

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**A EDUCAÇÃO E A ECONOMIA: DETERMINANTES NA QUALIDADE E
EFICIÊNCIA EDUCATIVA**

Nuno Filipe Antunes Rocha

Dissertação para a obtenção de grau de mestre em Matemática para o Ensino

Orientador:

Maria Manuela Melo Oliveira

Coorientadores:

Carlos Manuel Rodrigues Vieira

Isabel Maria Pereira Viegas Vieira

Janeiro 2014

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**A EDUCAÇÃO E A ECONOMIA: DETERMINANTES NA QUALIDADE E
EFICIÊNCIA EDUCATIVA**

Nuno Filipe Antunes Rocha

Dissertação para a obtenção de grau de mestre em Matemática para o Ensino

Orientador:

Maria Manuela Melo Oliveira

Coorientadores:

Carlos Manuel Rodrigues Vieira

Isabel Maria Pereira Viegas Vieira

Janeiro 2014

A Educação e a Economia: Determinantes na qualidade e eficiência educativa

RESUMO

O presente estudo analisa a eficiência educativa em Portugal, comparando o país com os restantes membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE). Para alcançar este objetivo, a análise começa por dar resposta às seguintes questões:

1. Quais os indicadores socioeconómicos que mais influenciam a educação?
2. Qual a metodologia mais adequada para determinar a eficiência educativa?

No sentido de dar resposta à primeira questão, a metodologia adotada consistiu na utilização de um método paramétrico para determinar os indicadores que teriam maior influência no modelo a construir. Para poder responder à segunda questão, utilizaram-se diversos métodos não paramétricos. O método que revelou maior robustez foi o Order-m, por ter melhor razão de convergência face à dimensão da amostra.

A eficiência educativa parece ser privilégio de um reduzido número de países: Finlândia, Japão e Coreia do Sul. Portugal revelou-se ineficiente face a muitos países da OCDE.

Palavras-chave: Eficiência educativa, RLM, DEA, FDH, Order-m.

The Education and the Economy: Determinants of the quality and efficiency of education

ABSTRACT

This study examines the efficiency of education in Portugal, comparing the country with other members of the Organization for Economic Cooperation and Development (OECD).

To accomplish this, the analysis begins by addressing the following questions:

1. What are the socio-economic indicators that influence education?
2. What is the most appropriate methodology for determining the efficiency of education?

In order to answer the first question, the methodology adopted was a parametric method to determine the indicators that have greater influence on building the model. To answer the second question, we used several nonparametric methods. The method that proved more robust was Order-m, for having a better rate of convergence compared to the sample size.

The efficiency of education seems to be the privilege of a small number of countries: Finland, Japan and South Korea. Portugal proved inefficient compared to many OECD countries.

Key Words: Educational efficiency, RLM, DEA, FDH, Order-m.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores Prof.^a Dr.^a Isabel Vieira, Prof.^a Maria Oliveira e Prof.^o Dr.^o Carlos Vieira pelas sugestões, críticas e apoio.

Aos meus pais, Joaquim Rocha e Gracinda Rocha, pela forma como me apoiaram e incentivaram durante a realização desta tese.

À Rosário por me ter apoiado.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS.....	ix
ÍNDICE DE TABELAS.....	xi
SIGLAS.....	xii
INDICADORES.....	xiv
Capítulo 1.....	1
Capítulo 2.....	5
2.1 Impactos na educação de uma economia mundializada.....	5
2.2 A qualidade de um sistema de ensino como motor do crescimento económico.....	9
2.3 A educação como campo quase exclusivamente estatal.....	18
2.4 Como avaliar um sistema de ensino?.....	21
2.4.1 Variáveis num sistema de ensino.....	21
2.4.2 Indicadores quantitativos e indicadores qualitativos.....	29
2.5 Críticas relativas a alguns indicadores.....	32
2.6 Outras consequências da educação.....	34
2.7 Educação Formal e Educação Não Formal.....	36
Capítulo 3.....	39
3.1 O papel da Educação na Economia: Caso Português.....	39
3.2 Indicadores mais representativos.....	40
Capítulo 4.....	47
4.1 Definição de métodos paramétricos.....	47
4.2 Modelo de Regressão Linear Simples.....	48
4.2.1 Estimação pelo método dos quadrados mínimos.....	50
4.2.2 Coeficiente de determinação.....	55
4.3 Modelo de Regressão Linear Múltipla.....	56
4.3.1 Comparação de modelos e submodelos.....	68
4.3.2 Escolha de submodelos.....	71
4.3.3 Análise de Resíduos.....	75

Capítulo 5.....	79
5.1 Definição de métodos não paramétricos	79
5.2 O porquê da utilização de métodos não paramétricos.....	82
5.3 Noções básicas	84
5.4 Método Free Disposable Hull	89
5.5 Método Data Envelopment Analysis	94
5.5.1 Testes de retorno de escala	96
5.6 Método de Order-m.....	111
Capítulo 6.....	115
6.1 Descrição dos dados	115
6.2 Aplicação de métodos paramétricos.....	117
6.3 Aplicação de métodos não paramétricos.....	125
6.3.1 Método Free Disposable Hull.....	125
6.3.2 Método Data Envelopment Analysis	129
6.3.3 Método Order-m.....	134
Capítulo 7.....	139
Considerações Finais.....	139
Referências Bibliográficas	143

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2. 1 - Efeito estimado do desempenho nos testes internacionais na taxa média de crescimento do PIB dependendo do grau de abertura ao comércio internacional	15
Figura 2. 2 - Ciclo gerador de competitividade.....	16
Figura 2. 3 - Esquemática da relação entre sistema educativo e rendimento	35
Figura 3. 1 - Despesa por aluno nos países da OCDE.....	41
Figura 3. 2 - Percentagem da população entre 25 e 34 anos que não completou o ensino secundário no ano 2009	42
Figura 3. 3 - Desigualdade social (coeficiente de Gini) (Final da década de 2000).....	44
Figura 4. 1 - Gráficos de nuvem de pontos evidenciando dois tipos de correlação (positiva e negativa).....	49
Figura 4. 2 - Ajustamento da reta de regressão à nuvem de pontos	50
Figura 4. 3 - Diferença entre a ordenada de um ponto da nuvem e a ordenada de um ponto da reta de regressão com a mesma abcissa	51
Figura 4. 4 - Diagrama de dispersão entre a quilometragem e o preço de venda de um carro usado	53
Figura 4. 5 - Reta de regressão do diagrama de dispersão apresentado na Figura 4. 4.....	54
Figura 4. 6 - Nuvem de ponto e plano de regressão (subespaço) com $p=2$	56
Figura 4. 7 - Gráficos de visualizações parciais.....	57
Figura 4. 8 - Representação gráfica da matriz X e do vetor Y	59
Figura 4. 9 - Vetor \hat{y} que resulta de projetar ortogonalmente y sobre $\mathcal{H}(X)$	60
Figura 4. 10 - Significado geométrico do conceito SQRE	61
Figura 4. 11 - Significado geométrico dos conceitos SQT, SQR e SQRE	65
Figura 4. 12 - Significado geométrico do coeficiente de determinação	65
Figura 4. 13 - Gráfico da função distribuição F e região de rejeição do teste.....	69
Figura 5. 1 - Representação esquemática do funcionamento do DMU	79
Figura 5. 2 - Representação do conjunto produção e da fronteira tecnológica	80
Figura 5. 3 - Ilustração da forma de construir a fronteira	81
Figura 5. 4 - Representação de diferentes fronteiras obtidas usando diferentes métodos.....	84
Figura 5. 5 - Representação do conjunto produção e da respetiva fronteira.....	85
Figura 5. 6 - Conjunto $\gamma(x)$, $q=2$	86
Figura 5. 7 - Representação de pontos de forma a definir a maior eficiência.....	88
Figura 5. 8 - Construção do conjunto Ψ_{FDH}	90
Figura 5. 9 - Representação da fronteira no caso de um input e um output	95

Figura 5. 10 - Simulação de DMUs e representação da fronteira.....	100
Figura 6. 1 - Modelo linear determinado usando todos os indicadores.....	118
Figura 6. 2 - Determinação de um modelo usando direção backward e critério AIC.....	119
Figura 6. 3 - Sumário do modelo	119
Figura 6. 4 - Teste de colinearidade entre <i>PISA</i> e <i>AE</i>	120
Figura 6. 5 - Teste de colinearidade entre <i>PISA</i> e <i>HDI</i>	120
Figura 6. 6 - Sumário do modelo	121
Figura 6. 7 - Aplicação do teste de Durbin-Watson	122
Figura 6. 8 - Análise gráfica dos resíduos	122
Figura 6. 9 - Teste de Shapiro-Wilk.....	123
Figura 6. 10 - Matriz de correlação.....	123
Figura 6. 11 - Teste de Durbin-Watson.....	124
Figura 6. 12 - Análise gráfica dos resíduos	124
Figura 6. 13 - Teste de Shapiro-Wilk.....	124
Figura 6. 14 - Matriz de correlações	125
Figura 6. 15 - Representação gráfica da fronteira obtida usando o método FDH (mod.1)	127
Figura 6. 16 - Representação gráfica da fronteira obtida usando o método FDH (mod. 2)	129
Figura 6. 17 - Representação gráfica da fronteira obtida usando o método DEA (mod. 1)	130
Figura 6. 18 - Representação gráfica da fronteira obtida usando o método DEA_{VRS} (mod1)	132
Figura 6. 19 - Representação gráfica da fronteira obtida usando o método DEA (mod. 2)	132

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4. 1 - Relação entre a quilometragem e o preço de venda de um carro	52
Tabela 4. 2 - Valores das variáveis e de cálculos auxiliares para a determinação do coeficiente de determinação.....	53
Tabela 4. 3 - Variação da viscosidade de um polímero em função da temperatura de reação e da taxa de alimentação do catalisador.....	62
Tabela 6. 1 - Países da OCDE e suas respectivas siglas.....	115
Tabela 6. 2 - Indicadores, descrição, sigla e página web	116
Tabela 6. 3 - Valores da eficiência, para o <i>input</i> e para o <i>output</i> dos países da OCDE, obtidos pelo método FDH (Mod. 1).....	126
Tabela 6. 4 - Valores da eficiência para o <i>input</i> e para o <i>output</i> dos países da OCDE obtidos pelo método FDH (mod. 2).....	128
Tabela 6. 5 - Valores de eficiência obtidos após aplicação do método DEA_{vrs} (mod. 1).....	131
Tabela 6. 6 -Valores de eficiência obtidos após aplicação do método $DEAvrs$ (mod. 2)	133
Tabela 6. 7 - Valores de eficiência obtidos após aplicação do método Order-m (mod. 1).....	134
Tabela 6. 8 - Valores de eficiência obtidos após aplicação do Order-m (mod. 2)	135
Tabela 6. 9 - Variáveis pertencentes aos modelos A e B	136
Tabela 6. 10 - Valores obtidos após aplicação do modelo A	137
Tabela 6. 11 - Valores obtidos após aplicação do modelo B	138

SIGLAS

AE – Despesa Por Estudante

ARWU – Academic Ranking of World Universities

CE – Duração do ensino obrigatório

COLS – Corrected Ordinary Least Squares

CRS – Constant Returns To Scale

DEA – Data Envelopment Analysis

DGP – Data Generating Process

DMU – Decision Making Unit

EF – Educação Formal

ENF – Educação Não Formal

ER – Percentagem da População Ativa Empregada

EV – Esperança Média de Vida

FDH – Free Disposal Hull

HDI – Índice Desenvolvimento Humano

HeL – Índice de Saúde

IALS – International Adult Literacy Survey

ISCED – International Standard Classification of Education

NIRS – Non-Increasing Returns To Scale

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

OLS – Ordinary Least Squares

PIB - Produto Interno Bruto

PIB – Produto Interno Bruto

PISA – Desempenho nos Testes PISA

PISA – Programme for International Student Assessment

PL - Programação Linear

PLL – Percentagem de estudantes cujos pais possuem baixos índices de escolaridade

PPC – Paridade do poder de compra

PPP – Purchasing power parities

PR – Percentagem de população presa

PUS – Percentagem da população entre 25 e 64 anos com pelo menos o secundário

RLM - Regressão Linear Múltipla

RLS – Regressão Linear Simples

SFA - Stochastic Frontier Analysis

STS - Razão entre o nº de alunos e professores

TIMMS - Trends in International Mathematics and Science Study

TS - Salário dos professor

UNDP – Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento

UNESCO - Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

VRS - Variable Returns To Scale

INDICADORES

Abertura ao comércio
Abertura dos mercados
Autonomia da escola
Capacidade económica familiar
Capital humano
Competências adquiridas
Crescimento económico
Currículo
Custos internos escolares
Degradação do conhecimento
Descentralização
Desempenho académico dos alunos
Desempenho nos testes
Desigualdade social
Despesa por estudante
Dimensão da escola
Duração do ensino obrigatório
Educação pré-escolar
Escolaridade média
Escolarização bruta e líquida
Escolha da escola
Esperança média de vida
Experiência profissional
Experiências adquiridas através de “learning by doing
Financiamento
Globalização mundial
Grau de persistência intergeracional
Importação de trabalhadores qualificados
Incentivo ao investimento

Índice de saúde
Índice desenvolvimento humano
Inflação
Inovação tecnológica
Intercâmbios de estudantes
Níveis de conclusão
Nível de escolaridade dos pais
Número de alunos por escola
Número de anos de escolaridade
Número médio de anos de escolaridade
Parcerias e intercâmbio de docentes
Percentagem da população ativa empregada
Percentagem da população entre 25 e 64 anos com pelo menos o secundário
Percentagem de estudantes cujos pais possuem baixos índices de escolaridade
Percentagem de população presa
População imigrante
Produto interno bruto
Qualidade dos professores
Ranking académico das universidades
Razão entre o nº de alunos e professores
Registo de patentes
Rendimentos das famílias
Renumerações dos professores
Restrições de acesso ao crédito
Retorno
Taxa de abandono escolar
Taxa de alfabetização
Taxa de conclusão do ensino primário
Taxa de conclusão do ensino secundário
Taxa de inscrição
Taxa de inscrição no ensino superior.

Taxa de repetição
Taxa de retenção
Taxa de sobrevivência
Taxa de sucesso
Taxas de frequência
Taxas de matrícula
Testes estandardizados
Testes internacionais
Trabalhadores imigrantes

Capítulo 1

Introdução

Ao longo dos tempos, a educação tem sido um dos mecanismos que mais tem contribuído para a ascensão social e económica individual. Segundo Galbraith, (citado em Cabugueira, 2001, p. 36) “a educação tem uma relação vital com a paz social e tranquilidade”. É a educação que fomenta a esperança dos estratos mais baixos e menos favorecidos a elevarem-se socialmente. Na sociedade, que Galbraith designa por *desejável*, é a educação que fornece os meios vitais para que as pessoas possam governar-se a si próprias de maneira inteligente, que permite gozar a vida ao máximo e torna a democracia possível e essencial.

Face à importância que a educação tem tido na economia, um dos temas mais estudado nas últimas décadas tem sido a relação de dependência mútua entre *educação e economia*.

“A preocupação contemporânea pelo estudo da educação inscreve-se num movimento histórico de desenvolvimento de educação formal” (Cabugueira, 2001, p. 15).

Daí que exista uma aceitação universalizada relativamente à necessidade de atribuir uma maior importância ao papel da educação no desenvolvimento das populações. Durante anos, a principal estratégia dos sistemas educativos foi atingir rapidamente uma expansão quantitativa, acreditando que, desta forma, se alcançaria uma igualdade de oportunidades e se obteriam as aptidões necessárias ao desenvolvimento. Esta estratégia, de acordo com Cabugueira, conseguiu alcançar alguns êxitos que, apesar de tudo, não foram suficientes para ultrapassar dificuldades demográficas e económicas na maioria dos países ocidentais.

Sendo o investimento em educação dispendioso, há todo o interesse em identificar as melhores opções que devem ser tomadas, quer por parte das famílias, quer por parte dos Estados, no sentido de minimizar custos, sem descuidar a qualidade da educação. O investimento em educação é arriscado, na medida em que os agentes envolvidos não conseguem prever as futuras necessidades do mercado de trabalho, tornando incerto o resultado financeiro da sua decisão educativa.

No entanto, a educação é também um mecanismo de transferência intergeracional, no qual as despesas que ocorrem numa determinada geração são financiadas por gerações anteriores. Esta transferência intergeracional deve ser efetuada no sentido de favorecer o crescimento económico (Benos, 2005) melhorando, deste modo, as condições de vida de um povo. Podemos avaliar a racionalidade do desenvolvimento da estrutura educativa face ao desenvolvimento económico, por exemplo comparando a percentagem dos orçamentos nacionais e familiares destinados à educação e os resultados quantificáveis da mesma.

A forte contenção orçamental e a possível redução do orçamento atribuído ao ministério da educação português, coincidindo com uma quebra de rendimentos por parte das famílias, aumentam a pertinência da análise dos gastos efetuados neste sector numa tentativa de melhorar a eficiência dos mesmos. Esta foi a principal motivação para a realização desta dissertação. Além disso, em estudos já existentes sobre esta matéria, não era feita uma abordagem que contemplasse o método Order-m, o que me fez despertar o interesse para verificar quais os resultados que iria obter através da aplicação deste método. Deste modo, este estudo contribui para a literatura relativa à eficiência educativa de duas formas:

- 1) Não se conhecem estudos onde tivesse sido aplicado o método não paramétrico Order-m para determinar o nível de eficiência da educação num determinado país.
- 2) Comparou-se a eficácia de três métodos não paramétricos diferentes, usando a mesma base de dados na análise do desempenho educativo da OCDE.

Para podermos desenvolver este trabalho foi necessário proceder a uma revisão da literatura, com a finalidade de reconhecer indicadores utilizados em estudos,

relativos à economia e à educação, destacando algumas das vantagens e das limitações do uso dos mesmos. Concluída esta tarefa, foi necessário centrarmo-nos em investigações anteriores elaboradas por autores que estudaram esta temática em Portugal.

A revisão da literatura sugeriu a utilidade de utilizar na análise diversos métodos matemáticos. Para o fazer começámos por estabelecer qual era o nosso objetivo. Ao pretendermos determinar os indicadores que deveriam fazer parte da base de dados, utilizámos métodos paramétricos (regressão linear múltipla). Por sua vez, para determinar a eficiência da educação, e dada à incerteza relativamente à forma funcional do problema, foi necessário usar os métodos não paramétricos, FDH, DEA e Order-m.

Para podermos usar os diversos métodos matemáticos que nos propusemos aplicar, foi indispensável construir uma base de dados. Os dados utilizados foram extraídos de bases de dados pertencentes à OCDE e à Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO). Após a conclusão da base de dados, foi possível aplicar os diferentes métodos e apresentar os resultados obtidos.

O trabalho está organizado em sete capítulos: o primeiro consiste numa breve introdução; o segundo é uma revisão da literatura, onde apresentaremos alguns indicadores utilizados quer em economia, quer em educação; o terceiro abrange estudos sobre alguns indicadores educativos e económicos realizados em Portugal; o quarto é dedicado a métodos paramétricos, com destaque para a regressão linear; o quinto apresenta os métodos não paramétricos, FDH, DEA e Order-m; o sexto descreve os dados utilizados e os respetivos resultados, de acordo com os diferentes métodos; no sétimo e último foram tiradas algumas conclusões e fez-se uma reflexão apontando algumas indicações para futuras investigações.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Impactos na educação de uma economia mundializada

O desempenho de um sistema educativo está sempre dependente de diversos fatores que o condicionam. Estes fatores poderão, ou não, ser controlados pelo Governo de um país. Não existem dúvidas de que um dos indicadores que um país pode facilmente controlar, através por exemplo da emissão de vistos, e que afeta a economia é a *importação de trabalhadores qualificados*.

Muitas vezes, como forma de promover a curto prazo a qualidade do ensino, alguns países promovem programas com instituições estrangeiras de ensino, incentivando-as a abrir filiais, no sentido de colmatar uma crescente procura do ensino superior (Castelló-Climent e Hidalgo-Cabrillana, 2010, p. 30).

