axiomas dos seus antecessores, a saber, Euclides, Pasch, Stolz, Helmoholtz, e outros. Este facto é por si só indicador de uma equivalência possível entre os axiomas básicos assumidos por um e por outro. Mas, nos seus *Fondamenti*, Veronese visa, desde os primeiros axiomas (referentes à forma fundamental), "*um sistema não-arquimediano de grandezas* (geométricas)", o mais geral possível, o que o afasta do caminho seguido, mais tarde, por Hilbert. Veronese acaba por adoptar axiomas baseados em conceitos como "*igualdade relativa*" e "*ordens de grandeza relativas*", que nada têm a ver com a tradição de então. Porém, no que concerne à geometria propriamente dita, se ele tivesse, tão simplesmente, adoptado um conjunto de axiomas, formalmente do tipo hilbertiano, para incidência, ordem e congruência, mais os axiomas veronesianos de continuidade, chegaria à mesma geometria que exibe nos seus *Fondamenti*, pelo menos na parte elementar da mesma[1].

Hilbert não faz qualquer ruptura com os axiomas históricos, e consegue com os axiomas I, II e III uma base comum para a geometria comum (arquimediana) e para a geometria não-arquimediana. É essa base que se pretende aproveitar para a formulação de um modelo de geometria não standard não-arquimediana, contínua à Veronese. Assim, neste capítulo vai-se estabelecer o modelo de GNSA, baseado na geometria absoluta de Hilbert, acrescido do axioma de continuidade de Veronese. Os axiomas de paralelismo serão adoptados, mais tarde, conforme as necessidades.

[1] Mas, como se viu, as preocupações de Veronese ultrapassavam de longe a fundação da geometria elementar (ver Anexo II, *EHCFG*).

8.2 Axiomas de continuidade

Os axiomas de continuidade são acrescentados aos modelos de geometria absoluta, para garantir a continuidade das figuras, em particular, da recta[2]. São axiomas independentes dos da geometria absoluta[3].

Vai-se começar por recordar o axioma de continuidade de Cantor[4], que é a matriz conceptual da continuidade veronesiana.[5]

8.2.1 Axioma de continuidade de Cantor

Axioma 8.1 *Se num segmento de recta $\overline{OM}$ duas sucessões de segmentos*

$$\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}, \ldots \wedge \overline{OA'_1}, \overline{OA'_2}, \overline{OA'_3}, \ldots$$

tais que os segmentos da primeira sucessão crescem indefinidamente e que os segmentos da segunda sucessão decrescem indefinidamente, e isso de modo que os segmentos

$$\overline{A_1A'_1}, \overline{A_2A'_2}, \overline{A_3A'_3}, \ldots$$

decrescem constantemente, até se tornarem menores que um segmento arbitrário, pré fixado — por menor que seja, a partir de um índice n (que depende naturalmente da escolha desse segmento), então existe no segmento $\overline{OM}$ um ponto X tal que $\overline{OX}$ seja maior que todos os segmentos da primeira sucessão e menores que todos os segmentos da segunda sucessão.

Note-se que, como tinha em mente a continuidade dedekindiana (isto é, arquimediana), Cantor acrescentou a este axioma, o da perfeição[6], que não é considerado por Veronese.

8.2.2 Axiomas de continuidade de Veronese

Proceda-se a uma nova visita às hipóteses ou axiomas de continuidade de Veronese, com vista à sua formulação em ZFNC.

Nos primórdios da formulação dos seus axiomas de continuidade, Veronese começa por demonstrar que o axioma de continuidade de Cantor é independente do axioma de Arquimedes. Percebendo que era exactamente o que queria (para estabelecer o seu contínuo não-arquimediano), aprofunda e generaliza as ideias de Cantor, formulando assim os seus axiomas:

Axioma de continuidade absoluta A primeira condição de continuidade foi publicada por Veronese em 1889 [], e mais tarde, nos *FG,* chamou-o de *princípio de continuidade absoluta.* Veronese formula o princípio para um sistema de grandezas S com certas propriedades (uma álgebra de segmentos[7]), tendo em mente sistemas de segmentos não orientados de uma recta euclidiana, com certas propriedades, entre as quais as seguintes

---

[2] Ver Apêndice D, para uma breve notícia histórica.

[3] Veronese demonstrou a indepedência do axioma de Cantor [Apêndice D] e dos dele próprio [*FG*], Hilbert mostrou a independência do de Arquimedes e do de Dedekind [*Grundlagen*].

[4] Hoje também conhecido como princípio do encaixe.

[5] Os axiomas de continuidade de Hilbert não serão questão nesta secção.

[6] Ver Apêndice D.

[7] Como se viu, no capítulo III, Hilbert mostrou, na esteira de Euclides, que um corpo de segmentos é isomorfo a um corpo numérico. Na secção ?? volta-se a esse isomorfismo.

i) $\forall x, y \in S - \{0\}, \quad x + y > x, y$ (positividade estrita);

ii) $S - \{0\}$ não tem ínfimo (ausência de um menor elemento positivo).

No caso de estruturas como S, a condição ii) é equivalente a assumir que sempre que

$$\forall x, y \in S(x < y \Rightarrow \exists z \in S : x < z < y),$$

isto é, dados dois elementos de S, existe sempre um terceiro elemento de S que os interpola.

Veronese [(*FG*, pág. 608-610)] enuncia assim o princípio:

— Se um segmento (intervalo) $\overline{XX'}$ de S, cujas extremidades variam sempre em sentidos opostos, se tornar indefinidamente pequeno, existe sempre em $\overline{XX'}$ um elemento Y de S, diferente de X e de X' [(1889, pág. 612, hipótese IV)].

Se se simplesmente substituir as referências às variáveis X e X' pelos conjuntos A e B de valores que as variáveis assumem, então, na base das definições de Veronese, chega-se à seguinte formulação da condição popularizada por O. Hölder (1901):

— Se A e B são conjuntos não vazios de S, onde A não tem maior elemento e B não tem menor elemento, e todo o elemento de A precede todo o elemento de B, e se para todo o elemento positivo c de S existem elementos a de A e b de B para os quais $b - a < c$, então existe um z em S que está estritamente entre os elementos de A e os de B.

Além disso, como o elemento z é único (1889, pág.612), a condição pode também ser enunciada na seguinte forma, que foi divulgada por Schöenflies (1906, pág. 26) , e que mais claramente sublinha a sua relação com a condição de continuidade de Dedekind:

— Se o par (A, B) de subconjuntos de S é um corte de S, tal que para todo o elemento positivo c de S existem elementos a de A e b de B para os quais $d(a, b) = |b - a| < c$, então ou A tem maior elemento ou B tem menor elemento, mas não se dá ambos os casos.

Trata-se pois da condição de Dedekind, mais a condição métrica

$$0 < d(a, b) < c, \quad \forall a \in A, b \in B, c > 0.$$

É fácil ver que em presença do axioma de Arquimedes (e apenas nesse caso), a condição métrica de Veronese sobre os cortes é invariavelmente satisfeita, logo supérflua.

Assim, para Veronese, ao contrário de Dedekind, os sistemas contínuos de grandezas não precisam não ter "buracos", embora tenham de estar isentos dos "buracos" que satisfazem a condição métrica que é satisfeita no caso clássico.

Além disso, Veronese mostrou que, se (A, B) é um corte num corpo não-arquimediano que satisfaz essa condição, então as diferenças entre os elementos de B e os de A têm de se tornar arbitráriamente pequenos em relação a qualquer elemento positivo do corpo, pelo que, como se viu no capítulo 4, um elemento positivo ν é dito infinitamente pequeno em relação a um elemento positivo u, se e só se $nv < u$ para todos os inteiros positivos n.

Axioma de continuidade relativa A segunda condição de continuidade de Veronese, que chama *hipótese de continuidade relativa*, apareceu no contexto próprio de geometria sintética dos *FG* (pág.128). Para formular esse axioma, há que, em primeiro lugar, recordar o conceito de classe arquimediana: $\Gamma \subset S$ é uma classe arquimediana se, para todos os x, y de Γ, x e y são finitos um em relação ao outro, isto é, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $mx > y$ e $ny > x$.

Formula assim o axioma:

«— Todo o segmento $\overline{XX'}$ que tendo os extremos sempre variáveis em sentidos opostos se torna indefinidamente pequeno, contém um elemento fora do campo de variabilidade dos seus extremos[8].»

Reformulando ligeiramente a linguagem, tem-se:

— Se A e B são subconjuntos não vazios de uma classe arquimediana Γ de S, onde A não tem maior elemento, B não tem menor elemento, e todo o elemento de A precede todo o elemento de B, e se para cada elemento c de Γ, existem elementos a de A e b de B para os quais $d(a,b) < c$, então existe um $z \in S$ que está estritamente entre os membros de A e os de B, ($z \in \Gamma' \neq \Gamma$).

Formulação da continuidade veronesiana na teoria IST Uma maneira de formular os axiomas acima, na linguagem da teoria IST é a seguinte:

Axioma 8.2 *(VC1)* - ***Axioma da continuidade absoluta*** — *Para toda a recta r e todo o segmento $\overline{AB} \subset r, |AB| > 0$, existem $X, Y \in r$ tal que $A - X - Y - B$.*

Observe-se que este axioma implica que se $|AB| > 0$, então existe um segmento $\overline{XY}$ tal que $|XY| > 0$ ($\overline{XY} \subsetneq \overline{AB}$).

Axioma 8.3 *(VC2)* - ***Axioma da continuidade relativa*** — *Para toda a recta r e todo o segmento $\overline{AB} \subset r$, existem $X, Y \in r$, com $A - X - Y - B$, tal que $|XY| = ip$.*

8.3 Modelo geral H-V de GNSA

8.3.1 Apresentação do modelo

Para a definição do modelo da geometria de Hilbert, é mais do que suficiente a teoria dos conjuntos, tal como axiomatizada por Zermelo e Fraenkel, ZFC. Porém, para o modelo que se pretende, essa linguagem é insuficiente. De facto, não é possível formular os axiomas de continuidade de Veronese (formulados como acima, por exemplo) na teoria ZFC. O ingrediente que falta, o predicado *standard* — que permite a formalização dos conceitos de ip, ig e outros, encontra-se na extensão ZFNC de ZFC.

Coloque-se então na teoria ZFNC de conjuntos internos. O modelo geral da geometria que se pretende, consiste na adopção dos axiomas da Geometria Absoluta de Hilbert, I, II, III, considerando os mesmos conceitos primitivos e as mesmas definições, aos quais se adiciona o termo primitivo "standard" e o axioma de continuidade de Veronese, na forma acima assumida. Notando por HVi os axiomas do modelo H-V, tem-se a seguinte lista:

$$\begin{array}{ccc} HV1 \leftrightarrow I1 & HV6 \leftrightarrow II3 & HV11 \leftrightarrow III4 \\ HV2 \leftrightarrow I2 & HV7 \leftrightarrow II4 & HV12 \leftrightarrow III5 \\ HV3 \leftrightarrow I3 & HV8 \leftrightarrow III1 & HV13 \leftrightarrow III6 \\ HV4 \leftrightarrow II1 & HV9 \leftrightarrow III2 & HV14 \leftrightarrow VC1 \\ HV5 \leftrightarrow II2 & HV10 \leftrightarrow III3 & HV15 \leftrightarrow VC2 \end{array}$$

[8] Isto é, fora do campo das escalas de $\overline{OX}$ e $\overline{OX'}$. Esta hipótese quantifica o espaço ao considerar que a "variabilidade" de X e de X' acontece "aos saltos" nas respectivas escalas, fazendo então sentido, de acordo com hipóteses anteriores, falar em campo de variabilidade e em elementos fora desses campos.

O modelo tem então a seguinte forma:

$$\mathcal{M} = (M, R_M, E_M, \equiv_M, c_M),$$

onde M , é um conjunto de pontos constituindo um plano; R_M é um conjunto de conjuntos de pontos de M, chamados rectas de modo que $(M,\ R_M)$ constitui um modelo dos axiomas de incidência (planares), isto é, os pontos e rectas de M satisfazem a uma relação de incidência postulada nos axiomas $HV_1 \rightarrow HV_3$ de Hilbert; E_M é uma relação "estar entre" em M de tal modo que os elementos de (M, R_M, E_M) cumprem os axiomas $HV4 \rightarrow HV7$ de Hilbert; $\equiv_M$é uma relação de congruência que satisfaz os axiomas $HV8 \rightarrow HV13$; e c_M uma bijecção entre cada recta de M e um conjunto transarquimediano de números. Essa bijecção só é possível quando em $\mathcal{M}$ são válidos os axiomas $HV14$ e $HV15$.

Será chamado de modelo Hilbert-veronesiano (H-V) de geometria não-standard não-arquimediana.

8.3.2 Características do modelo

Por construção, o modelo de geometria não-standard apresentado acima, possui uma interpretação em IST. Assim a consitência relativa do modelo depende da consistência de IST.

A idependência dos axiomas de Hilbert foi demonstrada nos *Grundlagen*, como se refere no capítulo 3. A independência do axioma de continuidade de Veronese dos axiomas de Hilbert foi demonstrada, em primeiro lugar por Veronese nos *Fondamenti* e, em segundo lugar, por Hilbert na obra citada, com a construção de geometrias independentes de qualquer axioma de continuidade.

Resta estudar a consistência do modelo. Para tal, e seguindo a via da demonstração da consistência através da compatibilidade, as interpretações que se apresentam no próximo capítulo, são bastantes.

8.3.3 Conclusões

Este capítulo é central nesta parte da tese, pois estabelece o principal modelo visado, e que é utilizado no resto do trabalho. Com ele consegue-se uma conciliação histórica entre Hilbert e Veronese, e o estabelecimento da continuidade não-arquimediana na geometria, em moldes hilbertianos, isto é, claro e moderno.

CAPÍTULO 9

Uma interpretação analítica do modelo Hilbert-veronesiano de geometria não-standard não-arquimediana

9.1 Introdução

Tal como Hilbert procedeu para demonstrar a consistência da sua geometria, recorrendo a modelos analíticos, apresenta-se neste capítulo uma geometria analítica, que constitui uma interpretação do modelo apresentado no capítulo anterior. O caminho seguido é o de Hilbert, trilhado com o auxílio de linguagem e notações ligeiramente mais modernas, mais adequadas aos propósitos em vista.

Para tal, inicia-se com uma secção (secção 9.2) sobre as relações entre a geometria absoluta, que vai ser a matriz do modelo pretendido, e a geometria analítica, revendo a relação entre essa geometria e a estrutura de corpo ordenado. A seguir (secção 9.3), enriquece-se a geometria com transformações no plano, e a definição da estrutura vectorial do plano cartesiano (secção 9.4). A secção seguinte (secção 9.5), é onde se estuda esse modelo como uma interpretação do modelo de Hilbert-Veronese, e na secção 9.6 vêm-se algumas aplicações elementares.

9.2 Geometria absoluta: geometria dos corpos ordenados

Seguindo o caminho apontado por Hilbert (capítulo 3), nesta secção vai-se partir de um conjunto qualquer, munido da estrutura algébrica de corpo, e vai-se verificar que todos os corpos são modelos da geometria de absoluta de Hilbert.

O sistema de axiomas de Hilbert para esta geometria é baseado em noções primitivas de "*ponto*", "*recta*", "*plano*", "*entre*" e congruência, apenas sujeitos aos axiomas de incidência, ordem e congruência, como nos capítulos 3 e 7 se mostrou. O que aqui se vai fazer é dar novas interpretações a esses termos primitivos, e verificar que os axiomas são verdadeiros nessas interpretações.

9.2.1 A estrutura de corpo e a relação de incidência

Recorde-se que um corpo é um conjunto K munido de duas operações internas, $+$ e $\cdot$, que verificam os seguintes axiomas:

1) $(K, +)$ é um grupo comutativo, isto é, para $a, b, c \in K$, tem-se
(i) $(a + b) + c = a + (b + c)$
(ii) $a + b = b + a$
(iii) existe $0 \in K$ tal que, $\forall a \in K, 0 + a = a + 0 = a$
(iv) $\forall a \in K, \exists(-a) \in K : a + (-a) = 0$

2) $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ é um grupo comutativo[1], isto é,
(i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(ii) $a \cdot b = b \cdot a$
(iii) existe $1 \in K$ tal que,$\forall a \in K, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
(iv) $\forall a \in K, \exists a^{-1} \in K : a \cdot (a^{-1}) = 1$

Tem-se então a

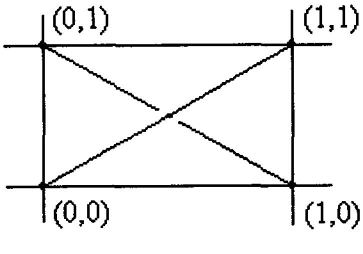
Definição 9.1 (plano cartesiano, ponto) *Chama-se plano cartesiano sobre o corpo K, π_K, ao conjunto K^2 de pares de elementos de K, chamados pontos de π_K.*

Definição 9.2 (recta) *Uma recta r de π_K é um subconjunto de π_K definido por:*

$$r = \{(x, y) \in \pi_K : ax + by + c = 0\}$$

para $a, b, c \in K$ e a, b não simultaneamente nulos.

Exemplo 9.1 *Seja $K_1 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$ onde $+$ e $\cdot$ são operações módulo 2. π_K é um plano com 4 pontos e 6 rectas:*



Definição 9.3 (declive de uma recta) *Dada a recta r definida pela equação $ax + by + c = 0, b \neq 0$, chama-se declive de r ao número $K \ni m = -\frac{a}{b}$.*

Teorema 9.1 (Descartes) *Sejam dados os pontos $P_1 = (a_1, b_1), ..., P_n = (a_n, b_n)$ no plano cartesiano $\pi_{\mathbb{R}}$, incluindo os pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Então é possível construir um ponto $Q = (\alpha, \beta)$ com régua e compasso sse α e β podem ser obtidos a partir de $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ através das operações do corpo $\mathbb{R}, +, -, \times, \div$ e a solução de um número finito de equações lineares e quadráticas, envolvendo raizes quadradas de números reais positivos.*

[1] Utiliza-se a linguagem anglo-saxónica, segundo a qual, não havendo mais explicitações, o termo "corpo" significa "corpo comutativo".

Dem. in *La Géométrie.*■

Teorema 9.2 (Hilbert) *Sendo K um corpo qualquer, o plano cartesiano π_K satisfaz os axiomas de incidência de Hilbert, I1,I2 e I3.*

Dem. Para o caso de rectas verticais a demonstração é imediata. Para o outro caso, tem-se:

I1. Como as operações $+, -, \times$ e $\div$ são sempre possíveis em K, a equação que define a recta que passa por dois pontos $P_1(a_1, b_1)$ e $P_2(a_2, b_2)$,

$$y - b_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1)$$

é sempre possível, e a sua solução é única.

I2. De facto, para o corpo minimal $K_1 = \{0, 1\}$, as seis rectas possíveis têm todas dois pontos. Para $K \supset K_1$, há, por maioria de razão, mais pontos em cada recta.

I3. No corpo K_1, as rectas definidas pelos pontos $(0,0), (0,1)$ e $(1,0)$, não têm o mesmo declive, logo, existem 3 pontos não colineares.■

Proposição 9.1 (mudança de coordenadas) *Sejam dadas no plano cartesiano π_K duas rectas $r \equiv x' = ax + by + c$ e $s \equiv y' = dx + ey + f$, que se intersectam num ponto A. Então é possível fazer uma mudança linear de variáveis*

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

tal que os novos eixos coordenados são r e s, e os novos pontos unitários são os pontos P, Q sobre eles, $P, Q \neq A$.

Dem. (Hilbert) Como a composição de mudanças lineares de variável é ainda uma mudança linear de variáveis, faça-se, em primeiro lugar uma mudança da forma

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

que deslocará a origem $(0,0)$ para o ponto $A = (a, b)$. A seguir uma transformação da forma

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

deslocará os pontos unitários para outros quaisquer nesses mesmos eixos. Então uma mudança da forma

$$\begin{cases} x' = x - ay \\ y' = y \end{cases}$$

manterá o eixo xx' invariante, mas substitui o eixo yy' por outra recta que passa pela origem. O eixo xx' pode ser movido por meio de outra transformação semelhante, trocando os papeis de x e y. Combinando todas estas hipóteses tem-se uma transformação que muda os eixos originais e os respectivos pontos unitários para outros eixos e outras unidades desejados.■

Definição 9.4 (paralelismo) *Num plano π_K duas rectas r e s dizem-se paralelas ($r \parallel s$) se $r = s$ ou se $r \cap s = \emptyset$.*

Proposição 9.2 *No plano π_K existe uma configuração de quatro pontos A, B, C, D tais que*

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}; \quad \overline{AC} \parallel \overline{BD}; \quad \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

se e só se K tem característica 2.

Dem. Como todo o corpo de característica 2 inclui o subcorpo K_1, a existência está provada.

Para a recíproca, suponha-se que num plano π_K existe uma configuração como a da hipótese. Então faça-se uma mudança de linear coordenadas tal que C passa a ser a nova origem, e A e D os pontos unitários. Então B será o ponto $(1,1)$; $\overleftrightarrow{BC}$ será a recta $x = y$, e $\overleftrightarrow{AD}$ a recta $x + y = 1$ não têm nenhuma solução comum. De facto, a resolução dá $2x = 1$, que tem solução para $2 \neq 0$. portanto a configuração existe quando e só quando $2 = 0$, isto é a característica de K é 2.■[2]

Teorema 9.3 (Papo-Pascal) *Seja K um corpo. No plano cartesiano π_K, sejam dadas as rectas l, m e os pontos $A, B, C \in l$ e $A', B', C' \in m$ tais que $\overline{AC'} \parallel \overline{A'C}$ e $\overline{BC'} \parallel \overline{B'C}$. Então também $\overline{AB'} \parallel \overline{A'B}$.*

Dem. (Para l não paralela a m) Suponha-se que l, m se intersectam num ponto O. Escolham-se coordenadas tais que O é a origem, e A, B' os pontos unitários. Seja C o ponto $(0, a)$ e C' o ponto $(b, 0)$. Então, escrevendo as equações das rectas envolvidas, tem-se que $B = (0, ab)$ e $A' = (ab, 0)$. Como K é comutativo, $ab = ba$, e a recta $\overline{BA'}$ tem declive -1, pelo que é paralela a $\overline{AB'}$.■

Nota 9.1 *Na demonstração recorreu-se, de forma essêncial, à comutatividade de K. O teorema de Papo-Pascal só é válido para corpos comutativos, como já se tinha observado no capítulo 3.*

Teorema 9.4 (Desargues) *Seja num plano cartesiano π_K os pontos A, B, C e A', B', C' tais que $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ então $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$.*

Dem. Vide Hilbert, *Fundamentos da Geometria.*■

9.2.2 A estrutura de corpo ordenado e a relação "situado entre"

Comece-se por recordar alguns resultados em relação a corpos ordenados:

Definição 9.5 (corpo ordenado) *Um corpo ordenado K é um par (K, P) onde K é um corpo e $\emptyset \neq P \subset K$, dito o subconjunto dos elementos positivos de K, tal que*

(i) $a, b \in P \Rightarrow a + b, ab \in P$

(ii) Para todo $a \in K$, tem-se uma e uma só das seguintes condições

$$a \in P; \quad a = 0; \quad -a \in P.$$

[2] Repare-se que a configuração referida não é "planar" no sentido euclidiano, o que é claramente denunciado pela característica de K. Corpos com característica não nula denunciam propriedades estranhas à (à intuição euclidiana) das geometrias correspondentes.

Proposição 9.3 *Seja (K, P) um corpo ordenado. Então:*

(a) $1 \in P$

(b) K tem característica nula

(c) O menor subcorpo de K que inclui 1 é isomorfo ao corpo dos números racionais, $\mathbb{Q}$;

(d) $\forall a \in K\backslash\{0\}, a^2 \in P$

Dem. (a) Por definição de corpo, $1 \neq 0$. Assim tem-se $1 \in P$ ou $-1 \in P$ (axioma (ii) da definição 9.5). Se $1 \in P$ não há nada a provar. Se $-1 \in P$, então $(-1)(-1) = 1 \in P$ (ax. (i)), o que contradiz (ii). Portanto $1 \in P$.

(b) Como $1 \in P$, por (i) tem-se que $s = \sum_{i=1}^{n} i \in P$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Logo $s \neq 0$, pelo que K tem característica nula.

(c) A aplicação natural

$$\mathbb{N} \to K; \quad n \mapsto s$$

é injectiva por (b), e é extensível a uma aplicação injectiva $\mathbb{Q} \to K$, cuja imagem é: (1) isomorfa a $\mathbb{Q}$; e (2) o menor subcorpo de K que inclui 1.

(d) Se $a \neq 0$, então, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. Se $a \in P$, então $a^2 \in P$, por (i). Se $-a \in P$, então $(-a)(-a) = a^2 \in P$.■

Seja (K, P) um corpo ordenado, $a, b \in K$. Define-se

$$\begin{aligned} a &< b \Leftrightarrow b - a \in P \\ a &\leq b \Leftrightarrow b - a \in P \vee a = b \\ a &> b \Leftrightarrow a - b \in P; \end{aligned}$$

donde $a > 0 \Leftrightarrow a \in P$.

Proposição 9.4 *Num corpo ordenado (K, P) a relação " $>$" verifica as seguintes propriedades:*

(i) Se $a > b$, e $c \in K$, então $a + c > b + c$ (compatibilidade com a adição)

(ii) Se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$ (transitividade)

(iii) Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$ (compatibilidade com a multiplicação)

(iv) Dados $a, b \in K$, tem lugar uma e uma só das seguintes condições:

$$a > b; \quad a = b; \quad a < b$$

(tricotomia).■

Proposição 9.5 (Hilbert) *Se K é um corpo, e existe uma relação de "situado entre" no plano cartesiano π_K, que satisfaz os axiomas II1-II4 de Hilbert, então K é um corpo ordenável. Reciprocamente, se (K, P) é um corpo ordenado, pode-se estabelecer em π_K uma relação de "situado entre" tal que sejam satisfeitos os axiomas II1-II4 de Hilbert.*

Dem. Suponha-se, em primeiro lugar que K é um corpo, e que existe uma relação "situado entre" no plano π_K que satisfaz os axiomas de Hilbert II1-II4. Defina-se o conjunto P de K como o conjunto de todos os $a \in K\backslash\{0\}$, tais que o ponto $(a, 0)$ do eixo xx' está no mesmo lado que 0 ou 1. Como a adição no corpo corresponde a dispôr segmentos consecutivamente no eixo dos xx', é claro que $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$.

Para a multiplicação, dados $a, b \in P$, ponha-se a no eixo xx', $1, b$ no eixo yy', e desenhe-se a recta $(0,1)$ a $(a,0)$, e desenhe-se a recta paralela a esta e que passa por $(0,b)$. Esta intersectará o eixo xx' no ponto $(ab, 0)$. Claramente, $1, a, b \in P$ (consequência de II1-II4), pelo que P satisfaz a primeira definição de um corpo ordenado. Por construção, K é a união disjunta de $P \sqcup \{0\} \sqcup -P$ é um corpo ordenado.

Reciprocamente, suponha-se que (K, P) é um corpo ordenado dado. Defina-se a relação "situado entre" para pontos duma recta, da seguinte maneira: sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ três pontos distintos na recta $y = mx + b$. Diz-se que B está entre A e C, e nota-se (como anteriormente) $A - B - C$, se ou $a_1 < b_1 < c_1$ ou $a_1 > b_1 > c_1$. Se a recta for vertical, usam-se as segundas coordenadas, da mesma forma. Tem-se então os axiomas II1-II-4:

II1. Consequência imediata da definição;

II2. Deriva do facto correspondente, verdadeiro em todos os corpos ordenados, de que dado $b > d \in K$ existem $a, c, e \in K$ tais que $a < b < c < d < e$. Com efeito, pode-se sempre tomar, por exemplo, $a = b - 1$, $C = \frac{1}{2}(B + D)$, e $c = d + 1$. Note-se que como K tem característica nula, pela proposição 9.3, $\frac{1}{2} \in K$.

II3. Deriva do facto de que num corpo ordenado K, se a, b, c são três elementos distintos, então tem lugar uma e uma só das seguintes $6 = 3!$ condições :

$$\begin{aligned} a &< b < c; \\ a &< c < b; \\ b &< a < c; \\ b &< c < a; \\ c &< b < a; \\ c &< a < b. \end{aligned}$$

II4. Suponha-se que é dado um triângulo $\triangle ABC$ e uma recta l que intersecta o lado $\overline{AB}$. Supondo que $A, B, C \notin l$, tem-se que mostrar que l também intersecta ou $\overline{AC}$ ou $\overline{BC}$, mas não ambos. Em primeiro lugar suponha-se que a recta l é vertical, com equação, digamos, $x = d$. Sejam a, b, c,as abcissas de A, B, C respectivamente. Por hipótese, ou $a < d < b$ ou $b < d > a$. Por simetria, assuma-se que $a < d < b$. Então é claro que se $c < d$, então l cortará $\overline{AC}$ e não $\overline{BC}$, como requerido. Se l não é vertical, faz-se uma mudança de coordenadas tal que l se torne vertical, o que não afecta a relação "situado entre" , pelo que se encontra de novo no caso anterior.■

9.2.3 Relações de congruência

A seguir vai-se definir a congruência para segmentos de recta e para ângulos. Vai-se assumir doravante que se está num corpo (K, P) tal que se tem a relação "estar entre" definida como acima. Então tem-se a

Definição 9.6 (segmento de recta) *Dada uma recta r, um segmento de recta $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos de r que estão entre A e B, mais os pontos A e B, ditos extremos de $\overline{AB}$:*

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X : A - X - B\}.$$

Como não está garantida a existência de raízes quadradas, vai-se definir a noção de distância entre dois pontos, da seguinte maneira:

Definição 9.7 (distância entre dois pontos) *Num plano π_K, define-se a distância entre $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, como a função d que satisfaz à igualdade*

$$d^2(A, B) = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2,$$

onde $d^2(\cdot, \cdot) = d(\cdot, \cdot) \times d(\cdot, \cdot)$.

Pode-se então definir a noção de congruência:

Definição 9.8 (congruência de segmentos) *Num plano π_K dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes se*

$$d^2(A, B) = d^2(C, D),$$

e nesse caso escreve-se

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD}.$$

Com vista à definição de congruência entre ângulos, tem-se as seguintes definições:

Definição 9.9 (semirecta) *Uma semirecta é um subconjunto de uma recta determinado por um ponto A e todos os pontos de r que estão de um dos lados de A. Nesse caso diz-se que a semirecta tem origem em A, ou que emana de A.*

Se B é um ponto duma semirecta que emana de A, nota-se essa semirecta, como anteriormente, por "$\overrightarrow{AB}$".

Definição 9.10 (ângulo) *Um ângulo geométrico é a união de duas semirectas que emanam do mesmo ponto e não estão ambas contidas na mesma recta.*

Definição 9.11 (interior de um ângulo) *O interior de um ângulo α de lados rr' e ss' é o conjunto dos pontos do plano que estão do mesmo lado (definição7.3) de r que s' e do mesmo lado de s que r'.*

Definição 9.12 (ângulos recto, agudo, obtuso) *Diz-se que um ângulo é recto se os declives das rectas a que pertencem os seus lados satisfazem*

$$mm' = -1.$$

Um ângulo é agudo se estiver contido no interior de um ângulo recto.

Um ângulo diz-se obtuso se contiver um ângulo recto no seu interior.

Definição 9.13 (tangente de um ângulo) *Seja α o ângulo formado pelas semirectas r e r', que pertencem a rectas de declives m e m' respectivamente. Define-se tangente de α como sendo*

$$\tan \alpha = \pm \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|,$$

onde se toma o sinal $+$ se α é agudo e o sinal $-$ se α é obtuso.

Note-se que $\tan\alpha$ só está definida para α recto em $K \cup \{\infty\}$.

Definição 9.14 (congruência de ângulos) *No plano cartesiano π_K dois ângulos α e β são congruentes se*

$$\tan\alpha = \tan\beta,$$

onde $\tan\alpha, \tan\beta \in K \cup \{\infty\}$, *e nota-se* $\alpha \equiv \beta$.

Definição 9.15 (corpo pitagórico) *Um corpo K é dito pitagórico se $\forall a \in K, \sqrt{1+a^2}$ $\in K$.*

Definição 9.16 (plano pitagórico) *Seja K um corpo pitagórico. Então π_K é dito um plano cartesiano pitagórico, ou simplesmente um plano pitagórico.*

Proposição 9.6 *Seja K um corpo ordenado, e π_K o plano cartesiano correspondente. Então π_K satisfaz os axiomas III2-III5. Para além disso, III1 é válido se e somente se K for um corpo pitagórico.*

Dem. A condição III2 é a transitividade da congruência de segmentos, o que decorre imediatamente da definição usando a função d^2 definida acima. O axioma III3 é fácil de verificar. O axioma III4 é o axioma da transposição de ângulos. Suponha-se portanto que é dado um ângulo α e uma semirecta que emana de um ponto A, com declive m' tal que

$$\tan\alpha = \pm\left|\frac{m'-m}{1+mm'}\right|,$$

onde o sinal é afectado conforme for α agudo ou obtuso. Tem-se equações lineares em m'. Tem-se

$$m' = \frac{m \pm \tan\alpha}{1 \mp m\tan\alpha}.$$

Estas duas soluções dão ângulos em ambos os lados da recta dada que passa por A, de modo a se poder construir o novo ângulo α' no lado desejado da recta.

III5 é a transitividade de congruência de ângulos, que é imediata a partir da definição de congruência usando a função tangente.

Considere-se agora o axioma III1 sobre o traçado de segmentos. Não é verdadeiro num corpo arbitrário — por exemplo, no corpo $\mathbb{Q}$, não se pode traçar o segmento que une os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ no eixo xx', porque o seu comprimento é $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Sobre um corpo qualquer K, $a \in K$, considere-se o segmento definido por $(0,0)$ e $(a,1)$. Então existirá um segmento congruente com esse, sobre o eixo xx' com origem em 0, se e só se existe $b \in K$ tal que

$$d^2((0,0),(a,1)) = d^2((0,0),(b,0)),$$

isto é, $1+a^2 = b^2$. Portanto é preciso que $b \in K$ seja a raiz quadrada de $1+a^2$. Ou, por outras palavras, K deve ser pitagórico.

Reciprocamente, seja K pitagórico, isto é, para todo $c \in K$, $\sqrt{1+c^2} \in K$. Então para quaisquer $a, b \in K$, $a \neq 0$, tem-se

$$a^2 + b^2 = a^2 \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right).$$

Fazendo $c = \frac{b}{a}$ tem-se que

$$\sqrt{a^2+b^2} = |a| \sqrt{1+c^2}$$

pertence a K. Daqui se conclui que para todo o par de pontos $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2) \in \pi_K$, a distância entre A e B pertence a K, pelo que, nesse caso, se pode definir a função distância

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a^2 - b^2)^2}$$

que é um elemento de K.

Seponha-se agora que é dada uma recta $y = mx + b$ e um ponto A sobre ela. Suponha-se que se quer traçar um segmento de comprimento d. Pode-se escrever $A = (a, ma + b)$, e procurar um ponto $C = (c, mc + b)$ na mesma recta tal que

$$d(A, C) = d,$$

isto é

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-c)^2 + (ma + b - (mc + b))^2} &= d \Leftrightarrow \\ |a - c| \sqrt{1 + m^2} &= d. \end{aligned}$$

Como K é pitagórico, $\sqrt{1+m^2} \in K$, pelo que a equação em c é sempre possível, tendo duas soluções, uma para cada direcção.■

9.2.4 Intersecções

Pretende-se a seguir estudar a a intersecção de rectas e circunferências no plano cartesiano. Começe-se pelas seguintes definições:

Definição 9.17 (corpo euclidiano) *K é um corpo euclidiano se*

$$\forall a \in K, a > 0 \Rightarrow \sqrt{a} \in K.$$

Definição 9.18 (plano euclidiano) *Seja K um corpo euclidiano. Então π_K é dito um plano cartesiano euclidiano, ou simplesmente um plano euclidiano.*

Proposição 9.7 *Seja π_K um plano cartesiano sobre um corpo ordenado K. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) dadas duas circunferências C_1 e C_2 em π_K, se C_1 tem um ponto no interior de C_2 e C_2 tem um ponto no exterior de C_1, então C_1 e C_2 intersectam-se (em exactamente 2 pontos);

(ii) dada uma circunferência C e uma recta r em π_K, e r contém um ponto do interior de C, então r intersecta C (em exactamente 2 pontos).

(iii) K é um corpo euclidiano

Dem. $(i) \Rightarrow (ii)$. Seja $f = 0$ a equação de uma circunferência e $g = 0$ a equação de uma recta. Então $f + g = 0$ é outra circunferência, cujas intersecções com a primeira circunferência são as mesmas que as da primeira circunferência com a recta. Então $(i) \Rightarrow (ii)$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Agora vai-se supor que se tem a propriedade de intersecção de rectas e circunferências e vai-se provar que K é Euclidiano. Com efeito, dado $a \in K$, $a > 0$, sejam os pontos $O = (0,0)$, $A = (a,0)$, e $A' = (a+1,0)$. Seja Γ a circunferência de centro em $(\frac{1}{2}(a+1), 0)$ e raio $\frac{1}{2}(a+1)$. Considere-se a recta vertical l que passa pelo ponto A. Evidentemente A está no interior da circunferência, portanto, pela propriedade de intersecção de rectas e circunferências, arecta l intersecta Γ num ponto B. Resolvendo as equações tem-se que $B = (a, \sqrt{a})$, portanto $\sqrt{a} \in K$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Agora vai-se supôr a existência de raízes quadradas de elementos positivos de K e vai-se provar a propriedade de intersecção de circunferências. Se Γ, Γ' são circunferências de π_K, as suas equações podem-se escrever

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ (x-c)^2 + (y-d)^2 &= s^2 \end{aligned}$$

onde (a,b) e (c,d) são os centros e r, s são os raios das circunferências dadas, e que pertencem a K por se tratar de um corpo euclidiano. Como os coeficientes de x^2 e y^2 nas duas equações é 1, pode-se subtrair uma equação da outra para transformá-la numa equação linear. Resolvendo esta equação simultaneamente com uma das quadráticas à escolha, usando apenas raízes quadradas, os pontos de intersecção têm coordenadas em K, pelo que pertencem ao plano π_K. Falta apenas provar que, se Γ e Γ' satisfazem a proposição de intersecção de circunferências, então as raizes quadradas de que se necessita são raizes quadradas de elementos positivos de K, que existem por K ser euclidiano.■

Proposição 9.8 (Hilbert) *Seja Ω o corpo de todos os números reais que podem ser expressos usando um número finito de operações $+, -, \times, \div$, e $c \mapsto \sqrt{1+c^2}$. Então Ω é um corpo ordenado pitagórico.*

Dem. Sejam $a, b \in \Omega$. Então a, b podem ser expressos através de uma cadeia finita de numeros racionais e as operações acima indicadas. O mesmo se aplica a $a \pm b, ab, a/b (b \neq 0)$. Se $c \in \Omega$, c pode ser expresso pelas mesmas cadeias, e portanto o mesmo acontece com $\sqrt{1+c^2}$, pelo que $\sqrt{1+c^2} \in \Omega$. Portanto Ω é pitagórico, e é um corpo ordenado por ser subcorpo de $\mathbb{R}$: pode-se tomar como o conjunto P dos positivos de Ω, o conjunto dos elementos de Ω que são positivos enquanto elementos do corpo ordenado $\mathbb{R}$.■

Definição 9.19 (corpo de Hilbert) *O corpo Ω caracterizado na proposição 9.8 chama-se corpo de Hilbert.*

O corpo Ω de Hilbert é o menor corpo que verifica os axiomas de incidência, ordem e congruência de Hilbert e o plano π_Ω a menor geometria absoluta plana.

Definição 9.20 (plano hilbertiano) *Sendo Ω o corpo de Hilbert, π_Ω é dito plano cartesiano hilbertiano, ou simplesmente plano hilbertiano.*

Proposição 9.9 *Seja $\mathbb{K}$ o conjunto de todos os números obtidos a partir dos números racionais através de um número finito de operações $+, -, \times, \pm$, e para $a > 0$, $a \mapsto \sqrt{a}$. Então $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado euclidiano.*

Dem. Idêntica à de 9.8.■

9.3 Transformações no plano cartesiano

Para completar a demonstração de que todos os axiomas de Hilbert são válidos num plano cartesiano sobre um corpo ordenado, vai-se nesta secção mostrar que o axioma III6 de Hilbert — o critério LAL — é também válido em tais geometrias. Por postular a existância de movimentos sem deformação (movimentos rígidos ou isometrias), o referido axioma é necessário para garantir a homogeneidade do plano cartesiano.

Definição 9.21 (movimento rígido ou isometria) *Se π é uma geometria que consiste de noções primitivas de ponto, recta, entre e congruência de segmentos e de ângulos, que podem satisfazer ou não todos os axiomas de Hilbert, um movimento rígido ou isometria em π é uma aplicação $\varphi : \pi \to \pi$ tal que*
(1) φ é uma aplicação bijectiva;
(2) φ transforma rectas em rectas;
(3) φ preserva a relação "entre" entre pontos da mesma recta;
(4) $\forall A, B \in \pi, \overline{AB} \equiv \overline{\varphi(A)\varphi(B)}$;
(5) $\forall \angle\alpha \in \pi, \alpha \equiv \varphi(\alpha)$.

Isto é, φ é preserva a estrutura determinada pelas noções primitivas (termos e relações) em π.

Em consequência imediata da definição tem-se a

Proposição 9.10 *O conjunto dos movimentos rígidos de π é um grupo (para a operação de composição), e é notado por $\mathcal{G}_\pi$ (ou apenas $\mathcal{G}$).*

Dem. Se $A \in \pi$, por definição, $\varphi(\psi(A)) = \varphi\psi(A) \in \pi$. A aplicação identidade ι é um movimento rígido em π. Todos os movimentos são inversíveis.■

Para se garantir a existência de movimentos rígidos, para além da identidade, tem-se o

Axioma 9.1 (existência de movimentos rígidos (EMR)) *(1) Quaisquer que sejam os pontos $A, A' \in \pi$, existe $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(A) = A'$*

(2) Quaisquer que sejam $O, A, A' \in \pi$, A, A' distintos de O, existe $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(O) = O$ e φ transforma a semirecta $\overrightarrow{OA}$ na semirecta $\overrightarrow{OA'}$.

(3) Para qualquer recta $l \in \pi$, existe $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(P) = P$, $\forall P \in l$ e φ permuta os lados de l.

Proposição 9.11 *Num plano que satisfaz os axiomas de incidência e ordem, e ainda $III2$, $III5$ e as partes de existência de $III1$ e $III4$, $(emr) \Rightarrow III6$ (LAL).*

Dem. Suponha-se verificado o axioma (emr) e vai-se provar (LAL) através do método de Euclides. Suponha-se portanto que são dados dois triângulos, ΔABC e $\Delta A'B'C'$, e que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Então é preciso demonstrar que $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e que os ângulos em B, C são congruentes com os ângulos em B',C', respectivamente. Por $(EMR)(1)$, existe um mr, φ tal que $\varphi(A) = A'$. Seja $B'' = \varphi(B)$. Então $\overline{AB} \equiv \overline{A'B''}$, já que φ é um mr e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ por hipótese, portanto $\overline{A'B'} \equiv \overline{A'B''}$ por III2.

Por outro lado, por (EMR), existe um mr ψ que deixa A' invariante e tal que

$$\psi(\overrightarrow{A'B''}) = \overrightarrow{A'B'}.$$

Como $\overline{A'B''} \equiv \overline{A'B'}$, e ψ preserva congruências, conclui-se da parte de unicidade de III1 que $\psi(B'') = B'$. Seja $C''' = \psi\varphi(C)$. Então considere-se a recta $l = \overline{A'B'}$, e as duas semirectas $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{A'C''}$. Se estão do mesmo lado de l, não há nada a fazer; mas se estão em lados opostos, então por (EMR) (3) existe um movimento rígido, σ que deixa os pontos de l fixos e permuta os lados. Note-se com $\theta \in G$ a composição $\psi\varphi$, ou com $\sigma\psi\varphi$ se se usar σ. Então θ tem as seguintes propriedades:

$$\theta(A) = A'; \quad \theta(B) = B'; \quad \theta(C) = C'''$$

estando C''' no mesmo lado de $\overline{A'B'}$ que C'. Como θ é um movimento rígido

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C''.$$

Mas também, por hipótese $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, portanto, por III5,

$$\angle B'A'C' \equiv \angle B'A'C''.$$

Ademais, C' e C''' estão no mesmo lado de $\overline{A'B'}$. Portanto, pela unicidade em III4, conclui-se que as semirectas $\overrightarrow{A'C''}$ e $\overrightarrow{A'C'''}$ são iguais. Como por hipótese $\overline{A'C'} \equiv \overline{AC}$, e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, como θ é um movimento rígido, então, por II2 tem-se que $\overline{A'C'} \equiv \overline{A'C'''}$. Ademais C' e C''' estão no mesmo lado de A'. Portanto, pela unicidade em III1, conclui-se que $C' = C'''$. Portanto $\theta(B) = B'$ e $\theta(C) = C'$. Como θ é um movimento rígido, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ como se pretendia. Da mesma maneira, para os ângulos, $\theta(\angle ABC) = \angle A'B'C'$. Portanto, sendo θ um movimento rígido, conclui-se que

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

O mesmo método mostra que

$$\angle ACB \equiv \angle A'B'C',$$

o que acaba a demonstração.■

Proposição 9.12 *Seja K um corpo pitagórico, e seja π_K o plano cartesiano associado. Então π_K verifica (EMR).*

Dem. Considere-se que π_K tem coordenadas (x, y). Vão-se considerar certas transformações de π_K definidas por funções de x e y, e vai-se mostrar que se trata de movimentos rígidos, e a seguir vai-se chegar à conclusão de que existem em número suficiente para provar (EMR). Em primeiro lugar, considere-se um ponto $A = (a, b)$ e a translação τ dada por

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Claramente, τ é uma aplicação bijectiva, possuindo portanto aplicação inversa

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b. \end{cases}$$

Uma recta $y = mx + k$ é transformada na equação

$$y' - b = m(x' - a) + k.$$

Em particular, a sua imagem é uma recta, pelo que τ transforma rectas em rectas. A seguir, note-se que o declive da nova recta é o mesmo que o da velha, pelo que τ preserva ângulos. É evidente que τ conserva a relação "*estar entre*", porque esta relação se reduz a questões de desigualdades no corpo K, o que não se altera por adição de constantes.

Finalmente é necessário verificar que τ preserva a função d^2. Mas isso é óbvio, visto que adiciona-se a mesma constante às coordenadas dos pontos A, B, pelo que no cálculo de d^2 obtém-se o mesmo valor. Portanto a aplicação τ é um movimento rígido. Dados dois pontos B, C pode-se tomar a, b como a diferença das suas coordenadas x e y, portanto $\tau(B) = C$, e fica satisfeita a condição (1) de (EMR).

Para provar a condição (2) de (EMR) vão-se considerar rotações. Uma rotação do plano π_K é uma transformação ρ definida pelo sistema

$$\begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy, \end{cases}$$

onde $c, s \in K$ e $c^2 + s^2 = 1$. A transformação inversa é dada por

$$\begin{cases} x = cx' + sy' \\ y = -sx' + cy'. \end{cases}$$

Portanto, ρ é uma aplicação bijectiva. Sendo linear, ρ transforma rectas em rectas, e um breve cálculo mostra que uma recta com declive m é transformada numa nova recta com declive

$$m' = \frac{cm + s}{c - sm}.$$

Como as transformações lineares preservam ou invertem desigualdades, ρ preserva a relação "situado entre".

Mostra-se, a seguir que ρ preserva ângulos. Dadas duas rectas de declives m_1 e m_2, sejam m_1' e m_2' os novos declives. Como a congruência de ângulos é determinada pelas suas tangentes, será suficiente mostrar que

$$\frac{m_1' - m_2'}{1 + m_1'm_2'} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}.$$

Finalmente , vai-se ver o que é que acontece com a função distância. Sejam A e B dois pontos. Então, um cálculo elementar mostra que

$$d(\rho(A), \rho(B)) = d(A, B).$$

Portanto ρ é um mr.

Pode-se agora verificar a condição (2) de (emr). Dados três pontos O, A, A', é preciso mostrar que existe um mr que deixa O fixo e transforma a semirecta $\overrightarrow{OA}$ na semirecta $\overrightarrow{OA'}$. Usando uma translação, pode-se converter ao caso O =origem. Sejam $y = mx$ e $y' = mx'$

as rectas que contém A e A'. Toda a rotação deixa O fixo, pelo que para transformar a primeira recta na segunda, só se tem que encontrar $c, s \in K$, com $c^2 + s^2 = 1$ tais que

$$m' = \frac{cm + s}{c - sm}$$

de acordo com a fórmula acima. Resolvendo em ordem a s tem-se

$$s = \frac{m' - m}{1 + mm'}c.$$

Seja

$$k = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

Então pode-se resolver $s = kc$ e $s^2 + c^2 = 1$ para $c = \pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, usando a propriedade pitagórica de K. Portanto tem-se duas rotações que enviam a primeira recta na segunda, diferindo pela rotação $x' = -x$, $y' = -y$. Uma destas rotações enviará a semirecta $\overrightarrow{OA}$ na semirecta $\overrightarrow{OA'}$ como se queria.

Para completar a demonstração de (emr), falta verificar a condição (3), segundo a qual para toda a recta l, existe um mr (dito reflexão) que deixa l fixo ponto por ponto, e que troca os dois lados de l. Usando uma translação de um ponto de l à origem O, pode-se assumir que $O \in l$. Seja A qualquer outro ponto de l, e seja ρ uma rotação que envia o eixo positivo na semi-rescta $\overrightarrow{OA}$. Seja σ a reflexão no eixo xx' definida por

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Claramente trata-se de um mr que deixa o eixo xx' invariante ponto por ponto e troca os dois lados. Portanto $\varphi = \rho\sigma\rho^{-1}$ é a reflexão procurada na recta l.■

Proposição 9.13 *Se K é um corpo pitagórico qualquer, então o plano cartesiano π_K sobre K é um plano de Hilbert que satisfaz o axioma das paralelas de Hilbert, V.*

Dem. Na proposição 9.2 tinha-se verificado que os axiomas de incidência I1-I3, na 9.5 os axiomas de ordem II1-II4 e na 9.6 os axiomas de congruência. Na proposição anterior, provou-se que (EMR) é válida em π_K, pelo que, III6 é também válida. Para que o plano seja euclideano, é necessário e suficiente que o corpo K seja euclidiano.■

Pode-se agora demonstrar que num plano euclidiano existem movimentos rígidos "em número suficiente" para garantir a congruência de segmentos e ângulos através do método euclidiano de sobreposição.

Proposição 9.14 *Num plano de Hilbert qualquer é válido o axioma (EMR).*

Dem. Em primeiro lugar vai-se mostrar a existência de simetrias axiais (reflexões), e outros movimentos rígidos serão feitos a partir destes.

Seja dada uma recta l. Vai-se construir um movimento rígido movimento rígido σ, chamado simetria de eixo l ou reflexão em l, que deixa os pontos de l invariantes e troca os dois lados de l. Para qualquer ponto $P \in l$, define-se $\sigma(P) = P$, e para pontos $A \notin l$, traça-se a perpendicular $\overleftrightarrow{AA_0}$ a l, e faz-se a sua extensão até ao outro lado de l, tal que

$\overleftrightarrow{AA_0} \equiv \overleftrightarrow{A_0A'}$. Então põe-se $\sigma(A) = A'$. Claramente $\sigma^2 = id$, pelo que σ é uma aplicação bijectiva.

Sejam A, B dois pontos quaisquer não em l. Vai-se agora mostrar que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, onde $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$. Se A e B pertencem à mesma recta perpendicular a l, é imediato, subtraindo os segmentos congruentes. Se A, B estão em perpendiculares diferentes, sejam A_0, B_0 os pés dessas perpendiculares. Então usando os ângulos rectos em A_0, pelo critério LAL

$$\Delta A_0AB_0 \equiv \Delta A_0A'B_0.$$

Portanto,

$$\angle AB_0A_0 \equiv \angle A'B_0A_0.$$

Subtraindo a partir dos ângulos rectos em B_0, tem-se que

$$\angle AB_0B \equiv \angle A'B_0B'.$$

Por outro lado, $\overline{AB_0} \equiv \overline{A'B_0}$ a partir dos primeiros triângulos. Pode-se agora aplicar LAL de novo para concluir que

$$\Delta AB_0B \equiv \Delta A'B_0B'.$$

Em particular tem-se

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}.$$

Suponha-se agora que A, B, C, são três pontos não colineares cujas imagens por σ são respectivamente A', B', C'. Então por LLL conclui-se que

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C',$$

e, em particular,

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

Portanto σ preserva ângulos. Daqui se conclui facilmente que σ preserva rectas e a relação "*estar entre*" , pelo que de facto σ é um movimento rígido.

Para verificar que (EMR) é válido, estabeleceu-se a propriedade (3) para a existência de simetrias axiais. Sendo A, A' dois pontos , seja l a perpendicular da mediatriz do segmento $\overline{AA'}$. Então σ_l enviará A em A'. Portanto a condição (1) de (EMR) é verificada. Para a condição (2), sejam O, A, A' três pontos. Seja l a bissectriz do ângulo $\angle AOA'$. Então a simetria σ_l enviará a semirecta $\overrightarrow{OA}$ na semirecta $\overrightarrow{OA'}$ e deixará O invariante. Portanto (EMR) é verificado, como se queria demonstrar.■

Corolário 9.1 *Em presença de todos os axiomas dum plano hilbertiano, à excepção de III6, o axioma III6 é equivalente a (EMR).*

Dem. Basta combinar a proposição anterior com a proposição 9.11.■

9.4 Estrutura vectorial de π_K

Vejamos-se agora algumas noções relacionadas com a estrutura de espaço vectorial de π_K.

Definição 9.22 (produto por um escalar) *Num plano cartesino π_K define-se o seguinte produto entre $A(a_1, a_2)$ e um escalar $\lambda \in K$:*

$$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

Proposição 9.15 *Seja π_K um plano, dotado das operações de adição de pontos e multiplicação de um ponto por $x \in K$. Então*
(i) $(\pi_K, +)$ é um grupo abeliano
(ii) π_K é um espaço vectorial sobre K.■

Pode-se também definir em π_K um produto interno (canónico). Nesse caso tem-se

Definição 9.23 (produto interno canónico) *Num plano cartesino π_K define-se o seguinte produto entre $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$:*

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Proposição 9.16 $A \perp B \Leftrightarrow A \cdot B = 0$.■

Definição 9.24 (produto externo) *Num plano cartesino π_K define-se o seguinte produto entre $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, chamado produto externo:*

$$A \times B = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Tem demonstração imediata a seguinte

Proposição 9.17 *O produto externo $A \times B$ é a área orientada definida por A e B e tem-se*
i) $A \times B = -B \times A$
ii) $A \cdot B = B \cdot A$
iii) $A \times A = 0$
iv) $A \cdot (A \times B) = 0$
v) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
vi) $xA \cdot yB = xy(A \cdot B)$
vii) $xA \times yB = xy(A \times B)$
onde $x, y \in K$, e $A, B \in \pi_K$.■

9.5 Plano cartesiano hilbertiano não-arquimediano

Nesta secção vai-se, em primeiro lugar, ver a relação entre a continuidade no corpo base e a continuidade no plano da geometria. Em segundo lugar, vai-se, aplicando os axiomas veronesianos de continuidade, desenvolver a geometria analítica num plano cartesiano hilbertiano, como um modelo H-V de GNSA.

9.5.1 Relação entre a estrutura transarquimediana do corpo base e a da geometria

Proposição 9.18 *Seja (K, P) um corpo ordenado. O plano cartesiano π_K satisfaz o axioma IV1 ou o axioma IV2 se e só se o corpo K satisfaz as propriedades correspondentes para corpos, nomeadamente:*

(A) (axioma de Arquimedes para corpos): $\forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N}(n > a)$.

(D) (axioma de Dedekind para corpos): Suponha-se que $K = S \sqcup T$, e para todo o $a \in S$ e $b \in T$, se tem $a < b$. Então existe um único $c \in K$ tal que para todo o $a \in S$ e todo o $b \in T$, se tem $a < c \leq b$ ou $a \leq c < b$.

Dem. Para IV1, pode-se escolher coordenadas tais que o primeiro segmento $\overline{AB}$ seja o segmento unitário. Se C e D pertencentes à recta correspondem a elementos $c < d \in K$, então n cópias de $\overline{AB}$ excederão $\overline{CD}$ se e só se $n > d - c$.

Para IV2, escolham-se coordenadas tal que a recta em questão seja o eixo xx', e identifiquem-se os seus pontos com os elementos de K. Então as proposições são as mesmas.■

Proposição 9.19 *Seja K um corpo ordenado que satisfaz o axioma (A) de Arquimedes. Então existe um isomorfismo de ordem entre K e um subcorpo de $\mathbb{R}$. No caso em que, para além disso, K satisfaz o axioma (D) de Dedekind, esse subcorpo é igual a $\mathbb{R}$.*

Dem. Já se viu que K contém um subcorpo K_0 isomorfo a $\mathbb{Q}$. Isso fornece um único isomorfismo

$$\varphi_0 : K_0 \to \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Vai-se extender φ_0 a um isomorfismo de K em $\mathbb{R}$. Seja $\alpha \in K$. Em virtude do axioma de Arquimedes, existem em K inteiros maiores e menores que α. Portanto, seja a_0 o único inteiro n tal que $n \leq \alpha \leq n+1$. A seguir defina-se $a_1 \in \frac{1}{10}\mathbb{Z}$ como o único décimo de inteiro tal que $a_1 \leq \alpha < a_1 + \frac{1}{10}$. Similarmente, defina-se $a_2 \in \frac{1}{100}\mathbb{Z}$ tal que $a_2 \leq \alpha < a_2 + \frac{1}{100}$. Continuando o processo obtém-se a sequência

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$$

de números racionais com a propriedade

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha < a_n + 10^{-n}.$$

No caso do corpo dos números reais $\mathbb{R}$, estas convergem para um número real, notado $\varphi(\alpha)$. Fica definida uma aplicação

$$\varphi : K \to \mathbb{R}.$$

É fácil de ver que

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

e que

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta).$$

Portanto φ é um isomorfismo de corpos, que é necessariamente um isomorfismo sobre a sua imagem. Vê-se também que

$$\alpha < \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta),$$

pelo que φ é um isomorfismo de ordem de K sobre $\varphi(K) \subset \mathbb{R}$.

Assim a condição (D) em K é equivalente à condição (D) em $\varphi(K)$, já que esses dois corpos são ordenadamente isomorfos. Todo o número real r é caracterizado pelos conjuntos

$$\Sigma_1 = \{a \in \mathbb{R} : a \leq r\}$$

e

$$\Sigma_2 = \{a \in \mathbb{R} : a > r\},$$

portanto, claramente (D) é verificado em $\varphi(K)$ se e só se $\varphi(K) = \mathbb{R}$.■

Deste resultado tem-se que todo o subcorpo K de $\mathbb{R}$ torna-se num corpo ordenado se se tomar para $P \subset K$ os elementos de $\mathbb{R}^{+}$[3].

Doravante considerar-se-á sempre a existência de um isomorfismo φ entre um corpo ordenado K (arquimediano ou não) e cada uma das rectas de π_K.

A próxima definição introduz ordens de grandeza nos corpos não-arquimedianos:

Definição 9.25 (elementos *ip*, *ig*, *lm*, *ap*) *Seja K um corpo ordenado não-arquimediano. Diz-se que um elemento $a \in K$ é*

(i) Limitado (lm) se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n < a < n$;

(ii) Infinito (ig) se não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n < a < n$;

(iii) Infinitésimo (ip) se para todo o $n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$;

(iv) Apreciável (ap)se não for ig nem ip.

9.5.2 Geometria não-arquimediana

Sendo K um corpo não-arquimediano, através do isomorfismo $\varphi : K^2 \to \pi_K$, as ordens de grandeza de K são transferidas para π_K. Assim para $A(a_1, a_2) \in \pi_K$, a_1 e a_2 podem ter quaisquer ordens de grandeza, o que se reflecte na estrutura métrica de π_K. Tem-se a

Definição 9.26 (módulo de um ponto) *Seja $K = (K, P)$ um corpo ordenado não-arquimediano e π_K o plano cartesiano correspondente. Chama-se módulo ou norma de $A(a_1, a_2) \in \pi_K$ ao número $|A| \in K_0^+ = P \cup \{0\}$, que verifica a condição*

$$|A|^2 = d^2(A, O) = d^2((a_1, a_2), (0, 0)),$$

isto é,

$$|A|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

No que se segue vai-se continuar a utilizar a terminologia "ponto" em vez de "ponto-vector" ou de "vector"

[3] O estudo de corpos ordenados arquimedianos é equivalente ao estudo de subcorpos de $\mathbb{R}$.

Definição 9.27 (ordens de grandeza no plano cartesiano) *Seja K um corpo não-arquimediano e π_K o plano cartesiano correspondente. Um ponto $A \in \pi_K$ diz-se*
(i) ip se $|A|$ é ip
(ii) ig se $|A|$ é ig
(iii) lm se $|A|$ é lm
(iv) ap se $|A|$ é ap.

As propriedades reunidas na proposição seguinte, são evidentes:

Proposição 9.20 *$A(a_1, a_2) \in \pi_K$ é:*
i) ip se a_1, a_2 são ip;
ii) ig se $a_1 = ig \vee a_2 = ig$
iii) lm se a_1, a_2 não são simultaneamente ip nem nenhum deles é ig.
iv) ap se a_1, a_2 não são simultaneamente ip nem simultaneamente ig.■

Tem-se que

Proposição 9.21 *A aplicação $|\cdot| : \pi_K \to K_0^+$ em π_K goza das seguintes propriedades:*
(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow A = (0,0)$
(ii) $|A - B| \leq \max\{|A|, |B|\}$, $\forall A, B \in \pi_K$.■

Isto é, $|.|$ é uma ultramétrica em π_K.

Nota 9.2 *A condição (ii) implica a desigualdade triangular usual*

$$|A - B| \leq |A| + |B|$$

o que significa que (i) é uma desigualdade mais forte. Na realidade tem-se

$$|A - B| \leq \max\{|A|, |B|\} \leq |A| + |B|.$$

Proposição 9.22 *Para todo os elementos $A, B \in \pi_K$ com uma ultramétrica $|\cdot|$, tem-se*
(a) $|-B| = |B|$
(b) $|A + B| \leq \max\{|A|, |B|\}$,
(c) $|A + B| = \max\{|A|, |B|\}$ se $|A| \neq |B|$

Dem. Por 9.21 (*ii*) tem-se $|-B| \leq \max\{|O|, |B|\}$, portanto, $|-B| \leq |B|$. Do mesmo modo tem-se $|B| \leq |-B|$. Portanto tem-se a). Por a) e $|A - (-B)| \leq \max\{|A|, |-B|\}$ tem-se b). Para demonstrar c) pode-se supor $|A| < |B|$. Aplicando b) tem-se $|B| \leq \max\{|A + B|, |A|\} \leq \max\{|B|, |A|\}$. Como , por hipótese, $|A| < |B|$, tem-se $\max\{|B|, |A|\} = |B|$. Portanto, $|B| = \max\{|A + B|, |A|\}$. De $|A| < |B|$ deduz-se $|B| = |A + B|$, pelo que se tem c).■

Por indução, a partir de c) tem-se a

Proposição 9.23 (princípio de dominância) *Seja $A_v \in \pi_K$, $v = 1, ..., n$, tal que $|A_1| > |A_v|$ para todo o $v > 1$. Então*

$$\left|\sum_{v=1}^{n} A_v\right| = |A_1|$$

■

Como consequência imediata tem-se o

Corolário 9.2 *Se $\sum_{v=1}^{n} A_v = 0$, $A_v \in \pi_K$, $n \geq 2$, então existem dois índices i e j, com $1 \leq i < j \leq n$, tais que*

$$|A_i| = |A_j| = \max_{1 \leq v \leq n} \{|A_v|\}$$

■

Proposição 9.24 *Seja $|\cdot|$ uma ultramétrica em $\pi_{(K,P)}$. Seja $|\cdot|' : \pi_{(K,P)} \to P \cup \{0\}$ uma aplicação tal que*
i) $|O|' = 0$
ii) $|A| \leq |B| \Rightarrow |A|' \leq |B|', \forall\ A, B \in \pi_K$.
Então $|\cdot|'$ é uma ultramétrica.

Dem. Tem-se que provar que $|A - B| \leq \max\{|A|', |B|'\}$ para todo o A, B pertencentes a π_K. Se $|A| \leq |B|$, deduz-se de $|A - B| \leq \max\{|A|, |B|\} = |B|$ que $|A - B|' \leq |B|' \leq \max\{|A|', |B|'\}$. Se $|B| \leq |A|$ procede-se exactamente da mesma maneira.■

Considerando a estrutura de grupo abeliano de π_K, têm-se alguns resultados:

Definição 9.28 *Para todo $x \in P \cup \{0\}$, definem-se os seguintes subconjuntos de π_K, por*

$$\begin{aligned} \pi_K^{\circ}(x) &= \{X \in \pi_K : |X| \leq x\} \\ \pi_K^{\cdot}(x) &= \{X \in \pi_K : |X| < x\}. \end{aligned}$$

Proposição 9.25 *$\pi_K^{\circ}(x)$ e $\pi_K^{\cdot}(x)$ são subgrupos de π_K.*■

Note-se que $\pi_K^{\circ}(x) \subset \pi_K^{\cdot}(x)$; portanto, para $x \in P$, os grupos residuais $\tilde{\pi_K}(x) = \pi_K^{\circ}(x) \backslash \pi_K^{\cdot}(x)$, estão bem definidos.

Recorde-se a

Definição 9.29 (núcleo de $|\cdot|$) *O conjunto definido por* $\ker|\cdot| := \{X \in \pi_K : |X| = 0\}$ *é chamado o núcleo de $|\cdot|$.*

É evidente a

Proposição 9.26 $\ker|\cdot| = \bigcap_{x \in P} \pi_K^{\circ}(x) = \bigcap_{x \in P} \pi_K^{\cdot}(x)$.■

Em particular tem-se

Corolário 9.3 $\ker|\cdot|$ *é um subgrupo de π_K.*■

9.5.3 Topologia do plano cartesiano hilbertiano não-arquimediano

Definição 9.30 (plano cartesiano semi-normado, normado) *Seja π_K um plano não-arquimediano e $|\cdot| : \pi_K \to P \cup \{0\}$ uma ultramétrica. O par $(\pi_K, |\cdot|)$ é um plano cartesiano semi-normado.*

O par $(\pi_K, |\cdot|)$ é um plano cartesiano normado se for $\ker|\cdot| = \{0\}$.

Definição 9.31 (distância entre dois pontos) *Seja π_K um plano cartesiano semi-normado. Define-se em π_K a distância*

$$d(A, B) := |A - B|, \quad A, B \in \pi_K.$$

π_K fica munido duma *topologia pseudométrica*, e transforma-se num *grupo topológico*, isto é, a operação $(A, B) \mapsto A - B$ é contínua no grupo.

Observe-se que, olhando para a estrutura topológica de π_K, o grupo π_K admite uma base de vizinhanças contável em $O = (0, 0)$, que consiste em subgrupos de π_K. É sabido que, reciprocamente, todo o grupo topológico abeliano com um tal sistema fundamental de vizinhanças em O possui uma ultramétrica que define a topologia.

Proposição 9.27 *A aplicação $|\cdot| : \pi_K \to P \cup \{0\}$ é contínua.*

Dem. Pretende-se demonstrar que

$$||A| - |B|| \leq |A - B|, \forall A, B \in \pi_K.$$

De facto tem-se $|A| = |B|$, quando $|A - B| < \max\{|A|, |B|\}$. O subgrupo $\ker|\cdot|$ é fechado em π_K.■

Demonstra-se facilmente a seguinte

Proposição 9.28 *π_K é um espaço de Hausdorff se e só se π_K for um grupo normado.*■

A seguir indicam-se alguns resultados que ajudam a diferenciar as topologias ultramétricas em espaços cartesianos não-arquimedianos e as topologias familiares nos espaços euclidianos arquimedianos.

Em virtude da desigualdade 9.21(ii) da definição de ultramétrica, resulta que a métrica d é uma *ultradistância*, e satisfaz ao seguinte axioma adicional

$$d(A, C) \leq \max\{d(A, B), d(B, C)\}, \forall A, B, C \in \pi_K.$$

Geometricamente este axioma tem o seguinte significado:

Proposição 9.29 *Em todo o triângulo de π_K, um dos lados é no máximo igual ao maior dos outros dois, isto é, todos os triângulos em π_K são isósceles.*■

Definição 9.32 ($\varepsilon-$ proximidade) *Seja $\varepsilon \in P$. Dois pontos $A, B \in \pi_K$ dizem-se ε-próximos se $d(A, B) < \varepsilon$ e nota-se $A \sim_\varepsilon B$.*

É claro que

$$A \sim_\varepsilon B \Leftrightarrow A - B \in \dot{\pi_K}(\varepsilon).$$

A relação $\sim_\varepsilon$ é claramente uma relação de equivalência em π_K.

Sejam, como usualmente,

Definição 9.33 *(bola de centro A e raio r)* $B^+(A,r) := \{X \in \pi_K : |X - A| \leq r\}$ *é a bola de centro em $A \in \pi_K$ e raio $r \in P$, com a circunferencia fronteira;*

$B^-(A,r) := \{X \in \pi_K : |X - A| < r\}$ *é a bola de centro em $A \in \pi_K$ e raio $r \in P$, sem a circunferencia fronteira.*

Tem-se que $B^-(A,r)$ é exactamente a classe de equivalência de $\sim_r$ que contém A, donde resulta que

$$B^-(A',r) = B^-(A,r), \forall A' \in B^-(A,r)$$

Analogamente

$$B^+(A',r) = B^+(A,r), \forall A' \in B^+(A,r)$$

o que mostra que

Proposição 9.30 *Todo o ponto de uma bola é centro dessa bola.*■

Em particular, resulta que

Corolário 9.4 *todas as bolas são abertas em π_K.*■

Em consequência tem-se a seguinte propriedade:

Proposição 9.31 *Dadas duas bolas $B_1, B_2 \subset \pi_K$, tem-se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ou $B_1 \subset B_2, (B_1 \cap B_2) = B_1$, isto é, em π_K duas bolas ou são disjuntas ou está uma contida na outra.*

Dem. Com efeito, se $A \in B_1 \cap B_2$, pode-se encarar A como um centro comum das duas bolas. Então tem-se necessariamente uma contida na outra. Noutro caso tem-se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.■

Proposição 9.32 *Seja $S(A,r) := \{X \in \pi_K : |X - A| = r\}$ a esfera de centro em $A \in \pi_K$ e raio $r \in P$, que é fechada em π_K, por definição. Se $r \notin P$, esta esfera é vazia. Tem-se que*

$$B^-(X,r) \subset S(A,r), \forall X \in S(A,r).$$

Dem. Seja $B \in B^-(x,r)$. Então $|X - B| < |X - A| = r$. Então a proposição ,9.22(c) implica

$$|B - A| = |(B - X) + (X - A)| = \max\{|B - X|, |X - A|\} = r,$$

isto é, $B \in S(A,r)$.■

Em particular tem-se:

Corolário 9.5 *Toda a esfera em π_K é aberta.*■

E como $B^-(A,r) = B^+(A,r) - S(A,r)$ e como $B^+(A,r)$ é fechada, vê-se que

Corolário 9.6 *Toda a bola em π_K é fechada.*■

Nota 9.3 *esta última afirmação também é consequência do facto de, num grupo topológico, os subgrupos abertos serem também fechados.*

Tem-se ainda a

Proposição 9.33 *Um plano cartesiano normado π_K é totalmente desconexo (para a topologia ultramétrica).*

Dem. De facto para todo $A \in \pi_K$ a componente conexa T de $\{A\}$ está contida em todo a vizinhança aberta de $\{A\}$. Pelas observações anteriores, as bolas $B^-(A,r)$ são tais vizinhanças. Assim $T = \{A\}$.■

Definição 9.34 (pontos infinitamente próximos) *Seja K um corpo não-arquimediano e π_K o plano cartesiano correspondente, $A, B \in \pi_K$. A e B dizem-se infinitamente próximos (e nota-se $A \approx B$) se*

$$d(A,B) = ip.$$

Definição 9.35 (segmento de recta) *Dados dois pontos $A, B \in \pi_K$, o segmento de recta definido por eles é $\overline{AB} = B - A$.*

Definição 9.36 (comprimento de um segmento de recta) *Dado um segmento de recta $\overline{AB}$ o seu comprimento é $|AB| = |B - A| = d(A,B)$.*

Definição 9.37 (segmento de recta *ip*, *ap*, *ig* e *lm*.) *Um segmento de recta $\overline{AB}$ é ip, ap, ig ou lm se o seu comprimento for ip, ap, ig ou lm, respectivamente.*

9.6 Novas noções

Definição 9.38 (quase-paralelismo) *Num plano não-arquimediano π_K duas rectas r, s com declives m e m' respectivamente, dizem-se quase-paralelas, se $m \approx m'$, e nesse caso escreve-se*

$$r \parallel_i s,$$

onde $i = |m - m'|$ é um ip.

Nota 9.4 *A notação $\parallel_i$ será usada também para designar o quase-paralelismo, mesmo quando não há necessidade de se especificar o ip i.*

De notar que pode ser $r \cap s \neq \emptyset$ ($r \nparallel s$) e mesmo assim ser $r \parallel_i s$.
É evidente que o paralelismo é um caso particular de quase-paralelismo:

$$r \parallel s \Rightarrow r \parallel_i s.$$

Também é evidente a

Proposição 9.34 *A relação $r \parallel_i s$ em π_K é de equivalência.*

Dem. Consequência imediata das propriedades de $\approx$.■

Abaixo introduzem-se noções realativas ao quase-paralelismo no plano:

Definição 9.39 *(vizinhança tubular infinitesimal de uma recta) Dado um plano cartesiano não-arquimediano π_K, e $r \in \pi_K$, chama-se vizinhança tubular infinitesimal de raio ε de r, ou $\varepsilon-$túbulo de r, ao conjunto dos pontos $X \in \pi_K$ tais que*

$$d(X,r) \leq \varepsilon$$

sendo ε um ip de K. Nota-se r_ε.