O mesmo acontece com a implementação de programas especiais, que consistem em *intercâmbios de estudantes* entre dois países, onde alguns jovens vão temporariamente estudar num país estrangeiro, com melhor performance educativa, para mais tarde regressarem ao país de origem. Estas medidas permitem aumentar os índices de qualificações de forma relativamente eficaz e rápida. Por outro lado, estes intercâmbios constituem também uma das formas de medir diferenças de qualidade entre sistemas de ensino.

No caso da qualidade do sistema educativa ser baixa, esta pode provocar na população um fator que desencoraja o acesso ao ensino superior, provocando deste modo uma barreira, que gera uma limitação ao acesso ao ensino superior pelo

generalidade da população (Castelló-Climent e Hidalgo-Cabrillana, 2010, p. 3). Deste modo, podemos determinar a importância do retorno^a da educação. Isto quer dizer que a qualidade do ensino influencia a tomada de decisão dos alunos relativamente ao número de anos que irão permanecer na escola (Schoellman, 2008, p. 8), pois quanto melhor for a essa qualidade, maior é a tendência para permanecerem na escola.

Através da *população imigrante* é também possível verificar se a qualidade do ensino de um determinado país é ou não baixa. Diversos estudos têm sido realizados, escolhendo países que acolhem imigrantes de várias nacionalidades, com o objetivo de avaliar a importância da qualidade de um sistema de ensino, aferindo o retorno da mesma para uma dada escolaridade. Num dos estudos realizados nos Estados Unidos da América, verificou-se que a qualidade de um sistema de ensino poderia justificar as diferenças entre salários de imigrantes com a mesma escolaridade, mas provenientes de países diferentes (Schoellman, 2008, p. 38). Num outro estudo, realizado na Suíça, analisou-se uma amostra de trabalhadores^b imigrantes, que se encontravam a trabalhar nesse país, mas em relação aos quais não se sabia onde tinham concluído os seus estudos. Neste estudo constatou-se que, para trabalhadores com a mesmo nível de escolaridade, existiam diferenças salariais significativas, o que leva a crer que a qualidade da educação obtida nos diferentes sistemas de ensino não é influenciada pelo número de anos de escolaridade, mas sim pela sua qualidade. Deste modo, o retorno da educação pode não ser o mesmo para quem possui o mesmo número de anos de escolaridade, como por exemplo, a escolaridade obrigatória (Gruetter, 2005, p. 14).

Apesar de o indicador, *trabalhadores imigrantes*, revelar diversos aspetos positivos, também lhe são apontadas algumas desvantagens. Uma delas, é o facto de este indicador nem sempre refletir as diferenças qualitativas da educação, especialmente

^a Medida que determina até que ponto é vantajoso investir na educação, designadamente o prémio salarial.

^b Para que um cidadão estrangeiro possa trabalhar na Suíça tem que reunir duas condições:

- 1- O potencial empregador tem que ter vagas para trabalhadores estrangeiros;
- 2- O potencial empregador tem que provar que não existem suíços qualificados para exercer o mesmo trabalho.

se os mercados de trabalho não forem competitivos (Woessmann, 2000b, p. 20). Por outro lado, não se pode presumir simplesmente que, ao realizar investimentos na educação, se vá gerar um retorno. Para se perceber se vai ou não haver retorno é necessário conhecer-se duas coisas: como é que os vários investimentos se traduzem em qualidade e como é que essa qualidade se relaciona com os retornos económicos (Hanushek e Woessmann, 2007, p. 3).

Outro fator que condiciona a educação é a *inovação tecnológica*. Esta, para ocorrer, necessita de trabalhadores altamente qualificados. Como tal, deve ter-se em atenção que países com uma indústria que dependa da inovação tecnológica, necessitam de um maior investimento na formação de trabalhadores especializados. Por outro lado, também se pode atrair imigração, a qual poderá aumentar a força de trabalho altamente qualificada. Deste modo, o aumento do número de trabalhadores qualificados pode impedir que os salários dos mesmos se tornem excessivamente elevados, e assim, evitar um entrave à inovação. Em oposição a isto, nos países que não são geradores de inovação tecnológica não é necessário fazer tanto investimento. Estes países podem centrar-se mais na educação básica e podem mesmo adquirir a inovação tecnológica em outros países onde a mesma já foi desenvolvida (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 2).

Esta situação poderá ser uma das explicações para que dois países, com a mesma *média de anos de escolaridade* e com desenvolvimento económico semelhante, cresçam economicamente a taxas diferentes, dependendo do facto de os seus investimentos na educação incidirem mais no ensino básico, secundário ou superior (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 3).

Nos países em vias de desenvolvimento podem surgir problemas por não se conseguirem gerar empregos para a mão-de-obra qualificada, pelo que poderão perdê-la se os trabalhadores optarem por emigrar. Tendo em conta que os trabalhadores mais qualificados são mais “elásticos”, estes têm a possibilidade de emigrar caso a economia seja pouco favorável relativamente às suas capacidades. Como tal, por vezes, é difícil para estes países conseguirem manter os benefícios de

reter estes trabalhadores (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 35). Logo, é importante perceber quais os efeitos da educação na migração, ou quais os efeitos da mesma na indústria (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 37).

Uma das realidades que veio influenciar o sistema de ensino foi a *globalização mundial*. Nos dias de hoje, fala-se muito na facilidade movimentar o capital de país para país, no entanto, no que concerne à força de trabalho, a mesma não é assim tão móvel. É um dado adquirido que, se essa força de trabalho for altamente qualificada, esta será mais móvel, podendo facilmente gerar desequilíbrios. Neste contexto, os governos terão que repensar as políticas educativas, não só no sentido da generalização de um ensino para todos mas, em especial, no equilíbrio dos custos. A globalização gera um aumento da concorrência entre os países, que tende a implicar uma diminuição dos impostos, originando uma menor capacidade de investimento na educação. Esta diminuição nos impostos gera desequilíbrios na oferta formativa, uma vez que a globalização mundial possibilita um aumento dos salários dos trabalhadores altamente qualificados e promove a tendência para que os governos invistam mais no ensino superior.

Uma reafetação de recursos em áreas chave poderá ser uma opção viável por parte dos governos, para se ajustarem a esta realidade. Muitas vezes, um país, em vez de investir em áreas onde as competências adquiridas são internacionalmente transmissíveis, como por exemplo certas engenharias, cujos trabalhadores facilmente podem emigrar, investe mais nas suas áreas específicas como, por exemplo o direito, para as quais a mobilidade é mais reduzida (Baskaran e Hessami, 2010, p. 6).

Enquanto a *globalização* é um indicador que não pode ser controlado por um governo, o mesmo não se pode afirmar, por exemplo, acerca das *restrições de acesso ao crédito* por parte das famílias. Segundo Schoellmam (2008), *restrições de acesso ao crédito* podem provocar restrições de acesso a níveis de escolaridade mais elevados, uma vez que estes são pagos por quem pretende frequentá-los. Deste modo, podem gerar-se desigualdades sociais. É evidente que uma opção política de utilizador-pagador está dependente, por exemplo, do *produto interno bruto* (PIB).

Um valor baixo do PIB poderá implicar pouco investimento na educação e consequentemente baixo crescimento económico.

2.2 A qualidade de um sistema de ensino como motor do crescimento económico

Pensa-se muitas vezes que a melhoria de um sistema de ensino está associada a um aumento da despesa nesse sector. No entanto, para a maioria dos peritos, esta é uma ideia incorreta. Segundo Cooray (2010), a melhoria da produtividade da escola não passa por aumentar os gastos com a educação, mas sim, por estabelecer políticas educacionais que a incentivem. Esta noção é também salientada por Hanushek e Woessmann (2007), os quais consideram, que um dos fatores com influência no crescimento económico é a qualidade do ensino, e não o facto de os alunos permanecerem neste um elevado número de anos. O que se verifica é a existência de uma forte ligação entre as capacidades cognitivas da população e o crescimento económico.

Assim sendo, por que razão é que as discussões políticas se concentram quase sempre sobre o *número de anos de escolaridade* e sobre as *taxas de frequência*? A justificação poderá estar no facto de estes indicadores serem fáceis de observar e de medir, contrariamente ao que acontece com as *competências adquiridas*.

Então como se deve medir a qualidade de um sistema educativo? E, efetuada essa medição, como é possível melhorá-lo?

A complexidade da resposta deve-se à dimensão do próprio sistema educativo e à sua envolvente. No entanto, como o impacto do mesmo é significativo na economia, tem vindo a sentir-se a necessidade de aferir a qualidade. Para tal, foram criados

testes estandardizados, como por exemplo, o Programme for International Student Assessment (PISA).

Segundo Hanushek e Woessmann (2007), existe uma forte associação entre os resultados obtidos pelos alunos em testes estandardizados e o desempenho que os mesmos alunos vêm a prestar, mais tarde, no mercado de trabalho.

Os resultados dos *testes estandardizados*, como indicadores que traduzem a qualidade do sistema de ensino, podem ser usados para fazer comparações entre países, dado que são todos aplicados em circunstâncias iguais. Também se sabe que os resultados dos testes internacionais que melhor revelam o impacto na qualidade do ensino são os de matemática (Cooray, 2010), pois testam conhecimentos que são essencialmente adquiridos na escola. O mesmo não acontece, por exemplo, com os resultados obtidos nos testes de literacia da leitura, nos quais, muitas vezes, os alunos revelam conhecimentos obtidos através de outras fontes que não a escola, como por exemplo, através dos pais, de colegas, da rádio, da televisão, etc. Porém, o mesmo não se pode afirmar relativamente a outros indicadores, como o aumento da *taxa de escolaridade* e a diminuição da *taxa de retenção*, uma vez que estes não são estandardizados entre países, ou até, dentro de um mesmo país.

Na realidade, verifica-se que os alunos atingem níveis de escolaridade mais elevados em países onde os mesmos obtiveram melhores níveis de desempenho nos testes estandardizados. Consequentemente, os níveis médios de escolaridade nesses países tendem a atingir patamares mais elevados e as taxas de retenção e abandono escolar tendem a diminuir.

Dada a importância da qualidade de um sistema de ensino, deve ter-se muito cuidado na definição do que é uma escola de qualidade. É evidente que não podemos pensar que uma escola com melhores resultados vai implicar um sistema de ensino com maior eficiência e com maior qualidade, uma vez que, ao analisar-se apenas os resultados escolares, em especial a *taxa de sucesso*, estamos a considerar que a Educação Formal (EF) é o principal e o único fator da educação.

Hanushek e Woessmann (2007) usaram, como uma medida de qualidade, a média simples obtida nos testes internacionais, entre as duas médias das áreas de matemática e ciências. Ou seja, consideraram o indicador D obtido da seguinte maneira: $D = \frac{M+C}{2}$, em que M é a média obtida nos testes de Matemática e C a média obtida nos testes de Ciências, num dado país.

Independentemente de estes testes internacionais terem sido aplicados apenas a jovens, estes autores interpretaram os seus resultados como uma performance educativa da força laboral. Além disso, os mesmos autores consideram que os resultados dos testes não traduzem somente as capacidades cognitivas desenvolvidas na escola, mas também as que são desenvolvidas em casa, entre pares, através de meios de comunicação social e/ou, em inúmeras outras situações. No entanto, segundo Barro e Lee (2000), apesar de não podermos interpretar os resultados dos testes PISA como um simples espelho da qualidade da escola, ou da sua política, o desempenho nos mesmos não deixa de ser um bom indicador da qualidade de um sistema de ensino, dado que é uma medida mais fiável relativamente a outras medidas como, por exemplo, a *escolaridade média* (Barro e Lee, 2000). Este último indicador, *escolaridade média*, apresenta diversas limitações. Uma delas é a discrepância que pode existir entre as competências que são adquiridas por pessoas com o mesmo nível de escolaridade em países diferentes, embora existam entidades que fornecem orientações sobre as equivalências entre os diferentes sistemas educativos, como por exemplo, a International Standard Classification of Education (ISCED), pertencente à UNESCO.

Sendo assim, o indicador *desempenho nos testes PISA* é um ótimo instrumento para poder avaliar a qualidade de um sistema de educação, especialmente no que toca a conhecimentos básicos. Holbrook (2006) refere que, no caso de se pretender analisar conhecimentos mais específicos e aprofundados, devem usar-se outras medidas, como por exemplo, a *taxa de conclusão do ensino secundário* ou a *taxa de inscrição no ensino superior*.

Outra questão que se coloca é a de saber quando aplicar os referidos testes estandardizados. Por exemplo, devido à existência de diferentes níveis de conclusão da escolaridade obrigatória em diferentes países, os testes não podem, por isso, ser realizados no final da mesma. Por outro lado, se realizarmos os testes logo nos primeiros anos de escolaridade, os mesmos perdem alguma importância porque se estão a testar conhecimentos muito básicos, os quais não refletem as capacidades que as crianças poderão ter mais tarde, na força de trabalho. Assim, a realização dos testes numa faixa etária que nos garanta um desenvolvimento cognitivo mais significativo, independentemente do nível de ensino atingido por esses alunos, pode deixar transparecer melhor as capacidades adquiridas por esse grupo populacional.

Além disso, não nos devemos restringir apenas ao uso de uma única aplicação de testes, mas sim a uma série temporal de aplicações de testes distintos, que embora contenham diferenças entre si, são pouco significativas ao longo do tempo (Hanushek e Woessmann, 2009). Mais ainda, se usarmos resultados obtidos em testes que não tenham garantida uma amostra suficientemente ampla e representativa da população em idade escolar (geralmente, 15 anos, como nos testes PISA) e que garanta a presença de um número abrangente de países, as conclusões extraídas podem ser enganosas.

A comparação dos testes em diferentes anos, só faz sentido se as matrizes dos mesmos não mudarem substancialmente (Arze del Granado, Fengler, Ragatz, e Yavuz, 2007, p. 4) e se o grau de dificuldade se mantiver semelhante. Mas, testes internacionais, como o PISA, cumprem estes critérios.

Um outro aspeto que pode ser posto em causa, é o modo como podem vir a ser interpretados os resultados dos testes, pois essa interpretação tem de ser feita de forma cautelosa de modo a não tirar conclusões enviesadas.

Também devemos admitir a existência de *degradação do conhecimento*, ao longo do tempo. Existe um consenso de que o conhecimento adquirido na escola se dissipa com o decorrer dos anos (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 17). Mas é também evidente que esta dissipação não é uniforme. Alguns conhecimentos podem

perder-se mais rapidamente do que outros, por diversos motivos. Basta, por exemplo, a não utilização frequente de alguns saberes adquiridos na escola para que se verifique uma dissipação mais acentuada dos mesmos.

É exatamente pelo motivo apontado acima e devido ao facto de os testes PISA serem aplicados a alunos com 15 anos, que foram desenvolvidos testes para aplicar a adultos com a finalidade de testar a sua capacidade cognitiva - International Adult Literacy Survey (IALS) (Barro e Lee, 2000, p. 14).

Com estes testes, pretende-se evitar uma das críticas aos testes PISA e aos testes Trends in International Mathematics and Science Study (TIMMS), que consiste no facto de não ser claro se bons resultados obtidos em testes padronizados realizados em idade escolar, vão implicar um bom desempenho no mercado de trabalho, por parte de quem os realizou. À partida, tem-se assumido que os resultados dos PISA e TIMMS se irão refletir na população ativa. Mas será que é assim?

Na realidade, já se têm encontrado discrepâncias entre testes realizados por jovens em idade escolar e testes realizados por adultos integrados no mercado de trabalho. Seria interessante, por exemplo, perceber o porquê de uma significativa discrepância encontrada por Barro e Lee (2000) entre os resultados obtidos nos TIMMS e os resultados obtidos nos IALS, sabendo que os primeiros são realizados por indivíduos em idade escolar e os segundos, por população ativa. Os referidos autores não explicam as razões desta discrepância e, em outros estudos conhecidos até ao momento, também não se encontram justificações para o facto.

Pelo exposto, a qualidade do ensino secundário pode ser avaliada tendo como base os testes internacionais, como o PISA. No entanto, se pretendermos analisar a qualidade do ensino superior necessitamos de um indicador diferente. O indicador *ranking académico das universidades do mundo*, Academic Ranking of World Universities (ARWU), foi desenvolvido no sentido de ordenar as melhores universidades a nível mundial. Este ranking foi criado pela Universidade Jiao Tang (Castelló-Climent e Hidalgo-Cabrillana, p. 5) e compara 1200 instituições de ensino superior em todo o mundo de acordo com a seguinte fórmula: antigos alunos

vencedores prêmios Nobel e/ou Medalhas Fields (10 por cento), professores vencedores de prêmios Nobel e/ou Medalhas Fields (20 por cento), investigadores muito citados de entre 21 categorias de assuntos gerais (20 por cento), artigos publicados nos jornais *Nature* e *Science* (20 por cento), citações em Índices de Ciências ou Ciências Sociais e Humanas (20 por cento) e desempenho académico “per capita” (nos indicadores acima) de uma instituição (10 por cento).

A principal crítica feita a este ranking é não ter em consideração a estrutura de cada país. Outra crítica consiste no facto de a importância atribuída às ciências naturais se sobrepor às ciências sociais ou humanas e à qualidade do ensino, na instituição.

Deve fazer-se uma ressalva de que a qualidade dos dois níveis de ensino – pré-universitário e superior – pode não estar relacionada. Temos como exemplo o caso dos Estados Unidos da América, que não apresentam um bom desempenho em testes internacionais aplicados ao ensino pré-universitário, mas que têm instituições de ensino superior nos primeiros lugares do ranking mundial (Castelló-Climent e Hidalgo-Cabrillana, p. 22).

Tal como já foi referido, devemos ter presente que o impacto da educação não está apenas dependente de boas classificações em *testes estandardizados*, estando o mesmo condicionado, também, por certas medidas económicas, como por exemplo, a abertura de mercados, a existência de direitos de propriedade, a circulação de pessoas e bens, etc.. Para além destes fatores, é igualmente necessário que se conjuguem outros, como a existência de instituições judiciais, governamentais e de mercado, credíveis. Temos o caso dos Estados Unidos da América que, embora não tenham apresentado um bom desempenho nos testes internacionais, têm tido um crescimento económico regular e constante.

Além disso, também podemos afirmar que não basta termos uma população ativa qualificada para termos crescimento económico. É também fundamental que as pessoas qualificadas tenham oportunidade para poder utilizar as suas qualificações no mercado de trabalho.

Como podemos verificar no gráfico 2.1, o efeito do *desempenho nos testes internacionais* sobre a taxa média de crescimento do PIB está dependente do grau de *abertura ao comércio internacional*.

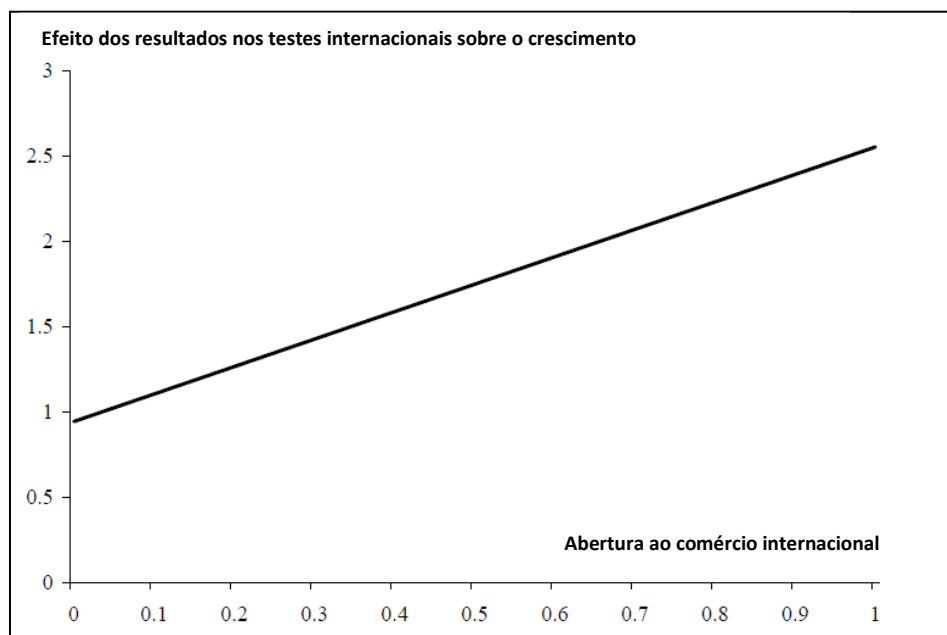


Figura 2. 1-Efeito estimado do desempenho nos testes internacionais na taxa média de crescimento do PIB dependendo do grau de abertura ao comércio internacional

(adaptado de Hanushek e Woessmann (2007))

É consensual, por parte dos investigadores, que políticas que conduzam à *abertura dos mercados* e de *incentivo ao investimento* favorecem o impacto gerado pela educação. Segundo Lopez, Thomas, e Wang (1998), a educação tem que ser usada pelas pessoas, em mercados maiores e mais competitivos, fomentando a criação de um ciclo vicioso entre abertura do mercado, aumento de investimento e procura de trabalhadores especializados, pois só assim se consegue tornar um país mais competitivo.