De forma idêntica se definem vizinhança tubular de uma figura geométrica qualquer:

Definição 9.40 *(vizinhança tubular de uma figura) Dada um subconjunto F de π_K (figura), chama-se vizinhança tubular ou túbulo de F, de raio ε $(= ip)$, ao conjunto*

$$F_\varepsilon = \{X \in \pi_K : d(X,F) \leq \varepsilon\}.$$

Têm-se as seguintes proposições

Proposição 9.35 *Sendo ε um ip de K, tem-se*

$$s \in r_\varepsilon \Rightarrow s \parallel_i r.$$

Dem. Evidente.■

Proposição 9.36 *Se $s \parallel r$ então,*

$$\forall x \in s_\varepsilon, y \in r_\delta, x \parallel_i y,$$

com ε, δ ips.

Dem. Evidente.■

Corolário 9.7 *Se $s \parallel r$ então,*

$$\forall x \in r_\varepsilon, s \parallel_i x,$$

onde x é uma recta.■

Estes resultados motivam as seguintes definições:

Definição 9.41 *(túbulos quase-paralelos, paralelos) Se $r \parallel_i s$ então diz-se que $r_\varepsilon \parallel_i s_\delta$, ε, δ ips. Em particular, se $r \parallel s$ então diz-se que $r_\varepsilon \parallel s_\delta$.*

Proposição 9.37 *Duas rectas são quase-paralelas se e só se pertencerem a túbulos quase-paralelos (sentido lato).*

Definição 9.42 *(recta quase paralela a um túbulo) Diz-se que $r \parallel_i s_\varepsilon$, se existe $x \in s_\varepsilon$ tal que $r \parallel x$ (ε um ip de K, x uma recta de π_K).*

Tem-se também a

Proposição 9.38 *Se $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, são ap, então $\overline{AB} \parallel_i \overline{CD} \Leftrightarrow (\overline{AB} \times \overline{CD}) \approx 0$.*

Dem. Sejam $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ e $D(d_1, d_2)$. Tem-se que $\overline{AB} \parallel_i \overline{CD} \Leftrightarrow \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} \approx \frac{d_2-c_2}{d_1-c_1} \Leftrightarrow (b_2 - a_2)(d_1 - c_1) - (d_2 - c_2)(b_1 - a_1) \approx 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{CD} \approx 0.$ ■

Nota 9.5 *Num plano hilbertiano não-arquimediano π_K seja dada uma recta r, e $K \ni \varepsilon, ip$.*

i) por um ponto P exterior a r, tal que $0 < d(P, r) \leq \varepsilon$, passa uma única recta paralela a r (isto é, localmente π_K é euclidiano).

ii) por um ponto Q exterior a r, passa uma infinidade de rectas quase-paralelas (no sentido estrito) a r.

Definição 9.43 (quase-colinearidade) *Num plano não-arquimediano π_K três pontos A, B, C são quase colineares se*

$$\overline{AB} \parallel_i \overline{BC}.$$

Nota 9.6 *Se $s \parallel_i r, s \cap r \neq \emptyset$, existem pontos $P, Q \in s$ e $R \in r$, tais que P, Q, R são quase colineares.*

Tem-se a seguinte

Proposição 9.39 *Se $|AB|$, $|BC| \neq ip$ e $A, B, C \in r_\varepsilon$, então A, B, C são quase-colineares.*

Dem. .■

Definição 9.44 (quase-perpendicularidade) *Num plano não-arquimediano π_K duas rectas r, s com declives m e m' respectivamente são quase-perpendiculares se $m \approx -\frac{1}{m'}$, e nesse caso escreve-se*

$$r \perp_i s.$$

Para segmentos, e em termos de produto interno, tem-se:

Proposição 9.40 $\overline{AB} \perp_i \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} \approx 0.$

Dem. Sejam $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ e $D(d_1, d_2)$. Tem-se $\overline{AB} \perp_i \overline{CD} \Leftrightarrow \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} \approx -\frac{d_2-c_2}{d_1-c_1} \Leftrightarrow (b_2 - a_2)(d_2 - c_2) + (d_1 - c_1)(b_1 - a_1) \approx 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} \approx 0.$ ■

Nota 9.7 *Note-se que como $\overline{AB} \times \overline{CD}$ não é necessariamente ip quando $d^2(B, C) = ig$ e $d^2(A, C) = ip$, não se tem que A, B, C são colineares sse $A_{\triangle ABC} \approx 0$.*

Definição 9.45 *(túbulos perpendiculares) $r_\varepsilon \perp s_\delta \Leftrightarrow r \perp s$.*

São evidentes as seguintes proposições:

Proposição 9.41 *Se $r \perp s$ então $r \perp_i x, \forall x \in s_\delta$.*■

Proposição 9.42 $x \in r_\varepsilon \wedge y \in s_\delta \Leftrightarrow x \perp_i y$.■

Proposição 9.43 *Se A, B, C são colineares, $|AB|$ é ap e $A_{\Delta PBC} \approx 0$, então*

$$A_{\Delta PAC} \approx A_{\Delta PAB}.$$

Dem. As duas áreas diferem duma área *ip*.■

Definição 9.46 (ângulo *ip*) *Num plano hilbertiano não-arquimediano π_K, um ângulo θ diz-se ip se*

$$|\tan\theta| = ip$$

Dada a definição de tangente de um ângulo ($\tan\alpha = \pm\left|\frac{m'-m}{1+mm'}\right|$), resulta que o ângulo θ entre duas rectas de declives m e m', respectivamente, é *ip* se $m' \approx m$.[4]
É evidente a

Proposição 9.44 *Se α é um ângulo, r uma recta e $\alpha \subset r_\varepsilon$, então α é ip.*

Dem. Com efeito, os declive dos lados são *i*-próximos.■
Tem-se facilmente os seguintes resultados clássicos

Proposição 9.45 *Se θ é ip, então*
(i) $\sin\theta \approx \theta$
(ii) $\cos\theta \approx 1$.
(iii) $\left|\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)\right| = ig$

Dem. Com efeito, como θ é *ip*, $\tan\theta$ é *ip*, e tem-se
(i) $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = ip\cos\theta = ip \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$.
(ii) $\cos\theta = \tan\theta/\sin\theta = ip/ip \approx 1$
(iii) $|\tan(\pi/2 \pm \theta)| = \left|\frac{\sin\pi/2\cos\theta \mp \cos\pi/2\sin\theta}{\cos\pi/2\cos\theta \pm \sin\pi/2\sin\theta}\right| \approx \left|\frac{1}{\pm ip}\right| = ig$, ($r, s$ não verticais).■

Proposição 9.46 *Sejam r, s tais que $r \perp_i s$. Então $\measuredangle(r,s) \approx \frac{\pi}{2}$.*

Dem. Seja m o declive de r e m' o declive de s (s não vertical). Por hipótese tem-se $m \approx -\frac{1}{m'}$. Seja α o ângulo entre r e s. Tem-se

$$\tan\alpha = \left|\frac{m'-m}{1+mm'}\right| \approx \left|\frac{m'-(-\frac{1}{m'})}{1-\frac{1}{m'}m'}\right| = \frac{m'+ip}{ip} = ig;$$

por outro lado tem-se

$$\arctan ig = \alpha \Leftrightarrow \alpha \approx \frac{\pi}{2},$$

onde $ig > 0$.■

[4] Note-se que $\tan\alpha$ não está definida para α recto. Mas no caso um dos lados de α ser vertical (declive$=\infty \notin K$), pode-se ainda usar a fórmula. Tem-se, por exemplo

$$\frac{\infty - m}{1+m\infty} = \frac{1}{m},$$

onde ∞ é o hal dos ig, na notação de Van den Berg.

Definição 9.47 (ângulos quase-congruentes) *Um ângulo α definido pelas rectas r e s, de declives m e n, respectivamente, é quase-congruente com um ângulo β definido pelas rectas r' e s' de declives m' e n' respectivamente, e nesse caso nota-se*

$$\angle\alpha \cong \angle\beta$$

se for

$$m \approx m' \wedge n \approx n',$$

isto é, se os seus lados forem, respectivamente, quase paralelos.

Proposição 9.47 $\angle\alpha \cong \angle\beta \Leftrightarrow \measuredangle\alpha \approx \measuredangle\beta$.

Dem. Sejam m e n os declives dos lados de α e m' e n' os declives dos lados de α. Como por hipótese $m \approx m'$ e $n \approx n'$ tem-se então que

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-n}{1-mn}\right| \approx \tan\beta = \left|\frac{m'-n'}{1-m'n'}\right|,$$

pelo que é $\measuredangle\alpha \approx \measuredangle\beta$.

Reciprocamente se for $\measuredangle\alpha \approx \measuredangle\beta$, tem-se $\tan\alpha = \left|\frac{m-n}{1-mn}\right| \approx \tan\beta = \left|\frac{m'-n'}{1-m'n'}\right|$, pelo que $\left|\frac{m-n}{1-mn}\right| - \left|\frac{m'-n'}{1-m'n'}\right| \approx 0$ pelo que

Definição 9.48 *(ângulo de dois túbulos) Define-se ângulo dos túbulos $\overrightarrow{AB}_\varepsilon$ e $\overrightarrow{BC}_\varepsilon$ como sendo $(\angle ABC)_\varepsilon$.*

Teorema 9.5 $\angle ABC \cong \angle A'B'C' \Leftrightarrow \angle ABC, \angle A'B'C' \subset (\angle ABC)_\varepsilon$, ε *ip, isto é, dois ângulos são quase-congruentes sse um deles está contido numa vizinhança tubular infinitesimal do outro.*

Definição 9.49 (segmentos quase-congruentes) *Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são quase congruentes, e nesse caso nota-se $\overline{AB} \approx \overline{CD}$, se*

$$|AB| \cong |CD|.$$

Proposição 9.48 *Se $\overline{AB} \subset (\overline{CD})_\varepsilon$*
i) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
ii) $\overline{AB} \parallel_i \overline{CD}$.■

Definição 9.50 (triângulos quase-congruentes) *Dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são quase congruentes se os lados correspondentes forem quase congruentes, isto é,*

$$\overline{BA} \cong \overline{B'A'}; \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}; \quad \overline{CB} \cong \overline{C'B'}$$

Proposição 9.49 *(critério LAL de quase-congruência) Se*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}; \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}; \quad \measuredangle ABC \approx \measuredangle A'B'C'$$

então ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são quase congruentes.

Dem. .∎

Proposição 9.50 $\triangle ABC \subset (\triangle A'B'C')_\varepsilon \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, ε *ip*.∎

Veronese demonstra que

Proposição 9.51 *Num triângulo* ΔABC,

$$\overline{AB} \approx 0 \Rightarrow \overline{AC} \approx \overline{BC}$$

Dem. Caso contrário a desigualdade ultra-métrica seria violada.∎

Proposição 9.52 *(critério AA $\sim$ de quase-semelhança) Dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são quase-semelhantes se tiverem dois ângulos quase-congruentes.*∎

Proposição 9.53 *(Critério LLL $\sim$ de quase-semelhança) Dois triângulos com lados correspondentes quase-proporcionais, são semelhantes.*∎

Proposição 9.54 *Num triângulo* ΔABC,

$$\overline{AB} \in @ \wedge \overline{BC} \in \varnothing \Rightarrow A_{\Delta ABC} \approx 0$$

Dem. Pelo teorema anterior fica $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e a altura do triângulo em relação a $\overline{AC}$ seria *ip*. Assim tem-se

$$A_\Delta = \frac{|AC|}{2} ip = ip.$$

∎

Proposição 9.55 *Se A, B, C são colineares e $A_{\Delta PBC} \approx 0$ então*

$$A_{\Delta PBC} \approx A_{\Delta PAB}.$$

∎

Definição 9.51 (segmento *ip*) *Sejam $A, B \in \pi_K$, K não-arquimediano, tais que $d(A, B) = ip$. Nesse caso diz-se que $\overline{AB}$ é um segmento ip.*

De forma idêntica se definem segmentos *ig*, *ap* e *lm*.

É natural que se considere um segmento *ip* como um conjunto externo de pontos.

Definição 9.52 (halo de um ponto) *Dado um ponto $P \in \pi_K$, define-se o halo de P*

$$hal(P) = \{X \in \pi_K : d(X, P) = ip\}.$$

É evidente que o halo de um ponto P, num plano cartesiano não-arquimediano π_K, é um disco de raio *ip*: é uma vizinhança aberta (por 9.4) *ip* de P (e por 9.30) é também vizinhança de todos os pontos X tais que $X \in hal(P)$.

Para áreas orientadas tem-se

Proposição 9.56 $|CD|$ *é ap então* $\overline{AB} \parallel_i \overline{CD} \Leftrightarrow A_{\Delta ACD} \approx A_{\Delta BCD}$.

Dem..■

Definição 9.53 (pontos standard e pontos não-standard) *Seja K um corpo não-arquimediano e π_K o plano cartesiano não-arquimediano correspondente. $P(x, y) \in \pi_K$ é dito um ponto standard se x e y são números standard de K, e não-standard no caso contrário.*

Exemplo 9.2 *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais standard e $\mathfrak{R} \supset \mathbb{R}$ uma extensão de $\mathbb{R}$, com elementos não-standard. Então no plano cartesiano não-arquimediano $\pi_{\mathfrak{R}}$, os pontos standard são os pontos $P(x, y)$ com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Exemplo 9.3 *Na geometria cartesiana usual em $\mathbb{R}^2$, todos os pontos considerados são standard.*

Proposição 9.57 *Seja P um ponto standard. Os pontos X tais que $X \in hal(P)\backslash\{P\}$ são pontos não-standard.*

Dem. Supondo, sem perda de generalidade, que $P = O = (0, 0)$, seria, para $X(x, y) \in hal(P)\backslash\{P\}$, x *ip* ou y *ip*, logo, X seria não-standard.■

Corolário 9.8 *Um segmento ip tem um único ponto standard.*■

Tem-se então que um segmento $\overline{AB}, ip$ é "isomorfo" ao halo de um ponto $P \in \overline{AB}$, que é o único ponto standard de $\overline{AB}$.

Definição 9.54 *Ao único ponto standard de um segmento ip $\overline{AB}$ chama-se sombra desse segmento, e nota-se ${}^o\overline{AB}$.*

Teorema 9.6 (discretização de um segmento) *Seja $\overline{AB}$ um segmento ap. Pode-se discretizar $\overline{AB}$ com uma partição infinitesimal, $P_n = \{P_0 = A, P_1, ..., P_n = B\}$, com $P_i < P_{i+1}$, n ig.*

Dem. Com efeito, para todo o i se tem $P_i \approx P_{i+1}$. Nesse caso não existe nenhum elemento standard entre P_i e P_{i+1}. Com efeito, se existisse um tal elemento, digamos R, ter-se-ia ${}^oP_i < P_i < R < P_{i+1} < {}^oP_{i+1}$, o que é absurdo. ■

Finalmente, tem-se o

Teorema 9.7 *Esta geometria não-arquimediana é modelo dos axiomas HV1–HV15.*

Dem. Por construção, esta geometria verifica os axiomas de Hilbert, isto é, os axiomas HV1–HV13. A verificação dos axiomas de continuidade de Veronese, HV14 e HV15, decorre da existência de infinitesimais, por ausência do axioma de Arquimedes.■

Tem-se então uma geometria analítica não-standard não-arquimediana, contínua à Veronese, portanto um modelo Hilbert-veronesiano de GNSA.

9.7 Algumas aplicações elementares do modelo

9.7.1 Introdução: novas definições

Nesta secção vai-se considerar o modelo H-V, contínuo à Veronese, isto é, verificando os axiomas VC1 e ou VC2. Colocamo–nos portanto no plano cartesiano hilbertiano não-arquimediano π_K. Tem-se:

Definição 9.55 (linha poligonal, polígono) *Uma sucessão $[P_n]$ de pontos standard $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ define uma linha poligonal $\overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup ... \cup \overline{P_{n-1}P_n}$. $[P_n]$ diz-se um polígono, de n lados, se*

(i) $P_n = P_0$
(ii) $i, j \neq 0, n \Rightarrow P_i \neq P_j$

Definição 9.56 (curva) *Uma curva é uma linha poligonal $[P_n]$ com n um número ig, ($n \in \infty$) podendo ser notada $[P_{ig}]$, caso necessário, onde ig designa um infinitamente grande específico.*

Observe-se que, numa curva, por definição, os pontos $P_0, P_1, ...$ são standard e, para cada escala fixada, não existe entre eles nenhum ponto standard (Teorema de discretização de um segmento (teorema 9.6)[5]).

Definição 9.57 (vértices e lados duma curva) *Aos pontos P_i duma curva $\Gamma = [P_n]$ dão-se o nome de vértices de Γ, e aos segmentos (ip) $\overline{P_iP_{i+1}}$ dão-se os nomes de lados da curva Γ.*

Definição 9.58 (curva de Jordan) *Uma curva $\Gamma = [P_n]$ é dita de Jordan se*
i) $P_0 = P_n$
ii) $i, j \neq 0, n \Rightarrow P_i \neq P_j$ (condição de não auto-intersecção)[6]

Definição 9.59 (circunferência) *Uma circunferência é uma curva de Jordan $C = [P_n]$, tal que*
(i) Para todo o i, os segmentos $\overline{P_iP_{i+1}}$ são congruentes entre si;
(ii) O ângulo (ip) $\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ entre dois lados consecutivos é constante.

Esta definição de circunferência, só legítima numa GNS, debela os problemas de continuidade advenientes da definição clássica de circunferência. É mais intuitiva, no sentido em que se trata duma circunferência "traçada" com um compasso. Por outro lado a transferência da continuidade à Veronese da recta para a circunferência é automática.

Definição 9.60 (curvatura duma curva num ponto) *Considere-se num plano não-arquimediano π_K uma curva $\Gamma = [P_n]$. Chama-se curvatura de Γ num ponto $P_k \in \overline{P_{i-1}P_i}$ ao ângulo α que verifica*
(i) $\alpha = 0$ se P_k não for um vértice de Γ (isto é, se P_k for não-standard);
(ii) $\alpha = \angle P_lP_iP_{i+1}$ onde $\overleftrightarrow{P_lP_i} \parallel \overleftrightarrow{P_{i-1}P_i}$ (ângulo externo), se P_k for um vértice (isto é, se P_k for standard).

[5] O axioma de continuidade de Veronese garante este mesmo resultado.
[6] Isto é, uma curva de Jordan é um polígono com um número *ig* de lados.

Nota 9.8 *O ângulo α pode ser orientado positivamente ou negativamente, pelo que a curvatura de uma curva num ponto pode ser positiva, nula ou negativa.*

Nota 9.9 *Observe-se que a curvatura duma curva "concentra-se" nos seus vértices ou pontos standard.*

Pela definição de curvatura, a circunferência tem a mesma curvatura em todos os seus pontos standard. Uma recta é também uma curva de curvatura constante e *ip* (podendo, em particular ser zero — e esta particularidade é a única distinção possível entre recta e circunferência, no plano).[7]

Nota 9.10 *Repare-se que os ângulos entre lados consecutivos duma circunferência são todos ip, o que faria que, a uma escala fixa, não se conseguisse distinguir circunferências através das suas curvaturas. Ora, uma boa aproximação à grandeza desses ângulos, são os ângulos de contingência correspondentes, que funcionam como uma lupa para ampliar esses ângulos ip e tornar possível a sua comparação. Assim, dispõe-se dum meio prático para visualizar ("à vista desarmada") a diferença de curvatura entre duas circunferências quaisquer, já visto no capítulo 2 da primeira parte.*

Definição 9.61 (raio de curvatura) *Chama-se raio de curvatura de uma curva num ponto de curvatura não nula, ao inverso da sua curvatura nesse ponto.*

Note-se que numa curva não recta, o conjunto dos pontos de curvatura não nula é um conjunto "magro", por ser finito, embora *ig*.

Definição 9.62 *Para uma curva qualquer Γ, note-se $K\Gamma$ ao conjunto dos pontos de Γ com curvatura não nula. Uma curva Γ tem curvatura constante, se Γ tem a mesma curvatura em todos os pontos de $K\Gamma$. Nesse caso existe um ponto C do plano (se o plano for completo[8]) equidistante de todos os pontos de $K\Gamma$. Diz-se que C é o centro de curvatura de Γ e a distância $|CP_i|$ $(P_i \in K\Gamma)$ o raio de curvatura de Γ.*

Nota 9.11 *Se uma curva tem curvatura ig num ponto, então, nesse ponto tem raio de curvatura ip, e vice versa.*

Exemplo 9.4 *A recta tem raio de curvatura ig (ou ∞, no caso absoluto).*

O conjunto dos centros de curvatura de uma curva Γ definem uma curva Γ' chamada *evoluta* de Γ.

A distinção entre circunferências pela sua curvatura pode ser feita através da distinção das ordens de grandeza do ângulo α (nota 9.10) ou equivalentemente pelas ordens de grandeza (inversas) do seu raio de curvatura. Assim, numa geometria não-arquimediana a várias classes arquimedianas, correspondentes a *ips*, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ têm-se circunferências com as correspondentes curvaturas[9].

[7] No espaço é preciso introduzir a noção de torsão num ponto.

[8] No sentido de Veronese.

[9] Pode-se dizer que há uma quantificação na classe das circunferências, e que pela ordenação de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, circunferências de ordens de curvatura diferentes são "concêntricas", no sentido da inclusão.

Definição 9.63 (curvatura total) *Dada uma curva $\Gamma = [P_n]$, designe-se por α_i a curvatura de Γ no ponto P_i de $K\Gamma$. Chama-se curvatura total de Γ ao número*

$$\kappa_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Definição 9.64 (recta tangente a uma circunferência) *Dada uma circunferência $\Gamma = [P_n]$, uma recta r diz-se tangente a Γ se:*

i) $r \cap \Gamma \neq \emptyset$

ii) se $P_k \in r \cap \Gamma \wedge P_k \in \overline{P_{i-1}P_i} \backslash \{P_{i-1}\}$, então o ângulo entre r e $\overline{P_{i-1}P_i}$ é um ip menor ou igual à curvatura de Γ em P_i.

Da definição resulta que

i) a intersecção de uma circunferência com a sua tangente pode ser um ponto standard ou um segmento *ip* (que contém um único ponto standard) — o que está de acordo com a intuição;

ii) quando se fixa uma ordem de grandeza, a intersecção é sempre um segmento *ip*; de contrário — caso arquimediano — considera-se que a intersecção é um ponto. A localização exacta do ponto de intersecção é impossível. Apenas se pode aproximá-la por um segmento *ip*.

iii) estas observações se aplicam à tangência de duas circunferências.

9.7.2 Resolução não-standard de problemas standard: algumas ilustrações elementares

Nesta secção vai-se fazer, para alguns problemas, aquilo que Eudóxio, Euclides e Arquimedes fizeram, há mais de 2300 anos, isto é, vai-se aplicar um "método de exaustão" — que pode ser visto como um método não-standard — para resolver problemas standard.

Perímetro duma circunferência

Pela proposição 9.45 sabe-se que se θ é um ângulo *ip*, então $\sin\theta \approx \theta$. Ora, seja n um número natural *ig*. O perímetro duma circunferência de raio r é

$$P_\odot \approx nr \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Como $\frac{2\pi}{n} = ip$, tem-se

$$P_\odot \approx nr \sin\frac{2\pi}{n} \approx \frac{2\pi nr}{n} = 2\pi r.$$

Área do círculo

Vai-se verificar que a área do círculo de raio r é i-próximo de πr^2.

A área de um círculo standard C de centro O é i-próxima da área do círculo não-standard $\Gamma = [P_n]$, onde os P_i estão inscritos sobre a circunferência bordo do círculo standard C.

Considere-se então os triângulos infinitesimais $\Delta_i = \Delta OP_{i-1}P_i$. A área de C é infinitamente próxima da área de Γ e para cada $P_i \in \Gamma, C$ tem-se

$$A_C \approx A_\Gamma = \sum_i A_{\Delta_i}$$

onde A_* nota "área de $*$". A área não depende de O mas de $\overline{OP_i}$ que é igual ao raio de curvatura de Γ, que no entanto é constante para cada círculo. Ponha-se

$$\overline{OP_i} = r$$

Portanto, o ângulo $\angle P_{i-1}OP_i$ mede $\frac{2\pi r}{n}$ (porque $P_j \in C$), e $A_{\Delta_i} = \frac{\frac{2\pi r}{n}}{2} r$, donde

$$A_C \approx A_\Gamma = \frac{\frac{2\pi r}{n}}{2} nr = \pi r^2$$

Área e volume duma esfera

Seja S uma esfera de raio r. Tem-se que, para n um número ig, o ângulo $2\pi/n$ e o comprimento $2r/n$ são ip. O elemento de área é

$$r \sin \frac{2\pi}{n}.\frac{2r}{n} \approx \frac{2\pi r}{n}.\frac{2r}{n},$$

pelo que se tem

$$A_S \approx n^2.\frac{2\pi r}{n}.\frac{2r}{n} = 4\pi r^2.$$

Para o volume considera-se a esfera S prenchida por n^2 pirâmides de base igual a elemento de área e altura igual a r. Tem-se então

$$V_S \approx n^2(\frac{1}{3}.\frac{2\pi r}{n}.\frac{2r}{n}.r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

onde V_* significa "volume de $*$". Ou então, recorrendo ao facto de se conhecer a área, tem-se que a esfera é prenchida por n, ig pirâmides cuja soma das áreas da base é igual à superfície da esfera, tendo-se portanto:

$$V_S = n\frac{1}{3}(\frac{4\pi r^2}{n})r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

O teorema de Gauss-Bonnet não-standard

Este teorema, tão importante para a geometria como para a topologia, uma vez que relaciona uma propriedade geométrica — a curvatura —, com uma propriedade topológica — a característica de Euler-Poincaré tem, na geometria standard uma demonstração bastante trabalhosa (ver [Spivak], por exemplo). Aqui vai-se dar uma demonstração simples e intuitiva.

Gauss-Bonnet para polígonos

Vai-se considerar apenas o caso de polígonos simples, isto é, inscritos em curvas de Jordan. No que se segue, um polígono de n-lados será designado por um n-polígono.

Serão necessários os seguintes resultados preliminares.

Proposição 9.58 (existência de diagonais interiores) *Para todo o $n > 3$, um n-polígono P tem pelo menos uma diagonal interior.*

Dem. Existe pelo menos um ângulo $\measuredangle ABC$ menor que π. Com efeito, basta tomar B como o "vértice mais à esquerda" do polígono. Se $\overline{AC}$ está em P, então $\overline{AC}$ é uma diagonal. Se $\overline{AC}$ não está em P, então existem vértices $V_1, ..., V_n$ em ΔABC. Note-se por $d(X, l)$ a distância entre o ponto X e a recta l. Escolha-se V em $\{V_1, ..., V_n\}$ tal que $d(V, \overline{AB}) \geq d(V_k, \overline{AB})$, qualquer que seja k. Então $\overline{BV}$ não pode intersectar P, pelo que $\overline{BV}$ é uma diagonal.■

Proposição 9.59 (soma dos ângulos externos) *Supondo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π, a soma dos ângulos externos de um n-polígono é 2π.*

Dem. Por indução em n, tem-se: para $n = 3$ (caso do triângulo), notem-se os ângulos por α, β, γ. Então

$$\begin{aligned} \pi - \alpha &= \beta + \gamma \\ \pi - \beta &= \alpha + \gamma \\ \pi - \gamma &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos ângulos externos é o dobro da soma dos ângulos internos, isto é, vale 2π. Suponha-se então que a hipótese é verdadeira para todo o polígono com no máximo k lados. Considere-se então um polígono com $k + 1$ lados. Pela proposição anterior, existe pelo menos uma diagonal $\overline{AB}$. Então corte-se o polígono ao longo de $\overline{AB}$, resultando dois polígonos com no máximo k lados. Existem dois angulos internos em A e dois em B. Notem-se esses ângulos por $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ respectivamente, tais que α_1 e β_1 estejam num polígono e α_2 e β_2 estejam no outro polígono. Então a soma dos ângulos externos do polígono com $k + 1$ lados é

$$\begin{aligned} & 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \beta_1) + 2\pi - (\pi - \alpha_2) - \\ & -(\pi - \beta_2) + (\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) + (\pi - (\beta_1 + \beta_2)) \\ = \; & 2\pi. \end{aligned}$$

■

Proposição 9.60 (soma dos ângulos internos) *A soma dos ângulos internos de um n-polígono é $(n - 2)\pi$.*

Dem. A soma de um ângulo externo com o seu interno correspondente é π. Como existem n vértices, a soma de todos os ângulos internos e externos é $n\pi$. Portanto a soma dos ângulos internos é

$$n\pi - 2\pi = (n - 2)\pi.$$

■

Para o caso de polígonos simples necessita-se da

Definição 9.65 (característica de Euler) *Seja P um poliedro $n-$dimensional. Chama-se caracteráistica de Euler de P ao número*

$$\chi(P) = V - A + F$$

onde F é o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas.

Teorema 9.8 (Gauss-Bonnet para polígonos) *Se P é um n-polígono, então a soma dos ângulos externos (a curvatura total) de P é $2\pi\chi(P)$.*

Dem. Por indução em k.■[10]

Gauss-Bonnet para poliedros

Veja-se agora o mesmo teorema para poliedros. Tem-se

Definição 9.66 (défice angular) *O défice angular α de um poliedro num vértice é igual a 2π menos a soma dos ângulos dos lados que se intersectam nesse vértice.*

Observe-se que o défice angular dum poliedro num vértice é uma espécie de curvatura desse poliedro, no vértice em causa, que concentra toda a curvatura dos pontos nas faces adjacentes.

Exemplo 9.5 *Se um poliedro é plano (equivalente a um grafo planar) o défice angular em todos os pontos é nulo.*

Teorema 9.9 (do défice angular) *A soma dos défices angulares de um poliedro fechado é $2\pi\chi$.*

Dem. Vai-se igualar duas formas de somar os ângulos numa superfície poliedrica e enumerar as faces $i = 1, ..., F$, e os vértices $j = 1, ..., V$. Seja n_i o número de lados da face i. Seja α_j o défice angular do vértice j. Então tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{F}(n_i - 2)\pi &= \sum_{j=1}^{V}(2\pi - \alpha_j) \\ \sum_{j=1}^{V}\alpha_j &= \sum_{i=1}^{F}(2 - n_i)\pi + \sum_{j=1}^{V}2\pi = \\ &= 2\pi F - \sum_{i=1}^{F} n_i\pi + 2\pi V. \end{aligned}$$

O segundo termo do lado direito conta todos os lados em todas as faces, multiplicados por π. Como toda a aresta do poliedro limita exactamente duas faces, esse termo apenas conta duas vezes o número total de arestas A, vezes π :

$$\sum_{j=1}^{V}\alpha_j = 2\pi F - 2\pi A + 2\pi V = 2\pi\chi.$$

■

[10] Recorde-se que um polígono simples, é topologicamente equivalente a um disco, tendo portanto característica 1. Um polígono com um ponto duplo é topologicamente a dois discos, tendo característica dois, etc. Assim um polígono com k pontos duplos terá característica k. Tem-se então que se P é um n-polígono com k pontos simples, então a soma dos ângulos externos de P é $2\pi k$.

Exemplo 9.6 *Nos polígonos regulares tem-se $\chi = 2$. Por exemplo, para um tetraedro regular tem-se que cada vértice é o ponto de encontro de três triângulos equiláteros. Então em cada vértice o défice angular é $\alpha = 2\pi - 3(\pi/3) = \pi$. Então,*

$$\sum \alpha = 4\alpha = 4\pi = 2\pi\chi$$

Para poliedros com bordo, há que considerar o défice angular nos vértices do bordo.

Definição 9.67 (défice no bordo) *Seja P um poliedro com bordo ∂P, e $A \in \partial P$. Chama-se défice no bordo de A ao número $\beta(A) = \pi - \gamma$, onde γ é a soma dos ângulos interiores das faces que se intersectam em A.*

Teorema 9.10 (Gauss-Bonnet para poliedros) *A soma dos défices angulares dos vértices do interior de um poliedro, mais a soma dos défices nos pontos do bordo, é igual a $2\pi\chi$.*

Dem. Enumerem-se as faces com $i = 1, ..., F$, os vértices interiores com $j = 1, ..., V_i$, os vértices do bordo com $k = 1, ..., V_b$. Seja n_i o número de lados da face i. Seja α_j o défice angular do vértice interior j. Seja β_k o défice no bordo do vértice k do bordo. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{F}(n_i - 2)\pi &= \sum_{j=1}^{V_i}(2\pi - \alpha_j) + \sum_{k=1}^{V_b}(\pi - \beta_k) \\
\sum_{j=1}^{V_i}\alpha_j + \sum_{k=1}^{V_b}\beta_k &= \sum_{i=1}^{F}(2 - n_i)\pi + \sum_{j=1}^{V_i}2\pi + \sum_{k=1}^{V_b}\pi \\
&= 2\pi F - \sum_{i=1}^{F}n_i\pi - \sum_{k=1}^{V_b}\pi + \sum_{j=1}^{V_i+V_b}2\pi.
\end{aligned}$$

O segundo termo do lado direito é o número de lados em cada face, multiplicado por π. Cada aresta limita duas faces, excepto as do bordo, que limitam apenas uma face. O terceiro termo é o número de vértices do bordo, que é igual ao número de arestas do bordo. Portanto, a soma do segundo com o terceiro termos é o dobro do número total de arestas A, vezes π :

$$\sum_{j=1}^{V_{int}}\alpha_j + \sum_{k=1}^{V_{bd}}\beta_k = 2\pi F - 2\pi A + 2\pi V = 2\pi\chi.$$

■

Exemplo 9.7 *Considere-se um tetraedro sem uma das faces. Obtém-se um "funil poliedrico" com 4 vértices, e arestas e três faces, pelo que se tem $\chi = 1$, isto é, trata-se de uma superfície topologicamente equivalente a um disco ou círculo. Três triângulos equiláteros se intersectam no vértice do interior, pelo que o défice angular nesse vértice é*

$$\alpha = 2\pi - 3(\pi/3) = \pi.$$

Em cada vértice do bordo intesectam-se dois triângulos equiláteros, pelo que se tem em cada um desses vértices

$$\beta = \pi - 2(\pi/3) = \pi/3.$$

Então

$$\sum \alpha + \sum \beta = \pi + 3(\pi/3) = 2\pi = 2\pi\chi.$$

Gauss-Bonnet para superfícies mergulhadas num espaço não-standard

Teorema 9.11 (Gauss-Bonnet) *Seja M uma superfície orientável, ∂M o seu bordo, e χ_M a característica de Euler de M. Então*

$$\iint_M K dA + \oint_{\partial M} \kappa_g ds \approx 2\pi\chi_M,$$

onde dA é o elemento de área de M, (isto é um pedaço de M com área ip), ds o elemento de arco de ∂M, (isto é, um pedaço de ∂M com área ip), K a curvatura gaussiana de M nos pontos do interior de M e κ_g a curvatura geodésica de ∂M.

Dem. Faça -se uma triangulação de M de modo que cada triângulo tenha lados *ip*[11]. Resulta que a área de cada um desses triângulos é *ip* e vértices standard, e o bordo está inscrito numa curva não-standard. Então a superfície M é infinitamente próxima do poliedro não-standard P. Assim a curvatura de todo o ponto de M será infinitamente próxima do défice angular respectivo nesse ponto. Assim

$$\iint_M K dA + \oint_{\partial M} \kappa_g ds \approx \sum_{j=1}^{V_i} \alpha_j + \sum_{k=1}^{V_b} \beta_k = 2\pi F - 2\pi E + 2\pi V = 2\pi\chi_M.$$

■

9.8 Conclusões

Neste capítulo viu-se uma realização analítica do modelo Hilbert-veronesiano. Tal modelo permitiu a introdução de novos conceitos. Também se viu algumas ilustrações de como esse modelo pode ser aplicado na resolução de problemas clássicos, o que indica que o mesmo pode ter muitas vantagens pedagógicas, pois pode-se introduzir conceitos interessantes em classes pouco avançadas, conceitos esses que embora simples, requerem, no quadro clássico, aparatosos instrumentos, só construtíveis depois de muitas bases.

Outras vantagens haverá certamente, como a aproximação da geometria às ciências empíricas, podendo daí resultar grande simbiose[12].

[11] É necessário demonstrar que essa triangulação existe sempre.

[12] Hipótese cuja verificação extravasa o âmbito deste trabalho.

CAPÍTULO 10

Modelos sintéticos Hilbert-veronesianos de geometria não-standard não-arquimediana

10.1 Introdução

Qualquer geometria analítica sobre um corpo não-arquimediano K é um modelo analítico de geometria não-standard não-arquimediana. Assim, são exemplos de geometrias analíticas não-standard não-arquimedianas, todas as geometrias baseadas nos corpos $\mathbb{Q}_p$ de números p-ádicos[1], por exemplo.

Os exemplos que se vai apresentar neste capítulo têm duas características:

i) São sintéticos — não se se preocupa, à partida, com as características precisas do seu corpo base;

ii) São elementares — pretende-se apresentar a geometria não-standard (bem como a intuição geométrica que ela encerra) através de modelos muito simples, por forma a que essa matéria possa ser incluida nos cursos de geometria elementar.

10.2 Modelo prático de Veronese

10.2.1 Apresentação do modelo

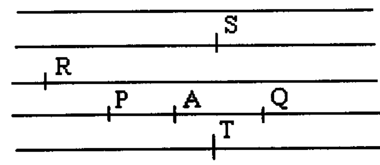
O modelo que a seguir se apresenta é inspirado na "representação duma parte do contínuo intuitivo" por Veronese [ver Apêndice A] e aparece também referido em F. Enriques [25][2].

Considere–se, num plano cartesiano π_K, (K eventualmente igual a $\mathbb{R}$) duma geometria absoluta, um feixe ordenado com um número ilimitado de rectas paralelas, $l = \{..., l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, ...\}$ tal que a distância de l_i a l_{i+1} é constante. Pode-se considerar essas rectas ordenadas "em sentido vertical, de baixo para cima" a partir de uma recta origem l_0, ao mesmo tempo que cada recta está ordenada da forma usual, "na horizontal, da esquerda para a direita", a partir de um ponto origem O escolhido. Considere-se a seguir o conjunto de todos os pontos dessas rectas como um sistema ordenado $(\mathcal{S}, \prec)$, de forma

[1] Essas geometrias foram estudadas por Hensel, Kurshack e Tate, e uma referência clássica para essa matéria é o livro [10].

[2] E possivelmente nalgum artigo de Veronese, que não foi possível consultar.

que todo o ponto Q, situado à direita de um ponto P, sobre a mesma recta, e quaisquer o pontos R, S situados em rectas acima do suporte de um ponto A, sejam considerados "maiores que A". Por exemplo, na figura abaixo tem-se que $P \prec Q; Q \prec R; S \succ T$:



Definamos-se em $(\mathcal{S}, \prec)$ um segmento $\overline{AB}$ da maneira usual:

$$\overline{AB} = \{X \in \mathcal{S} : A - X - B\} \cup \{A, B\}$$

onde $A - X - B \Leftrightarrow A \prec X \prec B$. Chamemos rectas de π_K aos sistemas do tipo $(S, \prec)$, e notemo-los por r_{π_K}.

É fácil ver que o sistema $\mathcal{V}_2 = (\pi_K, r_{\pi_K})$ verifica todos os axiomas planares de incidência, I, ordem II e congruência III, de Hilbert. Com efeito dados dois pontos distintos, P, Q de $\mathcal{V}_2$, existe uma e uma só recta de $\mathcal{V}_2$ que passa por eles. Por outro lado, por construção, $\mathcal{S}$ tem um número infinito de pontos, e dada uma recta r de $\mathcal{V}_2$, existem pontos de $\mathcal{V}_2$ não pertencentes a r, (os que estão entre as paralelas) pelo que são verificados os axiomas planares de incidência. Os axiomas de ordem são trivialmente verificados pois $\prec$ é uma ordem total. Os axiomas de congruência (de segmentos) também são verificados, uma vez que, tal como se exige em Hilbert, a congruência de dois segmentos é compatível com uma "translação" que leve um deles a sobrepor-se sobre o outro, "ponto por ponto".

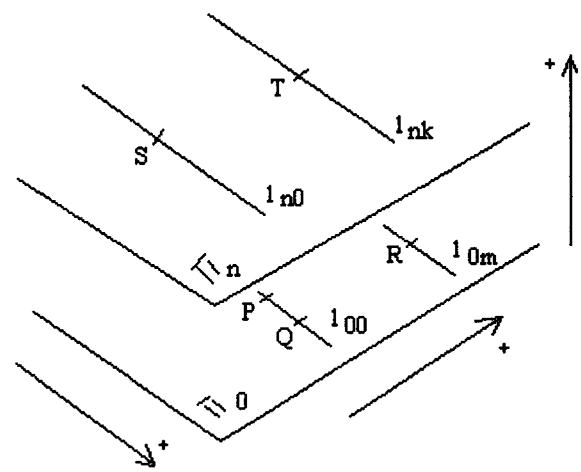
Ora, neste modelo, para além dos segmentos usuais da geometria euclidiana (os que jazem sobre uma recta horizontal), existem segmentos estranhos, como por exemplo, o segmento $\overline{PR}$, na figura acima.

É claro que nesta geometria é válido o axioma de continuidade de Cantor [Apêndice B], mas não é válido o axioma de continuidade de Dedekind. Aliás, como é evidente, também nela não é válido o axioma de Arquimedes, pois, por maior que seja um múltiplo de $\overline{PQ}$, por exemplo, nunca excederá $\overline{PR}$.

Trata-se pois de um modelo de geometria não-arquimediana, (logo, não-standard), não contínua no sentido de Dedekind, porém contínua no sentido veronesiano. Trata-se de um modelo H-V que verifica os axiomas HV1-HV14.

10.2.2 Generalizações do modelo

O modelo acima apresentado é facilmente generalizável, ao espaço ordinário, $\mathcal{E}$. Basta considerar-se um feixe de planos π_K paralelos e em cada um desses planos um sistema l de rectas paralelas, como no modelo $\mathcal{V}_2$, acima. O sistema ordenado $(\mathcal{E}, \prec')$, onde $\prec'$ é uma extensão de $\prec$ através da inclusão na ordem da hierarquia dos planos π_K, tem três ordens de grandezas (figura abaixo):



Fixando-se uma unidade u, tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= xu, u \in K;\\ \overline{PR} &= m\infty_1 + yu,\end{aligned}$$

onde ∞_1 é, na notação de Veronese, para a primeira ordem de infinito (capítulo 4);

$$\begin{aligned}\overline{PS} &= n\infty_1\infty_1 + zu = n\infty_2 + zu;\\ \overline{PT} &= n\infty_2 + k\infty_1 + wu\end{aligned}$$

onde $m, n, k, x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Este processo é rapidamente generalizável a um espaço ambiente k-dimensional. A distância entre dois pontos P e Q desta geometria é um número $d \in \mathbb{III}_0^+$ de Veronese. Associando a cada ponto a sua distância a um ponto O chamado origem, cada ponto P do novo plano é identificado com a sua coordenada $x(P)$, que será um número pertencente a $\mathbb{III}$.

Estes modelos, que serão designados por $\mathcal{V}_n$, são modelos H-V e verificam os axiomas HV1-HV15[3]. Dão uma ideia prática da construção vertiginosa de Veronese. Na secção seguinte vai-se estudar um modelo isomorfo ao modelo $\mathcal{V}_2$, aparentemente mais intuitivo e mais prático.

10.3 Modelo da recta sincopada

10.3.1 Apresentação do modelo

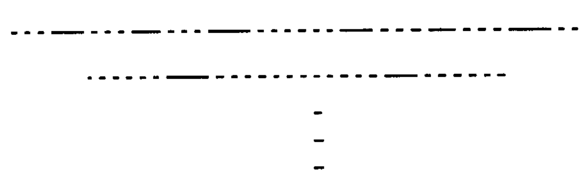
Colocamo–nos de novo no modelo $\mathcal{V}_2$, de Veronese. Pode-se dar outra configuração visual ao sistema, fazendo-se uma espécie de "linearização" do feixe de rectas paralelas l_i, $i \in \mathbb{Z}$,

[3]Pode-se adoptar a seguinte designação: os modelos que verificam HV1-HV14 são designados por H-V *absolutos*; os que verificam HV1-HV15 são designados por H-V *relativos* ou *completos*.

"varrendo" na sua totalidade o feixe de uma só vez[4]. Assim o segmento $\overline{PR}$ da figura da secção 10.2.1 pode ser representado como tendo umas "reticências", "(...)", que serão chamadas de *síncope* ou *lanço infinito*:

Uma recta, semirecta ou segmento de recta, que apresente (...)'s será denominado de *sincopado*[5]. Na figura acima, pode-se considerar que o segmento sincopado $\overline{PQ}$ pertence à recta sincopada l. Obtém-se a recta l a partir do feixe l_i, fazendo um "varrimento" na ordem $\prec$. Assim as duas ordens, (acima-abaixo, direita-esquerda) convertem-se numa única ordem, total. A *síncope* (...) ou *lanço infinito,* de l, representa uma "colagem" de duas rectas consecutivas (na ordem acima-abaixo), no infinito.[6]

A generalização $\mathcal{V}_n$ do modelo $\mathcal{V}_2$, indicada na secção anterior, reflecte-se no modelo de rectas sincopadas, da seguinte maneira: pode-se considerar rectas de rectas sincopadas (aparecendo síncopes de segunda, terceira, ..., n-ésima ordem, (... ...), (... ... ...), ...), para espaços cartesianos ambiente de dimensões $3, 4, ..., n-1...$, respectivamente (figura abaixo):



Rectas, semirectas, segmentos, com sincopes de, no máximo, ordem n, dizem-se rectas, semirectas, segmentos, sincopados de ordem n, ou rectas n-sincopadas, respectivamente. Para simplicidade da linguagem, nos casos em que não se compromete a clareza, utilizam-se as expressões "recta sincopada" e "recta multi-sincopada" para significar uma recta com n-síncopes, $n > 0$; noutros casos, a expressão "recta sincopada" designará uma recta com uma síncope. De igual modo se substituirá a expressão "1-síncope" por "síncope".

10.3.2 Generalidades sobre o modelo

Introdução

Para se fazer geometria com a recta sincopada, com algum interesse, vai-se adoptar os axiomas de continuidade de Veronese. Assim, o modelo da recta sincopada, em que se

[4] Isto permite considerar, no plano, vários feixes, paralelos ou não.

[5] Note-se que "síncope" é um termo não definido. Trata-se, nesta geometria, de enriquecer a linguagem (e as imagens) com um novo substantivo, correspondente ao predicado "sincopado", e derivados.

[6] Observe-se que, no caso de ser $K = \mathbb{R}$, portanto, um corpo arquimediano, as rectas sincopadas serão, D-contínuas na vizinhança linear de um ponto finito e não D-contínuas globalmente, pois "os pontos de colagem das rectas no infinito" são estranhos ao alcance do axioma de Dedekind. Por outro lado, se se considerar que esses "pontos" passam a estar incluidos na recta, esta passa a ser uma extensão da recta arquimediana, e conterá elementos estranhos a $\mathbb{R}$.

vai trabalhar, basea-se nos axiomas (convenientes) da geometria absoluta de Hilbert, mais os axiomas de continuidade linear de Veronese. Trata-se pois pois dum modelo Hilbert-veronesiano (H-V).

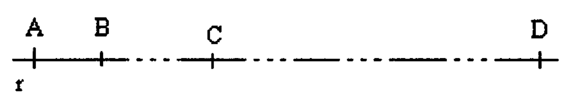
Para maior simplicidade, vai-se considerar rectas sincopadas de ordem um, num plano ordinário[7]. Na prática trata-se de considerar, num plano usual (no sentido cartesiano real, por exemplo) rectas 1-sincopadas ilimitadas, que representam planos usuais de rectas não sincopadas, segundo a correspondência[8]:

$$\left.\begin{array}{c}\text{feixe plano de rectas}\\ \text{não sincopadas}\\ \text{(pontos não linearmente ordenados)}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{recta sincopada}\\ \text{(pontos linearmente ordenados)}\end{array}\right.$$

Os elementos desta geometria são:
— Os pontos usuais;
— Rectas sincopadas;
— Planos usuais;
— Planos cartesianos sincopados.

Ordens de grandeza na recta sincopada

Seja r uma recta multi-sincopada e A, B dois pontos de r, tais que o segmento $\overline{AB}$ não é sincopado.



Em relação ao comprimento dos seus segmentos, uma recta sincopada possui várias ordens de grandeza: segmentos infinitamente pequenos, infinitamente grandes e limitados. A questão das ordens de grandeza é posterior a uma fixação de uma escala ou unidade. Por exemplo, se se definir que um segmento unidade é um segmento não sincopado, como $\overline{AB}$ (figura acima), tem-se que qualquer segmento sincopado, digamos $\overline{AC}$ é infinitamente grande em relação a $\overline{AB}$, e a ordem de grandeza desse infinitamente grande depende do número de síncopes de $\overline{AC}$, bem como da sua ordem. Reciprocamente, se se fixar como unidade um segmento $\overline{AD}$ com um número finito fixo de síncopes, digamos, k, qualquer segmento não sincopado[9] é infinitamente pequeno (figura acima), de coeficiente k em

[7] O que é equivalente a trabalhar com um modelo sincopado de ordem dois — existente portanto num espaço tridimensional —, mas não permitindo a "compactificação" resultante da "colagem" no infinito das rectas 1-sincopadas.

[8] Observe-se que este método é na prática uma redução de dimensão topológica usual: cada recta 1-sincopada é um plano usual. Aplicando o mesmo método, pode-se "projectar" num plano usual rectas sincopadas de ordem dois, três, n, correspondentes a espaços usuais de dimensão 3, 4 e $n+1$, respectivamente.

Quando se estudar bem as "leis" destas projecções, vai-se, sem dúvida, compreender e intuir melhor os espaços usuais n-dimensionais.

[9] No quadro das rectas sincopadas, um segmento sincopado será uma segmento com apenas uma síncope (ver definição mais adiante).

relação a $\overline{AD}$. Por outro lado um segmento com uma 1-sincope, como $\overline{AC}$, é finito em relação a $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} \approx k\overline{AC}, \quad k \in N.$$

Neste ponto convém fazer as seguintes observações: é evidente que um segmento não sincopado pode ser dividido num número n tão grande quanto se queira de sub-unidades. No caso de esse número n ser infinito actual de ordem 1, $\overline{AB}$ teria uma síncope (e n síncopes para um infinito de ordem n). Este facto permitiria ter em presença 3 (ou mais) ordens de grandeza: $\overline{AB}$ finito, $\overline{AC}$ infinitamente grande em relação a $\overline{AB}$ e , digamos $\overline{AO}$, *ip* em relação a $\overline{AB}$. Tal é a complexidade do quadro geométrico das rectas sincopadas.

A relação arquimediana

Antes de dar continuidade ao estudo da estrutura geométrica da recta sincopada, vai-se rever um conceito fundamental: o de relação arquimediana num grupo ordenado, introduzido por Hahn.

Definição 10.1 *(relação arquimediana) Seja G um grupo ordenado. Em G pode-se estabelecer a relação arquimediana Arq do seguinte modo:*

$$\forall a, b \in G, Arq(a, b) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : na > b.$$

Ora Arq é uma relação de equivalência em G. Com efeito é evidentemente reflexiva, é simetrica pois se existe n tal que $na > b$ então qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$ tem-se $mb > a$, pelo que

$$Arq(a, b) \Leftrightarrow Arq(b, a);$$

também é transitiva, pois se $na > b$ e $mb > c$ tem-se que $nma > c$, isto é,

$$Arq(a, b) \wedge Arq(b, c) \Rightarrow Arq(a, c)$$

Definição 10.2 *(grupo arquimediano) Um grupo ordenado G é arquimediano se*

$$\forall a, b \in G, Arq(a, b)$$

ou, o que é o mesmo

$$\forall a, b \in G, \exists n \in \mathbb{N} : na > b \quad \textit{(Axioma de Arquimedes).}$$

Exemplo 10.1 *É o caso dos conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ tal como usualmente algebrizados e ordenados.*

Definição 10.3 *(grupo transarquimediano) Um grupo ordenado G em que existem pares de elementos que verificam a relação arquimediana, diz-se transarquimediano ou não-arquimediano:*

$$\exists a, b \in G : Arq(a, b)$$

Exemplo 10.2 *É o caso de $\mathbb{R}$ da análise não-standard, e de $\mathbb{C}$ com a ordem lexicográfica.*

É claro que todo o grupo arquimediano é transarquimediano.

Exemplo 10.3 *Um exemplo clássico é o seguinte: seja $K = Q(x)$ o corpo dos quocientes de polinómios com coeficiente racional. $Q(x)$ pode ser ordenado da seguinte maneira: sejam $p(x)$ e $q(x)$ elementos distintos de $Q(x)$, escritos na forma irreductível, isto é, $p(x) = f(x)/g(x)$, não tendo f e g factores comuns para além de constantes. Idem para $q(x)$. Neste caso existe um número positivo x_0 tal que uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(i) Se $x > x_0$, então $p(x) > q(x)$;

(ii) Se $x > x_0$, então $p(x) < q(x)$.

Se (i) for verdadeira, põe-se $p \succ q$, e se (ii) for verdadeira põe-se $p \prec q$. O corpo $(Q(x), \prec)$ é não-arquimediano.

Definição 10.4 *(classes arquimedianas) Seja G um grupo ordenado. A relação Arq divide G em classes de equivalência, chamadas classes arquimedianas de G.*[10].

Definição 10.5 *([Hahn] Tipo de classe de um grupo) Chama-se tipo de classe (arquimediano) de G ao tipo de ordem (cantoriano) de G/Arq.*

Um grupo arquimediano é um grupo de tipo de classe 1.

Hahn demonstra também, recorrendo ao princípio da boa ordem o

Teorema 10.1 *(Hahn 1907) As grandezas de um sistema não-arquimediano arbitrário de grandezas (isto é, um grupo totalmente ordenado, abeliano) podem ser expressas como números complexos*[11] *cujas unidades formam um conjunto ordenado Γ, e cujo tipo de ordem é o tipo de classe do sistema transarquimediano.*■

Exemplo 10.4 *O conjunto dos números complexos tem tipo de classe finito igual a 2. O conjunto $\mathbb{H}$ dos quaterniões de Hamilton também tem tipo de classe finito, igual a 4. O "conjunto" **No** de Conway tem tipo de classe infinito.*

Proposição 10.1 *(Hahn) Existem sistemas não-arquimedianos de qualquer tipo de classe arbitrariamente fixado.*■

Proposição 10.2 *(Bettazzi 1890) Qualquer sistema não-arquimediano de grandezas, de tipo de classe finito, pode ser representado aritmeticamente através de números complexos com n unidades*[12].■

Definição 10.6 *(grupo anti-arquimediano) Um grupo ordenado G em que não há nenhum par que verifica a relação arquimediana diz-se um grupo anti-arquimediano:*

$$\forall a, b \in G, \neg Arq(a, b)$$

onde "$\neg$" representa negação.

[10] O conceito foi introduzido simultaneamente por Veronese e Bettazzi, mas a denominação pertence a Newman (1947), embora se possa, sem complexos, atribuir a mesma a Hans Hahn, 1907, que elaborou toda a teoria a partir dos seus predecessores.

[11] Séries formais.

[12] O termo "unidade" é usado no sentido de unidade de medida, nada tendo a ver com a noção de unidade de uma estrutura algébrica. Por exemplo: em $\mathbb{C}$ a unidade real é 1 e a unidade imaginária é i. Porém as unidades dos grupos $(\mathbb{C}, +)$ e $(\mathbb{C}, \times)$ são zero e um, respectivamente.

Exemplo 10.5 *Seja Γ o conjunto das unidades das classes arquimedianas de um grupo ordenado transarquimediano G. Então Γ é um grupo ordenado (subgrupo de G, com a ordem induzida) e constitui um exemplo de um grupo anti-arquimediano.*

10.3.3 Estrutura geométrica da recta sincopada

Tome-se uma recta sincopada r, contínua à Veronese, dotada de uma estrutura de grupo ordenado pelos axiomas da geometria absoluta de Hilbert, e cujos elementos são segmentos definidos por pares de pontos. Marque-se uma origem O e um ponto A, sobre r. Tome-se $\overline{OA}$ como unidade. Tem-se a

Definição 10.7 (campo de um ponto) *Todos os pontos P de r, para os quais $\overline{OP}$ pertence à mesma classe arquimediana que $\overline{OA}$, constituem o campo arquimediano de O, (ou simplesmente, campo de O) em relação à unidade $\overline{OA}$. O campo de um ponto O em relação a um segmento unidade $\overline{XY}$, é notado $C_{\overline{XY}}(O)$. Quando a unidade é subentendidade, nota-se apenas $C(O)$.*

Vejamos-se alguns resultados de Veronese sobre campos:

Teorema 10.2 *(Veronese) Dadas dois campos de unidades $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ respectivamente tais que*

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &< \overline{AB} \quad (1) \\ n\overline{A'B'} &> \overline{AB} \quad (2) \end{aligned}$$

e com $n \in \mathbb{N}$, os campos das duas escalas são iguais.■

Observação: este teorema mostra que todos os segmentos da mesma classe arquimediana podem ser tomadas como unidade dessa classe, resultando sempre o mesmo campo.

Corolário 10.1 *Dados dois campos com as unidades $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ respectivamente, tal que sejam satisfeitas as condições (1) e (2) do teorema anterior, e $A = A'$, então os dois campos são iguais.*■

Corolário 10.2 *Dados dois campos de um ponto O, se a unidade de um deles é múltiplo da unidade do outro ou se um contém um número m de submúltiplos do outro então esses dois campos são iguais.*■

Definição 10.8 *(campos de mesma espécie) Dados dois pontos P e Q, com campos gerados por unidades u e v, respectivamente, tal que u é múltiplo ou divisor de v, esses dois campos dizem-se de mesma espécie.*

Teorema 10.3 *(Veronese) Dada uma escala de unidade $\overline{AD}$ sobre a recta r e uma outra de unidade $\overline{A'B}$ de origem A', se não existir um número n tal que*

$$n\overline{AD} < \overline{A'B} \text{ se for } \overline{AD} < \overline{A'B}$$

ou então

$$n\overline{A'B} < \overline{AD} \text{ se for } \overline{AD} > \overline{A'B}$$

o campo da escala de unidade $\overline{AD}$ não é igual ao campo da escala de unidade $\overline{A'B}$.■

Teorema 10.4 *(Veronese) Se o campo da escala de unidade* $\overline{A'B'}$ *é igual ao de* $\overline{AB}$, *existe sempre um número n tal que*

$$(n-1)\overline{A'B'} \leq \overline{AB} < n\overline{A'B'} \ se \ A'B' < \overline{AB}.$$

■

Convém observar o seguinte: dada uma recta sincopada r, um ponto O sobre ela e um segmento não sincopado $\overline{OB}$ tomado como unidade, seja $\overline{OA}$ um segmento menor que $\overline{OB}$, mas tal que $\overline{OA}$ não pertence ao campo de $\overline{OB}$[13]. Nesse caso tem-se forçosamente que $\overline{OA}$ é *ip*. Isto é,

Definição 10.9 *(campo ip e campo ig de um ponto) Numa recta sincopada* r, *de unidade* $\overline{AB}$, *dados os pontos* O, X, *tem-se:*

i) $r \ni X$ *pertence ao campo ip de* O *se* $|OX|$ *for ip. O campo ip de* O *nota-se* $C_{ip}(O)$.

ii) $r \ni X$ *pertence ao campo ig de* O *se* $|OX|$ *for ig. O campo ig de* O *nota-se* $C_{ig}(O)$.

Em virtude dos axiomas de continuidade HV14 e HV15, tem-se

Proposição 10.3 *Numa recta sincopada, para uma unidade escolhida, um ponto* P *tem três campos: um campo ip (halo de* P*), um campo arquimediano (galáxia principal de* P*) e um campo ig (galáxia de* P*).*■

Ainda como consequências dos axiomas de continuidade tem-se

Proposição 10.4 *Existe sempre, pelo menos, um ponto fora do campo arquimediano de um ponto de* r *qualquer previamente fixado.*■

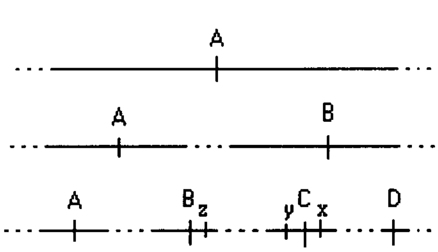
Têm-se também as proposições

Proposição 10.5 *Todos os campos de todos os pontos são isomorfos, a menos das escalas.*■

Também, pela definição de campo e pelos axiomas da geometria absoluta, tem-se

Proposição 10.6 *Dados dois pontos quaisquer de uma recta sincopada eles possuem campos de mesma espécie, disjuntos.*■

Assim uma recta sincopada pode ter os seguintes aspectos, passando do local ao global:



etc..., e nunca terá o aspecto "compacto".

[13]Pois dada a ausência do axioma de Arquimedes, não há submúltiplos tão pequenos quanto se queira.

Segmentos sincopados

Definição 10.10 *(segmento k-n-sincopado)Um segmento $\overline{AB}$ é dito $k-n$-sincopado se possuir k síncopes de ordem n.*

Por uma questão de "imagem visual", num segmento $\overline{AB}$ vai-se chamar *ilha* de um ponto $P \in \overline{AB}$ a $C_{ip}(P) \cup C(P)$.

Um segmento $\overline{AB}$, $k-1$-sincopado, com um ponto P_i identificado em cada uma das $k+1$ ilhas, $P_0 = A, P_1, ..., P_k = B$, é notado por uma lista ordenada

$$\overline{AB} = (A = P_0, P_1, ..., P_k = B)$$

Seja $\overline{AB}$ um segmento com uma síncope de ordem 1. É evidente que a síncope fica fora do campo de A e fora do campo de B. Como esses campos são criados pelo mesmo segmento unidade, são geometricamente "isomorfos". Assim, a síncope (...) está "equidistante" de A e de B.

Partes standard e não standard de um segmento sincopado Nesta sub-secção vai-se introduzir o predicado *standard* nesta geometria, associando-o às sincopes "(...)".

Definição 10.11 *(segmento stnadard) Numa recta sincopada, um segmento diz-se standard se não for sincopado.*

Definição 10.12 *(partes standard e não-standard de um segmento) Seja $\overline{AB}$ um segmento sincopado, em relação a uma unidade "standard" $u = \overline{AC}, A - C - B$. Chama-se parte standard de $\overline{AB}$, notado $st(\overline{AB})$ ao segmento*

$$(C(A) \cap \overline{AB}) \cup (C(B) \cap \overline{AB}).$$

Chama-se de parte não-standard de $\overline{AB}$ ao segmento

$$nst(\overline{AB}) = \overline{AB} - st(\overline{AB}).$$

Para um segmento $\overline{CD} = (P_0, P_1, ..., P_k)$ $k-1$-sincopado, tem-se

$$nst(\overline{CD}) = \cup_{i=0}^{k} nst(\overline{P_i P_{i+1}})$$

Nota 10.1 *É evidente que a síncope (...) de $\overline{AB}$ está contida em $nst(\overline{AB})$.*

Definição 10.13 *(parte standard esquerdo e direito de um segmento) Seja $\overline{AB}$ um segmento sincopado, em relação a uma unidade "standard" $u = \overline{AC}, A - C - B$. Ao segmento $C(A) \cap \overline{AB}$ dá-se o nome de parte standard esquerdo de $\overline{AB}$ e escreve-se*

$$st^-(\overline{AB}) = C(A) \cap \overline{AB}.$$

Ao segmento $C(B) \cap \overline{AB}$ dá-se o nome de parte standard direito de $\overline{AB}$ e escreve-se

$$st^+(\overline{AB}) = C(B) \cap \overline{AB}.$$

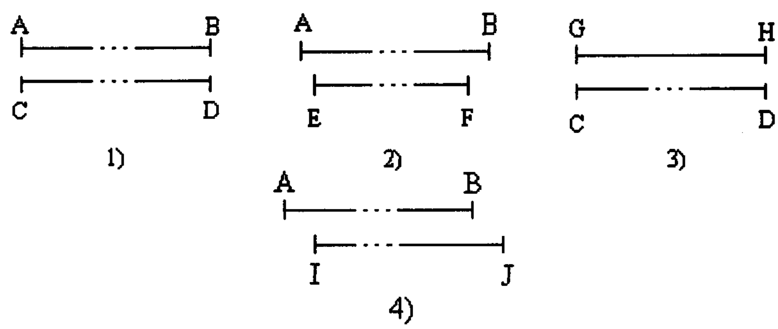
Nota 10.2 *É evidente que nenhuma parte (ponto ou segmento) de $st^+(\overline{AB})$ é comutável com nenhuma parte de $st^-(\overline{AB})$, isto é, não se pode passar (por translação, por exemplo) uma parte dum segmento sincopado, da esquerda da síncope para a direita, e vice versa.*

De forma idêntica se definem as partes standard e não-standard de uma recta $\overleftrightarrow{r}$, duma semirecta $\overrightarrow{AB}$, dum raio $\overrightarrow{r}$, ou de qualquer subconjunto da recta sincopada, fixada uma unidade standard de comprimento.

Na comparação de dois segmentos sincopados, é natural que se tenha em conta as partes st e nst de ambos.

Congruências de segmentos sincopados A ideia intuitiva que está por de trás do conceito de congruência é a de comprimento. Ora, em virtude de uma certa "elasticidade" na representação dos segmentos sincopados, muita dessa intuição vai perder-se, na extensão do conceito.

Para a extensão da relação de congruência aos segmentos sincopados, há que considerar vários casos, que se ilustram na figura abaixo:



Intuitivamente, tem-se que:

Caso 1) $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$; Caso 2) $\overline{AB}$ não é congruente com $\overline{CD}$; Caso 3) $\overline{GH}$ não é congruente com $\overline{CD}$; caso 4) $\overline{IJ}$ não é congruente com $\overline{AB}$[14].

Duma maneira geral, para se analisar a congruência de dois segmentos sincopados, tem-se de olhar para a sua "estrutura geométrica", isto é, para os campos dos seus pontos, ou seja, para as suas partes standard e não-standard:

Definição 10.14 (congruência de segmentos sincopados) *Os segmentos sincopados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes sse cumpre as duas seguintes condições:*

i) $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ *(no sentido hilbertiano)*

ii) $st(\overline{AB}) = st(\overline{CD})$.

Nota 10.3 *Esta definição é também válida para a classe dos segmentos $k-n$-sincopados, $k, n \in \mathbb{N}_0$, com as devidas adaptações.*

Exemplo 10.6 *Na figura acima, $\overline{AB}$ não é congruente com $\overline{EF}$ pois não são congruentes no sentido hilbertiano; $\overline{GH}$ não é congruente com $\overline{CD}$ pois, embora sejam congruentes*

[14] Pode-se dizer que esses pares de segmentos "não coincidem ponto por ponto".

no sentido hilbertiano, $\overline{GH}$ *tem parte não-standard vazia, enquanto que* $\overline{CD}$ *tem parte não-standard não vazia (é sincopado);* $\overline{IJ}$ *não é congruente com* $\overline{AB}$ *pois, embora sejam congruentes no sentido hilbertiano, têm partes standard diferentes*[15].

Proposição 10.7 *Nenhum segmento é congruente com uma sua parte própria.*

Dem. Caso contrário haveria contradição com i) da definição de congruência.■

Divisão de um segmento: escalas racionais Dado um segmento sincopado $\overline{AB}$ pretende-se dividi-lo em $n \in \mathbb{N}$ partes (iguais ou desiguais), colocando (ou identificando) pontos $C, D, \ldots$ entre A e B.

Suponha-se, em primeiro lugar que $n = 2$. Pode-se ter um e um só dos três casos seguintes:

$$\begin{array}{rcl} (i) & P & \in & C(A) \cap \overline{AB}; \\ (ii) & P & \in & C(B) \cap \overline{AB}; \\ (iii) & P & \notin & C(A) \cap \overline{AB} \wedge P \notin C(B) \cap \overline{AB}. \end{array}$$

Nos casos (i) e (ii) o segmento $\overline{AB}$ fica dividido em duas partes não congruentes, herdando uma delas a síncope; No caso (iii) $\overline{AB}$ fica dividido em duas partes congruentes, simétricas e ambas sincopadas. Como os campos (para uma unidade fixada) de quaisquer pontos, são isomorfos, o campo de C é isomorfo aos campos de A e de B, pelo que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ são sicopados e congruentes, mas nenhum deles congruente com $\overline{AB}$.

O mesmo processo pode-se iterar n vezes, obtendo-se a divisão de $\overline{AB}$ em $2n$ partes congruentes entre si, dois a dois.

Para a divisão em n partes, não necessariamente congruentes, mas todas sincopadas, aplica-se o processo as vezes necessárias e nos locais pertinentes[16].

Será possível dividir um segmento sincopado num número n qualquer de partes congruentes entre si?

A resposta é negativa, para n finito[17].

Introduz-se a seguir a noção de potência dum segmento sincopado:

Definição 10.15 *Um segmento* $k - n$*-sincopado,* $n \in \mathbb{N}_0$*, diz-se ter potência* k*.*

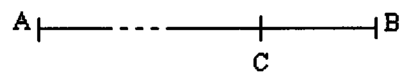
Pode-se estabelecer no plano uma relação de equipotência entre segmentos, que será obviamente uma relação de equivalência, representada pelo símbolo $\cong$. A equipotência entre dois segmentos implica a existência das mesmas ordens de grandeza em ambas. A recíproca porém é falsa.

[15] Só se poderiam igualar contradizendo a nota 10.2.

[16] Uma questão interessante é a seguinte: construir um algoritmo que coloque n novos pontos nos locais mais adequados de modo que, quando n tende para o infinito, os segmentos sejam todos quase-congruentes, isto é, torne a sua diferença quase nula.

[17] A única possibilidade de fazer isso consiste na aplicação de um axioma de redução tipo carnotiano, que permita desprezar as diferenças infinitesimais entre as partes: todos os segmentos n-sincopados são "congruentes" entre si. Naturalmente um tal enunciado traria desgostos, como por exemplo, um segmento sincopado poder ser congruente com uma sua parte própria, contradizendo os axiomas da geometria absoluta. Contudo é algo que se pode fazer, recorrendo aos devidos ajustamentos.

Todo o segmento sincopado é equipotente com um número $n \in \mathbb{N}$ de suas partes próprias:



Tem-se

$$\overline{AB} \cong \overline{AC}; \quad \overline{AC} \subsetneq \overline{AB}.$$

É evidente que a potência dum segmento $k - n$-sincopado é menor ou igual à potência de uma sua parte própria.

Recta, raio e semirecta sincopados

A diferença entre uma recta e um segmento é o facto de aquela não ter extremos. O mesmo acontece para as rectas sincopadas. Uma semirecta sincopada define-se de forma idêntica.

Uma recta não sincopada é uma ilha.

Um raio sincopado é uma recta sincopada orientada.

Topologia da recta sincopada

O conceito de campo de um ponto P numa recta sincopada r define, como o de halo de um ponto visto no capítulo 5, de forma natural, um conceito de proximidade. Assim

Definição 10.16 *Numa recta sincopada, um ponto P é:*
(i) Arq-próximo de Q se $P \in C(Q)$;
(ii) ip-próximo de Q se $P \in C_{ip}(Q)$, isto é, P é i-próximo de Q;
(iii) Q é infinitamente distante de P se $Q \notin (C_{ig}(P) \cup C(Q))$.

Nota 10.4 *Intuitivamente P e Q estão Arq-próximos se, a partir de P se pode alcançar Q, com um número finito de saltos compostos por múltiplos ou submúltiplos do segmento unitário. O sistema de todas as vizinhanças (ip, Arq e ig) dos pontos de r define uma topologia (ultramétrica) τ em r.*

Definição 10.17 *Numa recta sincopada r, $A, B \in r$ dizem-se separados se $A \notin C_{ip}(B)$.*

É fácil ver que

Teorema 10.5 *Os pontos standard de uma recta sincopada são separados dois a dois.*

Isto é,

Corolário 10.3 *A recta sincopada é totalmente desconexa*[18] *(do ponto de vista geométrico), ou seja, é um conjunto separado para a topologia referida na nota 10.4.*

[18] No sentido standard ou da continuidade à Dedekind, obviamente.

Campos de segmentos

Seja $\overline{AB}$ um segmento unitário (sincopado ou não) duma recta sincopada r. Cada ponto $X \in \overline{AB}$ tem um campo *ip*, $C_{ip}(X)$, que pode estar ou não incluido em $\overline{AB}$. Têm-se as definições:

Definição 10.18 *Chama-se campo ip do segmento finito* $\overline{AB}$ *ao segmento*

$$C_{ip}(\overline{AB}) = \overline{AB} \cup C_{ip}(A) \cup C_{ip}(B).$$

Definição 10.19 *Dado um segmento de recta* $\overline{AB}$*, numa recta sincopada* r*, chama-se campo de* $\overline{AB}$ *ao segmento* $\zeta\overline{AB}$*,* $\zeta \in \mathbb{N}$*, e nota-se* $C(\overline{AB})$*. Chama-se campo ig de* $\overline{AB}$ *ao segmento* $\xi\overline{AB}$*,* ξ *ig, e nota-se* $C_{ig}(\overline{AB})$*.*

Definição 10.20 $P \in \overline{AB}$ *é ponto interior de* $\overline{AB}$ *se* $C_{ip}(P) \subset \overline{AB}$*.*

Definição 10.21 *O interior de* $\overline{AB}$*,* $int(\overline{AB})$ *é o conjunto dos pontos interiores de* $\overline{AB}$*.*

Definição 10.22 *Um segmento* $\overline{AB}$ *diz-se aberto se* $\overline{AB} = int(\overline{AB})$*, isto é*

$$\overline{AB} = \bigcup_k C_{ip}(P_k), P_k \in \overline{AB}.$$

Definição 10.23 *Numa recta* r*,* $\overline{AB}$ *é fechado sse* $\overline{AB}^c$ *é aberto.*

Repare-se que a definição de segmento fechado exige o mergulho do mesmo numa recta, ao contrário da definição de segmento aberto.