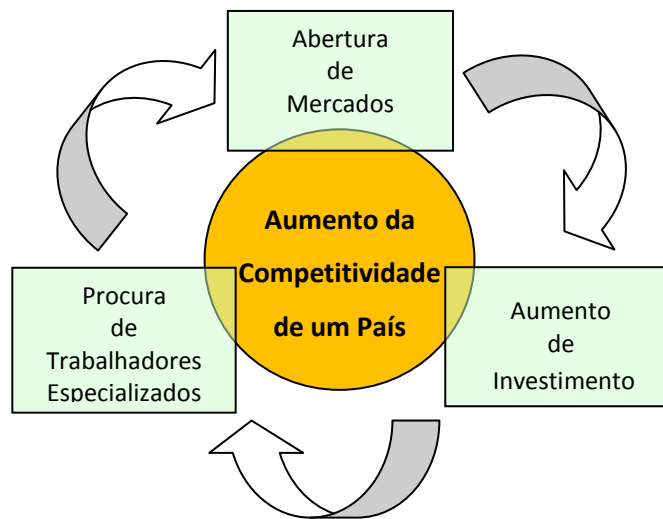


Figura 2. 2-Ciclo gerador de competitividade

No caso de não acontecer este ciclo, para além do país não se tornar tão competitivo, a importância dada à qualidade de um sistema educativo tende a diminuir.

Uma das questões que também se pode levantar é se os níveis de qualificação mais elevados, como cursos médios e superiores, devem ser atingidos por toda a população ou se, pelo contrário, devem ser apenas acessíveis a um número restrito de pessoas. Ou seja, será que se quisermos um crescimento constante da economia basta ter apenas alguns cientistas de topo, ou toda a população terá que ter um nível muito alto de qualificação? E, mesmo que toda a população seja altamente qualificada, será que qualquer curso superior tem o mesmo impacto na economia?

Segundo Hanushek e Woessmann, países onde os profissionais que pertencem a quadros superiores possuem uma maior percentagem de cursos ligados a áreas tecnológicas, como as engenharias, têm um crescimento económico mais rápido do que países onde nos quadros superiores se contam mais profissionais com cursos ligados às ciências sociais e humanas. (Hanushek e Woessmann, 2007, p. 43).

Os mesmos autores referem que, nos países em desenvolvimento, é mais importante a existência de um quadro de indivíduos altamente qualificados, que podem adaptar tecnologia adquirida externamente, do que em países que estão em inovação tecnológica. (Hanushek e Woessmann, 2009, p. 3). No entanto, a premissa de que melhorar o sistema de ensino pode produzir benefícios em taxas de crescimento nacional é fortemente apoiada.

Para se poder melhorar a qualidade de um sistema de ensino devem-se traçar objetivos e fazer reformas com cuidado, ao longo de um intervalo de tempo considerável, tendo em atenção a existência de uma “altura ideal” para o fazer. Devemos ter presente que, mesmo que a reforma tenha sucesso, esta não tem efeitos imediatos na economia. Ainda que as capacidades cognitivas dos alunos melhorem, há que esperar algum tempo até que estes sejam absorvidos pelo mercado de trabalho.

É evidente que a mudança das instituições escolares é uma tarefa difícil, mas mesmo quando é conseguida com êxito os resultados alcançados são modestos, embora o investimento, geralmente, compense. Devemos ter presente que o papel da qualidade da escola foi estimada por Hanushek e Woessmann (2010) e segundo estes autores uma melhoria de 0,5 no desvio padrão do indicador D^c resulta numa melhoria no produto interno bruto anual de 0,87%. Basta termos presente que as diferenças relativamente ao desempenho económico dos países da OCDE se devem, em grande parte, às capacidades cognitivas da população ativa (Hanushek e Woessmann, 2010, p. 12).

^c Onde $D = \frac{M+C}{2}$, em que M é a média obtida nos testes de Matemática e C a média obtida nos testes de Ciências, já referido na secção 2.2

2.3 A educação como campo quase exclusivamente estatal

A nível mundial, verifica-se que a educação é quase exclusivamente gerida pelo Estado. Duas questões se podem colocar relativamente à abordagem deste tópico:

1. Qual é o motivo pelo qual o estado tem um papel tão importante na educação e não incentiva a sociedade civil a investir mais neste setor?
2. Sendo a educação um setor com um orçamento elevado, por que motivo existe uma intervenção estatal quase exclusiva?

Tradicionalmente, a intervenção pública tem sido justificada pelo facto de a educação possibilitar a redução de desigualdades, dando oportunidades às classes mais desfavorecidas.

A partir do final da década de 70, os cidadãos passaram de forma crescente a considerar os Estados como sendo burocráticos, ineficientes e incapazes de melhorar o seu desempenho (Pessoa, 2008, p. 4). Daí decorreu a obrigatoriedade de os governos passarem a justificar as suas ações.

Sabendo que existe um conflito claro entre quantidade e qualidade da educação, não faltam exemplos de países subdesenvolvidos, onde os Estados tiveram que aumentar os níveis de escolaridade, mas tiveram dificuldade em manter níveis elevados de qualidade. Temos o exemplo do nosso país que ao longo dos anos foi alargando a escolaridade obrigatória, sendo que o maior alargamento coincidiu numa fase temporal relativamente curta. Só em 1979 o ensino obrigatório foi alargado até aos primeiros seis anos de escolaridade, passado muito pouco tempo (1986) este foi alargado até ao nono ano. Durante este período temporal, o país sentiu uma necessidade elevada de recursos qualificados, os quais não tinham sido previamente formados. Este conflito é extremamente difícil de gerir dado que, para se aumentar drasticamente a oferta formativa, são necessários professores qualificados e, muitas

vezes, a falta de profissionais nesta área conduz a um decréscimo dos níveis de qualidade.

Assim sendo, qual o motivo por que o Estado não contrata empresas para prestarem os serviços educativos? Se fosse dada às pessoas a possibilidade de escolherem entre uma escola pública e uma privada, por qual optariam, se a sua intenção fosse obter uma educação de qualidade?

Pessoa (2008) realça alguns aspetos positivos na contratação de empresas privadas para gerir estabelecimentos escolares: a redução dos fatores de produção para o mesmo nível de qualidade (maior eficiência); o aumento da transparência dos preços praticados^d; o aumento da competição. Por outro lado, também refere fatores negativos como: a dificuldade em as empresas quererem prestar serviços em meios desfavorecidos, zonas remotas ou pobres; o aproveitamento de situações onde não existe competição para fornecer serviços.

Mas, talvez o maior obstáculo para que não exista uma maior participação de empresas na gestão escolar seja o carácter pouco lucrativo da atividade e a diminuta experiência privada na gestão de escolas públicas. No caso português existem certas circunstâncias onde alguns serviços são prestados por empresas privadas dentro das escolas. Existem, por exemplo, algumas escolas, em que as cantinas são geridas por empresas privadas, mas financiadas por dinheiros públicos. Existem também escolas profissionais particulares, que são cofinanciadas pelo Estado. Estas escolas tentam fazer a ponte entre a Escola e o mundo empresarial, em que aquela estabelece parcerias com o tecido empresarial local, proporcionando aos alunos a possibilidade de frequentarem estágios no âmbito das suas áreas escolares.

Em Portugal, existem também estabelecimentos de ensino particular e cooperativo, relativamente aos quais o estado português assume a responsabilidade de apoiar as famílias que optem por estes estabelecimentos para a educação dos seus filhos, de modo a que estes lhes tenham acesso em condições de igualdade com as escolas públicas. Assim, o estado português procede regularmente à atualização de

^d Desde que não sejam subsidiadas pelo Estado, como sucede em Portugal.

capitações^e que delimitam os escalões de *rendimentos das famílias*, de forma a lhes garantir um efetivo apoio.

Mas persiste o interesse em saber se existem diferenças na qualidade do ensino entre as escolas públicas e as particulares. Um estudo recente efetuado por Neves, Pereira, e Nata (2012), conclui que, dos estudantes que foram admitidos na universidade do Porto, no ano letivo de 2008/09, se verificou que, no final da sua formação, os oriundos das escolas públicas tinham uma presença superior no grupo dos 10% melhores do que os provenientes das escolas privadas. Uma das limitações que se levanta quando se tenta encontrar as diferenças de qualidade entre a escola pública e a escola privada nos países da OCDE é a de que a maioria dos estudos foi realizada nos Estados Unidos da América e sabemos que o sistema educacional norte americano é bastante diferente dos sistemas europeus. Cherchye, De Witte e Ooghe (2007) estudaram este tópico na região belga da Flandres e concluíram que as escolas de índole privada apresentavam um melhor desempenho do que as escolas públicas, mas se atendermos às diferenças socioeconómicas dos alunos, então a diferença entre as escolas esbate-se. A experiência chilena tem sido usada como evidência de que a privatização do sistema de ensino, dado que neste país foi aplicada nos anos 80 de forma generalizada, o pode tornar mais eficiente. No entanto, segundo Carnoy e McEwan, se medirmos o contexto socioeconómico dos alunos, então os resultados obtidos não tornam evidente esta diferença. No Chile, os níveis de escolaridades dos pais de alunos a frequentar escolas privadas é superior ao verificado nas escolas públicas. Mais ainda, as escolas privadas realizam provavelmente uma “escolha dos alunos”, utilizando entrevistas, exames ou nota mínima de acesso (Carnoy e McEwan, p. 6). Além disso, outro dos argumentos utilizados baseia-se no facto de este custar menos ao Estado, dado que cada aluno recebe um “voucher” (cheque-ensino). Para Carnoy e McEwan este facto não se

^e Quantidade fixa de algo, concedida ou atribuída a cada pessoa individualmente.

deve a uma melhor gestão dos recursos, mas é devido a fortes restrições na gestão da escola pública.

2.4 Como avaliar um sistema de ensino?

O sucesso de um sistema de ensino está dependente de inúmeros parâmetros. Face à sua multiplicidade, seria de todo impossível averiguar o peso da influência de todos e a forma como se repercutem em todo o sistema. Na impossibilidade de conseguir estudá-los na sua totalidade iremos aqui cingir-nos apenas a alguns que consideramos mais importantes, como os professores, os alunos, o meio socioeconómico dos alunos, a estrutura educativa, as políticas educativas, entre outros.

2.4.1 Variáveis num sistema de ensino

Os professores e os alunos

Para poder analisar um sistema de ensino temos que examinar a situação de um dos grupos mais importantes e com mais peso dentro do sistema – os professores. Um dos fatores que muitas vezes se considera relevante para o bom desempenho dos alunos é a *qualidade dos professores*, pois persiste a ideia de que bons professores originam bons alunos. Porém, também é verdade que os bons alunos atraem os bons professores (Holbrook, 2006, p. 38). Mas uma das

verdades mais surpreendente é a de que existem poucos indícios que comprovem que a *qualidade dos professores* está relacionada com a sua formação, experiência, certificação, ou até mesmo, com os seus salários (Hanushek e Woessmann, 2007, p. 1).

Segundo Woessmann (2000a), tendo em conta que quando um aluno estuda é recompensado e quando preguiça é penalizado, se um professor tiver por hábito observar e anotar regularmente o trabalho realizado pelos seus alunos, isso irá ter um efeito positivo no seu desempenho.

Como a *experiência profissional* é considerada importante pela maioria dos sistemas de educação, os professores mais experientes têm mais poder de escolha relativamente à escola onde desejam lecionar, havendo a tendência para escolherem escolas cujos alunos pertencem a um nível socioeconómico mais elevado. O motivo para esta escolha poderá estar relacionado com o facto de não terem que enfrentar turmas cuja origem dos alunos possa levantar situações conflituosas, estando assim mais facilitado o trabalho do professor e também porque, em geral, níveis socioeconómicos mais elevados estão associados a maior interesse pela aprendizagem e a melhores resultados académicos. Deste modo, os professores, ao terem uma margem de manobra que possa diminuir a sua carga emocional, sem terem que enfrentar consequências negativas, poderão repercutir mais efeitos positivos sobre o desempenho dos alunos.

O meio socioeconómico dos alunos

Já nos questionámos acerca de qual seria a opção tomada pelos pais, se lhes fosse dada a possibilidade de escolher entre uma escola pública e uma privada, para a educação dos seus filhos. A resposta, à partida, não é fácil de obter, dado que existem diversos fatores que poderão condicionar a escolha. Por exemplo, ao existirem escolas públicas e privadas num mesmo território, a escolha poderá

estar dependente da capacidade financeira dos pais e encarregados de educação, dos apoios externos ao agregado familiar, da oferta de cursos de cada escola, entre outros fatores. Sabemos, no entanto, que uma das variáveis que Hanushek e Woessmann consideraram como tendo uma implicação no desempenho dos alunos na OCDE é, precisamente, a *escolha da escola*.

O estudo feito por Carneiro (2008) mostra que existe uma tendência para que indivíduos com antecedentes familiares semelhantes frequentem a mesma escola e, do mesmo modo, alunos de estratos sociais diferentes frequentem escolas com reputações diferentes, gerando, deste modo, um sistema um pouco segregado. Este autor refere que Portugal apresenta um dos níveis mais elevados de desigualdade entre escolas. Portugal é um país onde a escola é “escolhida” segundo a área de residência do aluno e, uma vez que o ser humano é social, existe a tendência para pessoas idênticas se associarem. Carneiro, ao estudar o indicador *nível de escolaridade dos pais*, concluiu que pais com níveis de escolaridade elevados matriculam os seus filhos em escolas onde a maioria dos alunos provêm de pais cujos níveis de habilitações são igualmente elevados. Um dos problemas que surge ao não se possibilitar a escolha da escola é um elevado *grau de persistência intergeracional*^f, do *status* educacional. Esta persistência tem implicações graves na sociedade, pois dificulta o papel da educação como mecanismo importante para escapar da pobreza. Deste modo, para diversos autores não é possível pensar numa política de educação centrada apenas nas escolas ou na sala de aula mas é também necessário saber como envolver a família (Carneiro, 2008, p. 3).

Uma das variáveis que também tem influência no desempenho escolar é a frequência da *educação pré-escolar*. A *educação pré-escolar*, nos dias de hoje, é considerada como parte integrante do ensino, desempenhando um papel facilitador de interações sociais e de preparação da criança para a escola. No

^f Coeficiente de correlação entre o nível de escolaridade dos pais e o nível de escolaridade dos filhos.

entanto, há algumas décadas atrás o papel do ensino pré-escolar surgiu da necessidade de tomar conta de crianças cujas mães estariam a trabalhar. Deste modo, a frequência da *educação pré-escolar* faculta a redução da seleção social, promovendo a igualdade de oportunidades e melhorando a qualidade de um sistema de ensino (Schütz, 2009, p. 35).

Como sabemos, a economia é uma condicionante do desempenho do sistema educativo. Se a economia se encontrar em crescimento, facilitará investimentos no sistema educativo por parte dos países, gerando ao mesmo tempo aumentos nos recursos das famílias o que poderá originar uma melhoria no desempenho do sistema educativo.

A estrutura educativa

Um indicador usado frequentemente em estudos sobre o sistema educativo é o *número de alunos por escola*. Uma escola que habitualmente tem um número elevado de alunos^g, poderá estar em vantagem relativamente a outras. Quando uma escola tem um número reduzido de alunos, sente as preocupações inerentes às flutuações da taxa de inscrições em cada ano letivo. Se, por norma, uma escola tiver um número significativo de inscrições, não manifesta problemas com a formação de turmas, nem põe em risco a abertura de cursos. Portanto, nestas escolas é possível ter um melhor planeamento não havendo, geralmente, problemas de escassez ou excedentes de professores e de recursos físicos (Holbrook, 2006, p. 16).

Holbrook afirma que é óbvia a existência de uma relação entre a *dimensão da escola* e o *desempenho académico dos alunos*, mas existe uma falta de evidência consistente para explicar qual é exatamente essa relação (Holbrook, 2006, p. 27). Deste modo, tendo em conta a opinião deste autor, somos levados a pensar

^g O facto de uma escola possuir um elevado número de alunos, não significa, necessariamente, sobrelotação ou excesso de alunos por turma.

que a *dimensão da escola* poderá ter um papel importante no desempenho escolar. No entanto, nunca nos podemos esquecer que os mecanismos da educação não são tão simples de compreender como se fossem os de uma indústria. Apesar de tudo, as escolas pequenas também apresentam vantagens, como a de favorecerem a segurança e estimularem o sentido de comunidade e de pertença nos alunos. Estas particularidades fazem com que, nestas escolas, haja menos desistências e uma redução na taxa de absentismo.

Outro indicador que tem impacto no desempenho dos alunos é a *dimensão da turma*. Relativamente a este indicador, mas não referindo para que níveis de escolaridade, Arze del Granado, Fengler, Ragatz, e Yavuz, apontam como ótima a razão de trinta alunos para um professor, uma vez que tendo os salários dos professores um custo significativo, então um baixo rácio professor-aluno tende a ter um alto custo financeiro (Arze del Granado, Fengler, Ragatz, e Yavuz, 2007, p. 18). Para valores abaixo dos 30:1, o salário do professor tem um impacto negativo sobre os retornos marginais^h e para valores acima desta razão, a interação professor-aluno perde eficácia (Arze del Granado, Fengler, Ragatz, e Yavuz, 2007, p. 18). Em suma, turmas com um número elevado de alunos prejudicam a acumulação de conhecimento e há tendência para aumentar o número de desistências. Todavia, por outro lado, possibilitam economizar recursos a curto prazo (Sequeira e Ferraz, 2008, p. 10).

De acordo com Woessmann (2000a), a *descentralização* de um sistema de ensino poderá ter efeitos positivos se os seus regulamentos, níveis de desempenho e orçamento forem controlados centralmente.

Os diretores de escola, por estarem ligados a um poder central, irão contratar os melhores professores, os professores irão escolher os melhores materiais didáticos e assim melhorar o desempenho da escola. Por outro lado, de acordo com o senso comum, a *autonomia da escola*, deve fazer com que esta seja capaz de identificar melhor as suas necessidades e portanto, suprimi-las. Porém,

^h Neste contexto, retornos marginais significam ganhos mínimos.

muitas vezes, esta situação não acontece e poderão até gerar-se situações de oportunismo. Num estudo realizado na Indonésia, verificaram-se contratações extra de professores para escolas onde a dimensão das turmas era extremamente baixa (Arze del Granado, Fengler, Ragatz, e Yavuz, 2007, p. 12).

Políticas educativas

Outro indicador que merece alguma referência é o *currículo*. Poderíamos pensar que um currículo diversificado aumentaria o rendimento escolar, mas na verdade não é bem assim. Um currículo, nos primeiros anos de ensino, deve ser unificado tendo como base várias disciplinas de âmbito geral. Para Woessmann (2000a), este aspeto tem muita importância dado que, ao existir um currículo unificado, não existe a possibilidade de haver uma diluição dos conhecimentos e como tal, os diversos agentes a nível de escola não podem facilmente realizar alterações do mesmo. Há países que, ao centrarem os seus currículos no alargamento de competências básicas, conseguem obter um desempenho elevado por parte dos alunos, contrastando com outros que apostam numa escola elitista.