Métricas na recta sincopada

No campo de um ponto pode-se recorrer às métricas habituais, incluindo a euclidiana, a qual é baseada no conceito de congruência de segmentos, segundo Hilbert. A nível global, numa recta ou num plano sincopado é necessário definir uma métrica baseada no conceito de congruência de segmentos sincopados:

Definição 10.24 *(Unidade sincopada) Seja* r *uma recta sincopada de unidade* u*. Uma unidade sincopada* $\overline{AB}$ *é um segmento sincopado* $\overline{AB}$*, isto é, tal que* $C(A) \cap C(B) = \emptyset$*.*

Nota 10.5 *O termo unidade, sem mais qualificativos, será utilizado em relação à unidade principal geradora da escala (não sincopada).*

Nota 10.6 *Dada uma unidade* u*, há infinitas maneiras escolher uma unidade sincopada* $\overline{AB}$ *na escala gerada por* u*.*

Definição 10.25 *(distância na recta sincopada) Seja* r *uma recta sincopada de unidade* u *e unidade sincopada* u'*, e* $P, Q \in r$*. A distância de* P *a* Q*, é a função*

$$d(P, Q) = nu' + mu,$$

onde n *é a potência de* $\overline{PQ}$ *e* $mu = \overline{PQ} - nu'$*.*

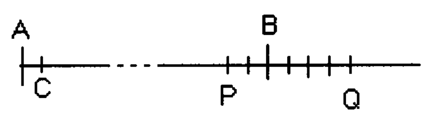
Proposição 10.8 *Seja d a função que associa a um par de pontos (P, Q) duma recta sincopada r, um número não negativo, $d(P, Q)$ tal que*
i) $d(P, Q) =$ distância euclidiana de P a Q, se $Q \in C(P)$;
ii) $d(P, Q) =$ potência do segmento $\overline{PQ}$, se $Q \notin C(P)$.
Então $d(P, Q)$ é uma distância, ultramétrica em r.■

Observe-se que, como $C_{ip}(P) \subset C(P)$, pode ser $Q \in C_{ip}(P)$ (munido de distância euclidiana) o que dá, nesse caso, $d(P, Q) = ip \approx 0$. Em particular, se $Q = P$, $d(Q, P) = 0$. Por outro lado, se $Q \notin C(P)$ é claramente $Q \in C_{ig}(P)$, donde $\overline{QP}$ é nesse caso um segmento sincopado.

Suponhamos agora que se tem $Q \in C(R)$, e $R \notin C(P)$. Tem-se que

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$$

As medidas das distâncias entre pontos não do mesmo campo e as de pontos do mesmo campo são feitas em unidades diferentes. Assim, por exemplo, na figura abaixo, designando as unidades das primeiras distâncias por $e_1 = \overline{AB}$ e a unidade sincopada por $e_2 = \overline{AC}$,



tem-se: $d(A, B) = e_1$; $d(A, C) = e_2$;$d(A, P) = e_1 - 2e_2$; $d(A, Q) = e_1 + 4e_2$; $d(B, Q) = 4e_2$ e $d(P, Q) = 6e_2$

É claro que a unidade e_2 é ip em relação a e_1 pelo que, a escala finita (de unidade sincopada), pode-se considerar

$$d(A, B) \approx d(A, P) \approx d(A, Q),$$

e tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N}, ne_2 < e_1$$

Observe-se que o campo $C(P)$ de um ponto P em relação a uma dada unidade é equivalente a uma "bola" de raio finito (nessa unidade) centrada em qualquer dos seus pontos. Por outro lado, o campo ip, $C_{ip}(P)$, é equivalente a uma bola de raio ip, tendo sentido a equivalência:

$$C_{ip}(P) \leftrightarrow hal(P)$$

São válidas, para aqui, todas as consequências métricas, topológicas e geométricas de d ser uma ultramétrica, vistas no capítulo 9. Como exemplo, tem-se a

Definição 10.26 *Chama-se comprimento de um segmento $\overline{AB}$ ao número $d(A, B)$ e nota-se, como no precedente, $|AB|$.*

Se $\overline{AB}$ for ip, então $d(A, B) \approx 0$ e $|AB|$ é quase nulo em relação à unidade adoptada.

Nota 10.7 *Note-se que:*

i) O comprimento de um segmento só é um número real se $\overline{AB}$ *não for sincopado. Caso contrário será um número "complexo" com unidades que representam grandezas de mesma espécie, porém não comensuráveis.*

ii) Em qualquer caso o comprimento de um segmento é um número não negativo.

10.3.4 Geometria plana

A seguir, vai-se, dum ponto de vista puramente descritivo, explorar alguns aspectos da geometria plana sincopada.

O plano sincopado

O plano sincopado é um plano surdo. A sua estrutura é inteiramente definida pelas unidades de comprimento adoptadas.

Campos planos de um ponto

Seja dado, num plano sincopado π, um segmento unitário u. Um ponto $P \in \pi$ tem três campos planos, a saber:

— Campo arquimediano, $C^{\pi}(P) = \{X \in \pi : X \in C(P)$;

— Campo *ip*, $C^{\pi}_{ip}(P) = \{X \in \pi : X \in C_{ip}(P)\} = hal^{\pi}(P)$[19];

— Campo *ig*, $C^{\pi}_{ig}(P) = \{X \in \pi : X \in C_{ig}(P)\} = gal^{\pi}(P)$[20].

Paralelismo e intersecções

A questão do paralelismo coloca-se a dois níveis: o local e o global. Têm-se as definições seguintes:

Definição 10.27 *(paralelismo local) Num plano* π, *duas rectas sincopadas* $r, s \in \pi$ *são paralelas, no campo de um ponto* $P \in r$, *se*

$$\forall A, B \in C(P), A \notin C_{ip}(B), C^{\pi}_{ip}(A) \cap s = C^{\pi}_{ip}(B) \cap s = \emptyset \qquad (1)$$

ou

$$\forall A, B \in C(P), A \notin C_{ip}(B), C^{\pi}_{ip}(A) \cap s = C^{\pi}_{ip}(B) \cap s \neq \emptyset. \qquad (2)$$

Nesse caso nota-se

$$r \parallel_P s.$$

É claro que, no caso (2) está incluida a coincidência de s com r.

Corolário 10.4 $r \parallel_P s \Leftarrow s \cap C^{\pi}(P) = \emptyset.$ ■

[19] Halo plano no plano π.

[20] Galáxia plana no plano π.

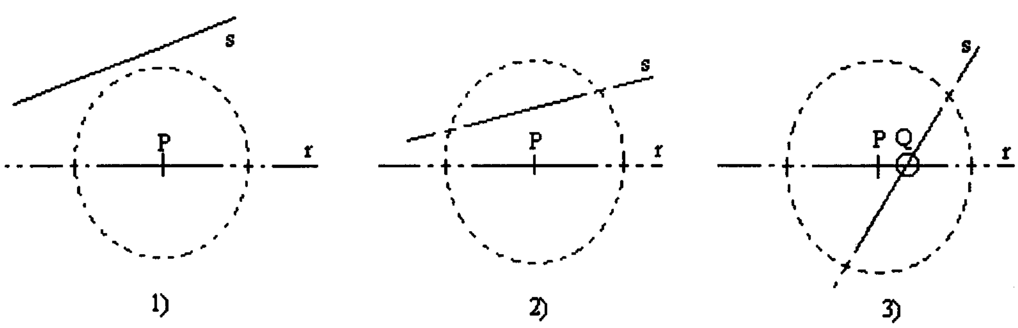
Proposição 10.9 *É condição necessária e suficiente para que $r, s \in \pi$ se intersectem no campo $C(P)$ de um ponto P de r, que*

$$\exists A, B \in C(P), A \notin C_{ip}(B), C_{ip}^{\pi}(A) \cap s = \emptyset \wedge C_{ip}^{\pi}(B) \cap s \neq \emptyset.$$

■

Corolário 10.5 *Se r e s são concorrentes no campo de $P \in r$, então $s \cap C^{\pi}(P) \neq \emptyset$.*■

As figuras abaixo ilustram as situações:



Sempre colocando-se em P, tem-se que caso 1) não há intersecção de r, no campo de P, com s, pois nenhum ponto de s pertence ao campo de P, pelo que $r \parallel_P s$. No caso 2), apesar de $C(P) \cap s \neq \emptyset$, não existe nenhum ponto $Q \in C(P)$ tal que $C_{ip}^{\pi}(Q) \cap s \neq \emptyset$, pelo que se tem em $C(P), r \parallel_P s$. No caso 3) tem-se que, no campo de P, r e s são concorrentes.

São pertinentes as seguintes observações:

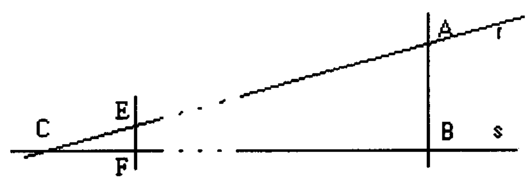
(i) No caso de paralelismo 2) todos os pontos de $C(P)$ são centros da bola arquimediana definida por P. O mesmo acontece com todos os pontos de $s \cap C(P)$. Assim, o significado da posição relativa das duas rectas só é intuitivamente relevante, à escala arquimediana de P.

(ii) No caso 3), a incidência de s em $C(P)$ é identificada por uma zona no interior do campo arquimediano de P. Mas não há nenhum meio arquimediano de localizar com exactidão o ponto de intersecção. Contudo esse ponto existe pelos axiomas da geometria absoluta, conjugados com a axioma de continuidade de Veronese.

(iii) Pelos axiomas da Geometria absoluta, se duas rectas tiverem mais que um ponto (standard) de intersecção então são coincidentes.

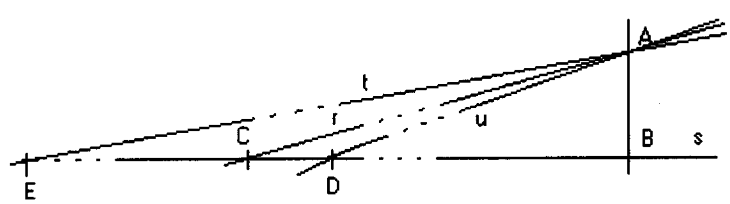
Sejam r e s duas rectas intesectantes não coincidentes, isto é, com um único ponto comum. Localmente o ponto de intersecção P, define em r e em s, dois campos com um único ponto comum, P.

A questão da posição relativa global de duas rectas sincopadas que têm, numa escala fixada, um ponto comum, é equivalente ao problema das paralelas. Ora, a questão das paralelas, no sentido global, toma a seguinte forma gráfica:



se se aceitar o postulado euclidiano das paralelas segundo o qual, duas rectas r e s, perpendiculares a um segmento finito[21] (lm) $\overline{AB}$ não encontram-se num ponto finito (formulação de Playfair). Suponhamos que se encontram num ponto do infinito, digamos C. Se se colocar em E, com $\overline{EF}$ um segmento lm, tem-se que $\overline{AB}$ é forçosamente ig^{22}, e r é globalmente concorrente com s. Colocando-se em B, com $\overline{AB}$ um ap, tem-se que $\overline{EF}$ é ip e $r \parallel_B s$, $r \parallel_A s$.

De facto, nesse caso, existem vários infinitos e a figura abaixo traduz bem a situação:



É evidente que:

i) por um ponto P exterior a uma recta sincopada r pode passar um número infinito de rectas sincopadas paralelas a r, pelo que o plano sincopado é globalmente hiperbólico;

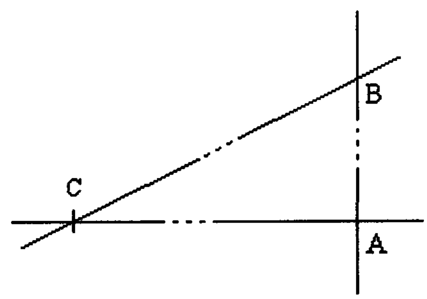
ii) sendo C e D pertencentes a um mesmo campo, as rectas r e u (figura acima) são ambas paralelas a s, quando se se coloca em B (ou em A), o mesmo acontecendo com todas as rectas que passam por A e por pontos desse campo.[23]

[21] Pode-se dizer que, em relação a uma escala fixada, um segmento $\overline{AB}$ é finito se $\overline{AB} \subset C(P)$, com P standard.

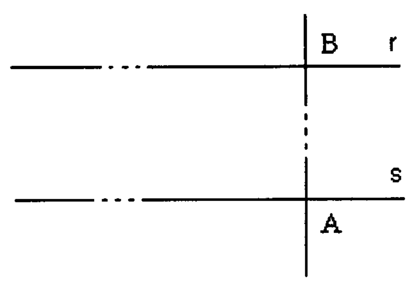
[22] Assim como todas as grandezas fora do campo de $\overline{EF}$.

[23] Do ponto de vista intuitivo, duas rectas paralelas nunca se encontram. O sentido dessa intuitividade é o arquimedianismo. Isto é, numa classe arquimediana, duas rectas paralelas nunca se encontram.

Considerando agora o caso em que o segmento $\overline{AB}$ é sincopado, tem-se, para A, B, C em campos distintos:

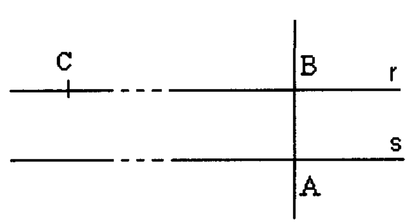


Colocando-se na escala de $\overline{AB}$,[24] tem-se um triângulo $\triangle ABC$. Um paralelismo à escala $\overline{AB}$ ($r \parallel_{\overline{AB}} s$) seria o caso da figura abaixo



onde não há paralelismo local (isto é, no campo do ponto A, por exemplo).

Resta analisar o caso seguinte caso:

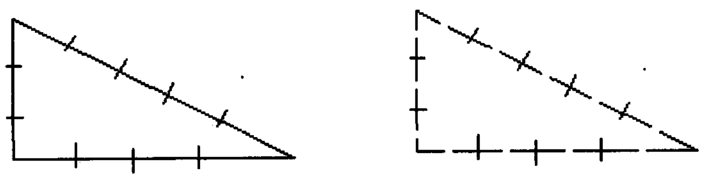


Neste caso há paralelismo à escala de $\overline{AB}$ (que é um segmento *ip* em relação a qualquer unidade sincopada, $\overline{BC}$, por exemplo), e quase-coincidência à escala de um segmento sincopado qualquer.

[24] A escala dum segmento n-sincopado $\overline{PQ}$ é uma escala com uma unidade n-sincopada. Todos os segmentos k-sincopados gerados pela mesma unidade fundamental, são da mesma escala.

Triângulos

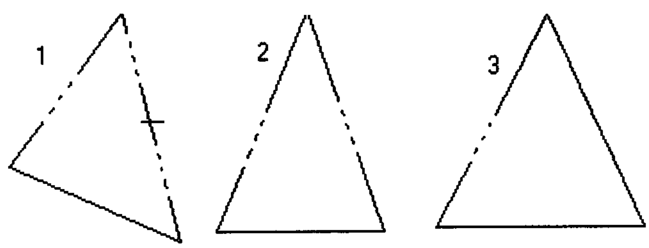
Pode-se ter triângulos com segmentos apenas a uma escala ou unidade, (caso 1)), ou a várias (duas) escalas (caso 2), como na figura abaixo:



1) 2)

A teoria Hilbertiana dos triângulos aplica-se tal qual a estes triângulos, quando se usam as unidades seguintes: um segmento não sincopado (caso 1), ou um segmento sincopado (caso 2).

Alguns triângulos com particular interesse, são:



Os triângulos 1 e 3 são impossíveis, por violarem a desigualdade ultramétrica. A escala 1-sincopada, o triângulo 2 é isósceles. O triângulo da figura seguinte é quase-isósceles:

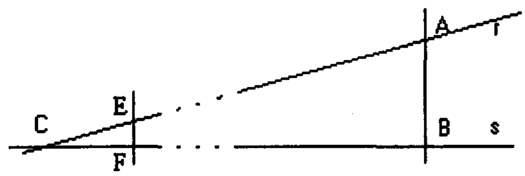
Repare-se que os ângulos da base do triângulo quase-isósceles são quase-congruentes (a figura é enganadora)[25].

Ângulos e segângulos

Quanto aos ângulos, no caso global, há a observar uma característica interessante dos mesmos, nesta geometria, que é o facto de, muitas vezes se comportarem como os ângulos

[25] Observe-se que a noção de amplitude de um ângulo depende das escalas em uso.

lunares de F. Klein (capítulo 2). Com efeito, considere-se a figura abaixo:



Considere-se o triângulo quase isósceles $\triangle ACB$, de base $\overline{AB}$. Quando se se coloca em A, ou em B, o quadrilátero $\square AEFB$, que resulta da truncatura de $\triangle ACB$ por $\overleftrightarrow{EF}$, tem todas as características de um triângulo, de "vértice" igual ao segmento *ip*, $\overline{EF}$. Assim, pode-se considerar nesta geometria, uma nova figura geométrica: um ângulo cujo "vértice" é um segmento *ip*:

$$\angle A\overline{EF}B.$$

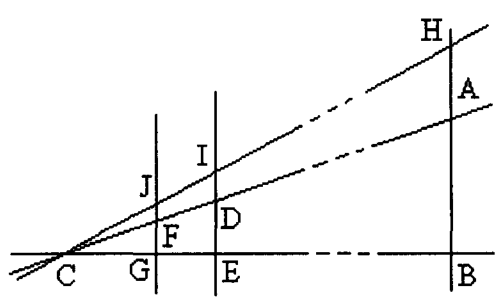
Chame-se *segângulo* a uma tal figura geométrica, de lados $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{FB}$ (E i−próximo de F). Diga-se também que $\angle ACB$ é o *ângulo base* de $\angle A\overline{EF}B$ e $\overline{EF}$ o vértice.

Tal como os ângulos lunares de F. Klein, um segângulo α tem duas partes: uma parte que se vai denominar de *parte linear*, que é constituído pelo segmento *ip* (vértice), notada α', e uma *parte circular*, igual ao ângulo base, notada α^0. Ponha-se

$$\alpha = \alpha^0 + \alpha',$$

onde "+" representa uma soma formal.

A comparação entre segângulos é feita com o auxílio da seguinte figura:



Tem-se:

— Como $\angle ACB < \angle HCB$, considera-se que $\angle A\square B < \angle H\square B$, onde $\square$ representa um segmento *ip* qualquer;

— Como $\overline{FG} < \overline{DE}$, considera-se que $\angle A\overline{FG}B < \angle H\overline{DE}B$.

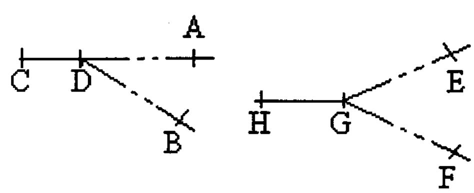
Isto é: dados $\alpha = \alpha^0 + \alpha'$ e $\beta = \beta^0 + \beta'$ tem-se $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^0 < \beta^0$ ou (no caso de ser $\alpha^0 = \beta^0$) $\alpha' < \beta'$.

Tal como para os ângulos lunares, a soma faz-se naturalmente

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha^0 + \alpha') + \beta = (\beta^0 + \beta') = \\ &= (\alpha^0 + \beta^0) + (\alpha' + \beta'). \end{aligned}$$

É óbvio que os segângulos do tipo $\alpha = 0 + \alpha'$ são *ip* em relação a todos os outros. O par $(\mathfrak{S}, +)$, onde $\mathfrak{S}$ é o conjunto dos segângulos do tipo definido acima, e $+$ é a operação definida acima, é um grupo ordenado não-arquimediano, de elemento neutro igual ao segângulo $\angle 0 = 0 + 0$.

Resta apenas referir que um segângulo pode ser representado graficamente como nas figuras abaixo, o que mostra a sua semelhança com os ângulos lunares

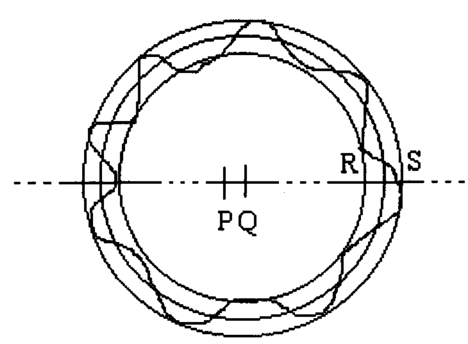


Circunferências

Fixe-se uma unidade $\overline{AB}$. Uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio k, *ig* admite como centro todos os pontos do interior de $\mathcal{C}$. Com efeito, qualquer que seja $X \in int\mathcal{C}$, tem-se

$$d(X, P) = ig = k$$

onde $P \in \mathcal{C}$.



Na figura acima estão esquematizadas 4 circunferências (3 "lisas" e uma "sinusoidal") de centro em todos os pontos do campo plano de $\overline{PQ}$. Cada ponto do campo de $\overline{RS}$ pertence a pelo menos uma circunferência de centro no campo de $\overline{PQ}$ e raio igual ao comprimento de um segmento.

Finalmente, tem-se o

Teorema 10.6 *A geometria das rectas n-sincopadas é um modelo dos axiomas HV1-HV15.*

Dem. A demonstração da satisfação dos axiomas hilbertianos, HV1-HV13, decorre da equivalência deste modelo ao $\mathcal{V}_n$ de Veronese, que os satisfazem. A satisfação do axioma de continuidade absoluta de Veronese, HV14, decorre do facto de existirem infinitésimais; a satisfação do axioma de continuidade relativa de Veronese, HV15, decorre do facto de existirem várias (infinitas) ordens de infinitésimais.■

10.3.5 Aplicação: um exemplo da teoria não-arquimediana das áreas planas (Hilbert)

Revisão de alguns conceitos

Definição 10.28 (interior de um subconjunto do plano) *Um ponto D está no interior de um subconjunto P de um plano π se existe um triângulo ΔABC, inteiramente contido em P, com $D \in \Delta ABC$. O conjunto dos pontos interiores de P é o interior de P e nota-se $int(P)$.*

Tal como na topologia, definem-se exterior e fronteira de um subconjunto do plano.

Definição 10.29 (subconjuntos do plano sem sobreposição) *Dois subconjuntos P e Q de um plano π são sem sobreposições se*

$$int(P) \cap int(Q) = \emptyset$$

Definição 10.30 (figura) *Uma figura geométrica ou simplesmente uma figura, é um subconjunto do plano que pode ser expresso como uma união finita de triângulos sem sobreposição.*

Proposição 10.10 *i) A intersecção finita de figuras é uma figura;*
ii) A união finita figuras é uma figura;
iii) O complemento duama figura noutra, mais a fronteira, é uma figura.

Dem. Indução.■

Definição 10.31 (equidecomponibilidade) *Duas figuras P, P' são equidecomponíveis se for possível expressá-las como uniões de triângulos sem sobreposições*

$$\begin{aligned} P &= \bigsqcup_i T_i \\ P' &= \bigsqcup_i T_i' \end{aligned}$$

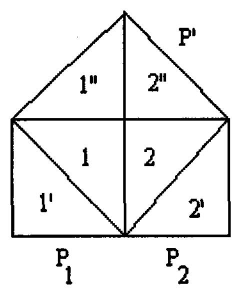
onde, para cada i, o triângulo T_i é congruente com o triângulo T_i'.

Definição 10.32 (figuras com igual conteúdo) *Duas figuras P, P' têm igual conteúdo se existirem duas figuras Q, Q' tais que:*
i) P e Q são sem sobreposições;
ii) P' e Q' são sem sobreposições;
iii) Q e Q' são equidecomponíveis;
iv) $P \cup Q$ e $P' \cup Q'$ são equidecomponíveis.

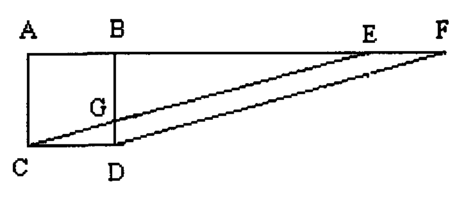
Proposição 10.11 *Se P e Q são equidecomponíveis então têm igual conteúdo.*

Dem. Consequência imediata das definições.■

Exemplo 10.7 *Se $P = P_1 \cup P_2, P_1 \equiv P_2$ num plano euclidiano, e P' um quadrado construido sobre a diagonal de um dos quadrados de P_1 ou P_2, então P e P' são equidecomponíveis. Com efeito, se se cortar P e P' em quatro triângulos congruentes entre si e com os quatro triângulos definidos pelo corte do quadrado maior pelas suas diagonais.*

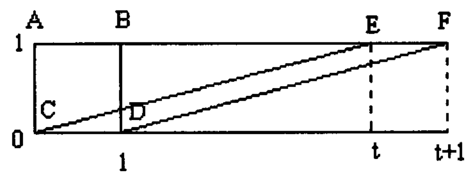


Exemplo 10.8 *(Euclides) Num plano euclidiano, sejam $\square ABCD$ e $\square CDEF$ dois paralelogramos com a mesma base $\overline{CD}$. Euclides demonstrou (Prop. 35, livro I) que $\square ABCD$ e $\square CDEF$ têm o mesmo conteúdo. Com efeito seja $P = \square ABCD$ e $P' = \square CDEF$. Faça-se $Q = Q' = \triangle BGE$. Então $P+Q$ e $P'+Q'$ são uniões de triângulos congruentes $\triangle ACE$ e $\triangle BDF$, e os triângulos $\triangle CDG$ e $\triangle CDG$, que são congruentes:*

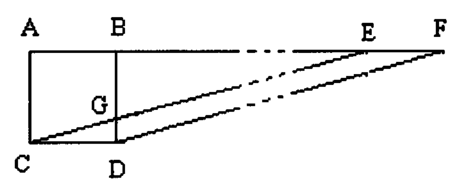


Exemplo 10.9 *(Hilbert) Se duas figuras P e P' são equidecomponíveis, então têm igual conteúdo, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, considere-se o plano cartesiano π_K sobre um corpo não-arquimediano K. Seja t um elemento ig de K. Considere-se o quadrado unitário $\square ABCD$ e o paralelogramo de base $\overline{CD}$ e lado superior $\overline{RF}$, onde $E = (t, 1)$ e $F = (t+1, 1)$. De acordo com o exemplo 10.8, $\square ABCD$ e $\square CDEF$ têm igual conteúdo. Contudo, não são equidecomponíveis. Com efeito, os lados de qualquer triângulo contido no quadrado unitário tem comprimento igual ou inferior a $\sqrt{2}$. Qualquer número infinito desses lados, colocados topo a topo, seria ainda finito no corpo K. Mas o lado $\overline{CE}$ do paralelogramo tem comprimento $\sqrt{t^2+1} > t$, que é infinito. Portanto nenhum número finito de triângulos contidos em $\square ABCD$ pode "encher" o paralelogramo*

$\Box CDEF$.



Exemplo 10.10 *O exemplo (10.9) pode ser considerado no quadro da geometria sincopada. Ficaria assim:*



Nesta figura é evidente que o argumento de Euclides não é válido pois os triângulos ACE e BDF não são congruentes, pois, por exemplo, $\overline{BF}$ não é congruente com $\overline{AE}$.[26]

10.4 Conclusões

No capítulo anterior apresentou-se um modelo analítico H-V que privilegiava os aspectos micro da GNSA. Os modelos apresentados neste capítulo previlegiam os aspectos macro, reduzindo à escala de uma folha de papel, rectas, segmentos de comprimento infinito, circunferências de raio infinito, etc. Os resultados são fundamentalmente os mesmos, nestes dois pontos de vista.

Finalmente, refira-se que o modelo da recta sincopada pode representar, com muita fidelidade, algumas situações em biologia, por exemplo, em particular nas cadeias evolutivas. Tome-se como exemplo a evolução do macaco (ponto M) ao Homem (ponto H). Um segmento sincopado $\overline{MH}$ representaria essa cadeia de evolução, em que a síncope representa o elo ausente, característico das cadeias evolutivas. Com efeito, o descendente de M é também M (está ainda na classe arquimediana de M) e o antecedente de H é ainda H. Passar da classe arquimediana de M para a classe de H, na mesma recta ordenada, implica "um salto no vazio", isto é, ultrapassar uma síncope.[27]

Continuando com as mesmas espécies, M e H, sabe-se que a distância entre espécies costuma-se definir como o número de gerações a partir do mais recente antepassado comum.

[26] São apenas quase-congruentes.

[27] Ou alternativamente, a consideração de transformações infinitesimais: o descendente imediato do macaco M não é apenas macaco ou não é tão macaco, quanto o seu progenitor. A consideração de modificações infinitesimais na cadeia evolutiva elimina a necessidade da ideia de "elo ausente".

Essa distância é ultramétrica, como a distância definida na geometria das árvores, o que explica, por exemplo, certas semelhanças (em património genético, por exemplo) entre entidades de espécies aparentemente muito diferentes. Assim, a geometria das árvores (não vista nesta tese) é uma GNS.

CAPÍTULO 11

Um modelo métrico (birkhoffiano) de geometria não-standard não-arquimediana

11.1 Introdução: os axiomas de Birkhoff

Sabe-se que G.D. Birkhoff [11] desenvolveu uma axiomática alternativa à de Hilbert para a geometria euclidiana, designada por *geometria métrica*, fundada em dois pressupostos:

— A estruturação do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como corpo ordenado e completo[1], $(\mathbb{R}, +, ., <, 0, 1)$;

— O enriquecimento dos modelos hilbertianos (M, R_M) de incidência com funções reais especiais.

Com vista à elaboração de um modelo não-standard da geometria métrica de Birkhoff, vai-se rever os axiomas e alguns resultados dessa geometria, com vista à fixação do método e das notações. Vai-se cingir aos axiomas I1-I3 (axiomas planares de incidência), que passam a integrar o grupo de axiomas de Birkhoff para a geometria não-standard não arquimediana plana, que serão representados por **Ai**[2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A1} &\leftrightarrow I2 \\ \mathbf{A2} &\leftrightarrow I1 \\ \mathbf{A3} &\leftrightarrow I3 \end{aligned}$$

Os restantes axiomas são introduzidos a seguir:

A4. (Axioma da distância, da régua, ou da medição linear) *Para cada recta l de um plano M existe, pelo menos uma bijecção $f : l \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer pontos P, Q de l se tem*

$$d(P, Q) = |PQ| = |fP - fQ|,$$

[1] No sentido de Dedekind.

[2] Vai-se recorrer a uma versão ligeiramente modernizada dos axiomas de Birkhoff, presente em Franco Oliveira ([32],[33]), P. Araújo ([71]), Millman/Parker([55]), e outros.

onde d é uma função distância definida por

$$\begin{array}{rcl} d & : & M^2 \to \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & d(P,Q) = |PQ|. \end{array}$$

Pode-se demonstrar, baseando-se no axioma A4, que d verifica as propriedades usuais das funções distância, a saber:

D_1– $d(P,Q) \geq 0$, $\forall P,Q \in M$ (não negatividade)

D_2– $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ (anulamento)

D_3 – $d(P,Q) = d(Q,P)$ (simetria)

D_4 – $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$ (desigualdade triangular)

A5 (separação no plano) *Para toda a recta l, o conjunto de pontos de um plano M que não pertencem a l, é a reunião de dois conjuntos convexos*[3]*, não vazios e disjuntos, tais que, para quaisquer pontos $P,Q \notin l$, P está num deles e Q está no outro, se e só se $\overline{PQ}$ corta l.*

A6 (Axioma do transferidor) *Sejam A,B pontos distintos, $\mathcal{H}$ um semi-plano limitado pela recta $\overline{AB}$. Então para todo o $\alpha \in]0,180[$ existe uma única semirecta $\overline{AP}$, com $P \in \mathcal{H}$, tal que $m(\angle PAB) = \measuredangle PAB = \alpha$.*

A7 *Se $D \in int(\angle BAC)$, então $m(\angle BAC) = m(\angle BAD)+m(\angle DAC)$, onde $int(\angle XYZ)$ é o interior de $\angle XYZ$.*

A8 *Se $\angle ABC$ e $\angle ABD$ são suplementares adjacentes (isto é, $C-B-D$ e $A \notin \overline{BD}$), então $m(\angle ABC) + m(\angle ABD) = 180$.*

Nota 11.1 *Os axiomas **A6-A8** são geralmente chamados axiomas da medição angular.*

A9 (Axioma da congruência de triângulos critério LAL) *Nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se a correspondência $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$ for tal que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \angle A \equiv \angle D, AC \equiv DF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.*

Encontra-se, portanto, perante modelos da forma

$$\mathcal{M} = (M, R_M, d_M, m_M)$$

onde:

— d_M é a função distância ou métrica definida acima;

— m_M é a função real de medição angular definida acima.

Observe-se que na geometria métrica, a continuidade linear (e por extensão, a circular) é assegurada pela continuidade dedekindiana do conjunto $\mathbb{R}$, via o isomorfismo f, introduzido no axioma **A4**, não sendo portanto necessário postular nesse sentido.

11.2 Alguns resultados

Definição 11.1 (coordenada de um ponto) *Para todo ponto $P \in l$, $f(P) = fP$ (que existe sempre graças a **A4**) diz-se a coordenada de P em l.*

Usualmente identifica-se um ponto com a sua coordenada fP.

Existem muitos sistemas de coordenadas para cada recta. De facto tem-se a

[3]Definição geométrica: $\mathcal{C}$ é um conjunto convexo sse $\forall A, B \in \mathcal{C}$, $\overline{AB} \subset \mathcal{C}$.

Proposição 11.1 *Seja f um sistema de coordenadas para uma recta l. Então:*

i) A função $g : l \to S$ definida por $g(P) = -f(P)$, para todo o P de l, é um sistema de coordenadas de l;

ii) Qualquer que seja o número $c \in S$, a função $h : l \to S$ definida por $h(P) = f(P) + c$ para todo o P de l é um sistema de coordenadas de l.■

Teorema 11.1 *(de colocação da régua) Para qualquer recta l e quisquer pontos distintos A, B incidentes em l existe um e um só sistema de coordenadas para l tal que a coordenada $fA = 0$ e a $fB > 0$.*

Dem. Seja f um sistema de coordenadas para l, que existe por **A4**. Ponha-se $c = f(A)$, e defina-se, para todo o P incidente em l, $g(P) = f(P) - c$. Pela proposição anterior, g é um sistema de coordenadas para l. Se $g(B) > 0$ acaba-se a demonstração. Se $g(B) < 0$ considere-se o sistema de coordenadas (proposição 11.1) h definido por $h(P) = -g(P)$. h está nas condições requeridas.■

Definição 11.2 *Dois segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ dizem-se congruentes, e escreve-se, como nos capítulos anteriores, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, sse $|AB| = |CD|$.*

Com base nesta definição, podem-se demonstrar as propriedades da congruência de segmentos, admitidas por Hilbert como axiomas.

As principais consequências do axioma de separação (**A5**) são os seguintes resultados:

Teorema 11.2 (de Pasch) *Qualquer recta que intersecte um triângulo num ponto do interior a um lado, intersecta, pelo menos, um dos outros lados.*■

Teorema 11.3 (da barra transversal) *Uma semirecta com origem no vértice de $\angle ABC$ passando por um ponto interior ao ângulo, corta o lado $\overline{AC}$ num ponto entre os extremos.*■

Teorema 11.4 *Se uma recta tiver um ponto no interior de um triângulo, então ela corta algum dos lados.*■

Exemplo 11.1 *Considere-se o seguinte modelo: $M_1 = (\pi_{\mathbb{R}}, R_{\pi_{\mathbb{R}}}, d_{\pi_{\mathbb{R}}})$, onde $\pi_{\mathbb{R}}$ é o plano cartesiano real, $R_{\pi_{\mathbb{R}}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = c_1 \vee y = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$*[4]*, e $d_{\pi_{\mathbb{R}}}$ é a distância definida, para dois pontos $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in \pi_{\mathbb{R}}$, por*

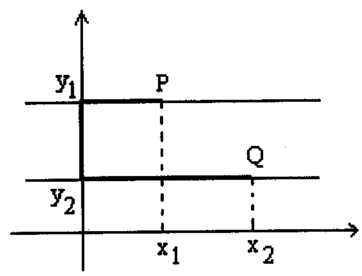
$$d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P, Q) = \begin{cases} |x_1 - x_2| \Leftarrow y_1 = y_2 \\ |x_1| + |x_2| + |y_1 - y_2| \Leftarrow y_1 \neq y_2 \end{cases},$$

isto é, a distância entre P e Q é a euclidiana, se P e Q estiverem na mesma horizontal $y = y_1 = y_2$, e soma-se o comprimento do caminho de P a Q, passando pelo eixo das ordenadas, no caso de P e Q de não estarem na mesma horizontal. É claro que M_1 verifica os axiomas **A1** *–* **A3**. *Também é imediato que M_1 verifica* **A4**. *Com efeito, sendo $l \in R_{\pi_{\mathbb{R}}}$, a função*

$$\begin{aligned} f &: l \to \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P, Q) \end{aligned}$$

[4] Isto é, as rectas do modelo são reuniões de duas rectas euclidianas horizontais.

onde $d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q)$ é a métrica definida acima, é um sistema de coordenadas, para l. Tem-se a ilustração:



Proposição 11.2 *O modelo M_1 é hiperbólico.*

Dem. Com efeito, sendo $R(x_3, y_3) \in \pi_{\mathbb{R}}, y_3 \neq y_1, y_2$, tem-se que existe um número infinito de rectas que passam por R e são paralelas a $l = \overleftrightarrow{PQ}$. São as rectas do tipo

$$l' = \{(x,y) \in \pi_{\mathbb{R}} : y \neq y_1, y_2 \vee y = y_3\}.$$

■

Definição 11.3 (ângulos congruentes) *Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ são congruentes se tiverem a mesma amplitude, isto é $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$.*

É evidente que um modelo desta geometria é o plano cartesiano real.

11.3 Réguas e transferidores não-standard

11.3.1 Modelo geral métrico não-standard

O modelo métrico birkhoffiano de geometria não-standard não-arquimediana, é fundado nos pressupostos:

— A existência de um conjunto de números $\mathfrak{R}$ estruturado como corpo ordenado não-arquimediano, contínuo no sentido de Veronese, $(\mathfrak{R}, +, ., <, 0, 1)$;

— O enriquecimento dos modelos hilbertianos de incidência (M, R_M) com funções especiais.