Segundo Hanushek e Woessmann (2009), existem significativos retornos económicos quando a educação básica é alargada a um elevado número de indivíduos, possibilitando-lhes, deste modo, acesso a níveis de escolaridade mais elevados. Este alargamento de acesso à educação é uma das opções a tomar para gerar desenvolvimento económico. Todavia, deve ter-se em atenção que os retornos económicos advêm de políticas que fomentam a melhoria do desempenho dos alunos e aperfeiçoam e ampliam aptidões à força do trabalho, e não de políticas educativas que aumentam o número médio de anos de escolaridade, sem se preocuparem com a sua qualidade. Segundo Lopez, Thomas, e Wang (1998), para que a educação possibilite o desenvolvimento

económico é necessário que a oferta da mesma seja ampla e alcance toda a população. Também em países cuja economia já se encontra num patamar suficientemente elevado de desenvolvimento, é necessário que haja um aumento nos níveis de escolaridade obrigatória e uma melhoria da sua qualidade, de modo a possibilitar um progresso tecnológico e uma modernização industrial.

Apesar de tudo isto, Schoellman (2008a) alerta para o perigo de uma escolaridade obrigatória, que promove o aumento do seu número de níveis, apenas para dar cumprimento à legislação de um país, mas que não se harmonizam com a qualidade de um sistema de ensino.

Outro fator também importante é o *financiamento* prestado às escolas. Muitas vezes, este está dependente da capacidade financeira do meio onde a mesma se insere, independentemente do que lhe é concedido pelo Estado. Regiões mais pobres são incapazes de fornecer certos serviços, podendo deste modo originar situações de desvantagem em relação a outras regiões. Sem dúvida que, em qualquer país, existem assimetrias regionais. Como tal, estas assimetrias têm influência nos resultados escolares, e as suas implicações na economia são óbvias.

Bratti, Checchi e Filippin (2007) estudaram as assimetrias em Itália. Neste país, o sistema educacional é altamente centralizado. O Governo Central financia dois terços do orçamento total de cada escola, enquanto o restante é deixado às autoridades locais, as quais são responsáveis pelo fornecimento de instalações e serviços básicos, como transporte, alimentação e infraestruturas desportivas. Cada escola tem apenas 10% de autonomia para definir o seu currículo enquanto o Governo Central define 90% do mesmo e é também este órgão que contrata os professores através de um concurso nacional. Porém, apesar deste cenário, em Itália existem enormes assimetrias ao nível educativo.

À semelhança do estudo efetuado em Itália, Arze del Granado (et al., 2007) realizaram um outro estudo na Indonésia, em que se propuseram analisar os investimentos feitos na educação. Concluíram então que nas regiões mais ricas

existe, não só uma maior despesa por habitante, mas também uma despesa maior por estudante (Arze del Granado, Fengler, Ragatz, e Yavuz, 2007, p. 17). Esta situação é explicada pelos autores, pelo facto de os alunos destas regiões frequentarem níveis de ensino mais elevados, e conseqüentemente, aumentarem a despesa investida na educação.

Mas é verdade, que a *descentralização* pode ter conseqüências negativas se os governos locais forem influenciados por elites locais (Blázquez e García, 2007, p. 7). Temos o exemplo da Espanha, onde a *descentralização*, embora tendo sido uma reforma popular, teve conseqüências negativas, uma vez que fez aumentar ainda mais as assimetrias regionais gerando um aumento na taxa de risco de desemprego (Blázquez e García, 2007, p. 7).

Mimoun e Raies (2009) destacam que o crescimento económico diminui à medida que aumenta a desigualdade na distribuição de fundos públicos, na área da educação. Para os mesmos autores, através de uma melhor redistribuição dos recursos, que privilegie os subsídios dados ao ensino obrigatório, é possível melhorar a qualidade e gerar um aumento da taxa de conclusão dos níveis posteriores promovendo, deste modo, o crescimento económico.

No entanto, a eficiência da educação não devia estar dependente de investimentos elevados pois, para os investigadores educacionais, uma escola diz-se mais eficiente quando se reduz o custo sem redução dos resultados (Holbrook, 2006, p. 21). Um dos fatores identificados por Hanushek e Woessmann como gerador de melhoria na eficiência de uma escola é dar a possibilidade aos encarregados de educação para escolher a escola dos seus educandos (Hanushek e Woessmann, 2007). Possibilitar-se, aos encarregados de educação, a *escolha da escola*, poderá implicar um aumento da competitividade entre escolas (Hanushek e Woessmann, 2009, p. 15) gerando concorrência entre o sistema de ensino público e privado (Woessmann, 2000a, p. 18).

Por vezes, devido à dificuldade em promover um aumento da qualidade do ensino, uma solução de curto prazo encontrada por alguns países é o

impulsioneamento de programas de prestígio, efetuando *parcerias e intercâmbio de docentes* com instituições de ensino estrangeiras (Castelló-Climent e Hidalgo-Cabrillana, p. 27). Desta forma, tenta-se promover uma melhoria do ensino, gerando um ambiente favorável à busca do conhecimento.

2.4.2 Indicadores quantitativos e indicadores qualitativos

Já foi referido que existem dois fatores importantes na educação: a quantidade e a qualidade. Os fatores quantitativos podem estar associados, por exemplo, a taxas de inscrição, número de níveis de escolaridade, despesas com sistema educativo, entre muitos outros. Os fatores qualitativos podem estar ligados, por exemplo, ao desempenho dos alunos, às qualificações do pessoal docente, à organização curricular, ao material didático disponível, à qualidade das instalações escolares, etc.

Apesar destes últimos fatores serem de natureza qualitativa, os investigadores da matéria em causa desenvolveram processos para poderem medi-los e, posteriormente, compreender qual o impacto que têm na economia de um país e como divergem de país para país.

A OCDE tem disponibilizado um número diverso de indicadores educacionais que foram concebidos para fornecer uma descrição quantitativa do funcionamento de diversos sistemas de ensino (Woessmann, 2000a, p. 38).

Um indicador de fácil acesso e muito utilizado em estudos sobre a educação é o *número médio de anos de escolaridade*. A utilização deste indicador, como já foi referido anteriormente, pode levar a obter resultados enganadores. Em primeiro lugar, este indicador não considera as capacidades adquiridas pelo

trabalhador após a educação formal e assume que a educação formal adquirida nunca se dissipa (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 17). Em segundo lugar, não diferencia as capacidades obtidas nas escolas em cada país, não tendo também em atenção a qualidade da educação entre os países (Barro e Lee, 2000, p. 12). Em terceiro lugar, segundo Gemmell, citado por Woessmann, este indicador inclui adultos que não estão na força do trabalho e pode excluir alguns membros da força de trabalho (Woessmann, 2000c, p. 13). Por último, o aumento de um ano de escolaridade no ensino básico não afeta as qualificações de uma pessoa da mesma forma que, se esse ano de escolaridade fosse aumentado num nível de ensino mais avançado, como por exemplo no final do ensino secundário (Woessmann, 2000b, p. 14), pois um ano de escolaridade no ensino básico não gera inovação tecnológica, mas a adição de um ano no ensino superior, por exemplo, afeta a inovação (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 1). Deste modo, no caso de usarmos o indicador, *número médio de anos de escolaridade*, deve-se distinguir se é ensino primário, secundário ou terciário (Woessmann, 2000b, p. 18).

As *taxas de matrícula*, bem como os *níveis de conclusão* são indicadores quantitativos que permitem avaliar a situação do sistema educativo, não só no momento presente, mas também a sua evolução ao longo do tempo. O inconveniente inerente a estes indicadores prende-se com o facto de não ser possível utilizá-los para realizar comparações entre países pois, fazer uma análise deste tipo implicaria que os níveis de escolaridade entre países fossem equivalentes. Para se poderem fazer comparações entre países é necessário usar indicadores qualitativos, como os *testes internacionais* (St. Aubyn, 2002, p. 35).

Um outro fator a ter atenção é que um aumento nas *taxas de matrícula* não tem implicações imediatas no mercado de trabalho, pois essas implicações só terão lugar alguns anos mais tarde. Esta limitação poderá ser ultrapassada se, em vez do indicador *taxas de matrícula*, utilizarmos outros, como por exemplo o desempenho obtido pelos alunos em testes internacionais aplicados em dois

“estádios” distintos: a jovens em formação (como os PISA), ou a adultos inseridos na vida ativa (como os IALS).

Muitos dos estudos realizados com a finalidade de comparar sistemas educativos entre países utilizam como variáveis indicadoras da qualidade de um sistema de ensino a *taxa de repetição*, a *taxa de abandono escolar* e uma outra variável, que resulta da combinação destas duas últimas, e que é a *taxa de sobrevivência*ⁱ. Embora estes indicadores sejam utilizados pela UNESCO, a sua utilização não é viável para países desenvolvidos da OCDE, onde as taxas de retenção nos primeiros anos escolares são praticamente nulas e o mesmo acontece com outros indicadores como a *escolarização bruta e líquida*, a *taxa de conclusão do ensino primário* e a *taxa de alfabetização*.

A utilização da *taxa de alfabetização* tem mais uma desvantagem por não considerar os investimentos educacionais que são realizados após a aquisição de conhecimentos básicos, pressupondo que nenhum destes investimentos melhora a produtividade (Woessmann, 2000b, p. 6).

Um dos indicadores que pode indicar a ineficiência do sistema educativo, é a *taxa bruta de matrículas*^j, em casos em que a mesma ter um valor superior a 100% (Arze del Granado, Fengler, Ragatz, e Yavuz, 2007, p. 2). Isto pode acontecer quando existe um grande volume de reprovações dos alunos, que assim permanecem no sistema educativo mais tempo do que o previsto ou também em situações em que pessoas, depois de já terem abandonado o ensino, regressem para melhorar as suas qualificações.

O *registo de patentes* é um indicador que está relacionado com a inovação. Alguns países, devido ao seu avanço tecnológico, sentem a necessidade de registar as suas patentes, de modo a garantir a sua exclusividade. Este indicador

ⁱ A taxa de sobrevivência é um indicador que mede a proporção entre o número total de alunos inscritos pela primeira vez no sistema de ensino e aqueles que, cinco anos após esta inscrição, se encontram no quinto ano de escolaridade, sem que tenham tido reprovações e/ou desistências.

^j Para calcular esta medida basta calcular a razão entre o número de indivíduos que estão matriculados e o número de indivíduos em idade escolar.

de tecnologia permite avaliar o grau de desenvolvimento tecnológico de um país que, ao estar dependente da sua tecnologia, tem que garantir um constante refinamento da mesma (Gundlach, Woessmann, e Gmelin, 1999, p. 18).

Outro indicador importante é as *renumeraciones dos profesores*. Mukherjee (2007), ao realizar estudos comparativos entre países, referiu que este indicador pode estar sujeito a críticas, pois varia de forma significativa entre os países, o que dificulta a realização de comparações. Também salientou que este indicador pode estar associado a outras participações, como incentivos diretos em forma de recompensas monetárias, que ao não estarem especificadas na contratação de professores, irão tornar incorretas as comparações.

2.5 Críticas relativas a alguns indicadores

A utilização de alguns indicadores, para a realização de estudos comparativos entre países, tem originado várias críticas aos mesmos. Por exemplo, os indicadores *salários dos professores* e/ou os *custos internos escolares* variam de forma significativa entre os países, o que dificulta a realização de comparações (Mukherjee, 2007, p. 17). Quando se usam indicadores económicos para realizar comparações entre países, é muitas vezes utilizado o conceito de *paridade de poder de compra* (PPC ou PPP em inglês), no entanto são levantadas algumas críticas à utilização deste conceito. A *paridade de poder de compra* é muitas vezes usada pelos economistas para poderem comparar o que é que os professores podem comprar com os seus salários em países diferentes. No entanto, não é surpresa para ninguém, que os salários dos professores num dado país permitem comprar mais do que os salários dos professores noutra país. Temos o exemplo, dos salários

Americanos que são, na generalidade, mais elevados do que nos outros países. Também acontece que, nos países subdesenvolvidos a construção dos indicadores económicos, por vezes, não é fiável. Por exemplo, o orçamento para a educação contempla rubricas que não estão incluídas nos países desenvolvidos, o que constitui mais um fator que dificulta comparações. No estudo que estamos a realizar, como apenas incluímos países da OCDE, esta argumento não se coloca.

Al-Samarrai (2002) aponta também a dificuldade em garantir que os dados educativos sejam fiáveis. Por exemplo, duvida-se que em alguns países subdesenvolvidos, os dados que são publicados sobre a despesa efetuada na área da educação correspondam exatamente ao que foi gasto nessa área, sem que tenha havido desvios para outras áreas.

Como já foi referido, o uso do indicador *média de anos de escolaridade*, nos estudos comparativos entre países, levanta igualmente diversos problemas. Para além de se assumir que um ano de escolaridade é igual para cada um dos países em estudo, pressupõe-se também que a escolaridade formal é a principal fonte de educação e que os resultados escolares dependem apenas desta medida (Hanushek e Woessmann, 2009, p. 4). Este indicador tem um impacto reduzido se tivermos em conta as diferenças entre as habilidades cognitivas adquiridas em diferentes países (Hanushek e Woessmann, 2009, p. 5).

Outro fator que influencia o desempenho de um país prende-se com o facto de alunos com um fraco desempenho escolar poderem transitar de ano devido a fatores que obrigam à sua não retenção. Um desses fatores pode ser a idade avançada para um determinado ano de escolaridade e outro pode ser o número de retenções num mesmo ano de escolaridade, ou em anos de escolaridade diferentes, registadas por um mesmo aluno. Segundo Yamamura (2010), esta situação reduz o incentivo para os alunos se esforçarem em aprender e aumenta o abandono escolar. Também Woessmann (2000a) destaca que o desempenho dos alunos é influenciado pelo comportamento das pessoas que atuam no processo educativo e que estas agem de acordo com incentivos pré-estabelecidos pelo sistema institucional.

Além dos indicadores gerados pela educação formal, deveriam também ser considerados *competências adquiridas através da formação profissional e/ou experiências adquiridas através de “learning by doing”* (aprender fazendo). Um dos problemas que se levanta para usar este tipo de indicadores consiste na dificuldade em recolher dados necessário para a sua construção. Mas, segundo Woessmann (2000b), talvez a maior limitação no uso destes indicadores consista no facto de não sabermos se os seus conhecimentos foram realmente adquiridos fora da escola.

2.6 Outras consequências da educação

A educação, para além de ter consequências no crescimento económico de um país, tem também consequências ao nível das atitudes, valores e comportamentos, promovendo a cidadania e a estabilidade social. Deste modo, a educação é muitas vezes considerada como uma ferramenta de combate à pobreza, que incentiva o crescimento económico, dinamiza a competitividade e pode gerar estabilidade social.

Sem dúvida, a educação desempenha um papel vital na formação de gerações futuras, em que o papel das escolas consiste em formar os futuros cidadãos para a sua participação na sociedade. Portanto, a educação tem um múltiplo impacto na economia, sendo que, o seu papel no desenvolvimento de competências sociais não deve ser descurado. Tal como já foi realçado, o impacto real da educação está dependente de diversas condições: a inflação, a pobreza, o capital, a instabilidade política, a taxa de alfabetização, a situação socioeconómica, a ajuda externa, e ainda outras que afetam, direta ou indiretamente, o seu impacto no crescimento económico (Afzal et al., 2010, p. 4).

Segundo Afzal et al. (2010), no Paquistão existe uma correlação significativa entre a *taxa de inscrição* e o *crescimento económico*, a qual tem implicações quer a curto,

quer a longo prazo. Segundo os mesmos autores, a variável *inflação* – uma das medidas de instabilidade socioeconómica – influencia negativamente o crescimento económico, tanto a curto como a longo prazo. Esta variável afeta também negativamente a educação, embora este efeito seja apenas a longo prazo (Afzal e et al., 2010, p. 19). A relação entre educação e o *rendimento* (por exemplo, o PIB) pode verificar-se de três maneiras diferentes: o *rendimento* pode implicar um crescimento do desempenho do sistema educativo; o *rendimento* e o sistema educativo podem equilibrar-se mutuamente; o sistema educativo pode implicar um crescimento do *rendimento* (Figura 2.3).

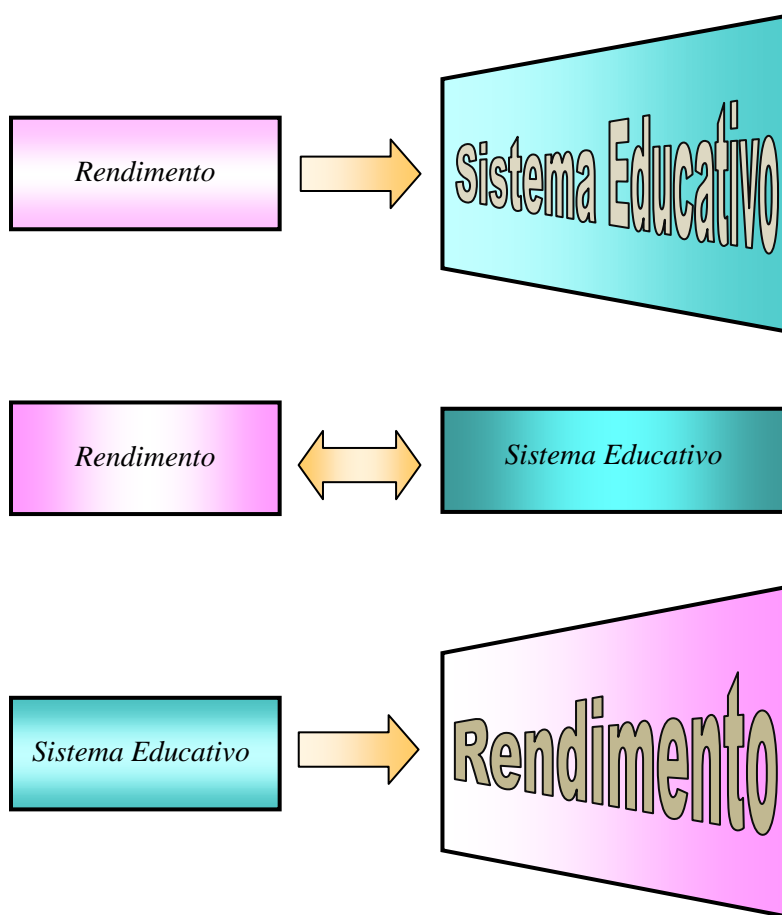


Figura 2. 3-Esquemática da relação entre sistema educativo e rendimento

No Bangladesh – país em desenvolvimento – segundo Wadud, Islam e Islam (2007), o *rendimento* e a educação estão a ajudar-se mutuamente. Isto prova que existe uma relação bidirecional entre o *produto interno bruto* e a educação.

Devemos ter presente que a educação tem também um papel social, produzindo uma diminuição na criminalidade e no desemprego, melhorando a governação, reduzindo a natalidade e melhorando a saúde materna e infantil (Mukherjee, 2007, p. 7).

2.7 Educação Formal e Educação Não Formal

Tal como já foi referido no Capítulo 1, o binómio *educação* ↔ *economia* tem vindo, progressivamente, a conquistar relevo em inúmeros países, de modo que a sua importância começou a despoletar o interesse de muitos investigadores, os quais têm vindo, cada vez mais, a dedicar-se ao estudo dos efeitos provenientes dessa relação. As principais organizações mundiais, ONU, OCDE, UNESCO – às quais Portugal pertence – têm-se debruçado também sobre a importância do sistema educativo na economia dos diferentes Países.

No âmbito do presente trabalho focar-nos-emos essencialmente no estudo do conceito de educação formal e, tal como Cabugueira (2001), designaremos educação formal por EF e educação não-formal por ENF. O motivo pelo qual o enfoque deste trabalho se vai debruçar sobre a EF, e não sobre a ENF, prende-se com a subjetividade dos indicadores que nos poderiam fornecer informação sobre esta última (ENF) e também pela sua vasta diversidade, sendo ainda quase impossível a existência de uma política educativa, por parte dos Estados, para a ENF. Para além disso, tal como refere Cabugueira “o complexo campo que a ENF abarca, demonstrado pela riqueza das formas que a mesma pode adotar, assim como pela dificuldade de estabelecer os limites exatos entre a educação formal (EF) e a ENF,

explica a multiplicidade de definições que se atribuem ao conceito de ENF” (Cabugueira, 2001, p. 26).

Deste modo, sempre que neste trabalho nos referirmos à educação, estamos a considerar apenas a EF e, de acordo com Cabugueira, assumimos que a mesma “(...) é o sistema educativo com estruturas hierárquicas e graus cronológicos que vai da escola primária à universidade e que compreende, para além disso, os estudos académicos gerais, toda uma variedade de programas especializados e de instituições de formação técnica e profissional a tempo completo;” (Cabugueira, 2001, p. 28).

Outro motivo que nos levou a optar por um estudo centrado na EF deve-se à facilidade de acesso a diversas bases de dados já existentes, que abrangem um amplo leque de indicadores, uma vez que a complexidade do tema requer uma dimensão alargada de aspectos, sobre os quais um sistema de educação deve ser avaliado. Para além disso, é a própria sociedade que exige que o mesmo seja avaliado, uma vez que a qualidade da educação formal dos seres humanos produz efeitos a longo prazo.

Capítulo 3

Portugal e a Educação

3.1 O papel da Educação na Economia: Caso Português

Diversos investigadores, nomeadamente Pereira e Martins (2004), tentaram relacionar a educação com a economia para o caso português, tendo concluído que “em Portugal (...) existe um impacto positivo e crescente da educação” sobre a economia. Todavia, salientam que “estes resultados sugerem que a educação é um investimento arriscado” dado que os alunos não têm conhecimento de quais irão ser os cursos que, futuramente, irão ter mais procura, e portanto “o resultado financeiro da sua decisão educativa é muito imprevisível”.

As mesmas conclusões foram obtidas por St. Aubyn e Pereira (2004), que afirmaram que o aumento da escolaridade da população foi, entre 1960 e 2001, um fator de crescimento económico importante. Salientam ainda que, nas décadas referidas, os níveis de escolaridade mais importantes em Portugal foram o básico e o secundário. A relação entre economia e ensino é significativa em Portugal. Um país pequeno e com uma economia aberta onde o seu crescimento é devido essencialmente ao uso de tecnologia e não à sua criação, torna o *capital humano*^k um fator decisivo para a economia. Teixeira e Fortuna (2003) defendem a teoria neo-clássica, realçando que se deve dar ênfase aos mecanismos e incentivos que favorecem o crescimento.

^k Entende-se por capital humano, os atributos adquiridos por um trabalhador por meio da educação e experiência, traduzidos na sua capacidade de conhecimentos, competências e atributos de personalidade consagrados na aptidão de realizar trabalho de modo a produzir valor económico.

Outros autores, como Pina e St. Aubyn (2002), mostraram que o *capital humano* é uma variável fundamental na explicação do crescimento económico português.

Um dos conceitos muito estudado por diversos autores é a eficiência do sistema de ensino Português. Afonso e St. Aubyn (2005) consideram que duas das áreas mais importantes do fornecimento de serviços públicos, onde se deve estudar a eficiência, são a Educação e a Saúde. Os mesmos autores concluíram que Portugal é um país que não apresenta uma grande eficiência dos seus recursos educativos. O motivo desta ineficiência no setor da Educação está fortemente relacionado com as variáveis *capacidade económica familiar e educação dos pais*.

Os mesmos autores mostram ainda que a qualidade da Educação, medida por *testes comparativos internacionais* de competências, tem uma forte relação com o crescimento económico. No entanto, não especificam o porquê dessa relação.

Por outro lado, Teixeira e Fortuna, focando-se no período entre 1960 e 2001, estimaram que o aumento de um ponto percentual no número médio de anos de escolaridade para a população portuguesa, com idades acima dos 25 anos, implicaria, para um nível fixo de conhecimentos, um crescimento de produtividade da economia na ordem de 0,42 pontos percentuais. (Teixeira e Fortuna, 2003, p.18)

3.2 Indicadores mais representativos

Clements (1999) realça que é importante Portugal melhorar os resultados do sistema educativo sem aumentar os custos. É também importante analisar os custos dos vários sistemas de ensino.

Um dos principais indicadores para se analisarem os custos de um sistema de ensino é a *despesa por estudante*. O gráfico da Figura 1 mostra a despesa por aluno nos

sistemas de ensino primário, secundário, e pós-secundário no ano 2006 (PPPs)¹ e a despesa por aluno por aluno no ensino superior, para o mesmo ano.

Com base no gráfico da Figura 3.1, podemos verificar que a despesa por aluno em Portugal no ensino primário, secundário e pós-secundário é inferior à média da OCDE. O mesmo acontece com o ensino terciário (superior), embora neste caso a despesa se aproxime da média da OCDE.

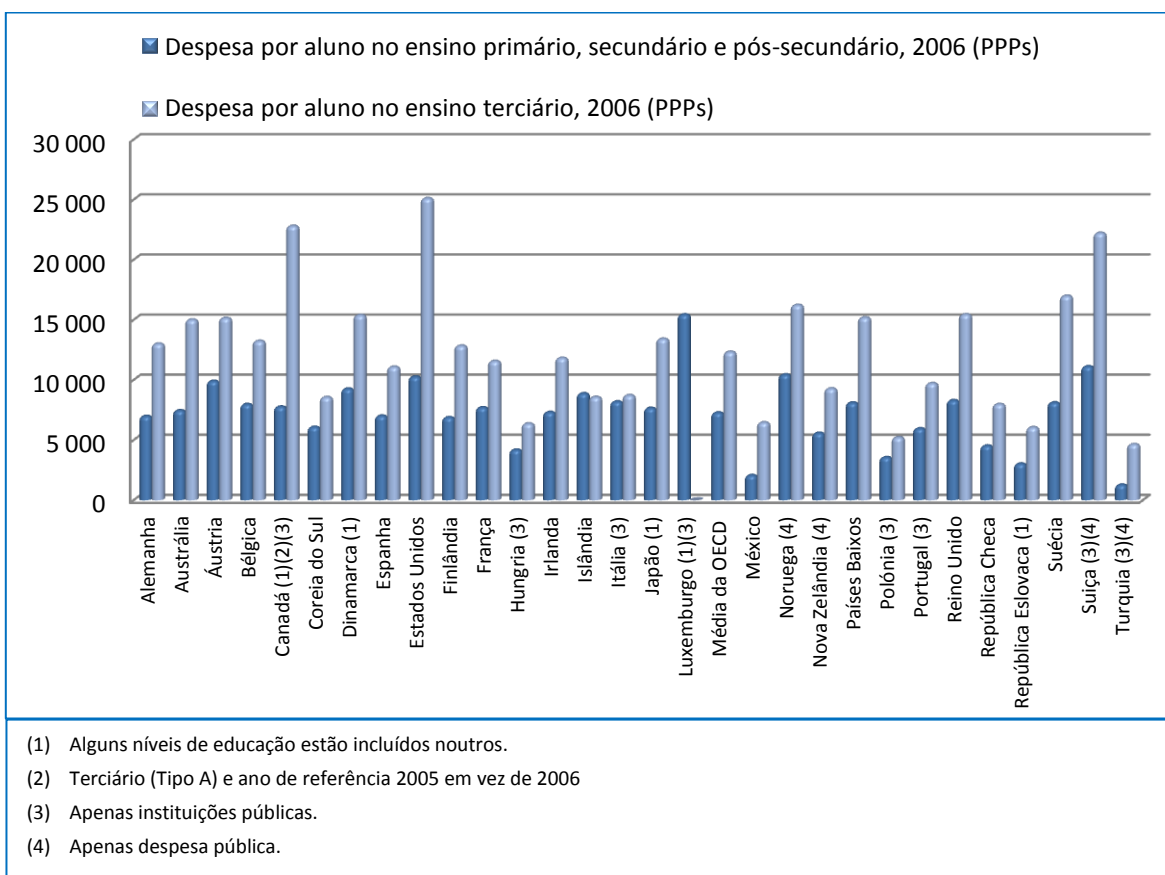


Figura 3. 1-Despesa por aluno nos países da OCDE

(adaptado de www.oecd.org)

Outro aspeto que este autor faz salientar, é a despesa por aluno no ensino primário, a qual, em 2006, era superior à média da OCDE. Segundo Clementes (1999), a referida despesa explica-se com a existência de um baixo *rácio entre estudantes e professores*. Este rácio deve-se principalmente a dois factos: a rede escolar primária

¹ *Purchasing power parities* são as taxas de conversão de moeda que igualam o poder de compra de moedas diferentes, eliminando as diferenças nos níveis de preços entre países.

ser constituída por escolas situadas em zonas rurais e, como tal, com pouca população em idade escolar (situação que atualmente não se verifica); os altos salários que os professores poderiam atingir no fim da carreira contributiva.

Segundo Clements (1999), o problema da existência de salários elevados dos professores pode ser preocupante pois, tendo a massa salarial, geralmente, um peso elevado num sistema de ensino, poder-se-á originar uma diminuição do investimento em outros setores (tais como a manutenção das instalações escolares).

Um dos fatores de ineficiência apontado ao sistema de ensino português pelo mesmo autor, é a alta *taxa de retenção*, que tem um impacto significativo na despesa escolar e portanto na economia. O mesmo autor afirma que, se as *taxas de inscrição* no ensino básico e secundário caíssem em 10 pontos percentuais, então, teríamos uma queda de 0,5 pontos percentuais do Produto Interno Bruto (PIB).

A Figura 3.2 apresenta a percentagem da população com idade compreendida entre os 25 e os 34 anos, que não completou o ensino secundário, com dados referentes ao ano 2009.

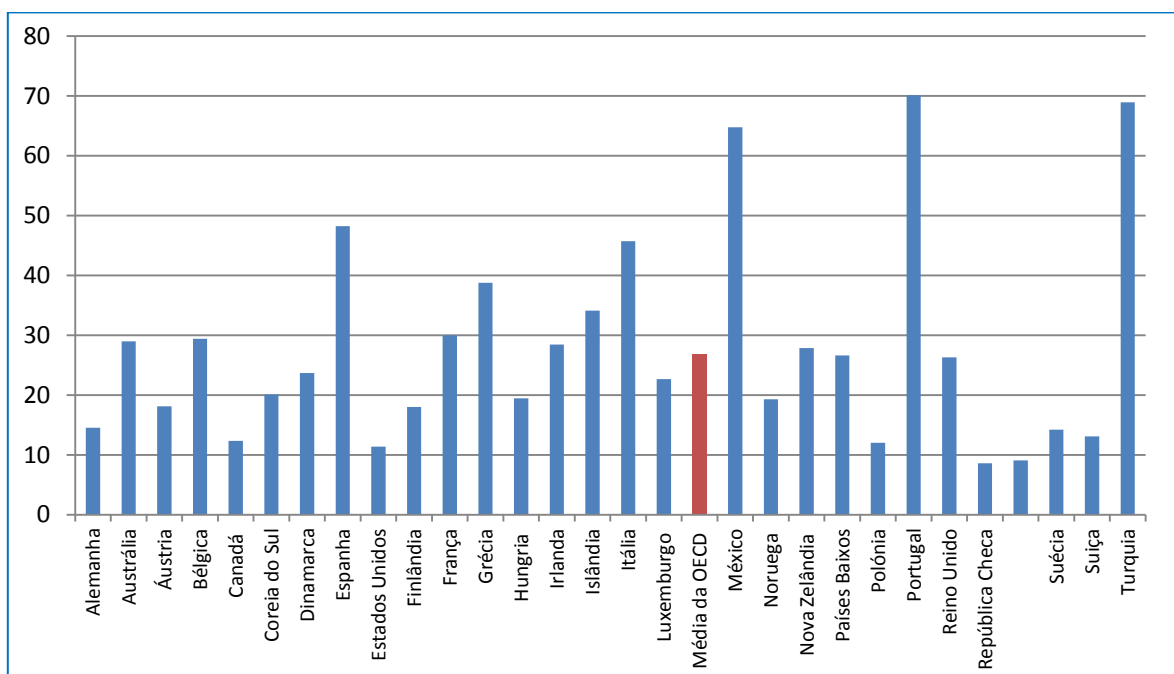


Figura 3. 2-Percentagem da população entre 25 e 34 anos que não completou o ensino secundário no ano 2009

(adaptado de www.oecd.org)

Pela análise da Figura, podemos concluir que o valor indicado para Portugal é superior a cinquenta por cento da amostra, sendo, por isso, mais do dobro da média da OCDE e um dos mais elevados de todos os países da OCDE.

Um dos aspetos importantes a considerar no âmbito do estudo da eficiência da educação é a relação entre o desempenho nos *testes internacionais* e a *taxa de repetição*. Em alguns estudos verificou-se uma correlação entre a performance dos *testes internacionais* e a *taxa de repetição*, isto é, uma parte significativa dos alunos com várias repetições obtém baixos resultados nos testes internacionais de matemática. Por outro lado, os alunos com bons resultados nos testes internacionais apresentam um baixo número de repetições.

Clements afirma que as taxas de retenção têm efeitos no mercado de trabalho. Segundo este autor, existe em Portugal um *retorno* elevado pela conclusão do ensino secundário e superior, ou seja, os titulares destas habilitações colhem mais benefícios do que aqueles que não concluem estes níveis de ensino. Sendo Portugal um dos países da OCDE com uma elevada percentagem de indivíduos que não adquirem essas habilitações literárias, então, isso vai implicar uma maior *desigualdade social*. Embora o papel da educação seja o de atenuar as desigualdades sociais, segundo Carneiro (2008), mesmo que todos os indivíduos atinjam o mesmo nível académico, continuará a existir desigualdade, uma vez que as variáveis nível académico e idade, só explicam 40 a 50% das diferenças salariais.

No gráfico da Figura 3.3, podemos observar que Portugal apresenta um dos mais elevados coeficientes de Gini^m o que significa a existência de uma elevada desigualdade social.

^m Indicador internacional usado para medir a desigualdade da distribuição de rendimentos da população de um país. O coeficiente é um número real que varia entre 0 e 1. Um país cujo coeficiente é próximo de zero, implica que existe pouca desigualdade de rendimentos, ao contrário de um país com um coeficiente próximo de um.

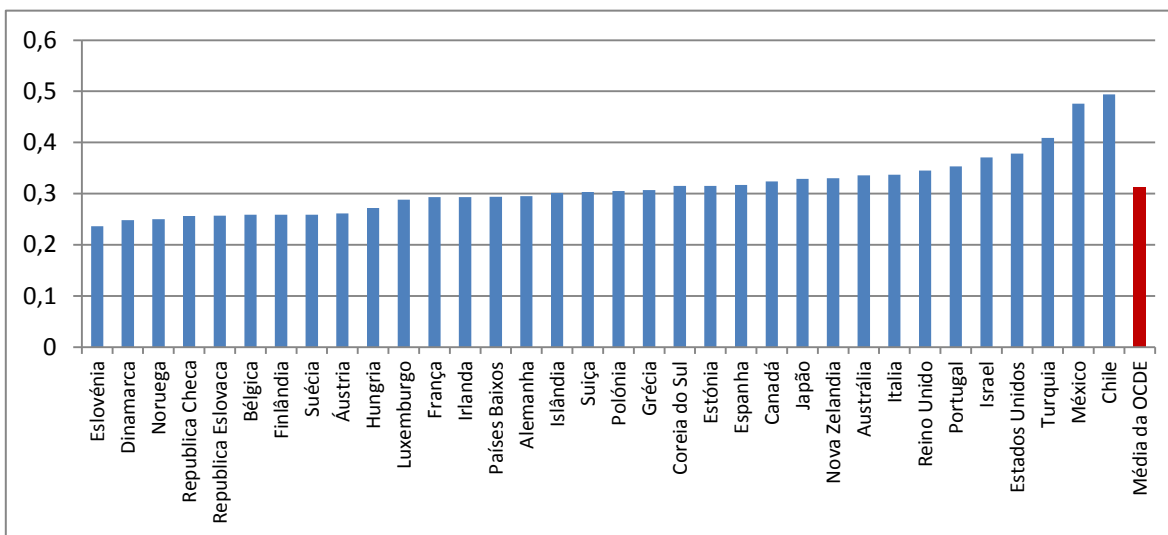


Figura 3. 3-Desigualdade social (coeficiente de Gini) (Final da década de 2000)
(adaptado de www.oecd.org)

Um dado interessante, relacionado com o impacto das qualificações sobre o rendimento, é referido por Budria e Pereira (2007), ao afirmarem que no setor público os trabalhadores têm um maior retorno na formação contrariamente ao setor privado, onde o parâmetro experiência tem um forte peso (Budria e Pereira, 2007, p. 16).

Clements apresenta algumas medidas para melhorar a eficiência do sistema de ensino português, entre as quais se podem destacar as seguintes: agrupar as escolas de modo a possibilitar uma melhor gestão dos recursos humanos, reduzindo deste modo as despesas com pessoal ao longo do tempo; aumentar o número de alunos por turma; melhorar as instalações escolares; tornar pública a informação relativa à despesa efetuada por cada escola; aumentar o número de cursos disponíveis.

Em relação a esta última medida deve-se ter algum cuidado pois a redistribuição dos alunos de estudos gerais (via ensino) para estudos vocacionais, não poderá ser considerada uma alternativa para baixar as taxas de não conclusão dos cursos (Clements, 1999, p. 26). Outra medida apontada no relatório é a divulgação de informação relativa ao desempenho das escolas nos testes nacionais (“ranking da escola”). Segundo o autor, esta informação vai divulgar o desempenho das escolas

ao longo do tempo e aumentar a “pressão” sobre as escolas, no sentido de melhorarem os seus resultados.

Clements, no relatório sobre a eficiência do sistema português, considera que se deveria fazer pesquisa nas seguintes matérias:

- As causas de em Portugal existir uma taxa muito elevada de retenção;
- Estudos comparativos entre o desempenho de escolas públicas e privadas.

Capítulo 4

Métodos Paramétricos

4.1 Definição de métodos paramétricos

Em muitos estudos estatísticos, quer sejam de natureza experimental ou de natureza observacional, somos confrontados com problemas em que o objetivo principal é estudar a relação entre variáveis. Pretendemos assim analisar qual a influência que uma ou mais variáveis independentes ou explicativas têm sobre uma variável de interesse, a qual designamos por variável dependente.

“A regressão é uma técnica e modelo estatístico utilizado em quase todas as áreas do conhecimento, desde a engenharia às ciências sociais, da física à biologia e à economia, etc., onde o objetivo é a modelação ou a predição de valores de uma ou várias variáveis em função dos valores de outra ou outras variáveis” (Coelho, 2000).

Nos modelos de regressão pretende-se modelar um problema onde a variável dependente é determinada em função de outras variáveis, as quais, no modelo, são tomadas como independentes. Podemos pois afirmar que os dois principais objetivos que nos levam a utilizar os modelos de regressão são:

- A descrição da relação entre as variáveis, na qual uma assume o papel de variável dependente, e a(s) outra(s) de independente(s).
- A independência de valores entre as variáveis independentes, nos casos em que existe mais do que uma variável independente.

Por definição, a regressão linear simples (RLS) é um modelo matemático que relaciona uma e só uma variável dependente com uma e só uma variável independente. Se no modelo incluirmos mais do que uma variável independente, o modelo passa a denominar-se modelo de regressão linear múltipla (RLM).

4.2 Modelo de Regressão Linear Simples

Considere-se o seguinte conjunto de dados

$$(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \wedge x_i \in X \wedge y_i \in Y\} \quad (1)$$

Se tivermos como principal objetivo realizar uma análise de correlação entre a variável X e a variável Y , podemos fazê-lo começando pela construção de um diagrama de dispersão, para depois realizarmos uma inferência estatística simples. A construção do diagrama consiste na marcação de pontos num referencial ortonormado utilizando as coordenadas dos pares (x_i, y_i) . O máximo que nos é permitido concluir pela observação do diagrama é o comportamento e a natureza da relação entre as variáveis X e Y , uma vez que a análise efetuada é empírica. Desde modo, conseguimos observar a existência, ou não, de uma correlação linear. Ao existir uma correlação linear, esta, em valor absoluto, será tanto mais forte quanto maior for a concentração dos pontos relativamente a uma determinada retaⁿ (reta de regressão linear).