O modelo não-standard vai-se basear em axiomas birkhoffianos, ligeiramente modificados, a serem designados por $\mathbf{A'i}$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{A'1} &= \mathbf{A1} \\ \mathbf{A'2} &= \mathbf{A2} \\ \mathbf{A'3} &= \mathbf{A3} \end{aligned}$$

Para o axioma $\mathbf{A'4}$, tem-se

$\mathbf{A'4}$. *(axioma da régua não-standard ou da ultra-métrica) Para cada recta l de um plano M, existe, pelo menos, uma bijecção*

$$\varphi : l \rightarrow \mathfrak{R},$$

tal que, para quaisquer pontos P, Q de l se tem:

$$d(P,Q) = |PQ| := |\varphi P - \varphi Q|,$$

onde d é uma função ultra-distância ou ultra-métrica definida por

$$\begin{array}{rcl} d & : & M^2 \rightarrow \mathfrak{R}_0^+ \\ (P,Q) & \mapsto & d(P,Q) = |PQ| \end{array}$$

que verifica os axiomas D_1— D_3 acima (secção ??), mais o seguinte axioma
D'_4 $d(P,R) \leq \max\{d(P,Q), d(Q,R)\}$ *(ultramétrica);*

Os restantes axiomas são iguais, a menos de consequentes adaptações (sobretudo nos axiomas **A6** e **A7**), como se verá na sub-secção seguinte:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A'5} & \longleftrightarrow & \mathbf{A5} \\ \mathbf{A'6} & \longleftrightarrow & \mathbf{A6} \\ \mathbf{A'7} & \longleftrightarrow & \mathbf{A7} \\ \mathbf{A'8} & \longleftrightarrow & \mathbf{A8} \\ \mathbf{A'9} & \longleftrightarrow & \mathbf{A9}. \end{array}$$

Os modelos métricos de geometria não-standard são da forma

$$\mathfrak{M} = (M, R_M, d_M, m_M).$$

onde m_M é uma função real de medição angular, isto é, $m : M \rightarrow \mathfrak{R}$ que obedece a uma axiomática específica, e d_M é a função ultradistância definida acima.

Tal como no caso standard, na geometria métrica não-standard, a continuidade linear (e por extensão, a circular) é assegurada pela continuidade (não-arquimediana) do conjunto $\mathfrak{R}$, via o isomorfismo φ, não sendo portanto necessário postular nesse sentido. Neste caso trata-se de continuidade não-arquimediana.

11.3.2 Principais consequências de $A'1$ a $A'8$

Definição 11.4 (sistema de coordenadas *nst***)** *A função φ do axioma* **A'4** *chama-se um sistema de coordenadas não standard (s.c. nst) para l.*

Teorema 11.5 (colocação da régua não-standard) *Para qualquer recta l e quaisquer pontos distintos A, B, de l, existe um e um só s.c. nst φ tal que*

$$\varphi A = 0 \wedge \varphi B > 0.$$

Dem. Idêntica à do teorema 11.1.■

Definição 11.5 (segmentos quase-congruentes) *Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dizem-se quase-congruentes, e escreve-se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, sse $|AB| \approx |CD|$.*

Os axiomas $A'6$ a $A'8$ são de medição angular não-standard. Antes da sua introdução, é preciso ver o conceito primitivo de *medição angular*, a acrescentar aos anteriores (ponto, recta e distância):

Definição 11.6 (medição angular) *Sendo $\mathcal{A}$ o conjunto dos ângulos geométricos, uma medição angular é uma função*

$$\begin{array}{rcl} m & : & \mathcal{A} \to]0,180[\subset \mathfrak{R} \\ \angle ABC & \mapsto & m(\angle ABC) = (\angle ABC)^o = \measuredangle ABC \end{array}$$

onde $\mathfrak{R}$ é um corpo ordenado não-arquimediano, contínuo no sentido de Veronese.

A′6 (Axioma do transferidor não-standard) *Sejam A, B pontos distintos, $\mathcal{H}$ um semi-plano limitado pela recta $\overleftrightarrow{AB}$. Então para todo o $\alpha \in]0,180[\subset \mathfrak{R}$, existe uma única semirecta $\overrightarrow{AP}$, com $P \in \mathcal{H}$, tal que $m(\angle PAB) = \measuredangle PAB = \alpha$.*

Nota 11.2 *Por ser $m \in \mathfrak{R}$, existem ângulos com medida angular infinitamente pequena.*

Definição 11.7 (ângulo *ip*) *Um ângulo $\angle ABC$ diz-se ip se $\measuredangle ABC \approx 0$.*

A′7 *Se $D \in int(\angle BAC)$, então $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$, onde $int(\angle XYZ)$ é o interior de $\angle XYZ$.*

Nota 11.3 *O axioma de Arquimedes não é verificado pois, se $\angle ABC$ é ip e $\angle DBC$ não ip, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(\angle ABC) > \angle DBC$.*

Definição 11.8 (ângulos quase-congruentes) *Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ dizem-se quase-congruentes, e nota-se $\angle ABC \cong \angle DEF$, se for $\measuredangle ABC \approx \measuredangle DEF$.*

Teorema 11.6 (construção de segmentos e de ângulos) *(a) Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semirecta $\overrightarrow{CD}$, existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.*

(b) Dados $\angle BAC$, uma semirecta $\overrightarrow{DE}$ e um semi-plano $\mathcal{H}$ limitado por $\overleftrightarrow{DE}$, existe uma única semirecta $\overrightarrow{DF}$ com $F \in \mathcal{H}$ tal que $\angle FDE \cong \angle BAC$.

(c) Dados os números $x, \alpha \in R$ tais que $x > 0$, $0 < \alpha < 180$, uma recta $l = \overleftrightarrow{AB}$ e um semiplano $\mathcal{H}$ limitado por l, existe um único ponto $C \in \mathcal{H}$ tal que $\measuredangle BAC \approx \alpha$ e $|AC| \approx x$.

Dem. (a) Seja f um s.c. para $\overleftrightarrow{CD}$ e $fD > 0$, de modo que $\overrightarrow{CD} = \{X : fX \geq 0\}$ (teorema 11.5). Tem-se então, para todo o ponto $X \in \overrightarrow{CD}$, $|fC - fX| = |fX| = fX = |CX|$. Pondo $x = |AB|$, como f é bijectiva, existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $fE = x = |CE| = |AB|$, logo $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.

(b) Pondo $\alpha = \measuredangle BAC$, pelo axioma **A′6**, existe uma única semi-recta $\overrightarrow{DF}$, com $F \in \mathcal{H}$, tal que $\measuredangle FDE = \alpha$, donde $\angle FDE \cong \angle BAC$.

(c) Corolário de (a) e (b).■

Definição 11.9 (ângulo quase-recto) *Um ângulo $\angle A$ é quase-recto se $\measuredangle A \approx 90$.*

Definição 11.10 (ângulos quase-perpendiculares) *Duas rectas r e s dizem-se quase-perpendiculares, e escreve-se $r \perp_i s$, (como anteriormente) sse forem concorrentes e existir um ângulo quase-recto contido em $r \cup s$.*

Nota 11.4 *A definição pode ser formulada em termos de túbulos: $r \perp_i s$ se para ε, δ ips, $r \subset r_\varepsilon$ e $s \subset s_\delta$, se tem $r_\varepsilon \perp s_\delta$.*

11.3.3 Exemplos de realizações do modelo

Exemplo 11.2 *Considere-se o seguinte modelo:* $\mathfrak{M}_1 = (\pi_{\mathbb{R}}, R_{\pi_{\mathbb{R}}}, d_{\pi_{\mathbb{R}}})$, *onde* $\pi_{\mathbb{R}}$ *é o plano cartesiano real,* $R_{\pi_{\mathbb{R}}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = c_1 \vee y = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, *e* $d_{\pi_{\mathbb{R}}}$ *é a ultra-distância definida, para dois pontos* $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2) \in \pi_{\mathbb{R}}$, *por*

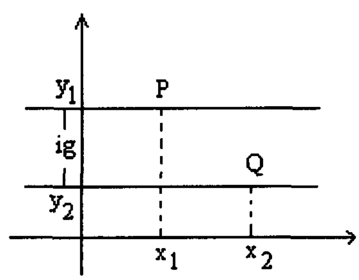
$$d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q) = \begin{cases} |x_1 - x_2| \Leftarrow y_1 = y_2 \\ ig + |x_1 - x_2| \Leftarrow y_1 \neq y_2 \end{cases},$$

isto é, a distância entre P *e* Q *é a euclidiana, se* P *e* Q *estiverem na mesma horizontal* $y = y_1 = y_2$, *e soma-se um infinitamente grande, fixo, no caso de não estarem na mesma horizontal*[5].

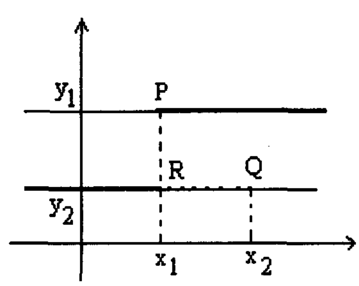
Evidentemente, $\mathfrak{M}_1$ verifica os axiomas $\mathbf{A'1} - \mathbf{A'3}$. Também é imediato que $\mathfrak{M}_1$ verifica $\mathbf{A'4}$. Com efeito, sendo $l \in R_{\pi_{\mathbb{R}}}$, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi & : & l \to \mathfrak{R} \\ (P,Q) & \mapsto & d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q) \end{array}$$

onde $d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q)$ é a ultramétrica definida acima, é um sistema de coordenadas não-standard, para l. A figura abaixo ilustra este modelo:



que se pode interpretar assim:



onde o traço "gordo" representa um "segmento ig" de R para P, que adicionado ao segmento de comprimento finito $\overline{RQ}$ (a tracejado), resulta no segmento "misto" $\overline{PQ}$.

[5] O que é equivalente a considerar a distância conhecida

$$d(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

(métrica da soma, do *taxicab* ou *pombalina*), considerando que, se P e Q não estão na mesma horizontal, $|y_1 - y_2| = ig$.

Nota 11.5 *Na figura acima P, Q, R são colineares.*

Tem-se a seguinte

Proposição 11.3 *O modelo $\mathfrak{M}_1$ é hiperbólico.*

Dem. Como na proposição 11.2.■

Nota 11.6 *(1) este modelo pode ser modificado de modo que as rectas verticais desempenhem o mesmo papel que as horizontais.*
(2) Para rectas oblíquas $y = mx + b$, basta definir a ultramétrica

$$d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q) = \begin{cases} |fP - fQ| \Leftarrow P, Q \in \{y = mx + b\} \\ ig + |fP - fQ| \Leftarrow P \in \{y = mx_1 + b_1\}, Q \in \{y = mx_2 + b_2\} \end{cases},$$

onde f é um sistema de coordenadas para $l = \{(x,y) \in \pi_{\mathbb{R}} : y = mx + b\}$. Neste caso considera-se que $|b_1 - b_2| = ig$.

Proposição 11.4 *O modelo $\mathfrak{M}_1$ não verifica o axioma **A5**.*

Dem. Com efeito, qualquer recta divide o plano em três conjuntos convexos, não em dois.■

Exemplo 11.3 *Trata-se de uma generalização do modelo anterior. Seja $n \in \mathbb{N}$, fixo. Considere-se o seguinte modelo: $\mathfrak{M}_2 = (\pi_{\mathbb{R}}, R_{\pi_{\mathbb{R}}}, d_{\pi_{\mathbb{R}}})$, onde $\pi_{\mathbb{R}}$ é o plano cartesiano real, $R_{\pi_{\mathbb{R}}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_1 \vee y = y_2\}$, e $d_{\pi_{\mathbb{R}}}$ é a ultradistância definida, para dois pontos $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, por*

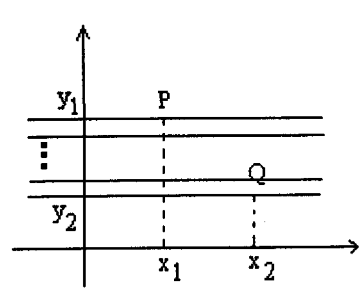
$$d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q) = \begin{cases} |x_1 - x_2| \Leftarrow y_1 = y_2 \\ (n+1)ig + |x_1 - x_2| \Leftarrow y_1 \neq y_2 \end{cases},$$

isto é, a distância entre P e Q é a euclidiana, se P e Q estiverem na mesma horizontal, e soma-se um infinitamente grande, $(n+1)ig$, onde n é o número de rectas horizontais entre a recta horizontal onde está P, e a recta horizontal onde está Q, no caso de não estarem na mesma horizontal.

É claro que também $\mathfrak{M}_2$ verifica os axiomas **A'1** – **A'3**. Também é imediato que $\mathfrak{M}_2$ verifica **A'4**. Com efeito, sendo $l \in R_{\pi_{\mathbb{R}}}$, a função

$$\begin{aligned} \varphi &: l \to \mathfrak{R} \\ (P,Q) &\mapsto d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q) \end{aligned}$$

onde $d_{\pi_{\mathbb{R}}}(P,Q)$ é a ultramétrica definida acima, é um sistema de coordenadas para l. A figura abaixo ilustra este modelo:



Nota 11.7 *(1) Se n não for fixo, não se garante que o modelo $\mathfrak{M}_2$ cumpre o axioma* **A'1**. *Com efeito, designe-se por $l_n(P,Q)$ a recta definida por P, Q, isto é, constante das horizontais de P e Q, mais n horizontais entre elas. Então pode-se definir uma linha $l_k(P,Q), k \neq n$, que passa pelos pontos P, Q, mas é diferente de $l_n(P,Q)$. Em particular, não pode ser n infinito.*

(2) Aplica-se o mesmo da nota (2) anterior.

Exemplo 11.4 *O plano cartesiano não-arquimediano é um modelo desta geometria.*

Para concluir a descrição do modelo, tem-se o

Teorema 11.7 *Seja $\mathfrak{R}$ um conjunto de números veronesianos (isto é, com ips de várias ordens de grandeza), r uma recta munido de um s.c. $f : r \longrightarrow \mathfrak{R}$. Então a geometria métrica resultante é um modelo dos axiomas HV1-HV15.*

Dem. A verificação dos axiomas hilbertianos HV1-HV13 decorre da construção do modelo. A verificação dos axiomas veronesianos de continuidade HV14 e HV15, decorre do sistema de coordenadas f adoptado.■

11.4 Novas noções

Tal como no capítulo 9, a linguagem é aqui enriquecida através de predicados não-standard, o que se obtém facilmente através do sistema de coordenadas não-standard φ:

Definição 11.11 (pontos *i*-próximos) *$P, Q \in M$ dizem-se i-próximos se $d(\varphi P, \varphi Q) = |PQ| = ip$.*

Definição 11.12 (segmento *ip*) *Dados $P, Q \in M$, o segmento $\overline{PQ}$ diz-se ip se P e Q são i-próximos.*

Definição 11.13 (segmento *ig*) *Dados $P, Q \in M$, o segmento $\overline{PQ}$ diz-se ig se $|PQ| = ig$.*

Exemplo 11.5 *No exemplo 11.2, se P e Q estão na mesma horizontal, o segmento $\overline{PQ}$ tem como comprimento um número real, não ig. No caso de ser P e Q pertencentes a horizontais diferentes, o segmento $\overline{PQ}$ é ig.*

11.5 Construções geométricas

(Ver alguns teoremas clássicos de construções em Geometria métrica)

11.6 Conclusões

O modelo birkhoffiano permite chegar aos mesmos resultados que o modelo analítico hilbertiano visto anteriormente, no capítulo 9. A introdução de um sistema de coordenadas não-standard permite de forma directa introduzir na recta uma estrutura não-standard, e aplicar os resultados pertinentes da ANS à GNSA.

Parte V

Discussão e conclusões

CAPÍTULO 12

Discussão e conclusões

12.1 Revisão do estudo

Com esta dissertação são lançadas algumas bases para a consideração de geometrias com elementos não-standard, no sentido considerado no capítulo 6, e no sentido não-arquimediano.

Através de exemplos, mostrou-se que:

— Tais geometrias podem ser consideradas de um ponto de vista muito elementar, com vantagens didácticas e pedagógicas evidentes;

— Ajudam a resolver problemas geométricos convencionais através de métodos muito elementares.

As interpretações de tais geometrias, prevalecentes neste trabalho, foram as geometrias não-arquimedianas.

No âmbito da GNS desenvolvida nesta dissertação, fez-se uma revisão histórica, de onde se aproveitaram, para a construção de modelos e suas aplicações, os contributos de Veronese, Hilbert e outros. Especial destaque vai para os ângulos de contingência que, por um lado, encerram todo o paradigma do assunto central da tese, e por outro lado apresentam espantosa utilidade na intuição da geometria não-arquimediana das curvas. Também é de se referir a revisão da construção pela via sintética dos números de Veronese, que representam em muitos momentos da tese as grandezas numéricas em utilização, sobretudo quando se recorre a ordens de grandeza relativas — é o caso do capítulo 10.

Uma definição de Geometria não-standard impôs-se, até como forma de objectivar para melhor delimitar a área de estudo. A não existência de classificação AMS para essa matéria é indicador da sua não autonomia em relação à geometria, para se dizer o mínimo. A definição encontrada é bastante vasta e acaba também por extravasar o espírito que presidiu à designação de Análise não standard: na GNS, tal como na ANS, são caracterizados entes não definidos nas geometrias construídas com recurso à linguagem ZFC da teoria dos conjuntos. Mas na GNS essa caracterização pode-se traduzir na introdução de objectos geométricos novos, o que não acontece (porque não necessário) na análise. Onde há maior afinidade entre a GNS e a ANS é na GNSA. Assim, e porque era necessário restringir a área de investigação, dedicou-se a tese toda, a partir do capítulo 6 à geometria não standard não-arquimediana.

São aproveitadas as bases universais da fundamentação da geometria, legadas por Hilbert (os três primeiros grupos de axiomas — aquilo que nesta tese se designou por geometria absoluta) e os axiomas de continuidade de Veronese (compatíveis com os referidos axiomas de Hilbert) para a construção de um modelo de geometria não-arquimediana denominada Hilbert-veronesiana, que descreve geometrias que podem ser totalmente desconexas do ponto de vista da continuidade dedekindiana, mas contínuas no sentido veronesiano.

São construídas três realizações do modelo, a saber: uma analítica na mais estrita tradição hilbertiana, uma sintética, inspirada num modelo de Veronese e um métrico, resultante da adaptação dos axiomas de Birkhoff ao caso não-arquimediano (réguas e transferidores não standard). O modelo analítico é aquele que serve para derivar as principais propriedades geométricas e topológicas do plano cartesiano não-arquimediano. Nesse modelo são mais evidentes as propriedades à escala micro. O principal modelo sintético, denominado, da recta sincopada, para além de confirmar as propriedades derivadas no modelo analítico, evidencia, de forma intuitiva as propriedades à escala macro. Este modelo pretende desenvolver a geometria não standard sintética de forma tão natural e elementar quanto a geometria de Euclides ou a de Hilbert. Tenta-se isso através da introdução de um conceito de congruência compatível com a existência de várias escalas, o que intuitivamente não é muito evidente. Embora não se exiba mais do que um exemplo de aplicação imediata do modelo para a ilustração da resolução de um problema clássico, de uma forma natural e imediata, acredita-se que o referido exemplo constitui um paradigma das situações onde a aplicação do modelo é imediata, portanto, vantajosa.

No modelo birkhoffiano, confirmam-se de novo as propriedades vistas no modelo analítico, e avançam-se alguns modelos simples, aparentemente suficientes para caracterizar a diferença de oportunidades de aplicação em relação ao modelo analítico.

Os exemplos de problemas resolvidos são escassos e elementares, mas têm um caracter apenas indicador. Mais não foi feito por falta de tempo.

Finalmente, refira-se que no seu livro, *Lectures on the hyperreals* [], Goldblat faz uma pequena lista das vantagens da ANS sobre a análise clássica. Esta dota a análise de

> *1) Novas definições de conceitos familiares, frequentemente mais simples, e mais intuitivamente naturais;*
>
> *2) Novas demostrações, mais admiráveis, frequentemente mais simples, de teoremas familiares;*
>
> *3) Novas e admiráveis construções de objectos familiares;*
>
> *4) Novos objectos com interesse matemático;*
>
> *5) Novas propriedades e formas de raciocínio bastante poderosas;*

Espera-se que a GNS venha a aportar à Geometria uma lista de vantagens maior ou igual a esta.

12.2 Discussão e conclusões

O trabalho desenvolvido nesta tese é muito incompleto. Por essa mesma razão manteve-se um nível (bastante) elementar nos resultados, ilustrações e aplicações, remetendo-se qualquer aprofundamento para estudos posteriores.

Apesar de todos os esforços empreendidos, sente-se que a linguagem muitas vezes é densa e nalguns casos algo confusa. Muito disso é devido à natureza da própria matéria e à inexistência de trabalhos feitos com objectivos similares para servirem de termos de referência. Outras razões prender-se-ão naturalmente com as limitações próprias do candidato.

A opção por várias abordagens (a histórica, a analítica, a métrica, a sintética) é bastante discutível na medida em que é a principal causa do alongamento do texto, por um lado, e por outro, acredita-se que se os esforços tivessem sido concentrados em apenas uma ou duas abordagens, certamente se poderia ter ido mais longe na exploração de certas consequências. Essa opção só é justificada por este se tratar de um trabalho de fundamentações, que pretende, tão somente exibir alguns horizontes para trabalhos futuros.

12.3 Perspectivas e trabalho futuro

No decorrer deste projecto de investigação, muitos problemas se colocaram e muitas perspectivas se afiguraram, que o candidato explorará na sequência desta tese. Entre essas questões encontram-se as seguintes:

1. O acto intelectual básico que se encontra na fundação do pensamento geométrico parece ser o da associação abstracta entre dois objectos (acto que está, de resto, associado à intuitividade básica do conceito de conjunto). Será possível fundar a geometria em axiomas que apenas regulam essa intuitividade básica, isto é, que apenas regulam essa associação abstracta?

2. A liberdade de criação e de interpretação artísticas é uma das qualidades inerentes à mente humana. Tratam-se de actividades altamente complexas. Pode-se fundar a geometria, prevendo essa liberdade e essa complexidade?

3. É possível fornecer a um computador um conjunto de axiomas de carácter geométrico[1] e pedir-lhe que crie objectos obedecendo aos mesmos? Que relações geométricas se pode esperar existir entre tais objectos?

4. A física necessita, mais que nunca, de geometrias (simples) que lhe permitam interpretar as suas grandes questões, entre as quais, a da grande unificação. Pode a matemática construir tais geometrias? Uma interpretação geométrica simples da teoria quântica (à semelhança do que já existe para a teoria da relatividade geral) tem sido reputada de necessária[2]. Uma geometria para tal fim teria que ser necessariamente não-arquimediana.

5. Muitos matemáticos defenderam que o ponto não faz parte do contínuo (empírico) mas que é apenas uma estrutura auxiliar para poder utilizar esse contínuo na matemática. É possível definir o ponto como uma estrutura sobre o contínuo, (como um corte, por exemplo) em vez do contrário, as estruturas do contínuo serem definidas através de pontos?

6. A definição kleiniana de geometria baseia-se no conceito de acção de um grupo (de simetrias) num conjunto (de pontos). Uma tarefa a ser desenvolvida futuramente pelo candidato é a elaboração de um modelo de GNS baseada nessa definição.

7. Proceder à formalização das GNS, no seu sentido abstracto, será uma das prioridades futuras.

[1] Nalgum sentido matemático do termo "geométrico".

[2] Existem divulgações que indicam que está em curso, uma interpretação através da teoria da informação [Science & Vie].

Para todas estas questões o candidato iniciou o estudo, e nalguns casos, a construção de modelos, cujo acabamento ficaram adiados por razões que se prendem com a necessidade de dedicar a maior parte do tempo disponível à elaboração da presente tese.

8. A obra de Veronese é vasta e difícil de descodificar, em parte devido à complexidade da matéria que trata, mas também por causa do estilo que adoptou. Na presente investigação apenas se sondaram alguns aspectos, em particular, a construção do corpo numérico, e uma tímida introdução à geometria. É intenção do candidato continuar a explorar os *Fondamenti*, aprofundando aspectos como a geometria projectiva e a geometria n-dimensional sintética, entre tantos outros que interessaram o candidato, mas que não cabem numa designação sintética.

9. Túlio Levi-Civita nasceu como geómetra sob as batutas de Ricci e Veronese. Certamente, na sua criação fecunda da teoria das conexões, teria tido influências da intuição do espaço não-arquimediano, incluindo as de pontos standard e não-standard. Uma das tarefas a serem encetadas no futuro pelo candidato é a revisita da geometria diferencial através de conceitos não standard.[3]

10. Por outro lado, seduzido pela "*Geometria não-comutativa dos números*"[4], o candidato tenciona desenvolver actividade investigativa nessa área, com vista a procurar uma compreensão unitária das geometrias não-arquimedianas.

Blaise Pascal disse que "*os números imitam o espaço que, no entanto, é duma natureza tão diversa*". Porém, é convicção do candidato, depois da presente investigação é que "*os números imitam o espaço, por serem da mesma natureza*".

[3] No livro "*Nonstandard Analysis in Practice*" [23], Michel goze desenvolve uma aplicação de conceitos da ANS na geometria diferencial, dum ponto de vista absolutamente diverso do assumido pelo candidato nesta dissertação.

[4] Série de Conferências proferidas no Seminário conjunto CIMA-DMAT da Universidade de Évora, pelo Prof. Paulo Almeida, do Instituto Superior Técnico.

Apêndice A

Representação geométrica de uma parte do contínuo absoluto (Veronese).

Numa nota de rodapé (*FG*, página 166) Veronese levanta um pouco o véu sobre a intuição geométrica daquilo que ele chama "*uma parte do contínuo absoluto*". Vejamos a sua construção:

«*Consideremos em primeiro lugar o campo infinito de ordem 1 em relação à unidade fundamental e também as escalas, no sentido oposto, a partir da origem fundamental. Os números de (*$\mathbb{III}$*) deixam-se reagrupar nas sucessões*

$$S_1^{(0)}, S_1^{(1)}, ..., S_1^{(m)}, ...$$

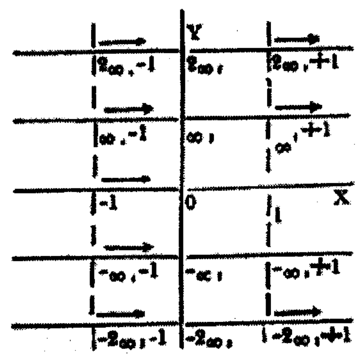
A todo o segmento da forma $\frac{\infty_1}{n}\overline{AA_1}$ *corresponde uma sucessão* $\frac{1}{n}S_1$, *e portanto a todo o segmento da forma*

$$\infty_1(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + ... + \frac{\alpha_m}{n^m} + ...)\overline{AA_1}$$

para $\lim m = \infty(\alpha = 0, 1, ..., n-1)$ *corresponde uma sucessão* S_1. *Donde é claro que não considerando os infinitésimos em relação à unidade fundamental, e considerando apenas os segmentos infinitos de ordem 1, pode-se fazer corresponder univocamente os segmentos desta parte da forma fundamental aos pontos do plano* (xy) *euclidiano ordinário fazendo corresponder os valores de* Y *às escalas* S, *cujas origens são respectivamente indicadas por*

$$0, \frac{\infty_1}{n}, ...\infty_1...2\infty_1...(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + ... + \frac{\alpha_m}{n^m} + ...),$$

e as de α *aos segmentos da mesma sucessão* S *a partir da sua origem. Para se poder usar também os valores negativos é necessário considerar as escalas* S_1 *que se têm por segmentos negativos do contínuo fundamental. Dois elementos indefinidamente próximos neste contínuo estão situados numa série* S_1. *A dois tais elementos correspondem dois pontos indefinidamente próximos do plano, mas a propriedade inversa não se aplica, porque dois* *elementos correspondentes na forma fundamental pertencem a duas sucessões próximas:*



As paralelas ao eixo dos x, todas orientadas no mesmo sentido a partir da origem fundamental representam as sucessões S_1, as quais têm a sua origem no seu ponto de intersecção com o eixo dos y. Se imaginarmos percorridas no mesmo sentido todas as paralelas compreendidas na faixa plana limitada pelas paralelas conduzidas por 0 ou por ∞_1 de 0 até ao ponto ∞_1 temos uma clara representação do campo finito e infinito de ordem 1, imaginando porém que as paralelas assim como estar uma sobre a outra, e independentes entre si, sejam uma depois da outra e determinadas uma pela outra; isto é, não têm o mesmo ponto comum no infinito, e formam um todo incindível. Se o segmento $(0...\infty_1)$ é imaginado depois condensado no segmento $\overline{AB}$, tem-se um contínuo cuja unidade $(1...0)$ primitiva é um infinitesimo actual. Da mesma forma podemos proceder para os campos infinitos de ordem $2, 3, ...m$, e tem-se:

— Não considerando os infinitesimos em relação a uma unidade fundamental, todos os segmentos dos campos finito e infinito de ordem m, podem ser representados univocamente, na mesma ordem, num sistema de paralelas do espaço euclidiano a m dimensões.»

Apêndice B

Axiomas da geometria de Veronese

Axiomas de Veronese
(Agrupados por elemento geométrico)
Grupo I
(axiomas do ponto)

I.1. Existem pelo menos dois pontos distintos (existência).
I.2. Todos os pontos são idênticos (identidade).

Grupo II
(axiomas da recta)

II.1. Existe um sistema S de pontos a uma dimensão idêntico na posição das suas partes (existência).
II.2. S é determinado por dois dos seus pontos (standard) distintos (determinação).
II.3. S é V- contínuo (continuidade).
II'.1. Uma recta é uma linha fechada (projectividade).

(Axiomas de medição linear)

II''.1. A recta é um sistema de pontos a uma dimensão idêntica na posição das suas partes, contínuo absoluto e determinado por dois dos seus pontos distintos.
II''.2. Duas rectas coincidem em sentido absoluto se têm em comum o campo relativo a uma unidade qualquer a partir de qualquer ponto tomado como origem.
II".3. Sobre a recta existem pontos que não a determinam (existência de pontos não-standard).

Grupo III
(axiomas do plano)

III.1. Existem pontos fora da recta (existência).
III.2. Todos os pontos que não pertencem à recta determinam com todo o ponto da recta, uma outra recta (determinação).
III.3. Se duas rectas quaisquer têm um ponto comum A, pertencente a um segmento $\overline{AB}$ duma delas, existe um segmento idêntico $\overline{A'B'}$ da outra (isomorfismo entre rectas dum plano).

III.4. Se um lado de um triângulo qualquer torna-se *idp*, a diferença entre os outros dois torna-se indefinidamente pequeno (ultramétrica).

III.5. No campo das nossas observações actuais é verificada com grande aproximação a propriedade que por um ponto dum plano se pode conduzir uma e apenas uma paralela a uma recta dada nesse mesmo plano (axioma local das paralelas, axioma euclidiano das paralelas).

Grupo IV
(axiomas do espaço)

IV.1. Se em duas cópias de um raio qualquer $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$, se escolher duas cópias dos pontos B e C, B' e C' tais que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}; \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$$

e o segmento $\overline{BC}$ seja idêntico a $\overline{B'C'}$, as duas cópias das rectas são idênticas.

IV.2. O espaço intuitivo é uma figura a três dimensões em relação aos seus pontos. (Dimensão local)

Grupo V
(Axiomas de medição não linear)

V.1. No campo finito absoluto na vizinhança de um ponto S são válidos os axiomas II b), III, IV e V.

V.2. Duas rectas distintas quaisquer num campo finito na vizinhança de um ponto S e passantes por S, são distintas ainda que em todo o campo infinito ou infinitésimo, em relação à unidade desses campos, e inversamente.

V.3. A figura rectilínea determinada por duas rectas quaisquer passantes por um ponto S em todo o campo finito na vizinhança de S permanece a mesma relativamente à unidade desse campo mesmo quando se considera os pontos nos campos no infinito ou nos campos infinitésimos na vizinhança do referido ponto S sobre as duas rectas. (Invariablidade da medida do ângulo no campo de um ponto)

Grupo VI
(Axiomas dos movimentos rígidos)

VI.1. Um corpo pode mover-se sem deformação. (Existência de movimentos rígidos de pontos)

VI.2. Os pontos de uma figura qualquer podem mover-se livremente e independentemente uns dos outros descrevendo cada um deles uma linha intuitiva, de modo que as posições dos pontos da figura correspondem unívocamente e na mesma ordem às posições sucessivas, mas não excluindo que muitos pontos possam ocupar o mesmo lugar numa posição sucessiva. (Existência de movimentos rígidos de figuras)

Apêndice C

Uma modificação dos axiomas da geometria absoluta de Hilbert

C.0.1 Introdução: motivação.

Numa recta de Veronese há, em geral, várias classes arquimedianas, existindo portanto pares de pontos que, estando numa mesma classe (não a recta toda), só definem essa classe[1], e há pares de pontos, tomados em classes diferentes, que já podem definir uma recta, cujas classes têm, no máximo, a mesma ordem de grandeza que a ordem das classes dos pontos considerados.

Este pequeno problema técnico, que aparentemente provoca uma incompatibilidade da recta de Veronese com a axiomática da geometria absoluta de Hilbert, que no texto da tese foi resolvida considerando pontos standard e pontos não-standard[2], pode ser rapidamente ultrapassada seguindo outra via, com uma ligeira adaptação dos axiomas da geometria absoluta de Hilbert, como acima se referiu. Proceda-se portanto a essa adaptação.

C.0.2 Localização dos axiomas hilbertianos

Tome-se como conceitos primitivos (para a geometria plana) o de *ponto*, o de *recta de tipo* I e o de *direcção*.

Seja o π o plano[3]. Dois pontos A e B de π definem uma direcção, notada por (A, B). Se (A, B) e (C, D) definem a mesma direcção, escreve-se

$$(A, B) = (C, D)$$

O predicado direcção está sujeito aos seguintes axiomas

D1 $(A, A) = (A, X) = (X, A)$

D2 $(A, B) = (B, C) \Rightarrow (A, B) = (A, C) \wedge (B, C) = (A, C)$

D3 $(A, B) = (B, C) \wedge (B, C) = (C, D) \Rightarrow (A, B) = (C, D)$

[1] Na senda do já referido anteriormente (capítulo 4), a noção de *definição* de uma recta aqui utilizada é mais rica que no quadro da geometria de Hilbert. Com efeito, no presente contexto, a *definição*, para além de fixar a direcção da recta (como no caso hilbertiano), fixa também a sua *estrutura*, entendendo esta como a *distribuição* dos pontos sobre a mesma.

[2] A axiomática de Hilbert aplica-se apenas aos pontos standard.

[3] Para a geometria espacial, plano será um conceito primitivo.

onde $(P,Q) = (R,S)$ significa que a direcção (P,Q) é a mesma que a direcção (R,S).
O conjunto π^2 é o conjunto das direcções de π.
Tem-se por D1 que $(A,B) = (B,A)$.

Proposição C.1 *A relação "=" (definir a mesma direcção) definida em π^2, como acima, é uma relação de equivalência.*

Dem. Para a reflexividade tem-se que $(A,B) = (A,B)$ pois, por D1,

$$(A,B) = (A,B) \Leftrightarrow (A,B) = (B,A)$$

donde, aplicando D2 vem

$$(A,B) = (B,A) \Rightarrow (A,B) = (A,A)$$

que é verdade, por D1. A simetria é imediata pois, por D2

$$\begin{aligned}(A,B) &= (B,C) \Rightarrow (B,C) = (A,C) \Leftrightarrow \\ (B,C) &= (C,A) \Rightarrow (B,C) = (B,A).\end{aligned}$$

A transitividade é garantida por D3.■

Definição C.1 (pontos colineares) *Três pontos $A, B, C \in \pi$ dizem-se colineares se*

$$(A,B) = (B,C).$$

Uma recta de tipo I é um conjunto de pontos, governado pela axiomática abaixo[4]:
— Axiomática de Hilbert, modificada:
I'1. Em todo a recta de tipo I, incidem pelo menos dois pontos (distintos).
I'2. Dois pontos incidem numa e numa só recta de tipo I.
I'3. Existem três pontos não na mesma recta de tipo I.
Esta axiomática (mais as restantes, de Hilbert) estabelece a recta de tipo I como uma recta hilbertiana.

Por I1 e I2, uma recta de tipo I é caracterizada por dois quaisquer dos seus pontos. Assim convencionata-se que a única recta de tipo I que passa pelos pontos A e B nota-se AB^*.

Definição C.2 (rectas de tipo I colineares) *Duas rectas de tipo I, AB^* e CD^* dizem-se colineares se*

$$(A,B) = (C,D).$$

Proposição C.2 *A relação de colinearidade entre rectas de tipo I é de equivalência.*

Dem. Consequência imediata da proposição C.1■

Definição C.3 (recta de tipo II) *Uma recta de tipo II é uma classe de equivalência de rectas de tipo I, colineares.*

[4] Naturalmente que se está colocado numa linguagem ta teoria de conjuntos.

C.0.3 O axioma I'3: linearidade e dimensão

Sejam, agora, A, B dois pontos na mesma recta de tipo I, AB^*, e seja C um ponto fora de AB^*, que existe, por I'3. Então C pode ou não ser colinear com A e B, isto é, pode ser $(A, B) = (B, C)$ ou $(A, B) \neq (B, C)$. No primeiro caso tem-se que AB^* e BC^* pertencem à mesma recta do tipo II; no segundo caso pertencem a rectas de tipo II diferentes.

Definição C.4 *Seja r uma recta de tipo II. Um subconjunto C de r é de tipo I, se existir uma recta s, de tipo I, $s \subset r$, tal que $C \subset s$. No caso contrário, C diz-se de tipo II.*

Um modelo desta geometria é dada no seguinte

Exemplo C.1 *Sejam no plano cartesino real, duas rectas paralelas, r e s, não coincidentes. r e s são rectas de tipo I e $r \cup s$ está contida numa recta de tipo II. Se $A, B \in r$, $\overline{AB}$ é um segmento de tipo I. Se C pertence a s, $\overline{AC}$ é um segmento de tipo II e $\overrightarrow{AC}$ é uma semirecta de tipo II.*

Proposição C.3 *Seja AB^* uma recta de tipo I. Tem-se*

$$\forall PQ^* \subset AB^*, X \in AB^* \Rightarrow X \in PQ^*.$$

Dem. Se $PQ^* \subset AB^*$, então, por $I'2$ e $I'1$, $PQ^* = AB^*$. Se X está fora de PQ^* então X está fora de AB^*, o que contradiz a hipótese de ser $X \in AB^*$.■

Está-se a ver, pela definição de recta de tipo II, que esta é uma recta no sentido hilbertiano (euclidiano), apenas quando é constituida por rectas de tipo I coincidentes. Nos outros casos a recta é-o no sentido veronesiano, e pode ser um feixe de rectas de tipo I, por exemplo.

Assim, uma recta não é obrigada a ser um conjunto com "configuração linear" como a recta euclidiana, com "dimensão um", mas pode ter outra qualquer configuração e outra "dimensão euclidiana". O que é importante na definição de recta, e que a liberta de qualquer confinamento arquimediano (dimensional euclidiano), é o seguinte:

— Uma recta é um conjunto de objectos totalmente ordenado. Essa ordem é, em geral, não-arquimediana, e a "dimensão euclidiana" da recta é inferior ou igual ao seu número de classes arquimedianas.

C.0.4 Conclusões

Uma recta, no sentido acima definido (e que corresponde à recta de Veronese), em geral, não verica I1 pois, dados dois dos seus pontos, estes definem a direcção da recta, mas em geral, não dão qualquer indicação sobre a estrutura arquimediana da mesma. Por exemplo, dois pontos A e B da mesma classe arquimediana não definem uma recta de segunda espécie, visto que o segmento AB^* tem apenas uma dimensão euclidiana enquanto que a recta considerada pode ter dimensão euclidiana igual a dois.

Apêndice D

Breve incursão histórica no conceito de contínuo na geometria[1]

D.1 Introdução

D.1.1 O contínuo empírico e os contínuos matemáticos

O contínuo empírico

Veronese diz que não é preciso definir "contínuo empírico", pois "*Esta é uma expressão cujo sentido compreendemos, mesmo sem nenhuma definição matemática, visto que intuímos o contínuo na sua forma mais simples como a característica comum a muitas coisas concretas, como, por exemplo, para dar alguns dos mais simples, o tempo e o lugar ocupado na vizinhança externa do objecto esboçado aqui, ou pela linha de uma caneta, se desprezarmos as suas propriedades físicas e a sua fineza.*" [72].

Quais as características do contínuo empírico?

A resposta é também apresentada por Veronese [72], quando diz que a experiência mostra-nos que dado um determinado processo experimental e um dado contínuo empírico, depois de um número finito suficiente de decomposições do contínuo empírico através do processo experimental, atinge-se uma parte desse contínuo que não pode ser decomposta, isto é, **um contínuo empírico contém indivisíveis.**

Ora, pode-se, sem perder o carácter empírico ou sensitivo (ou ingénuo) do contínuo, identificar cada processo de decomposição (fragmentação) com um processo de medição.

Considere-se um contínuo empírico C que, através de um processo de medição P_1, é decomposto em indivisíveis $C_1, C_2, \ldots$. Chame-se *observador* a um conjunto finito de processos de medição. Tem-se então que:

— No contínuo C, através de outro processo de medição P_2 , pode-se transformar os indivisíveis $C_1, C_2, \ldots$ anteriormente obtidos, em *divisíveis*, obtendo-se os indivisíveis $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{21}, C_{22}, \ldots$. Portanto, na matematização do contínuo empírico, é conveniente considerar que **o contínuo contém indivisíveis em sentido relativo,** isto é, **que dependem do observador**[2].

[1] Texto da conferência homónima proferida pelo candidato no Seminário do Centro de Estudos em História e Filosofia da Ciência da Universidade de Évora.

[2] Utilizaremos o termo "contínuo", sem mais especificações, para designar o contínuo matemático, no sentido geral.

O contínuo matemático

No contexto que nos interessa, o objecto matemático é um conjunto, digamos C, e o "observador" é um conjunto $\mathcal{O}$ de estruturas matemáticas (topológicas, geométricas, algébricas...) em C. Usualmente diz-se que, num espaço topológico, um conjunto é contínuo se for *compacto e conexo.*

Quando é que um objecto geométrico é contínuo?

À partida, tal como para as estruturas topológicas, espera-se que a propriedade de continuidade dependa da estrutura geométrica em questão, isto é, do conjunto de axiomas que definem a geometria em que se considera.

Na geometria é usual considerar-se que um contínuo é *uma recta provida duma estrutura geométrica tal que se possa com ela fazer uma geometria analítica, onde haja um número suficiente de transformações geométricas que modelem o movimento.*

A questão do esclarecimento do significado do contínuo geométrico foi, em virtude do papel preponderante desta ciência na matemática, até ao início do século XX, o principal motor do desenvolvimento da mesma, quer em termos de objectos, quer em termos de estruturas.

A distinção entre o contínuo empírico e o contínuo matemático

Nem sempre foi clara a distinção entre o contínuo empírico e o contínuo matemático. Até porque, para muitos matemáticos, a geometria, cujo papel preponderante no seio da matemática se acabou de referir, era entendida como uma ciência experimental[3].

Um exemplo para ilustrar este ponto de vista, encontrado em Euclides (e exibido com frequência, desde os seus contemporâneos, até aos nossos dias) é o seguinte problema:

— *Dado um segmento de recta* $\overline{AB}$, *construir um triângulo equilátero de lado* $\overline{AB}$.

A demonstração da possibilidade dessa construção por Euclides é baseada nos seguintes resultados [42]:

Definições:

— *Uma circunferência é uma figura plana que contém uma linha*[4] *tal que todos os segmentos de recta traçados dela para um ponto (C) no interior da figura são iguais (congruentes).*

— *Esse ponto (C) chama-se centro.*

Postulados:

— *Pode-se construir uma circunferência de centro e raios dados;*

— *Pode-se conduzir uma recta de um ponto dado a outro.*

A demonstração consiste nos seguintes passos:

i- Com o compasso centrado em A e abertura $|AB|$, traçar uma circunferência, C_1;

ii- Centrando em B, abertura $|BA|$, traçar uma circunferência C_2;

iii- Seja C um dos pontos de intersecção de C_1 com C_2;

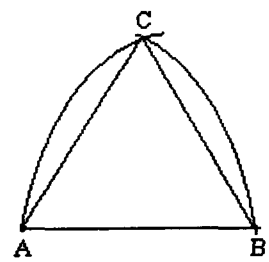
iv- Do ponto C, traçar o segmento $\overline{CA}$;

[3]Para Veronese, "a geometria é a mais exacta das ciências experimentais" [72].

Poincaré, que em vários aspectos está de acordo com Veronese, apresenta neste ponto uma posição radicalmente contrária: "enganam-se aqueles que pensam que a geometria é uma ciência experimental" [49].

[4]Definição 2: linha é um comprimento sem largura.

v- Do ponto C , traçar o segmento $\overline{CB}$ (ver figura abaixo).



Da análise desta demonstração, incompleta por não se poder garantir, com os postulados de Euclides, a existência do ponto C, deduz-se, por um lado, a interferência do processo de construção de circunferência na demonstração (não fundado, nos postulados) e, por outro lado, não menos importante, a necessidade duma definição de circunferência adequada ao processo de construção empírica da mesma, isto é, um processo que matematize o contínuo empírico que consiste no traçado de uma circunferência com um compasso.

Repare-se na **dificuldade que existe em definir uma circunferência traçada por um compasso, no contexto da geometria de Euclides**. A definição proposta por Euclides não traduz a intuitividade da construção empírica, pois a mesma carece de uma relação topológica entre pontos da circunferência, presente na referida intuitividade — independente de relações dos pontos da circunferência com pontos exteriores à mesma (como o centro, por exemplo) [6].

Do mesmo modo **a continuidade empírica de um segmento traçado com a ajuda de uma régua, não é transferível para a geometria, através dos axiomas de Euclides**. Passar de um objecto com um número finito ou infinito de pontos, para um conjunto contínuo, envolve ainda muitas dificuldades.

Essas dificuldades são historicamente resumidas em duas classes:

— **O conceito de parte de um contínuo empírico** (que doravante vamos considerar sempre linear);

— **A escolha dos axiomas convenientes para se estabelecer o contínuo, para o conceito de parte fixado.**

No cerne dessas dificuldades está o **conceito de ponto, a ser considerado.**

O conceito de ponto

Sobre o conceito de ponto, Poincaré escreveu [*Des fondements de Géométrie*, 1898]:

— *Muitas pessoas, com efeito, consideram a noção de ponto do espaço como tão imediata e tão clara que toda a definição se torna supérflua. Mas penso que concordarão comigo que uma noção tão subtil como a de ponto matemático, sem comprimento, largura nem espessura, não é imediata e que necessita de ser explicada.*

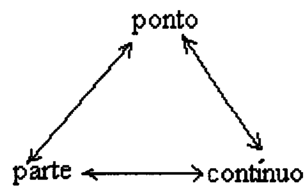
Ora, historicamente, o conceito de **ponto** aparece, na geometria empírica, como se verá mais adiante, sempre **relacionado com o de parte elementar de um contínuo empírico.** Felix Klein [51] escreveu:

[6] A definição "intrínseca" de circunferência só veio a aprecer com a clarificação do conceito de curvatura por Gauss.

— *Um ponto é um corpo cuja subdivisão não é compatível com os limites da observação.*

O conceito de parte porém é objecto de bastante controvérsia, como também se verá mais abaixo, na breve digressão histórica proposta.

Por outro lado, o conceito de **contínuo** aparece sempre relacionado com o de **parte**, e portanto também com o de **ponto**:



Essa relação assume duas formas, consoante o **processo considerado de obtenção das partes de um contínuo empírico**, que pode ser de dois tipos:

— **Corte;**

— **Junção.**

Convém salientar a **assimetria entre esses dois processos**, provocada sobretudo pela **natureza** dos *obstáculos epistemológicos* que originam, respectivamente, os **infinitamente pequenos** e os **infinitamente grandes**, (supondo que se parte de um objecto não infinitamente pequeno, nem infinitamente grande).

A adopção de uma natureza, **potencial** ou de uma natureza **actual**, para esses novos seres, na transposição do contínuo intuitivo para o contínuo matemático foi, desde logo, uma questão de *atitude axiomática*, com reflexos evidentes nos contínuos matemáticos derivados, logo, em toda a matemática.

Objectivos do texto[7]

O que se propõe neste texto é uma breve digressão pela discussão histórica acima referida. Trata-se da apresentação de **um conjunto** (discreto) **de pistas históricas para uma análise da escalada de o contínuo empírico ao contínuo geométrico**, guiada pelos conceitos de **ponto, parte** e os correspondentes **axiomas de continuidade**, como proposta de quadro de análise.

D.2 Aristóteles (384 a.C.;322 a.C.): os primórdios

Aristoteles (384 a.C.;322 a.C.) [*Physica*] argumenta que **o contínuo intuitivo é "divisível indefinidamente"**, isto é, num número infinito potencial de vezes.

Vejamos algumas definições prévias a essa argumentação, fornecidas pelo próprio:

— *O contínuo é aquilo cujas extremidades estão juntas;*

— *O contacto é entre aqueles cujas extremidades estão juntas;*

— *O consecutivo são aqueles entre os quais não existe nenhum intermediario do mesmo género.*

Apresenta, a seguir, a seguinte definição de **objecto contínuo:**

[7] Da conferência.

— **Aquilo que é feito de partes consecutivas, em contacto, e cujas extremidades se confundem.**[8]

Argumenta que o contínuo intuitivo linear (a recta) não pode ser constituido por pontos.

Eis uma transcrição do argumento:

« *Se a continuidade, o contacto, a consecutividade obedecem às definições precedentes, é impossível que um contínuo seja formado por indivisíveis, por exemplo que uma linha seja formada por pontos, se é verdade que a linha é um contínuo e o ponto um indivisível. Com efeito, não se pode dizer que as extremidades dos pontos são uma e uma só, já que para o indivisível não existe uma extremidade que seja distinta duma outra parte; nem que as extremidades estão juntas, pois não há nada numa coisa sem partes que seja uma extremidade pois a extremidade é distinta daquilo de que é extremidade.*

Por outro lado, seria necessário que os pontos de que seria feito o contínuo, estarem ou em continuidade, ou em contacto. Ora, não podem ser contínuos, por aquilo que se acabou de dizer, e quanto ao contacto, só pode ter lugar ou do todo ao todo, ou da parte à parte, ou da parte ao todo; mas como o indivisível não tem partes, tem que ser forçosamente do todo ao todo; ora o contacto do todo ao todo não faz uma continuidade, porque o contínuo tem partes estranhas uma às outras e se divide em partes que se distinguem dessa forma, isto é que estão separadas quanto ao lugar.

Não há também consecutividade entre um ponto e um ponto, um instante e um instante, de modo a fazer o comprimento ou o tempo. Com efeito, são consecutivas as coisas entre as quais não há nenhum intermediário do mesmo género, enquanto que para os pontos, o intermediário é sempre uma linha, para os instantes, um tempo. Ademais o contínuo seria divisível em indivisíveis, se é verdade que que cada um dos dois se deve dividir naquilo de que é composto. Mas nenhum contínuo é divisível em coisas sem partes.

Por outro lado não é possível que entre os pontos e os instantes haja qualquer intermediário de género diferente; um tal intermediário com efeito seria evidentemente, se existisse, ou um indivisível ou divisível e se for divisível, seria ou em indivisíveis ou em partes sempre divisíveis; ora isso é o contínuo. Mas é claro que todo o contínuo é divisível em partes que são sempre divisíveis, haveria contacto de indivisíveis com divisíveis; com efeito nos contínuos, se a extremidade é uma, há também o contacto.»

Nesta argumentação pode-se observar, como aliás é apanágio de Aristóteles, a **assumpção clara do axioma de Arquimedes** (ver abaixo) o que leva à exclusão de infinitos actuais. Por outro lado esta argumentação permite concluir que o contínuo só pode ser constituido de partes contínuas, tão pequenas quanto se quiser, mas nunca nulas.

D.3 Eudóxio (408 a.C.;355 a.C.) e Euclides (325 a.C., aprox.;265 a.C.): exaustão

A ideia de ponto em **Euclides** (325 a.C., aprox.;265 a.C.) é formulada de forma clara na definição 1 dos *Elementos*:

— *Ponto é aquilo [*objecto*] que não tem partes.*

[8] Convém notar que a ideia fundamental de "parte" não é esclarecida, nem a de contacto, que são considerados termos primitivos, isto é não carentes de definição — obviamente por ainda se encontrar numa fase bastante primitiva da matematização do contínuo, em que não se distingue bem o contínuo empírico do matemático.

Mas ao analisar os *Elementos* pode-se constatar a falta de um enunciado positivo sobre a existência, em certas condições, de pontos específicos da recta. Tal enunciado nem sequer aparece aquando do estudo da *incomensurabilidade* de dois segmentos de recta, no estudo das razões e proporções(o que teria levado a uma antecipação da construção do conjunto dos números reais). Esse facto leva à não validade muitas demonstrações que, como no exemplo acima, eram feitas através de construções geométricas, isto é, com recurso à **evidência gráfica**. São exemplos de demonstrações deficientes, para além da da proposição I (acima), a proposição XXII (ambas sobre a intersecção de circunferências), proposição XII, sobre a intersecção de uma circunferência e uma recta, que também se encontra no livro III. A não garantia de existência de pontos de intersecção (excepto o ponto cuja existência é afirmada no postulado V, onde se encontram as rectas que, com uma mesma secante e do mesmo lado fazem ângulos interiores cuja soma é inferior a dois rectos(postulado das paralelas)), põe problemas graves de continuidade na geometria de Euclides. O que lhe permite mergulhar na recta sem recurso ao infinito actual — conformemente com as reflexões de Aristoteles — é a sua proposição I do livro X, (1,X), que é uma consequência do axioma de Arquimedes, aplicado implicitamente por **Eudóxio** (408 a.C.;355 a.C.) (ver Arquimedes, abaixo):

— *Sendo propostas duas grandezas desiguais, se se tirar da maior uma parte maior que a sua metade, e se se tirar da parte restante uma parte maior que a sua metade, e se se fizer sempre a mesma coisa, restará uma certa grandeza que será menor que a menor das grandezas propostas.*[10]

Com efeito essa proposição permite obter uma grandeza menor que qualquer outra dada. **O método da exaustão** para o cálculo de medidas (comprimentos, áreas e volumes), que mais não é que uma forma prática de "cortar" o contínuo, basea-se nessa proposição. Esse método, tal como aplicado por Eudóxio e Euclides, consitia em argumentos do tipo:

— Suponhamos que se quer comparar duas medidas m_1 e m_2, sendo uma delas a medida exacta (obtida por métodos não confessos, possivelmente com infinitesimos actuais) e outra uma medida aproximada(ou mais precisamente um elemento de uma sucessão de medidas aproximadas). Se $m_1 \neq m_2$ então $m_1 < m_2$ ou $m_2 < m_1$. Seja $m_1 < m_2$; pode-se neste caso formar a diferença $m_2 - m_1$ e, de acordo com a proposição 1,X, construir uma grandeza menor que $m_2 - m_1$, e chegar-se a uma contradição. Seja agora $m_2 < m_1$. Pode-se do mesmo modo construir uma grandeza menor que $m_1 - m_2$ e chegar-se a uma segunda contradição. Fica portanto demonstrado, de forma matematicamente rigorosa que $m_1 = m_2$.

Na demonstração da proposição 1,X Euclides apenas segue a definição de contínuo na argumentação acima citada de Aristóteles:

Demostração:

Sejam AB e C duas grandezas desiguais das quais AB é a maior. Digo que se de AB se subtrair uma grandeza maior que a sua metade, e que se da grandeza grandeza restante se retirar uma grandeza maior que a sua metade, e se repetir esse processo continuamente, restará uma grandeza menor que a grandeza C. Com efeito se C for multiplicado por si próprio um número suficiente de vezes, será maior que AB (cf. v. Def. 4). Seja DE um múltiplo de C maior que AB. Divida-se DE nas partes DF, FG, GE, iguais a C, e de AB subtraia-se BH maior que a sua metade, e de AH, subtraia-se HK maior

[10] Dadas as medidas a e $b < a$, $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{a}{2^n} < b$.

que a sua metade, e repita-se esse processo até que as divisões de AB sejam iguais em multitude(número) às divisões de DE.

Sejam então, AK, KH, HB divisões que são iguais em multitude a DF, FG, GE.

Como DE é maior que AB, e de DE foi subtraido EG menor que a sua metade, e de AB, BH maior que a sua metade, portanto o resto GD é maior que o resto HA.

E como GD é maior que HA, e foi subtraido, de GD, a metade GF e de HA, HK maior que a sua metade, portanto o resto DF é maior que o resto AK.

Mas DF é igual a C. Portanto C é também maior que AK. Portanto AK é menor que C.

Portanto ficou da grandeza AB a grandeza AK que é menor que a menor grandeza comparada, nomeadamente C.

O axioma de Eudóxio-Arquimedes não foi explicitado por Euclides, mas está implícito na sua quarta definição do livro V:

— *Se dois segmentos são dados, existe sempre um múltiplo do menor que ultrapassa o maior.*

Em suma, Euclides aplica o conceito aristoteliano do contínuo, presente no mais tarde chamado axioma de Arquimedes, para demonstrar uma proposição que lhe permite fazer a aproximação a uma grandeza, com um erro tão pequeno quanto se quiser.

Tal conceito de contínuo não permite localizar um ponto P numa recta r, embora se permita fornecer um segmento de r, "tão pequeno quanto se quiser" que contenha P.

D.4 Arquimedes (287 a.C.;212 a.C.): exaustão e completude

O hoje chamado axioma de Arquimedes (287 a.C.;212 a.C.) foi, que se saiba, exibido pela primeira vez, como axioma explícito numa lista, com a intenção de uma axiomática fundadora da geometria, pelo próprio Arquimedes[12].

No primeiro dos vários tratados, Arquimedes enuncia os seus cinco axiomas básicos, que conjugados com os axiomas e resultados dos Elementos de Euclides, são o fundamento para a construção de toda a sua geometria, de inspiração intuitiva. São os seguintes:

Postulados de Arquimedes (Tratado da esfera e do cilindro [*De la sphère et du cilindre*, Société d'editions les Belles Lettres, paris 1970])

«*Adimito o que se segue:*

1º de todas as linhas com a mesma extremidade a mais curta é a recta;

2º quanto às outras linhas, elas são desiguais quando, situadas num plano e tendo as mesmas extremidades, elas voltam uma e a outra a sua concavidade do mesmo lado e que uma entre elas está ou inteiramente compreendidas entre a outra e a recta que as mesmas extremidades que ela ou então está em parte compreendida, tendo as outras partes comuns com a outra linha. A linha compreendida é a mais curta;

3º da mesma maneira, de todas as superfícies tendo as mesmas extremidades, se essas extremidades são situadas sobre um plano, a menor é o plano;

4º quanto às outras superfícies tendo as mesmas extremidades, se essas extremidades estão situadas num plano, duas entre elas são desiguais sempre que elas tenham as suas concavidades do mesmo lado e que uma ou está inteiramente compreendidas entre a outra

[12] A denominação provém de O. Stolz.

e o plano com as mesmas extremidades ou então tem alguma parte comum com a outra. A superfície compreendida é a menor;

5º Ademais, entre as linhas desiguais, as superfícies desiguais, os corpos sólidos desiguais, o maior excede o menor de uma grandeza tal que, juntada a ela própria (um número suficiente de vezes), ela excede toda a grandeza dada que tenham uma razão com as grandezas comparadas entre elas.(ver Euclides livro V definição 4, para o conceito de razão)»

O famoso axioma de Arquimedes é o axioma 5.

Este axioma é claramente introduzido na senda de Aristóteles, contra o atomismo de Demócrito, que se queria ver longe da matemática. Debela a existência explícita de infinitamente pequenos actuais (átomos).

Exaustão e completude.

O método de exaustão foi aperfeiçoado por Arquimedes que juntou à aproximação por defeito de Eudóxio e Euclides, a aproximação por excesso.

Uma caracterização sumária da demonstração praticada por Arquimedes poderia ser a seguinte: a base teórica é sustentada pela teoria das razões e das proporções entre grandezas geométricas (comprimentos, áreas e volumes), tal como exposta nos elementos de Euclides. Essas grandezas formam um sistema ordenado e algebrizado S, depois de providas de operações ordinárias de adição e multiplicação compatíveis com a ordem. Em S tem-se:

— Se x é um m-múltiplo de y ($x = my$), y é uma m-parte de x.

— Duas grandezas (de mesma espécie) têm uma razão se, ao serem multiplicadas, uma pode exceder a outra (*Elementos*, def.4).

Como é sempre possível considerar a m-parte de uma grandeza [axioma de Arquimedes], não existe uma grandeza mínima (menor que todas as outras). O sistema S contém pelo menos uma grandeza e as iguais a ela (suas cópias), e admite grandezas incomensuráveis. A teoria das proporções pode determinar quando é que uma razão entre grandezas é maior ou menor que outra (Elementos, V, defs. 5 e 7); no primeiro caso fala-se de proporção: x está para y assim como z está para w.

O 5ºpostulado é equivalente ao seguinte: *se duas grandezas têm entre si uma razão, de acordo com a definição euclidiana* (El.V, def 4), *então a sua diferença também tem uma razão, e no mesmo sentido, com qualquer outra grandeza homogenea às dadas.*

Pode-se então formular uma condição de continuidade similar à divisibilidade sucessiva de um conjunto, isto é, nos termos da proposição 1,X dos Elementos:

— *Por mais que se itere o processo de subtracção de grandezas, a grandeza resultante sempre terá uma razão com a mais pequena das grandezas dadas.*

Em suma, a axiomatização da teoria das proporções utilizada na matemática do século III inclui a assumpção de que no sistema ordenado de segmentos S:

i) Não existe nenhuma grandeza máxima absoluta nem mínima absoluta;

ii) A existência de m-partes e de um quarto termo proporcional;

iii) A condição arquimediana de densidade e continuidade.

As formas de demonstração originais de Arquimedes podem dividir-se em dois tipos principais:

— **compressão**[13]

— **aproximação**;

[13] Segundo Heath e Dijksterhuis.

Pode-se esquematizar assim o procedimento de compressão:

— Seja $X = Y$ a proposição a demonstrar, onde X é a figura curvilínea cuja grandeza se quer conhecer, e Y uma figura regular cuja grandeza é conhecida. Suponhamos que X é maior que Y; então deve-se construir uma figura inscrita rectilínea regular Z maior que Y; mas ao estar inscrita, também será de facto menor que Y; assim pois, por redução ao absurdo, a proposição era falsa. Suponhamos que X é menor que Y; então deve-se construir uma figura circunscrita rectilínea regular W menor que Y; mas ao estar inscrita, W também será de facto maior que Y; assim pois, por redução ao absurdo, a proposição era falsa. Logo, por tricotomia da ordem total do sistema, fica $X = Y$.

É altura de fazermos algumas observações em relação ao método de exaustão aplicado por Eudóxio, Euclides e, de forma mais apurada, por Arquimedes:

— No método há: um processo de aproximação e uma passagem ao limite. O processo de aproximação de uma grandeza L é legitimado pelo axioma V, de Arquimedes. A passagem ao limite (valor efectivo de L) é legitimada pela demonstração (por reducção ao absurdo) de que a grandeza não pode ter um valor superior nem inferior ao valor efectivo de L.

Isso é suficiente para grantir uma continuidade do espaço? Evidentemente não. Para tal **seria necessário poder-se sempre garantir, para todos os casos, a existência de uma demonstração de existência de limite.**

Bastava portanto adicionar ao sistema de axiomas de Arquimedes, o seguinte axioma:

— *Todos os processos de aproximação possuem um limite;*

Isto é

— *É sempre possível aplicar o método de exaustão.*

D.5 G. Galilei (1564-1642): física

Galileu [], físico por excelência, conseguiu encontrar intuitividade em processos não arquimedianos, abrindo o caminho para a visão demócrita dos sistemas de grandezas. Na sua senda seguiram os italianos **Torricelli** e **Cavalieri** [*Geometria dos indivisíveis*], e o inglês **J. Walis** [*Arithmetica Infinitorum*].

Eis um extracto do argumento:

— «*quando o Sr. Simplício me apresenta linhas de comprimento desigual, e me pergunta como é que os maiores não contêm mais pontos que os menores, respondo-lhe que não há mais nem menos, nem o mesmo número, mas em todos um número infinito.*

[...]

Chego agora a uma outra consideração. Se se admite que a linha e todos os contínuos são divisíveis em partes sempre divisíveis, não vejo como evitar a conclusão de que são constituidos por uma infinidade de indivisíveis: uma divisão e uma subdivisão susceptíveis de se prosseguir sem fim supõem, com efeito, que as partes são em número infinito, donde se conclui imediatamente que elas não têm grandeza, pois um número infinito de partes com uma grandeza dá uma grandeza infinita; assim **o contínuo parece-nos composto por um número infinito de indivisíveis.**»

D.6 B. Pascal (1623-1662): suficiência do axioma de Arquimedes

(1623 – 1662) « *Do mesmo modo que por maior que seja um espaço, pode-se conceber um maior, e ainda um que lhe seja maior ainda; e assim ao infinito, sem jamais se chegar a um que não possa ser aumentando? E ao contrário por menor que seja um espaço, pode-se considerar um menor, e sempre assim até ao infinito, sem nunca se chegar a um indivisível que não tenha nenhuma extensão.*

[...]

Enfim, se acham estranho que um pequeno espaço tenha tantas partes que um grande, que entendem também que elas são mais pequenas à medida, e que olham o firmamento através de uma pequena lente, para se familiarizar com este conhecimento, vendo cada parte do céu em cada parte da lente.

Mas se não podem compreender que partes tão pequenas, que elas nos são imperceptíveis, possam ser tão divididas como o firmamento, não há melhor remédio que os fazer olhar com óculos que aumentam esta ponta delicada até à uma prodigiosa massa; donde eles conceberão sem qualquer dificuldade, para o socorro de uma outra lente mais artisticamente talhado, poder-se-ia aumentá-los até a igualar esse firmamento cuja extensão admiram;»

«*Eu vos digo que, desde que entre o infinito numa questão, por pouco que seja, ela torna-se inexplicável, porque o espírito se inquieta e se confunde*»

[...] como um indivisível multiplicado tantas vezes quanto se queira é tão longe de poder ultrapassar uma extensão, que não pode jamais formar senão um único só e único indivisível;

[...]

Um indivisível é o que não tem quaisquer partes, uma extensão é o que tem diversas partes separadas.

Sobre estas definições, digo que dois indivisíveis unidos não formam uma extensão[axioma de Arquimedes].

Porque, quando estão unidos, eles se tocam cada uma numa parte; e assim as partes por onde se tocam não estão separadas, pois senão eles não se tocariam. Ora, pela sua definição, eles não têm qualquer outra parte: então não têm partes separadas; portanto não têm uma extensão, pela definição de extensão que comporta a separação das partes.

[...]

Mas se se quiser tomar nos números uma comparação que representa com justeza o que nós consideremos na extensão, é preciso que seja a razão do zero com os números; pois o zero não é do mesmo género que os números, porque multiplicado por si próprio não os excede; de modo que é um verdadeiro indivisível numérico, como o indivisível é um verdadeiro zero de extensão. E encontra-se um parecido entre o repouso e o movimento, e entre o instante e o tempo; porque todas as coisas são heterogéneas às suas grandezas, porque sendo infinitamente multiplicados, elas não podem jamais fazer outra coisa senão indivisíveis.... E então encontra-se uma correspondência perfeita entre estas coisas; porque ***todas estas grandezas são divisíveis ao infinito*****, sem cair nos seus indivisíveis, de sorte que elas têm todos o meio entre o infinito e o nada**»

Resumindo: para Pascal o axioma de Arquimedes é suficiente para definir o contínuo.

D.7 G. Leibniz (1646-1716): ficções úteis

A concepção leibniziana (1646 – 1716) do contínuo pode ser afiliada na aristotélica. O seu contínuo é mais de inspiração física sensitiva (o que corresponde ao contínuo intuitivo de Veronese) e tem as seguintes características [9]:

i) O contínuo é dado por um todo: não é composto de pontos.

ii) Os pontos e as partes só aparecem no contínuo depois de os matemáticos, no decurso das suas elaborações, efecturem divisões no contínuo; num contínuo a uma dimensão, a extremidade duma parte é um ponto.

iii) O contínuo é divisível tantas vezes quanto se queira, mas não é possível operar todas as divisões ao mesmo tempo [isto é considerar um contínuo como tendo actualmente todas as suas divisões possíveis — equivalente ao axioma de Arquimedes]. Portanto o contínuo não pode jamais ser decomposto em pontos.

iv) Se se dividir um contínuo em duas partes(que por sua vez são dois contínuos), então as duas partes terão algo em comum, a saber, um novo contínuo, ou no mínimo um ponto.

v) As grandezas infinitamente pequenas são imaginárias. Não se pode encontrar no contínuo grandezas infinitamente pequenas nem as sinalizar, digamos, através duma construção. Não é possível sinalizar dois pontos cujo intervalo é infinitamente pequeno.

vi) A igualdade é uma desigualdade infinitamente pequena, isto é:

$$X = X + \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0$$

Um princípio de funções contínuas é assim enunciado por Leibniz:

— Se uma diferença nos dados pode ser arbitrariamente reduzida, acontecerá o mesmo para os dados que são dependentes dos primeiros.

Um outro princípio de Leibniz ajuda a compreender o seu conceito de contínuo, supondo que existem objectos finitários e infinitários:

— As regras do finito são válidas no infinito e vice versa.

D.8 B. de Fontenelle (1657-1757): finitos indetermináveis

Fontenelle (1657-1757) fundamenta a sua *Geometrie de l'infini [1727]*, ou o infinito na sua geometria, num conceito que o próprio reconhece paradoxal: o finito indeterminável:

— «*Car ce qu'il y a de bizarre, c'est qu'autant que ce principe est paradoxe et sauvage, autant il est fécond et général, et ie vous prie sur ce poit seulement de m'en croire à ma parole. ie trouve cela par tout, et sans l'avoir aucunement cherché, au contraire. i'auroi volu de tout mon coeur m'en pouvoir passer, i'en connossois le peril. i'en trouve à chaque moment dans le cours de l'ouvrage de nouvelles preuves par des analogies, par le Calcul, par la liaison necessaire de ce principe avec toutes les verités connus qui peuvent y avoir rapport*»

Este finito indeterminável é construido através da corrente de pensamento que sempre existiu e que defende a existência de infinitos actuais, isto é, acabados num universo infinito potencial(partes finitas de um infinito potencial.

A questão do infinito potencial e do actual é em Fontenelle entendida da seguinte maneira: o infinito potencial é absoluto, metafísico. Esse infinito não tem de ser o matemático. O matemático pode muito bem ser o actual. Vejamos as suas próprias palavras:

« Nous avons naturellement une certaine idée de l'Infini, comme d'une grandeur sans bornes en tous les sens, qui comprend tout, hors laquelle il n'y a rien. On peut appeler cet Infini Métaphysique: mais l'infini Géométrique, c'est à dire, celui que la Géométrie considere, & dont elle a besoin dans ses recherches, est fort différent, c'est seulement une grandeur plus grande que toute grandeur fini, mais non pas plus grande que toute grandeur. Il est visisble que cette définition permet qu'il y ait des infinis plus petits ou plus grans que d'autres, & que celle de L'infini Métaphysique ne le permettroit pas. On n'est donc pas en droit de tirer de l'Infini Métaphysique des objections contre le Géométrique, qui n'est comptable de ce qu'il renferme dans son idée, & nullement de ce qui n'appartient qu'à l'autre»

Observemos que tal como noutros autores, sobretudo em questões de discussão metafísica do infinito, Fontenelle pressupõe sempre uma métrica dada. Por isso ele não define o que é finito.

(preciso por o conceito fonteneliano de contínuo)

D.9 B. Bolzano (1781-1848) e A. Cauchy: o contínuo aritmético

(1781–1848) [...] *é preciso reconhecer, com efeito, que dois instantes ou pontos [no domínio da realidade sensível], duas substâncias, são separadas por uma infinidade de outras: mas que contradição daí se conclui? apenas a seguinte: nenhuma extensão não pode ser engendrada por 2,3,4 ou um número apenas finito de tais entidades. Estamos todos de acordo com isso e mesmo com mais, a saber, que uma infinidade de pontos não é nunca sufuciente para engendrar o contínuo, mas que os pontos devem devem também estar bem arranjados. Se tentarmos formar uma ideia clara daquilo que chamamos extensão contínua ou contínuo, somos forçados a declarar que um contínuo está presente se e somente se temos um agregado de entidades simples (instantes, pontos, substâncias) arranjadas de forma tal que cada membro individual do agregado tem pelo menos um vizinho do agregado para cada distância tão pequena quanto se quiser.*[...]

Que mais podemos exigir?

Alguns responderão: "que cada ponto tenha um vizinho em contacto imediato com ele próprio". Esta demanda é no entanto uma impossibilidade clara e encerra uma contradição. Pois quando diremos que dois pontos se encontram? Pode ser quando o bordo de um, digamos, o direito, coincide com o bordo do outro, digamos o esquerdo? Mas os pontos são os constituintes simples do espaço e portanto não têm bordo, nem lado direito nem esquerdo? Ou um ponto tem uma parte comum com outro e então coincidem, ou é algo diferente e os dois devem estar separados, deixando o lugar a um ponto intermediário e portanto para uma infinidade de outros visto que o argumento pode ser aplicado de novo ao primeirto ponto intermerdiário.

[...] Para bem dizer, devia-se, por um lado certamente ensinar que uma extensão não é nunca produzida por um conjunto finito de pontos, e é produzida por um conjunto infinito se e somente se a condição muitas vezes mencionada é satisfeita, a saber que cada ponto num conjunto possua, para cada distância suficientemente pequena, um vizinho pertencente também ao conjunto; e por outro lado, devia-se admitir que toda a sub-divisão de um objecto espacial não o reduz nas suas componentes simples [axioma de Arquimedes]: em caso algum para as subdivisões num número finito e mesmo para todas as subdivisões em

número infinito, por exemplo a que consiste em bissecções sucessivas. Porém, é preciso de novo insistirmos no facto que qualquer contínuo pode ser em última análise composto de pontos e apenas de pontos.»

A necessidade da fundamentação da análise[17] num conjunto de números reais rigorosamente construido, foi evidenciada como tal, pela primeira vez, por A. Cauchy no seu *Cours d'Analyse* (1821) aonde aprofundou as teorias do desenvolvimento em série e da convergência. Cauchy não terá contudo, para o espanto de muitos, desenvolvido uma teoria dos números reais.

O primeiro a reconhecer a necessidade de se questionar sobre a completude do conjunto $\mathbb{R}$ e a propor resultados nessa matéria, foi B. Bolzano, contemporâneo de Cauchy [7].

Por volta dos anos 1860, K. Weirstrass foi o primeiro a apresentar uma construção dos números reais, na sequência da continuação da obra de rigorização da análise encetada por Cauchy e Bolzano.