ⁿ Mais adiante, iremos ver como é obtida a equação desta reta.

Podemos assim ter três situações distintas:

- A correlação entre X e Y é positiva, ou seja, os fenómenos variam no mesmo sentido;
- A correlação entre X e Y é negativa, ou seja, os fenómenos variam em sentido inverso;
- A correlação entre X e Y é nula, ou seja, não existe uma relação linear entre os fenómenos.

Vejamos os seguintes exemplos, em que o primeiro diz respeito a uma relação existente entre as variáveis peso médio e altura média de uma amostra de 25 pessoas, e o segundo que relaciona o preço pago por quilograma de cereal com a quantidade produzida por colheita.

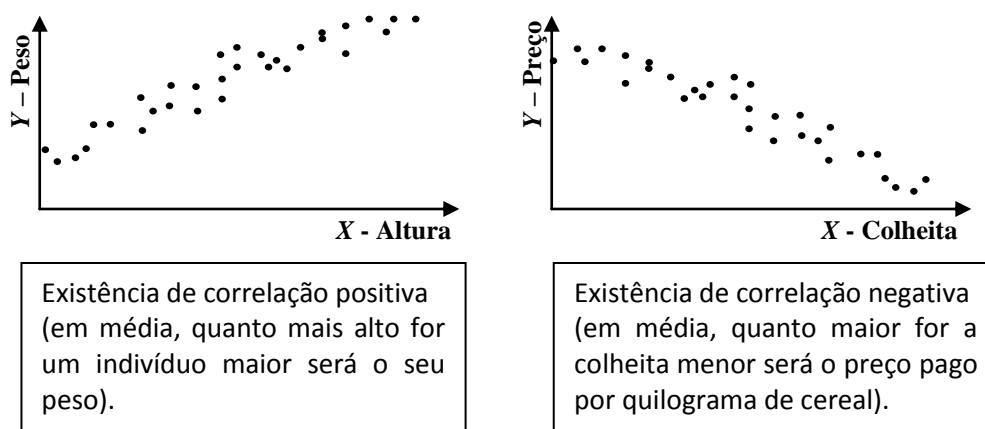


Figura 4. 1-Gráficos de nuvem de pontos evidenciando dois tipos de correlação (positiva e negativa)

Pelo exposto anteriormente sabemos que, a equação que modela uma regressão linear simples é dada por:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad (2)$$

onde β_0 e β_1 são parâmetros desconhecidos do modelo (a estimar) e ε é a variável aleatória residual, onde incluímos todas as influências que não podem ser explicadas apenas por Y .

Uma vez que em (1) temos n dados e admitindo que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes de média zero e variância σ^2 , podemos apresentar a equação (2) com o seguinte aspeto:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad \wedge \quad i = 1, \dots, n$$

Para qualquer valor de x_i , temos que y_i é uma variável aleatória de média $\mu_{y_i} = \beta_0 + \beta_1 x_i$ e variância σ^2 .

Como o objetivo é estimar β_0 e β_1 , isto é, determinar $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, chegamos à seguinte equação:

$$\hat{y} = \hat{\mu}_{Y|X} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

4.2.1 Estimação pelo método dos quadrados mínimos

Começemos por observar o seguinte gráfico

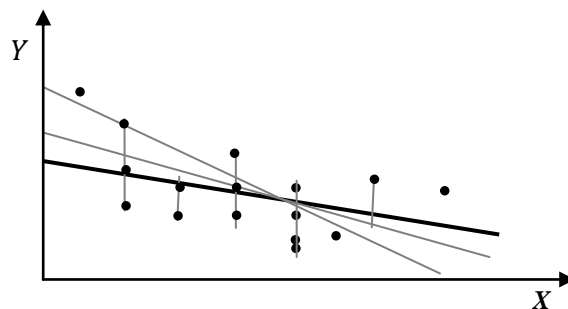


Figura 4. 2- Ajustamento da reta de regressão à nuvem de pontos
(adaptado de (Sarabando))

Entre as três retas apresentadas, podemos questionar-nos qual será a que melhor se ajusta aos dados que estão representados no gráfico por pontos. Destas, a reta representada a negrito é a que mais se “aproxima” da maioria dos pontos, isto é, geometricamente, é a reta que melhor se ajusta aos dados.

Começemos por considerar $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$, onde \hat{y}_i é a ordenada do ponto da reta cuja abcissa é x_i . Pretendemos então determinar os valores de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$.

Observemos então a seguinte figura:

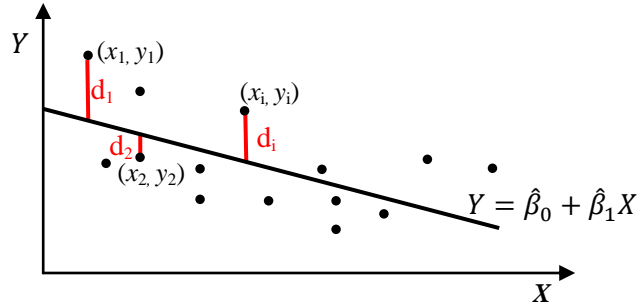


Figura 4. 3-Diferença entre a ordenada de um ponto da nuvem e a ordenada de um ponto da reta de regressão com a mesma abcissa

(adaptado de (Sarabando))

Temos que $d_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$, isto é, cada d_i é dado pela diferença entre a ordenada de um dado ponto da nuvem de pontos, e a ordenada de um ponto da reta de regressão, com a mesma abcissa do ponto dado. Cada d_i é designado por i -ésimo resíduo. Como é evidente, alguns destes d_i poderão ser negativos, e por isso, não lhes poderemos chamar distâncias. Então, para evitar problemas com $d_i < 0$, vamos utilizar os valores de d_i elevados ao quadrado, sendo o nosso objetivo minimizar a soma dos quadrados destes resíduos. Ou seja, se definirmos $SSE = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2$ como sendo a soma dos quadrados dos d_i , então, para determinarmos $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ de modo a minimizar o valor SSE , temos que resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \\ \frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n \partial [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^n \partial [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n x_i [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i [\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} + \hat{\beta}_1 x_i] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \end{cases}$$

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 1: Pretendemos estudar a relação entre a quilometragem de um carro usado e o seu preço de venda, cujos valores se apresentam na tabela 4.1.

Tabela 4. 1- Relação entre a quilometragem e o preço de venda de um carro

Carros	Quilometragem X (1000 km)	Preço de venda Y (dezenas de euros)
1	40	1000
2	30	1500
3	30	1200
4	25	1800
5	50	800
6	60	1000
7	65	500
8	10	3000
9	15	2500
10	20	2000
11	55	800
12	40	1500
13	35	2000
14	30	2000
Total	505	21600

Com os dados da tabela vamos construir um diagrama de dispersão:

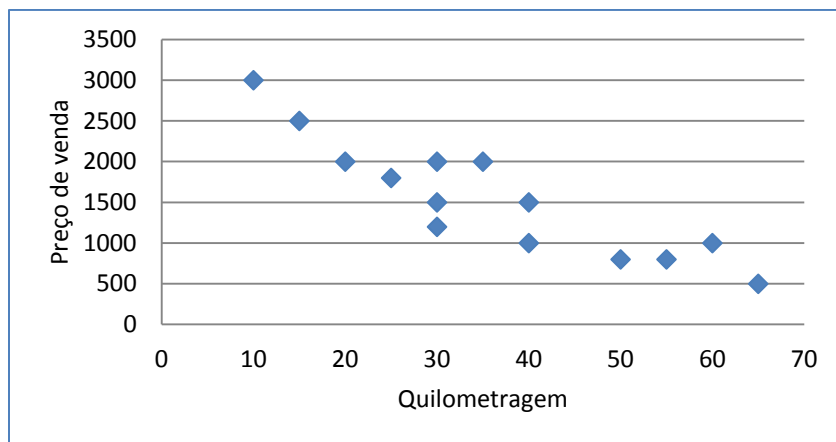


Figura 4. 4-Diagrama de dispersão entre a quilometragem e o preço de venda de um carro usado

Pela observação do diagrama de dispersão, podemos retirar algumas conclusões: Os dados sugerem a existência de uma relação linear entre a quilometragem e o preço de venda. Intuitivamente, temos a ideia que existe uma correlação negativa podendo, deste modo, afirmar-se que quanto maior for a quilometragem, menor será o preço de venda.

Com base no mesmo exemplo, pretendemos agora determinar a equação da reta de regressão. Para tal, iremos acrescentar três novas colunas à tabela 4. 2.

Tabela 4. 2- Valores das variáveis e de cálculos auxiliares para calcular o coeficiente de determinação

Carros	Quilometragem X (1000 km)	Preço de venda Y (dezenas de euros)	XY	X ²	Y ²
1	40	1000	40000	1600	1000000
2	30	1500	45000	900	2250000
3	30	1200	36000	900	1440000
4	25	1800	45000	625	3240000
5	50	800	40000	2500	640000
6	60	1000	60000	3600	1000000
7	65	500	32500	4225	250000
8	10	3000	30000	100	9000000
9	15	2500	37500	225	6250000
10	20	2000	40000	400	4000000
11	55	800	44000	3025	640000
12	40	1500	60000	1600	2250000
13	35	2000	70000	1225	4000000
14	30	2000	60000	900	4000000
Total	505	21600	640000	21825	39960000

Posteriormente vamos calcular as médias dos valores de x e de y.

$$\bar{x} = \frac{505}{14} = 36,07$$

$$\bar{y} = \frac{21600}{14} = 1542,85$$

Por fim, determinámos os coeficientes $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{640000 - 14 \times 36,07 \times 1542,85}{21825 - 14 \times 36,07^2} = -38,56$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 1542,85 - 38,56 \times 36,07 = 2934$$

Logo a equação da reta de regressão será:

$$Y = 2934 - 38,56 X$$

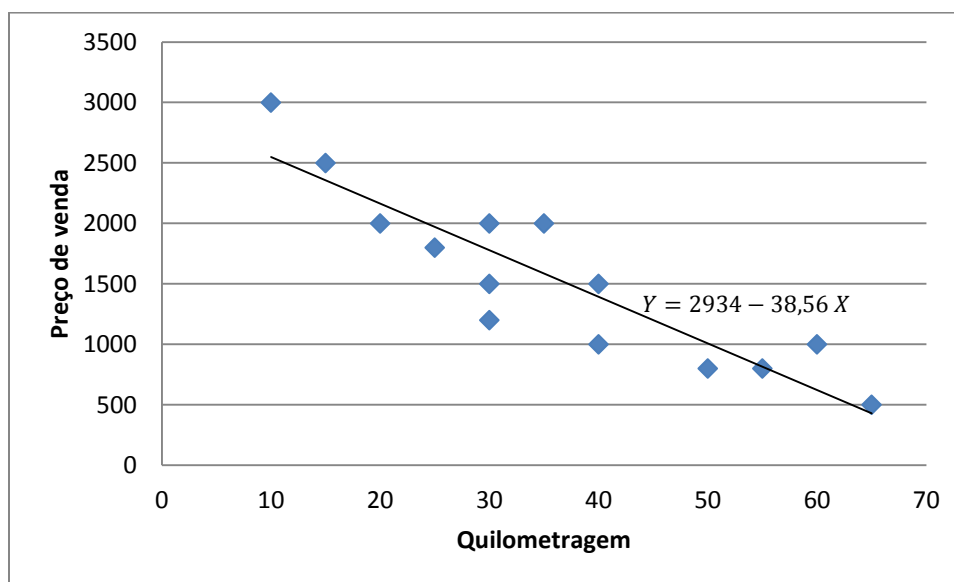


Figura 4. 5-Reta de regressão do diagrama de dispersão apresentado na Figura 4. 4

4.2.2 Coeficiente de determinação

Tão importante como determinar a reta de regressão, é determinar a qualidade do ajustamento – coeficiente de determinação.

Considere-se que \bar{y} é a média dos valores observados para a variável dependente. Uma forma de determinarmos a qualidade do ajustamento é comparar \hat{y}_i e \bar{y} . Se \hat{y}_i não for melhor do que \bar{y} então a reta obtida poderá ter pouca importância (mau ajustamento). Sendo assim, vamos definir $SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ como sendo a soma dos quadrados totais. Este valor indica a dispersão em torno de \bar{Y} . Do mesmo modo, vamos ter $SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ como sendo a dispersão em torno da reta de regressão. Por fim, definimos soma dos quadrados da regressão como sendo $SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$.

Pelo exposto, o ajustamento será tanto melhor quanto mais pequeno for SSE relativamente a SST . O quociente entre SSR e SST dá-nos uma medida da proporção da variação total que é obtida pelo modelo de regressão. Esta medida designamos por **coeficiente de determinação simples** (r^2).

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{SST}{SST} - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Voltemos ao exemplo 1:

$$r^2 = \frac{b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y}^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2} = \frac{2934 \times 21600 - 38.56 \times 640000 - 14 \times 1542.85^2}{39960000 - 14 \times 1542.85^2} = 0.809$$

Face a este valor ($r^2 = 0.809$) podemos concluir que existe uma correlação linear positiva forte entre as variáveis preço de venda do automóvel e a respetiva quilometragem.

4.3 Modelo de Regressão Linear Múltipla

Neste subcapítulo iremos usar a abordagem de Cadima e Silva (2008).

Suponhamos que dispomos de um conjunto de observações $\{(x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{p(i)}, y_i)\}_{i=1}^n$ e que pretendemos estudar a relação entre a variável resposta (Y , dependente e única) e as variáveis preditoras (X_1, X_2, \dots, X_p , englobando duas ou mais variáveis independentes).

Se admitirmos que os valores esperados de Y são dados como a combinação linear (afim) das p variáveis preditoras, iremos ter a seguinte equação

$$E[Y|(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p)] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p \quad (3)$$

Vejam a representação gráfica da nuvem de pontos para $p=2$, e do respetivo subespaço^o. Neste caso, $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$

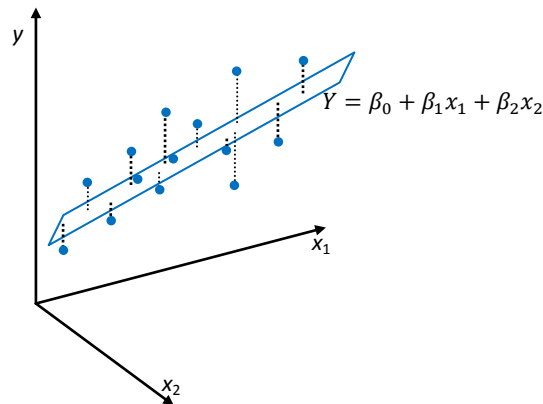


Figura 4. 6-Nuvm de ponto e plano de regressão (subespaço) com $p=2$ (retirado de Cadima e Silva (2008))

^o $W \neq \emptyset$ é um **subespaço** de \mathbb{R}^p quando, $w \subseteq \mathbb{R}^p$, e as operações de \mathbb{R}^p se mantêm invariantes em W .

Podemos observar que a abordagem geométrica apresenta algumas limitações. Uma delas é que só o podemos fazer para $p \leq 2$; uma outra é que, por vezes, a representação dos n pontos – um por cada indivíduo observado – não é de visualização fácil.

Dada a impossibilidade de representar geometricamente uma nuvem de pontos para os casos de $p > 2$, pode-se usar uma outra abordagem, que consiste em considerar gráficos de visualizações parciais. Para poder fazer tais gráficos, consideram-se as projeções ortogonais da nuvem de pontos em cada plano de coordenadas de \mathbb{R}^{p+1} . Considere-se o seguinte exemplo, com base em 150 observações de lírios considerando 4 variáveis: comprimento das sépalas; largura das sépalas; comprimento das pétalas; largura das pétalas.

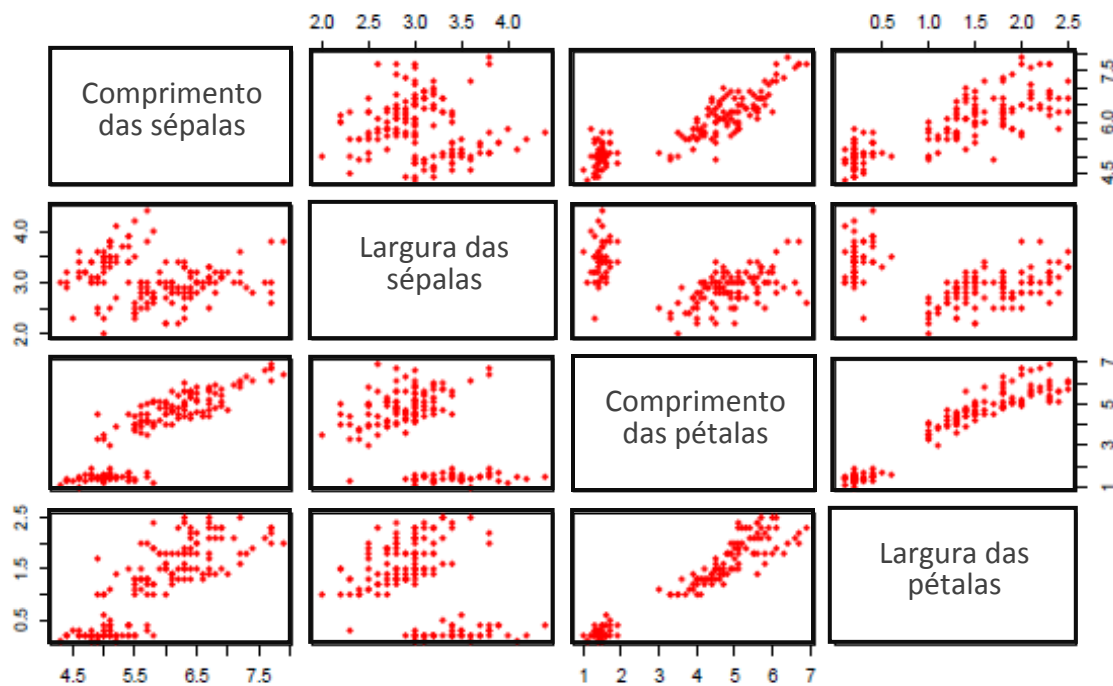


Figura 4. 7-Gráficos de visualizações parciais (adaptado de Cadima e Silva (2008))

No entanto, esta abordagem apresenta a limitação de não se poder verificar a hipótese de linearidade, isto é, não há a possibilidade de verificar se os pontos se dispersam em torno de um hiperplano^p.

A regressão linear múltipla apresenta alguns pressupostos (tal como na RLS) que são os seguintes:

- As variáveis independentes x_j são não aleatórias;
- Para cada conjunto de valores de x_j existe uma subpopulação de valores de Y , que tem distribuição normal. (o que facilita a construção de intervalos de confiança e a realização testes de hipótese);
- As variâncias das subpopulações de Y são iguais;
- Os valores dos diferentes conjuntos Y são independentes, isto é, cada subconjunto de valores de Y obtido a partir de um determinado conjunto de x_j , é independente dos valores de Y obtidos de outro conjunto de valores de x_j .

A equação do hiperplano (3), dado que é um plano ajustado à nuvem de pontos, pode ser apresentada do seguinte modo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_{p(i)} x_{p(i)} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n \quad (4)$$

A equação (3) pode ser representada por um sistema de equações:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(1)} + \beta_2 x_{2(1)} + \dots + \beta_{p(1)} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(2)} + \beta_2 x_{2(2)} + \dots + \beta_{p(2)} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(n)} + \beta_2 x_{2(n)} + \dots + \beta_{p(n)} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Para se proceder ao ajustamento deste modelo de regressão, é preferível expressar as operações matemáticas utilizando notação matricial. Como tal a equação (4) pode ser escrita na forma:

^p Dado um espaço de dimensão n , chamamos hiperplano a um plano de dimensão $n-1$.

$$Y = \beta X + \varepsilon, \text{ onde}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \dots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & & x_{p(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \dots & x_{p(n)} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

em que os elementos de cada linha da matriz X, à exceção do primeiro, correspondem às abcissas de um ponto em \mathbb{R}^{p+1} e os elementos da matriz Y correspondem às $p+1$ respetivas ordenadas.