D.10 R. Dedekind (1831-1916): o ponto-corte

Vejamos no texto original de Dedekind a génese e o génio do seu conceito de contínuo:

— « *As considerações que são o objecto deste curto ensaio datam de Outono de 1858. Eu me encontrava então, enquanto professor na Escola Politecnica Fededral de Zurique, obrigado pela primeira vez de expor os elementos do cálculo diferencial e senti nessa ocasião, ainda mais vivamente que antes, o quanto a aritmética necessita de um fundamento verdadeiramente científico. A propósito do conceito de uma grandeza variável que tende para um valor limite fixo e particularmente para provar o teorema de que toda a grandeza que cresce constantemente, mas não para lá de todo o limite, deve necessariamente tender para um valor limite, procurava refúgio nas evidências geométricas. Mesmo ainda, admitir assim a intuição geométrica no primeiro ensino do cálculo diferencial parece-me, do ponto de vista didáctico, extraordináriamente útil, indispensável mesmo, se não se quer perder muito tempo. Mas ninguém não negará que esta forma de introduzir o cálculo diferencial, não pode de maneira nenhuma pretender ter um carácter científico. O meu sentimento de insatisfação foi então tão potente que tomei a firme decisão de reflectir até encontrar um fundamento puramente aritmético e perfeitamente rigoroso dos princípios da análise infinitesimal»*

[...]

«Se agora o quisermos, e é o que queremos, seguir aritmeticamente todos os fenomenos da recta, os números racionais não são suficientes e torna-se então absolutamente indispensável refinar de forma essêncial o instrumento Q construido pela criação dos números racionais, criando de novo números tais que o domínio dos números torna-se tão completo, ou diremos também tão contínuo como a recta.»

[...]

«No parágrafo precedente, chamamos a atenção para o facto de que todo o ponto P da recta opera uma divisão desta em duas partes [o facto de não considerar 3 implica que o ponto não corresponde a uma parte da recta- mas exactamente a duas, isto é, a um corte] tais que uma porção está à esquerda de todos os pontos da outra. Acho então que a essência da continuidade, na reciproca, isto é, no princípio seguinte:

[17] Dita também, aritmetização da análise

— Se todos os pontos da recta forem repartidos em duas classes, tais que todos os pontos da primeira classe esteja situada à esquerda de todo o ponto da segunda classe, existe um e um só ponto que opera esta partição de todos os pontos em duas classes, este corte da recta em duas porções.

[...]

A suposição desta propriedade da recta não é outra coisa senão um axioma através do qual atribuimos à recta a sua continuidade, através da qual encontramos a continuidade na recta. Se o espaço ao menos tem uma existência real, não é necessário que seja contínuo; muitas das suas propriedades subsistiriam se fosse descontínuo. E se tivéssemos a certeza de que o espaço é contínuo, nada nos impediria, se o desejássemos, de encher os seus buracos, em pensamento, e portanto de o tornar contínuo; esse enchimento consistiria numa criação de novos pontos e isso seria feito segundo o princípio acima.»

Podemos enunciar assim o axioma de continuidade de Dedekind:

— Se um segmento $\overline{OM}$ está dividido em duas classes de pontos de tal sorte que se O pertence à primeira classe e M à segunda, todo o ponto de $\overline{OM}$ pertence a uma das duas classes, e que um ponto qualquer da primeira classe se encontra no interior do segmento formado por O com cada um dos pontos da segunda classe, então existe um ponto X tal que todos os pontos situados no interior do segmento $\overline{OX}$ pertence à primeira classe enquanto que todos os pontos situados no interior do segmento $\overline{XM}$ pertencem à segunda classe. Demonstra-se que existe um e um só ponto X com essa propriedade. Pode até acontecer que X coincida com O ou com M.

D.11 K. Weirstrass (1815-1897): completude aritmética

Na sua introdução à teoria das funções analíticas(1878), K. Weierstrass, publica o seu princípio de continuidade, que já vinha professando nas suas aulas de análise:

Postulado de continuidade de Weirstarss:

— Se um segmento $\overline{OM}$ contém uma sucessão ilimitada [infinita] *de pontos sucessivos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ existe um ponto limite B tal que, em toda a vizinhança, por menor que seja, se encontra pelo menos um ponto da sucessão.*

Convém observar que que quer o ponto O quer o ponto M são supostos ter abcissas não infinitas, isto é, $\overline{OM}$ é um compacto.

Na verdade demonstra-se que

— **os postulados de Weirstrass e de Dedekind são equivalentes.**

D.12 G. Cantor (1845-1918): conjuntos perfeitos bem encadeados

« O que são e o que representam os números? Os números são livres criações do espírito humano; [...] é apenas graças ao procedimento lógico da construção da ciência dos números e deste modo pela aquisição do domínio do contínuo dos números que estamos à altura de examinar as nossas noções de espaço e de tempo, metendo-os em relação(correspondencia) com o domínio dos números criados pelo nosso espírito.»

«Não me resta senão procurar, através de noções de números reais, uma ideia puramente aritmética, e tão geral quanto possível, dum contínuo de pontos. Tomo necessariamente por ponto de partida do espaço aritmético plano a n dimensões G_n, ie, o conjunto

de todos os sistemas de valores $(x_1, x_2, ..., x_n)$*, onde cada* x *pode ter independentemente dos outros todos os valores numéricos reais de* $-\infty$ *a* $+\infty$*. A distância entre dois pontos é definida pela expressão*

$$\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + ... + (x_n' - x_n)^2}.$$

Trata-se portanto de propor uma definição precisa e tão geral quanto possível daquilo que entendemos por um subconjunto contínuo P *de* G_n*.*

Demonstrei [12] que todos os espaço G_n*, por maior que seja o seu número de dimensões,* n*, têm a mesma potência entre eles e a seguir a mesma potência que o contínuo linear, e a mesma de todos os números reais do intervalo* $(0, 1)$*. Daqui resulta que todos os sistemas infinitos de pontos* P *têm a potência da primeira classe de números (I) ou a da segunda (II).*

Para chegar agora à noção geral de um contínuo dado em G_n*, utilizo a noção de conjunto derivado* $P^{(1)}$ *de um conjunto de pontos* P *dado, ela conduz à noção de um derivado* $P^{(\gamma)}$*, onde* γ *pode ser um número inteiro qualquer das classes de número (I), (II), (III); etc.*

Se S *está em condições tais que o emprego do processo de derivação não lhe altera em nada, de sorte que*

$$S \equiv S^{(1)}$$

e consequentemente

$$S \equiv S^{(\gamma)},$$

chamo a estes sistemas S*, conjuntos perfeitos de pontos. Pode-se demonstrar para os sistemas perfeitos o seguinte teorema: eles não têm nunca a potência de (I).*

Os sistemas perfeitos de pontos S *não são sempre aquilo que chamamos condensado em todas as extensões; é por isso que eles não prestam para a definição completa de um contínuo de pontos, no entanto somos obrigados a aceitar imediatamente que o contínuo têm de ser sempre um sistema perfeito.*

Como exemplo de um sistema perfeito de pontos, que não é condensado em toda a extensão de um intervalo, por menor que seja, indico o conjunto de todos os números reais contidos na fórmula:

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + ... + \frac{c_v}{3^v} + ...$$

onde os coeficientes c podem tomar à vontade os dois valores 0 e 2 e onde a série pode ser composta de um número finito ou infinito de membros.

É portanto ainda preciso uma noção para juntar à que precede(conjuntos perfeitos) para definir o contínuo: é a noção de um sistema de pontos T *bem encadeado.*

Dizemos que T *é um sistema de pontos é bem encadeado, quando por dois pontos quaisquer* t *e* t' *desse sistema, com um número dado* ε *tão pequeno quanto possível, existe sempre um número finito de pontos* $t_1, t_2, ..., t_v$ *de* T*, de modo que as distâncias* $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, ..., \overline{t_vt'}$ *sejam todas menores que* ε*.*

Todos os contínuos de pontos geométricos que conhecemos estão compreendidos, como é fácil de ver, sob essa noção de sistema perfeito bem encadeado de pontos; mas creio *também reconhecer nestes dois atributos "perfeito" e "bem encadeado" as caracteristicas necessárias e suficientes dum contínuo de pontos e consequentemente* **defino um contínuo de pontos G_n como um sistema perfeitamente encadeado.** *Aqui "perfeito" e "bem encadeado" não são apenas palavras, mas atributos gerais do contínuo, caracterizados de uma forma abstracta, da forma mais precisa, pelas definições precedentes.»*

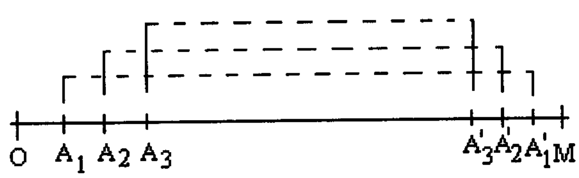
Processo de construção de subconjuntos contínuos de $\mathbb{R}$:

«O derivado de um sistema de pontos bem encadeado é sempre um contínuo, quer o sistema de pontos bem encadedo tenha a primeira quer tenha a segunda potências.»

Em linguagem matemática moderna, num espaço topológico, um conjunto diz-se *perfeito* se for *fechado e não tiver pontos isolados.*

Uma versão geométrica do postulado de continuidade de Cantor é a seguinte:

— *Se num segmento de recta $\overline{OM}$ duas sucessões de segmentos $\overline{OA_1}$,$\overline{OA_2}$,$\overline{OA_3}$,... por um lado e $\overline{OA'_1}$,$\overline{OA'_2}$,$\overline{OA'_3}$,... por outro lado, tais que os segmentos da primeira sucessão crescem infinitamente e que os segmentos da segunda sucessão decrescem indefinidamente, e isso de modo que os segmentos $\overline{A_1A'_1}$,$\overline{A_2A'_2}$,$\overline{A_3A'_3}$,... decrescem constantemente até se tornarem menores que um segmento arbitrário pré fixado (por menor que seja), a partir de um índice n (que depende naturalmente da escolha desse segmento), então existe no segmento $\overline{OM}$ um ponto X tal que $\overline{OX}$ seja maior que todos os segmentos da primeira sucessão e menores que todos os segmentos da segunda sucessão.*



É o conhecido princípio dos intervalos encaixados que, juntamente com o axioma de Arquimedes, serve para definir o conjunto dos números reais a partir dos racionais.

D.13 D. Hilbert (1862-1943): contínuo dedekindiano

O contínuo surge na geometria de Hilbert sob a forma de dois postulados que constituem o grupo V, denominados, **axiomas de completude**:

V 1. (*Axioma da medida ou axioma de Arquimedes*). *Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos quaisquer, então há na recta $\overline{AB}$ um número finito de pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ tais que os segmentos $\overline{AA_1}, \overline{A_1\ A_2}, ..., \overline{A_{n-1}\ A_n}$. são congruentes com o segmento $\overline{CD}$ e B está entre A e A_n .*

V 2. *(Axioma da completude linear). Os pontos de uma recta a constituem um sistema, com as suas relações de ordem e congrência, que já não pode ser ampliado, se se quer manter as relações entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de ordem linear e congruência que resultam dos axiomas I—III e V1.*

As relações entre os dois axiomas são as seguintes

i) O axioma da completude não é uma consequência do de Arquimedes, como Hilbert demonstra com o seu modelo de geometria não-arquimediana

ii) A manutenção de todos os axiomas I-III e teoremas correspondentes mas não o axioma de Arquimedes impossibilita a introdução de um axioma de completude, sob pena de contradição.(isto é, qualquer axioma de completude para o sistema completo de axiomas I, II e III de Hilbert, tem que forçosamente implicar o axioma de Arquimedes.

Os dois axiomas de completude podem ser substituidos pelo axioma de completude de Dedekind, em presença dos restantes axiomas.

Axioma da completude de Dedekind

Supondo que uma recta r é a união de dois conjuntos não vazios, $r = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de tal modo que nenhum ponto de Σ_1 está entre dois pontos de Σ_2 e vice versa, então existe um único ponto $O \in r$ tal que, para quaisquer pontos P_1, P_2 de r, O está entre P_1 e P_2 sse $O \neq P_1$, $0 \neq P_2$ e um dos pontos P_1, P_2 está em Σ_1 sse o outro está em Σ_2;

O axioma de Arquimedes mais os restantes axiomas não garantem a existência de pontos aderentes. Mas o axioma de Dedekind-Hilbert mais os restantes, que implicam o axioma de Arquimedes, já garante.

Antes de concluir esta secção convém destacar que os axiomas de incidência, ordem e congruência de Hilbert, para o plano são os essenciais, conseguidos através duma síntese conciliadora dos principais contributos de Euclides, Pasch, Helmholtz, e o próprio Hilbert e seus colaboradores, mais tantos outros. Têm um certo caracter de definitividade, sobretudo pela sua adaptação à geometria analítica. Por essa razão, neste texto, sempre que se referir a axiomas de incidência, ordem e congruência, sem mais especificações, está-se a referir a esses precisamente.

D.14 G. Veronese (1854-1917): o contínuo transarquimediano

Uma questão fundamental na fundação da geometria é a possibilidade de se poder estabelecer um isomorfismo entre um **conjunto numérico** e uma **recta**, para obviar a construção de geometrias analíticas. Hilbert constrói todo o seu sistema com a intenção de que o isomorfismo entre uma recta r e o conjunto $\mathbb{R}$ seja verificado. E consegue isso através dos seus axiomas I, II, III, mais o axioma de continuidade de Dedekind.

Mas o isomorfismo $r \leftrightarrow \mathbb{R}$ não é o único possível para o fim em vista. Antes de ver uma alternativa, vejamos qual

D.14.1 O papel do axioma de Arquimedes

A importância do axioma de Arquimedes num sistema ordenado S de segmentos resulta dos factos seguintes:

i) **pode-se concluir imediatamente a possibilidade de representar todo o segmento de recta de S por um número real, seja racional, seja irracional.**

Com efeito, dadas duas grandezas quaisquer que satisfazem o postulado de Arquimedes, este permite determinar dois múltiplos sucessivos da primeira destas duas grandezas, enquadrando a segunda, de modo que se pode estabelecer cálculos com essa duas grandezas e definir a razão de duas delas em conformidade com a teoria das proporções de Euclides. Se se tomar uma das duas grandezas consideradas como unidade de medida, esta razão é um número, o número que mede a outra grandeza.

ii) **não existem em S segmentos infinitamente pequenos actuais em relação aos comprimentos que se podem considerar.**

Mas o axioma de Arquimedes por si só **é insuficiente para se poder concluir que, reciprocamente, a todo o número irracional correspode um segmento medido por esse número.**

Referiu-se acima que se pode demonstrar o axioma de Arquimedes juntando aos axiomas de incidência, ordem e congruência o axioma de Dedekind ou o de Weirstrass. Por outro lado sabe-se que juntando o postulado de Cantor ao de Arquimedes, consegue-se inverter a correspondência $r \to \mathbb{R}$. Em suma tem-se

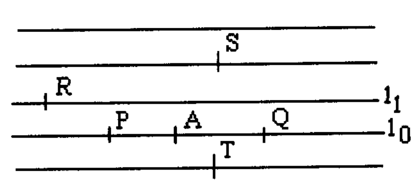
— **dados os postulados de congruência de segmentos, o postulado de continuidade de Dedekind (ou o de Weirstrass) é equivalente ao conjunto dos postulados de continuidade de Cantor e Arquimedes.**

D.14.2 Independência do axioma de Cantor do axioma de Arquimedes

G. Veronese [20], mostrou que à questão de saber se o postulado de Arquimedes é também uma consequência dos postulados de congruência de segmentos mais o postulado de continuidade de Cantor, se deve responder negativamente, e portanto que **o postulado de continuidade de Cantor é compatível com a suposição de um segmento infinitamente pequeno actual** (em relação a uma dada unidade).

Para tal construiu uma geometria da seguinte maneira:

Suponhamos, num mesmo plano (figura abaixo), um sistema $l_0, l_1, l_2, \ldots$ de rectas horizontais, em número ilimitado, a distâncias iguais umas das outras, e consideremos o conjunto de todos os pontos dessas rectas como um sistema de pontos ordenados de forma que todo o ponto Q, situado à direita de P, sobre uma mesma recta horizontal, e que cada ponto R ou S situado mais acima que A, sejam vistos como estando "a seguir a P"; ao contrário, P precede Q, R e S. Neste sistema de pontos que se pode supor ordenado nos dois sentidos a partir de cada ponto P, a definição de segmento é fixada(tanto a de segmento finito $\overline{PQ}$ como a de segmento indefinido composto por uma semi-recta, ou a de segmentos tai como $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$ encavalitados sobre duas ou mais semi-rectas) e pode-se assim falar de segmentos congruentes relativamente a uma translação qualquer do plano que se sobrepõe às rectas consideradas.



Nesta geometria são realizados os postulados planos de incidência, ordem e congruência de segmentos. Acontece o mesmo com o postulado de continuidade de Cantor (mas não para o postulado de continuidade de Weirstrass ou de Dedekind).

[20] Atti accad. lincei Memorie mat. (4) 6,1890 p.603; FG,p.105.

Ao contrário, o postulado de Arquimedes não é verificado no sistema considerado, pois um múltiplo qualquer de um segmento (finito) $\overline{PQ}$ é sempre menor que o segmento (infinito) $\overline{PR}$, composto de duas semi-rectas.

Conclui-se que

— **O postulado de Arquimedes é independente do postulado de continuidade de Cantor.**

D.14.3 Os postulados de continuidade de Veronese

A primeira condição de continuidade foi publicada por Veronese em 1889 [], e mais tarde, nos FG chamou-o de *princípio de continuidade absoluta.* Veronese formula o princípio para um sistema de grandezas S com certas propriedades, tendo em mente sistemas de segmentos não orientados de uma recta euclidiana, com certas propriedades, entre as quais as seguintes

i) $\forall x, y \in S - \{0\}, \quad x + y > x, y$ (positividade estrita)

ii) $S - \{0\}$ não tem ínfimo (ausencia de um menor elemento positivo)

No caso de estruturas como S, a condição ii) é equivalente assumir que sempre que

$$\forall x, y \in S, x < y \Rightarrow \exists z \in S : x < z < y$$

Veronese [(pp. 608-610)] enuncia assim o princípio:

— Se um intervalo (segmento) (XX'), cujas extremidades sempre variam em direcções opostas, se tornar indefinidamente pequeno[22], existe sempre em (XX') um elemento Y de S, diferente de X e de X'.[(1889, p.612, princípio IV)]

Se se simplesmente substituir as referencias às variáveis X e X' pelas colecções A e B de valores que as variáveis assumem, então, na base das definições de Veronese, chegamos à seguinte formulação da condição que foi tornada popular por O. Hölder (1901), pp. 10-11):

— Se A e B são conjuntos não vazios de S onde A não tem maior elemento e B não tem menor elemento, e todo o elemento de A precede todo o elemento de B, e se para todo o elemento positivo c de S existem elementos a de A e b de B para os quais $b - a < c$, então existe um z em S que está estritamente entre os elementos de A e os de B.

Além disso, como o elemento z é único(1889, p.612), a condição pode também ser enunciada na seguinte forma, que foi tornada formulada por Schoenflies (1906, p. 26), e que mais claramente sublinha a sua relação com a condição de continuidade de Dedekind:

— Se (A, B) é um corte de Dedekind de S tal que para todo o elemento positivo c de S existem elementos a de A e b de B para os quais $b - a < c$, então ou A tem maior elemento ou B tem menor elemento, mas não se dá ambos os casos.

Trata-se pois da condição de Dedekind mais a condição métrica

$$0 < d(a, b) < c, \quad a \in A, b \in B, c \in S^+$$

É fácil de ver que **em presença do axioma de Arquimedes, e apenas nesse caso, a condição métrica de Veronese sobre os cortes é invariavelmente satisfeita, logo superflua.**

[22] Para Veronese, as expressões "indefinidamente pequeno"(idp) e "infinitamente pequeno"(ip) são diferentes, na medida em que, como convenciona [72], a primera expressão refere-se um processo potencialmente infinito(que aplicado a este caso particular resultaria num segmento potencialmente infinitesimo); a segunda expressão refere-se a um objecto infinitamente pequeno.

Assim, para Veronese, ao contrário de Dedekind, os sistemas contínuos de grandezas não precisam estar completamente isentos de "lacunas", embora tenham de estar isentos das "lacunas" que satisfazem a condição métrica satisfeita no caso clássico.

Além disso Veronese mostrou que, se (A, B) é um corte num corpo não arquimediano que satisfaz essa condição, então as diferenças entre os membros de B e os de A têm de se tornar infinitamente pequenos em relação a qualquer elemento positivo do corpo, donde, um elemento positivo ν é dito infinitesimo em relação a um elemento positivo u, se e só se $nv < u$ para todos os inteiros positivos n.

Para chegar à sua formulação, Schöenflies [23], examinou a diferença entre o conceito de continuidade de Dedekind e o de Veronese, da seguinte maneira:

Se o conjunto dos pontos de um segmento $\overline{OM}$ é dividido em duas classes M' e M'' conforme o postulado de Dedekind, podem-se apresentar quatro casos:

1º) M' tem um último ponto A' e M'' tem um primeiro ponto A'' - neste caso diz-se que há um salto no segmento;

2º) M' tem um último ponto A', mas M'' não tem primeiro ponto;

3º) M' não tem último ponto, mas M'' tem primeiro ponto;

4º) M' não tem último ponto nem M'' tem primeiro ponto - neste caso diz-se que há uma lacuna no segmento.

O conceito de continuidade de **Dedekind exclui os saltos e as lacunas**; o de **Veronese exclui os saltos, mas só exclui as lacunas em casos particulares.** No continuo de Veronese as lacunas aparecem por exemplo sempre quando os segmentos $\overline{A_1A'_1}, \overline{A_2A'_2}, \overline{A_3A'_3}, \ldots$ de que se falou no enunciado do postulado de continuidade de Cantor, não se tornam menores que todos os segmentos do sistema considerado, o que é possível (isto é, há no sistema segmentos menores que o menor dos segmentos $\overline{A_1A'_1}, \overline{A_2A'_2}, \overline{A_3A'_3}, \ldots$, manifestamente, *ips* actuais).

D.15 Conclusão

D.15.1 Resumo

A passagem do contínuo empírico ao contínuo matemático é apenas uma questão de atitude axiomática, baseada, fundamentalmente, no conceito de **ponto**, que invariavelmente é considerado como um "**ente sem partes**", isto é, um **indivisível** ou **infinitamente pequeno.** Essa atitude axiomática tem em conta:

A. a natureza do ponto, que pode ser:

i) **absolutamente indivisível: ponto absoluto** (infinitamente pequeno em relação a todas as escalas de medida possíveis), o que implica o axioma de Arquimedes;

ii) **relativamente indivisível: ponto relativo** (infinitamente pequeno em relação a uma dada escala de medida), o que implica a negação do axioma de Arquimedes);

iii) **indivisível, relativamente ou absolutamente**, dependendo do contexto, isto é, referindo-se a uma escala específica (ou um conjunto finito delas), ou a todas as escalas possíveis, o que não implica o axioma de Arquimedes.

Convém observar que **os pontos de i) não são objectos com qualquer paralelo empírico.** São criações da mente humana, mercê de uma atitude axiomática de livre pensamento, típicamente matemática.

[23] Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 15, 1906

Estas concepções podem ser classificadas de: **arquimediana**, no caso i), **anti-arquimediana**, no caso ii) e **transarquimediana** ou **não-arquimediana**, no caso iii).

B. A relação entre os pontos, que é estabelecida por axiomas compatíveis com a natureza do ponto adoptada.

A adopção duma **concepção arquimediana** de ponto implica imediatamente a adopção de um axioma de continuidade que implique o axioma de Arquimedes, por exemplo:

— *Axioma de Weierstrass;*

— *Axioma de Dedekind.*

A adopção duma **concepção anti-arquimediana** leva a atitudes tomísticas, como por exemplo a de Galileu, Torriceli, Cavalieri, Wallis, etc, que conseguem, na prática, produzir muitos resultados matemáticos, sobretudo relacionados com objectos empíricos, sem preocupações com os fundamentos.

A adopção duma **concepção transarquimediana** de ponto leva a axiomas de continuidade que não implicam nem excluem o axioma de Arquimedes:

— *Axioma de Cantor;*

— *Axioma de Veronese.*

Para esta concepção veronesiana o contínuo é um conjunto de **classes arquimedianas** sendo cada classe um ponto (que por sua vez contém pontos, a outras escalas), portanto contínuo, que obedece ao axioma de continuidade de Veronese. Este axioma é trans-escalar, isto é, adapta-se às mudanças de escala. Se um conjunto é contínuo para uma unidade U, é contínuo para todas as unidades da mesma classe Arquimediana que U.

O axioma de Dedekind é um caso particular do axioma de Veronese.

D.15.2 Discussão

Adopção do axioma de continuidade de Dedekind na fundamentação da geometria, tal como proposta por Hilbert, levou à criação dos espaços afins, tal como são correntemente utilizados na geometria analítica, por exemplo. Esses espaços são completos no sentido de Dedekind e por essa via têm a *fineza da ordem arquimediana do conjunto dos números reais*. O isomorfismo de ordem $r \leftrightarrow \mathbb{R}$ transforma a recta geométrica num conjunto de números reais, com todas as vantagens que daí advêm.

A adopção de um axioma de continuidade anti-arquimediano, nunca aconteceu (que saibamos) depois de Dedekind. Uma geometria fundada num tal axioma seria equivalente uma uma geometria empírica, com as dificuldades inerentes às dificuldades que empiricamente se encontram. Poderia ser assaz desenvolvida mas nunca conseguiria atingir um grau de elaboração matematicamente satisfatória dado o seu carácter exclusivamente finitário. Porém seria uma geometria bastante tratável computacionalmente.

A atitude axiomática não-arquimediana possui várias virtudes, sendo a mais evidente o facto de permitir uma co-existência das duas atitudes anteriores. Essa atitude, originária de Veronese, tem mais as seguintes virtudes:

— Ao permitir a existência de **pontos absolutos**, consegue incluir toda a geometria afim, em particular a euclidiana (satisfazendo a face platónica que está presente em quase toda a matemática[25])

[25] Os mundos platónicos são possíveis, logo devem ser previstos pela matemática — este é o ponto de vista de muitos matemáticos, mas não de todos.

— Ao permitir a existência de **pontos relativos**, devolve à geometria a intuitividade das ciências experimentais, tais como a Física, por exemplo, o que mostra todo o potencial da geometria não-arquimediana[26].

Veronese concilia as duas geometrias chamando à primeira o **espaço geral**, que é a **matriz de toda a geometria**, e construindo nessa matriz todas as outras geometrias, em particular a geometria não-arquimediana. O contínuo linear de Veronese é uma recta não-arquimediana, isomorfa a um conjuntos numérico não-arquimediano, completo no sentido de Veronese.

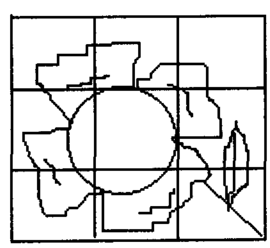
Pode-se então dizer que a **geometria de Hilbert**, por ser a **mais fina**, no sentido de **completa à Dedekind**, é ao mesmo tempo a matriz de todas as geometrias e a descrição local de cada uma, por causa da homogeneidade do espaço que implica. É portanto uma **geometria localizante**. Por outro lado, dado ao carácter do seu ponto, este não passa de um objecto lógico, sem textura interna — o que o torna impróprio para modelar certos objectos empíricos.

Outro aspecto das dificuldades de modelação inerentes ao carácter "vazio" do ponto de Hilbert é o facto de este introduzir várias singularidades nos modelos, o que leva a grandes níveis de complexidades nos mesmos.

A geometria de Veronese, que inclui a de Hilbert, deve ser mais apropriada para descrever fenómenos físicos (sendo, por exemplo, o espaço geométrico de Hilbert o espaço das interacções e os outros espaços, os de objectos, por exemplo). Não teria as desvantagens da geometria de Hilbert.

Para terminar, vejamos dois aspectos, **propositamente exagerados**, de comparação das duas geometrias:

A. Na figura abaixo, supondo que um ponto é um "azulejo",



com uns "óculos de Hilbert", o que nela se vê é equivalente a:

. . .
. . .
. . .

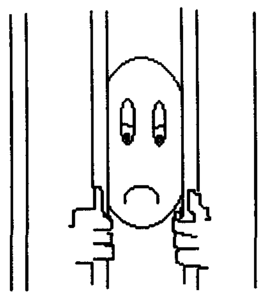
— não se consegue ver a flor representada.

Com "óculos de Veronese" consegue-se ver a flor (embora a geometria não pre-estabeleça — e se acreditarmos em Roger Penrose, nunca poderia tal acontecer[27],— que se trate de uma flor).

[26]Nesse quadro se compreende que Veronese defenda [75] que o ponto absoluto seja uma "marca" sobre o contínuo e não uma parte do contínuo.

[27]The Emperor's New Mind, :« *não é possível criar um algoritmo que descreva todo o ponsamento humano*».

B. Para Veronese, um objecto é contínuo, quando a escala de medição não é suficientemente resolutiva para detectar as "lacunas" (relativamente ao contínuo de Dedekind):



Por fim, note-se que a geometria de Veronese possui várias características inerentes aos espaços da Física: **interpenetrabilidade, fractalidade e quantificação.**

Bibliografia

[1] Actas da Segunda Universidade Europeia de História e Epistemologia na Educação Matemática, Braga,1996, vols.1 e 2, APM DMatUM(ed),1996.

[2] Almeida, P. — Introdução à Geometria Não Comutativa, notas de curso, Outono-Inverno de 1997.

[3] Almeida, P. — Adèles through noncommutative geometry — an informal motivation, Talk at Bologna, 20th. March 2002.

[4] Aristóteles — Física

[5] Barbyn, Eveline — *Historicité de la notion d'evidence en geométrie*, Actas do HEM-Braga, 1996

[6] Barreau, Hervé (et al, ed) — *La Mathématique Non Standard*, éditions du CNRS, Paris, 1989.

[7] Bolzano — *Contributions to a better-grounded presentations of mathematics*, in [28].

[8] Bolzano — *From paradoxs of the infinite*, in [28].

[9] H. Breger — *Le continu chez Leibniz*, in [65].

[10] Bosch S. (et all) — Non-Archimedean Analysis, Springer, 1984.

[11] Birkhoff, G.D. — *Annals of Maths.* 3,1932.

[12] Cantor, G. — Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, éditions Jacques Gabay, Paris, 1989

[13] Cauchy, A. L. — *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique,* 1821.

[14] Connes, A. — *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.

[15] Cutland, N. (ed.)- *Nonstandard Analysis and its Applications*, London Math. Soc. Student Texts, 10, Cambridge University Press, 1988.

[16] Dedekind, R. — *Continuity and irrational numbers*,in [28].

[17] Dedekind —*Was sind und was sollen die Zahlen?*, in [28].

[18] Dedekind, Richard — *Continuidade e números irracionais*, tradução de, revisão científica de A.J. Franco Oliveira, Évora, 1999(não publicado).

[19] Deledicq, André /Diener, Marc — *Leçons de Calcul Infinitésimal,* Armand Colin, Paris, 1989.

[20] Descartes, R. — *A Geometria*, tradução do original de 1637, em edição bilingue, por Emídio C. Queiroz Lopes, Edições Prometeu, Lsboa, 2001.

[21] Diener, F./Reeb, G. — *Analyse non Standard*, Hermann, 1989.

[22] Diener, Francine /Diener, Marc (ed) — *Nonstandard Analysis in Practice*, Spriger, 1995.

[23] Diener, Marc — *Enseigner l'analyse avec des ordres de grandeur*, 1997.

[24] Ebbinghaus, H.-D (et al, eds). - *Numbers*, GTM 123, Springer, 1995.

[25] Enriques, F. — *Principes de la géométrie*, Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, Tome III, vol 1, III1, 1900.

[26] Erhelich, P. (ed.) — Real numbers, generalizations of the reals and theories of continua, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[27] Euler, L. — *Introduction ad Analysin Infinitorum*, 1748.

[28] Ewald, W. B. — *From Kant to Hilbert, A source Book in the Foundations of Mathematics,* Claredon Press, Oxford, 1996, Vols. I e II.

[29] Fontenelle, B. — Éléments de geométrie de l'infini, Paris, 1727.

[30] Fortes, P. — ção a estruturas Dedekind-Veronesianas do Contínuo,Universidade de Évora 2003 (Não publicado).

[31] Franco de Oliveira, A.J. — Geometria, Universidade de Évora, 1988.

[32] Franco de Oliveira, A.J. — Geometria Euclidiana, Universidade Aberta, Lisboa, 1995.

[33] Franco de Oliveira, A.J. — Transformações Geométricas, Universidade Aberta, Lisboa, 1997.

[34] Franco de Oliveira, A.J.— *Matemática Não-Standard*, Apontamentos para a disciplina homónima do mestrado em Matemática aplicada da Universidade de Évora, não publicados, 1997.

[35] Freguglia, Paolo — *I fondamenti de la geometria a piú dimensioni secondo Giuseppe Veronese*, Actas do Seminari di Geometria, Dipartamento di Matematica, Università degli studi di Bologna, 1996-1997.

[36] Gallilé - Discours et Démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles, Armand Colin, Paris

[37] Gallilé - Dialogue sur les deux grandes systèmes du monde

[38] Goldblatt, R. — *Lectures on the Hiperreals*, An Introduction to Nonstandard Analysis, Springer, 1991.

[39] Goze, Michel — *Infinitesimal Algebra and Geometry*, in [22]

[40] Greenberg, M. — Euclidean and Non-Euclidean Geometries, 2nd edition, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.

[41] Hahn, H. — *Uber die Nichtarchimedishen Grossensysteme*, Sitzungsberichte der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der wissenschaften, Wien, Abteilung 2a, 116, 601-655, 1907.

[42] Heath, Thomas L. — *Euclid, the thirteen books of the elements*, vols. 1,2 and 3, 2nd edition, Dover, 1956;

[43] Heath, Thomas L. — *A History of Greek Mathematics*, vols1,2, Dover, 1981;

[44] Hartshorne, R. — Geometry: Euclid and Beyond, Springer, 2000.

[45] Helmoltz — *The original meaning of geometrical axioms*, in [28]

[46] Hilbert, D. — Fundamentos da geometria, 1a. edição portuguesa, tradução de Pilar Ribeiro e Silva Paulo, Instituto da alta Cultura, Lisboa, 1951.

[47] Hilbert, David — *Les Fondements de la Géométrie*, édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris, 1971

[48] Hilbert, David — *Foudations of Geometry*, translated from the10th German Edition, Open Court, 2nd edition, Revised and enlarged by Paul Bernays,1974.

[49] Hilbert, D. — Fundamentos da geometria, 2a. edição portuguesa, tradução de Pilar Ribeiro, Silva Paulo, Franco de Oliveira, Paulino Fortes, Vaz Ferreira, coordenação de Franco de Oliveira, Gradiva, Lisboa, 2003.

[50] Klein, F. — Matemáticas elementales desde un punto de vista superior (2 vols.), Reverté, Madrid,1973.

[51] Klein, F. — *On the mathematical character of space-intution and the relation of pure mathematics to the applied sciences*, in [28]

[52] Leibniz - in

[53] Maron — The origin of infinitesimal calculus, Dover, New York, 1995.

[54] Maning, H.P. — *Geometry of Fourth Dimensions*, Dover, New York, 1956.

[55] Millman, R./Parker, G. — Geometry — A metric Approach with Models, Springer, 1991.

[56] Moise, E. — Elementos de Geometria Superior, Companhia Editorial Continental, S.A. Mexico-Espanha-Argentina, 1968

[57] Nelson, Edward — *Internal Set Theory: A new approach to Non Standard Analysis*, in BARR(89)

[58] Pascal - Oeuvres completes, Desclée de Brower, Paris

[59] Peano, G. — *Geometric Calculus*, Translated By Lloyd C. Kannenberg, Birkhäuser, 2000.

[60] Postnikov, M. — *Leçons de géométrie*, Mir, Mscovo, 1988.

[61] Robert, A. — *Nonstandard Analysis*, Wiley, 1989.

[62] Robinson, A. — *Procedings of the Royal Academy of Sciences*, Amsterdam, A64, 432-440, 1960.

[63] Robinson, A. — *Nonstandard Analysis*, North-Holland, 1966

[64] Rossier, Paul — *Géométrie synthétique moderne*, Lib. Viubert, Paris, 1961.

[65] Salanskis, Jean-Michel /Sinaceur,Hourya, (eds) — *Le Labirynte du Continu*, Springer, 1992.

[66] Sari, Tewfik — *General Toplogy*, in [22]

[67] Schöenflies, A. — *Notes sur la Géométrie non-archimédienne*, Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, Tome III, vol 1, III-2.

[68] Sinaceur, H. — *Corps et Modèles*, Vrin, Paris, 1991.

[69] Sousa Pinto, J. M. — *Métodos Infinitesimais de Análise Matemática*, FCG, Lisboa, 2000.

[70] Van den Berg, I.P. — *Nonstandard Asymptotic Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, 1249, Springer, 1987.

[71] Ventura Araújo, P. — Curso de Geometria, Gradiva, Lisboa, 1998.

[72] Veronese, G. — *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891.

[73] Veronese, G./Gazzaniga, P. — *Elementi di Geometria*, Parte I e Parte II, Fratelli Drucker, 1900.

[74] Veronese, G. — *Les postulats de la géométrie dans l'enseignement*, Actes, comptes-rendus des congrès internationaux des mathématiciens: procès et communications, congrès tenu à Paris, 1900, Gauthier-Villars, Paris,1992.

[75] Veronese, G. — *Estudo Histórico e crítico dos fundamentos da geometria*, tradução, introdução e notas de Paulino Fortes, Universidade de Évora, 2002 (não publicado).