Se trocarmos a função das linhas pela função das colunas, vamos ter cada coluna de X como sendo um vetor de \mathbb{R}^n (com n coordenadas), e Y um outro vetor em \mathbb{R}^n (também com n coordenadas) logo, cada um dos n eixos vai representar um indivíduo e cada vetor vai representar uma variável. Resumindo, cada um dos n eixos representa uma observação e cada vetor representa uma variável, a primeira coluna da matriz X (1_n) é também um vetor que origina a bissetriz do primeiro 2ⁿante de \mathbb{R}^n .

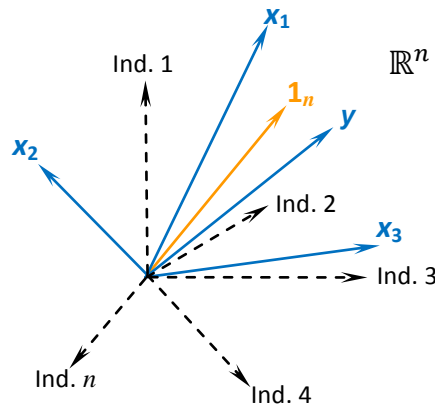


Figura 4. 8-Representação gráfica da matriz X e do vetor Y

(adaptado de Cadima e Silva (2008))

Através desta representação podemos retirar algumas conclusões:

- 1- Qualquer combinação afim das p variáveis preditoras pode escrever-se como combinação linear dos vetores $1_n, x_1, x_2, \dots, x_p$:

$$b_0 1_n + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p$$

- 2- Cada escolha possível de coeficientes $b = (b_0, b_1, \dots, b_p)$ é única, caso as colunas de X sejam linearmente independentes e corresponde a um ponto/vetor nesse subespaço.

- 3- O conjunto de todas as combinações lineares possíveis - $\mathcal{H}(X)$ - é o subconjunto de \mathbb{R}^n gerado pelos $p+1$ vetores $1_n, x_1, x_2, \dots, x_p$.

- 4- Um dos pontos/vetores do subespaço é a combinação linear dada pelo vetor de coeficientes $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$.

É esta combinação linear que queremos estimar. Para o podermos fazer, dado que existe um vetor de Y , tal que este não está contido em $\mathcal{H}(X)$, iremos construir um vetor $\hat{y} = b_0 1_n + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p$, contido em $\mathcal{H}(X)$ que será uma aproximação de y . Para realizarmos este processo, consideramos a projeção ortogonal de y sobre $\mathcal{H}(X)$ - $\hat{y} = Hy$.

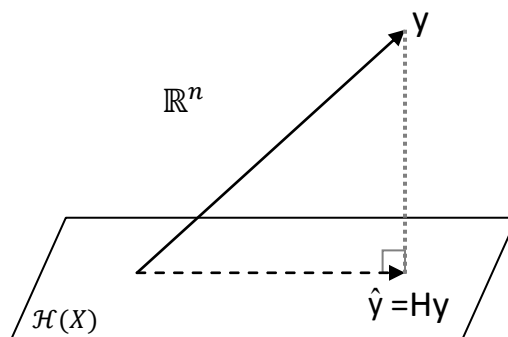


Figura 4. 9-Vetor \hat{y} que resulta de projetar ortogonalmente y sobre $\mathcal{H}(X)$
(adaptado de Cadima e Silva (2008))

Dada a construção do vetor \hat{y} , pretendemos minimizar a distância entre \hat{y} e o vetor das observações y , logo temos:

$$\|y - \hat{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = SQRE$$

Onde $y_i - \hat{y}_i$ são os resíduos e $SQRE$ indica a soma dos quadrados dos resíduos.

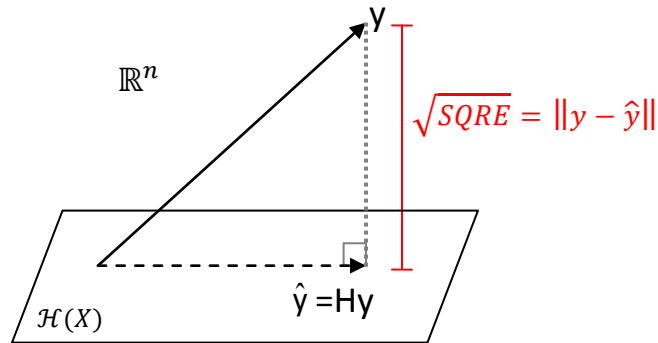


Figura 4. 10-Significado geométrico do conceito SQRE (adaptado de Cadima e Silva (2008))

Através da definição de projeção ortogonal do vetor $y \in \mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{H}(X)$ gerado pelas colunas linearmente independentes de X , sabemos que esta se faz multiplicando y pela matriz da projeção ortogonal do vetor y sobre $\mathcal{H}(X)$, com $H = X(X^tX)^{-1}X^t$. Então vamos ter:

$$\hat{y} = Hy \Leftrightarrow \hat{y} = X(X^tX)^{-1}X^ty$$

Logo, podemos concluir que $b = (X^tX)^{-1}X^ty$.

Exemplo 2: Pretende-se investigar a utilização de um modelo de regressão linear múltiplo para se tentar explicar a variação da viscosidade de um polímero (Y) em

função da temperatura de reação, x_1 , e da taxa de alimentação do catalisador, x_2 . Realizando-se uma experiência, para os diferentes valores de x_1 e x_2 , obtiveram-se os valores de Y que se apresentam na tabela 4.3.

Tabela 4. 3-Variação da viscosidade de um polímero em função da temperatura de reação e da taxa de alimentação do catalisador

Observação nº	Viscosidade (y)	Temperatura (x_1 , °C)	Catalisador (x_2 , lb/h)
1	2256	80	8
2	2340	93	9
3	2426	100	10
4	2293	82	12
5	2330	90	11
6	2368	99	8
7	2250	81	8
8	2409	96	10
9	2364	94	12
10	2379	93	11
11	2440	97	13
12	2364	95	11
13	2404	100	8
14	2317	85	12
15	2309	86	9
16	2328	87	12

Para ajustar o modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ é necessário estimar os coeficientes de regressão. Sabemos que $\hat{\beta} = b = (X^t X)^{-1} X^t Y$, logo obtemos

$$X^T X = \begin{bmatrix} 16 & 1458 & 164 \\ 1458 & 133560 & 14946 \\ 164 & 14946 & 1726 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 14,1760004 & -0,129746 & -0,223453 \\ -0,129746 & 1,429184 \times 10^{-3} & -4,763947 \times 10^{-5} \\ -0,223453 & -4,763947 \times 10^{-5} & 2,222381 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 37577 \\ 3429550 \\ 385562 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1566,07777 \\ 7,62129 \\ 8,58485 \end{bmatrix}$$

Podemos assim concluir que o modelo de regressão será:

$$y = 1566,0777 + 7,6213x_1 + 8,5848x_2$$

Usando esta equação podemos estimar alguns valores de Y. Sejam, por exemplo, 80 e 8, os valores para a primeira observação ($x_{11} = 80$ e $x_{12} = 8$). Então temos que o valor ajustado vai ser:

$$\hat{y}_1 = 1566,0777 + 7,6213x_{11} + 8,5848x_{12} = 2244,46$$

Deste modo, podemos concluir que o resíduo para a primeira observação é $e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = 11,54$. Logo, utilizando este processo, podemos construir uma tabela para esta e para as restantes 15 observações.

No entanto, falta-nos saber agora, se a aproximação obtida tem “qualidade” ou não. Para tal, comecemos por definir alguns conceitos extremamente importantes:

- Soma dos quadrados dos resíduos:

$$SQRE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- Soma dos quadrados:

$$SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2$$

- Soma dos quadrados totais:

$$SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2$$

Dado que o Teorema de Pitágoras se pode aplicar a qualquer espaço euclidiano, temos:

$$\|y\|^2 = \|\hat{y}\|^2 + \|y - \hat{y}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$SQT = SQR + SQRE$$

Considere-se o **vetor centrado** das observações da variável resposta, y^c . Temos que $y^c = y - (\bar{y}) \cdot 1_n$ e assim:

$$\|y^c\|^2 = \|y - (\bar{y}) \cdot 1_n\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = SQT$$

Por outro lado, a projeção ortogonal do vetor y^c sobre $\mathcal{H}(X)$ gera o vetor

$$\begin{aligned}
 Hy^c &= H(y - (\bar{y}) \cdot 1_n) \\
 \Leftrightarrow Hy^c &= Hy - (\bar{y}) \cdot H1_n \\
 \Leftrightarrow Hy^c &= \hat{y} - (\bar{y}) \cdot 1_n
 \end{aligned}$$

Portanto $\|Hy^c\| = \sqrt{SQR}$

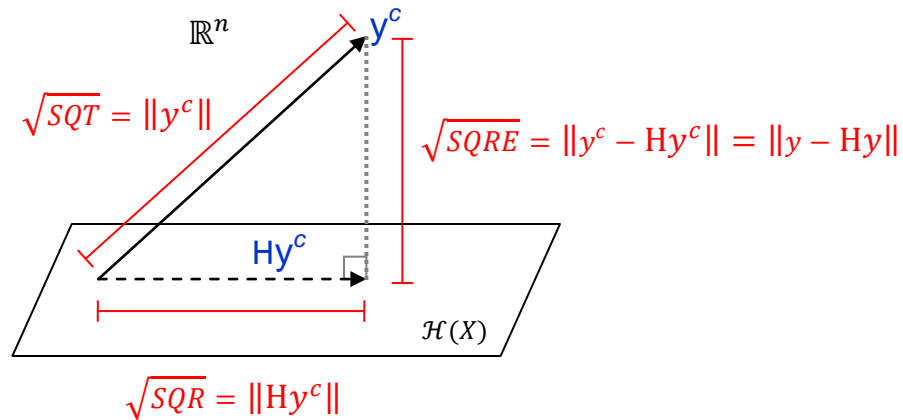


Figura 4. 11-- Significado geométrico dos conceitos SQT, SQR e SQRE (adaptado de Cadima e Silva (2008))

Para podermos determinar a qualidade da estimação vamos ter em conta o ângulo formado entre y^c e a sua projecção ortogonal sobre $\mathcal{H}(X)$, Hy^c . Assim definimos como **coeficiente de determinação** associado à regressão, como sendo:

$$\cos^2(\theta) = \frac{SQR}{SQT} = R^2 \text{ onde } \theta \text{ é o ângulo entre os vetores } y^c \text{ e } Hy^c.$$

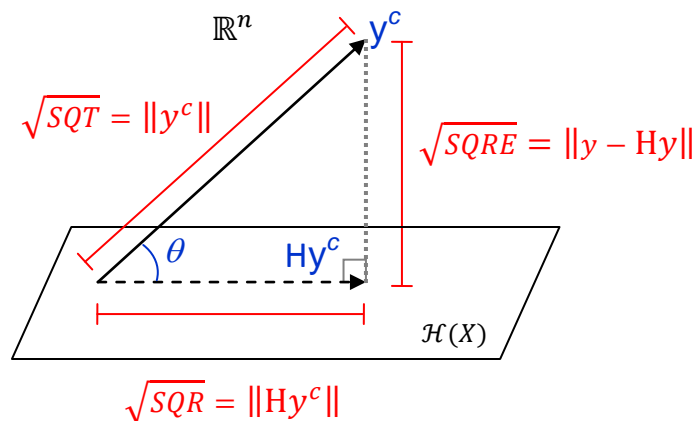


Figura 4. 12-- Significado geométrico do coeficiente de determinação (retirado de Cadima e Silva (2008))

Através da observação da Figura 4.12 e da definição de coeficiente de determinação podemos retirar algumas conclusões:

- Os valores de r^2 estão compreendidos entre 0 e 1, inclusive;
- Quanto mais próximo de 1 estiver r^2 , menor o ângulo θ e portanto melhor o ajustamento;
- Se $r^2 \cong 0$, o vetor y^c é quase perpendicular ao subespaço $\mathcal{H}(X)$ e como tal o ajustamento tem pouca qualidade.

Como sabemos, modelos onde o valor de r^2 é elevado pode não implicar modelos fiáveis, dado que a adição de variáveis dependentes aumenta sempre o valor do coeficiente. Este aumento de r^2 pode não implicar que as mesmas (variáveis) sejam estatisticamente significativas.

Por este motivo, alguns investigadores preferem utilizar o coeficiente de determinação ajustado, $r_{ajust.}^2$. Esta medida é determinante do seguinte modo:

$$r_{ajust.}^2 = 1 - \frac{\frac{SQE}{n-p}}{\frac{SQT}{n-1}} = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p}\right)(1-r^2)$$

Ao contrário do que acontecia com o coeficiente de determinação (r^2), esta medida não aumenta sempre. Quando uma nova variável é adicionada ao modelo, esta só irá produzir uma redução suficientemente grande na soma dos quadrados do erro se compensar a perda do grau de liberdade. Na realidade ao adicionarmos mais variáveis ao modelo, podemos obter $r_{ajust.}^2$ menores e se a diferença entre r^2 e $r_{ajust.}^2$ for acentuada, então temos um bom indicador de que as variáveis incluídas no modelo não são estatisticamente significativas.

Continuação do exemplo 2: No exemplo 2 verificou-se a relação entre a viscosidade do polímero (y), a temperatura de reação (x_1) e a taxa de alimentação do catalisador (x_2), tendo-se concluído que a mesma poderia ser representada pelo modelo:

$$y = 1566,0777 + 7,6213x_1 + 8,5848x_2.$$

Queremos saber agora, se o modelo escolhido se ajusta aos dados e qual a percentagem de contribuição do modelo para a explicação da variação da viscosidade do polímero.

O valor do coeficiente de determinação múltiplo é dado por:

$$r^2 = \frac{SQR}{SQT} = \frac{44157,09}{47635,94} = 0,9270$$

Deste modo, podemos concluir que cerca de 92,7% da variação da viscosidade do polímero é explicada pelo modelo. Podemos também reparar que o valor de r^2 aumenta quando lhe é adicionada uma variável. Suponhamos que se considera a equação de regressão envolvendo apenas a viscosidade (y) e a temperatura (x_1). Obtemos então $r^2 = 0,85735$. Se adicionarmos ao modelo a variável taxa de alimentação do catalisador (x_2), iremos obter $r^2 = 0,9270$.

Apesar dos resultados obtidos para r^2 serem elevados, devemos utilizar o coeficiente de determinação ajustado.

$$r_{ajust.}^2 = 1 - \left(\frac{15}{13}\right) (1 - 0,92697) = 0,9157.$$

Para determinarmos o “melhor modelo” devemos calcular o “peso” que cada variável independente exerce no mesmo.

Numa primeira abordagem, podemos recorrer aos coeficientes de determinação parcial. Para tal, consideram-se as regressões lineares simples entre a variável dependente e as diferentes variáveis independentes e determinam-se as mesmas e os respetivos coeficientes de determinação. Ficaríamos assim a saber a percentagem de

contribuição de cada variável dependente embora esta seja calculada sem ter em conta as outras variáveis (dando-nos assim uma visão que pode ser enviesada).

Antes de podermos realizar comparações entre modelos vamos definir o conceito de Quadrado Médio Residual (*QMRE*) numa *RLM* como:

$$QMRE = \frac{SQRE}{[n - (p + 1)]}$$

4.3.1 Comparação de modelos e submodelos

Embora se possa melhorar um modelo adicionando-lhe variáveis independentes, pelo princípio de parcimónia, intuitivamente sabemos que deve existir um equilíbrio entre o número de parâmetros e a capacidade preditiva do modelo. Ao adicionarmos a um modelo um número excessivo de variáveis, podemos gerar um sobreajustamento dos dados e, caso contrário, um modelo com poucos parâmetros pode gerar um subajustamento.

Se dispusermos, por exemplo, de um modelo de Regressão Linear Múltipla, como o indicado a seguir

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5, \quad (\mathbf{M})$$

um submodelo, é constituído por um modelo de regressão linear múltipla contendo apenas algumas das variáveis preditoras. Por exemplo, o modelo (\mathbf{M}') é um submodelo possível de (\mathbf{M}).

$$Y = \beta_0 + \beta_2 x_2 + \beta_5 x_5 \quad (\mathbf{M}')$$

Podemos identificar o submodelo pelo conjunto das variáveis preditoras, \mathcal{L} , que pertencem ao submodelo. No exemplo (\mathbf{M}'), temos que $\mathcal{L} = \{2,5\}$. Podemos assim

concluir que se $\beta_j = 0, \forall x_j$ tal que $j \notin \mathcal{L}$, então o modelo e o submodelo são idênticos.

Face à necessidade de termos que comparar se um modelo difere significativamente de um seu submodelo, é necessário utilizar um teste estatístico:

$$H_0: \beta_j = 0, \forall j \notin \mathcal{L} \text{ vs } H_1: \exists j \in \mathcal{L}: \beta_j \neq 0$$

Se negarmos H_0 então o submodelo é pior, caso contrário o submodelo é bom e como tal deve-se escolher o mesmo em vez do modelo inicial.

Para podermos saber se rejeitamos a hipótese nula, ou não, temos que aplicar a seguinte estatística de teste, admitido que o submodelo tem k preditores:

$$F = \frac{(SQRES - SQREC)/(p-k)}{SQREC/[n-(p+1)]} \cap F_{p-k, n-(p+1)} \text{ sob } H_0$$

O índice C é referente ao modelo completo. Por outro lado, o índice S é referente ao submodelo.

Dado o nível de significância de teste γ , rejeitamos H_0 se $F_{calc} > f_{\gamma[p-k, n-(p+1)]}$, onde sob H_0 a estatística F possui distribuição F-Snedecor com $(p-k)$ e $(n-p-1)$ graus de liberdade.

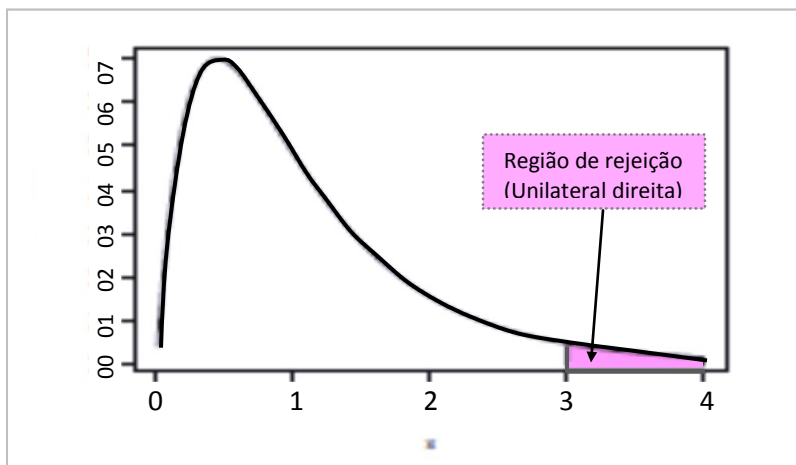


Figura 4. 13-Gráfico da função distribuição F e região de rejeição do teste (retirado de Cadima e Silva (2008))

Dada a complexidade do cálculo, utiliza-se uma expressão alternativa para a estatística do teste F parcial, que permite comparar um modelo completo com p preditores, e um seu submodelo com apenas k preditores, com $k < p$. Assim, podemos escrever a estatística do teste F de uma na forma alternativa:

$$F = \frac{n-(p+1)}{p-k} \times \frac{r_c^2 - r_S^2}{1-r_c^2}$$

Exemplo 3: Considerando os dados dos exemplos 2 e 3, pretendemos testar a significância do modelo $\hat{y} = 1566,08 + 7,62x_1 + 8,58x_2$, pressupondo a existência de uma relação linear entre as variáveis (relação esta, que é positiva e forte). Assim, a hipótese a testar é:

$$H_0: \beta_j = 0, \forall j \notin \{2\} \text{ vs } H_1: \exists j \in \{2\}: \beta_j \neq 0$$

Onde a estatística de testes é:

$$F \cong 6,5 \times 12,699 \cong 82,5 > f_{0,05}[2,13] = 3,81$$

Portanto, rejeita-se a hipótese nula H_0 , para $\alpha = 0,05$, ou seja, conclui-se com 95% de confiança que a viscosidade do polímero está linearmente relacionada com a reação da temperatura e com a taxa de alimentação do catalisador.

Agora, que já temos uma ferramenta que nos permite testar os submodelos, coloca-se outro desafio: como escolher um submodelo?

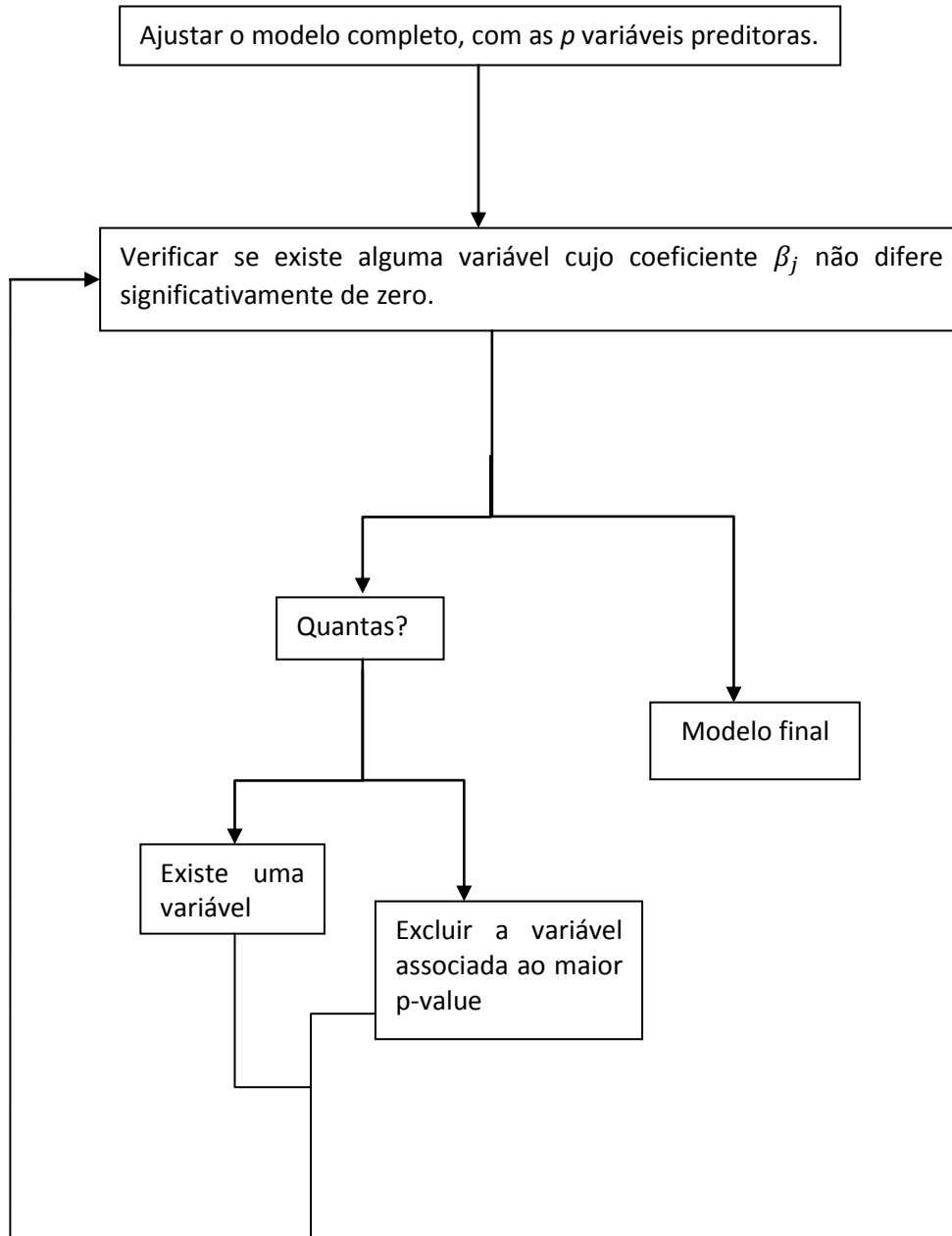
4.3.2 Escolha de submodelos

Dadas p variáveis preditoras, sabemos que o número de submodelos que existem é $2^p - 2$. Como tal, ao pretender-se verificar se um modelo é simplificável, não podemos usar métodos empíricos no caso em que p é um número elevado. Devemos também dar atenção aos coeficientes β , usados nos testes t , que são assumidos partindo do princípio que todas as restantes variáveis pertencem ao modelo, e como tal, não é viável optar pela exclusão de diversas variáveis preditoras em simultâneo. Deste modo, a melhor opção é usar algoritmos de pesquisa sequencial. Os algoritmos que vamos apresentar a seguir utilizam um processo iterativo para excluir ou incluir uma nova variável, até alcançar uma condição de paragem considerada adequada. Iremos abordar apenas três algoritmos, possíveis de utilizar no programa R:

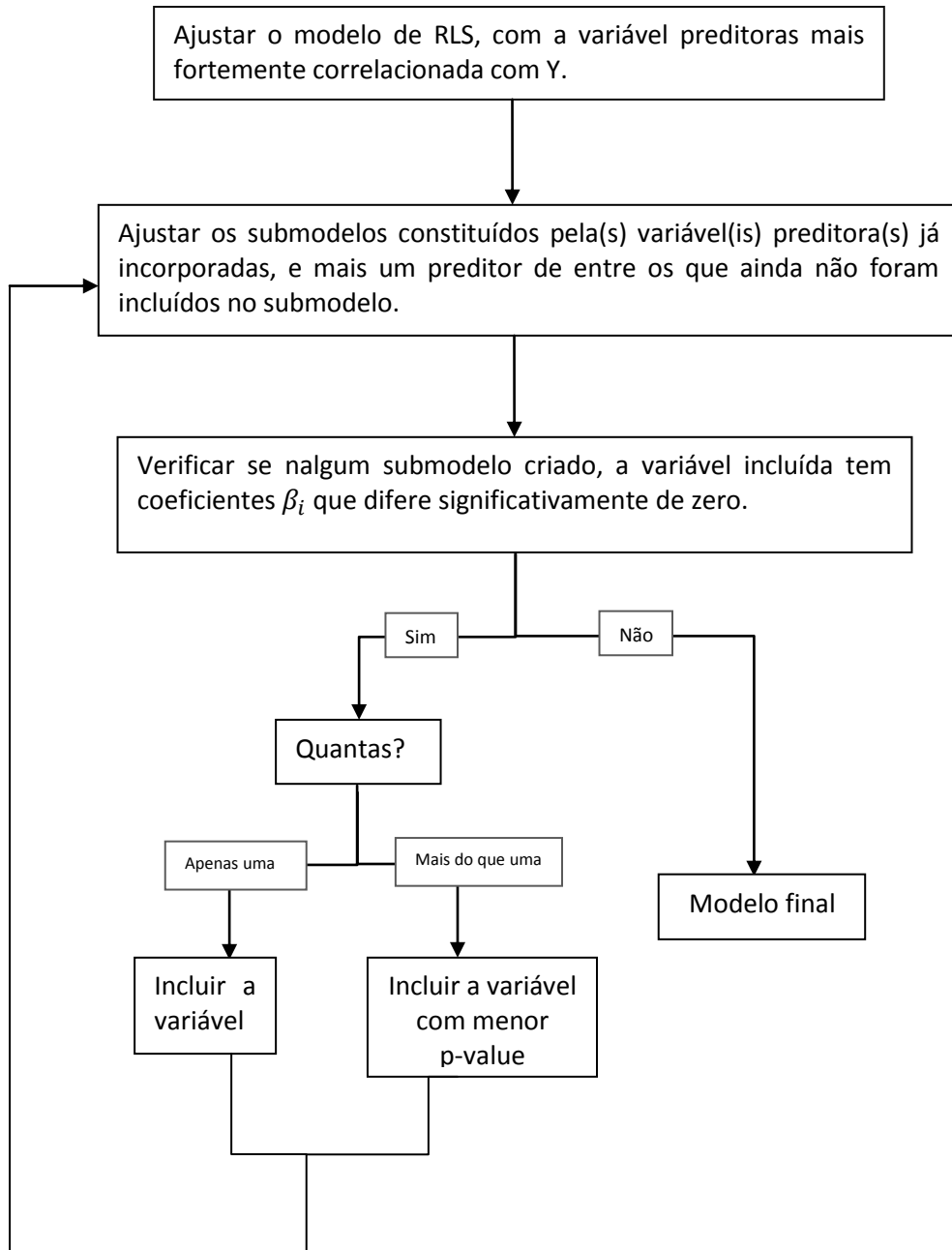
- Algoritmo de exclusão sequencial (backward elimination)
- Algoritmo de inclusão sequencial (forward selection)
- Algoritmos de exclusão/ inclusão alternada (stepwise selection)

Para cada um destes algoritmos iremos apresentar, de seguida, um fluxograma que o define.

1- Algoritmo de exclusão sequencial



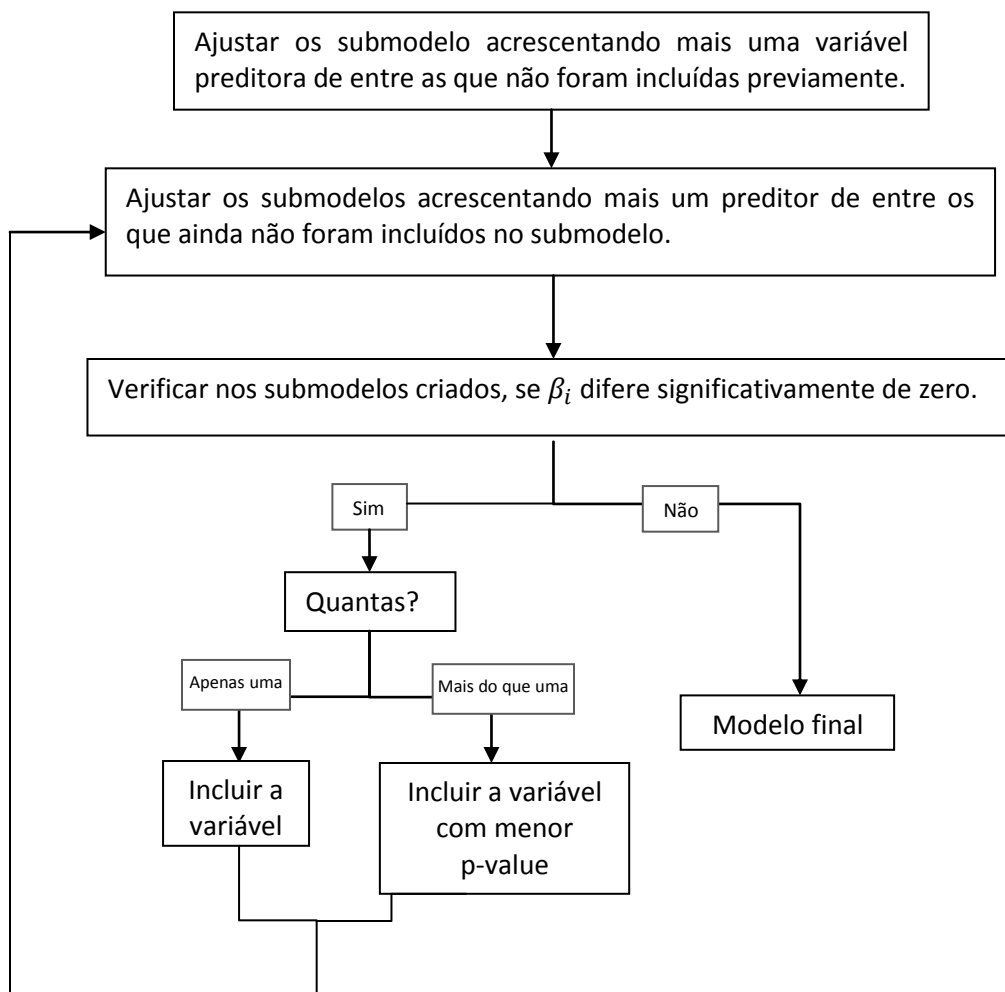
2- Algoritmo de inclusão sequencial



3- Algoritmos de exclusão/ inclusão alternada

Neste algoritmo é necessário definir uma direção de marcha (inclusão ou exclusão).

Veamos para o caso da direção ser por exclusão:



No caso de escolhermos a direção de marcha de inclusão invertemos o procedimento.

Nos modelos sequenciais pode-se escolher diferentes implementações. Uma das funções disponibilizadas pelo programa R para automatizar pesquisas sequenciais de submodelos é o AIC (Critério de Informação de Akaike). Dada uma regressão linear múltipla, baseado em k variáveis preditoras, o AIC pode definir-se do seguinte modo:

$$AIC = n \cdot \log \left(\frac{SQRE_k}{n} \right) + 2(k + 1)$$

O submodelo que tiver o AIC mais baixo é considerado o melhor modelo. Uma vez que o modelo de exclusão, e/ou inclusão, baseado no AIC é semelhante ao baseado nos testes t, podemos constatar que a diferença entre estes dois testes (t e AIC) reside apenas no critério de paragem, de resto ambos os testes coincidem na ordem das variáveis a excluir.

Apesar das considerações feitas, devemos ter sempre em conta que não existe um algoritmo de pesquisa sequencial que permita identificar o “melhor submodelo”⁹, mas sim, apenas identificar um submodelo que se pressupõe ser bom.

4.3.3 Análise de Resíduos

Na construção dos modelos de regressão linear foram consideradas algumas hipóteses. Os pressupostos na criação do modelo foram:

- resíduos independentes;
- resíduos com médias zero;
- variância constante;
- resíduos normalmente distribuídos.

Esta última suposição é exigida na utilização dos testes F.

⁹ Em situações onde o número de submodelos for relativamente baixo podemos usar no R o pacote `glmulti`.

Devemos salientar que mesmo depois de verificarmos os pressupostos, o modelo pode não ser adequado, pois apenas podemos afirmar que o modelo pode ser plausível com base nos dados.

O método de análise dos resíduos baseia-se na ideia de expressar as diferenças entre aquilo que foi realmente observado e o que foi estimado tendo por base a seguinte equação de regressão:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Onde os y_i são os valores observados e os \hat{y}_i os valores ajustados (estimados) usando a equação de regressão.

A análise dos resíduos permitirá avaliar a necessidade de incluir/excluir novos termos ao modelo, para além de verificar se os erros têm uma distribuição normal com médias zero e variância constante.

Análise dos resíduos – Analiticamente.

Para resolvermos o primeiro desafio de inferir sobre a normalidade dos erros, podemos utilizar (dependendo do valor de n) os testes de Kolmogorov – Smirnov.

Os n resíduos devem ter um comportamento semelhante às n observações, e como tal, devem ter uma distribuição normal, com médias zero e variância σ^2 . Ao estandardizarmos os resíduos temos:

$$d_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Com $\hat{\sigma} = \sqrt{MQ_E}$. Podemos concluir que se os erros forem normalmente distribuídos, então 95% dos resíduos pertencem ao intervalo $[-2, 2]$, dado que a variância dos mesmos se aproxima de 1.

Desta maneira podemos detetar outliers, isto é, resíduos muito afastados dos extremos do intervalo. Devemos ter em conta que ao detetarmos outliers, estes podem ter sido originados por um incorreto registo dos dados, por erros da própria natureza dos dados, ou por outras situações.

Análise dos resíduos – Gráficos de diagnósticos baseados nos resíduos.

A maneira mais simples de analisar os resíduos é através da representação gráfica, e será esta maneira que iremos usar no decurso deste estudo. Deste modo podemos avaliar a validade dos pressupostos sobre os erros aleatórios utilizando os gráficos de resíduos, em particular:

- Gráfico de E_i vs \hat{y}_i :
O padrão de dispersão dos pontos dispõe-se em banda horizontal, centrado em torno do valor zero.
- QQ-plot dos resíduos:
Se os pontos se dispuserem em torno de uma reta, os erros têm uma distribuição normal.
- Gráfico de resíduos versus ordem de observação:
Serve para investigar eventuais faltas de independência dos erros aleatórios.

Ao usarmos estes gráficos devemos ter em atenção possíveis problemas que possam surgir ao realizar estes diagnósticos. Por vezes, surgem problemas relativamente ao parâmetro da multicolinearidade, pelo facto das colunas da matriz X serem (quase)

linearmente dependentes. Esta situação acontece devido à instabilidade na inferência originada por grandes variâncias dos valores dos β_i .

Capítulo 5

Métodos Não Paramétricos

5.1 Definição de métodos não paramétricos

Quando tentamos avaliar a eficiência de uma dada empresa, estamos a considerá-la como um *Decision Making Unit* (DMU), isto é, estamos a avaliar a empresa, numa ocasião específica, em comparação com um conjunto de outras empresas, relativamente a alguns *inputs* e *outputs*.

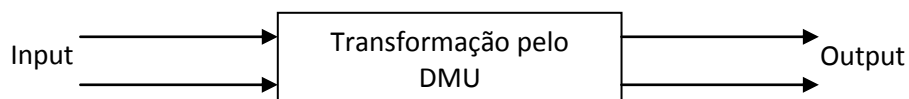


Figura 5.1-Representação esquemática do funcionamento do DMU
(adaptado de Fried, Lovell e Schmidt (2008))

Quando uma empresa (DMU) é tecnicamente eficiente, podem surgir duas situações:

- dada uma quantidade de fatores de produção (*inputs*) fixa não é possível aumentar os resultados (*outputs*);
- para uma dada quantidade de *outputs* não é possível diminuir o número de *inputs*.

Isto significa que, uma empresa é tecnicamente eficiente se for impossível reduzir a quantidade de *input*, sem reduzir a quantidade de *output*. Deste modo, quanto melhor for a utilização de recursos (*input*) no processo de produção, melhor será a eficiência.

Quando uma dada empresa é ineficiente, isso poderá advir do fracasso da construção do modelo ao não incluir, por exemplo, variáveis relevantes no mesmo.

Sendo assim, a medição da eficiência de uma empresa é baseada, antes de mais, na comparação entre esta e outras empresas semelhantes, relativamente ao desvio dos valores observados e à melhor produção possível de cada uma, também designada por **fronteira de produção eficiente**. Se a produção atual de uma firma se situa na fronteira, então a mesma é eficiente, caso contrário, é tecnicamente ineficiente.

A razão entre a produção atual e a produção potencial é designada por **nível de eficiência**.

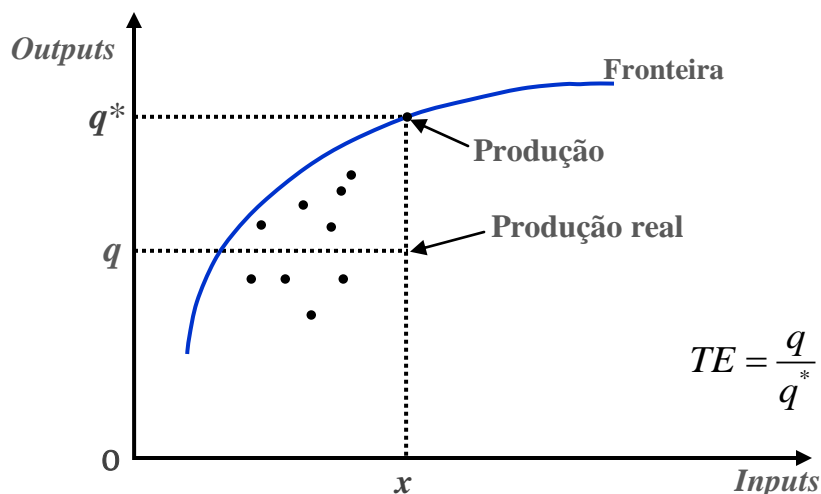


Figura 5.2-Representação do conjunto produção e da fronteira tecnológica (adaptado Pascoe, S.; Mardle, S. (2003))

A fronteira tecnológica é um conceito que descreve a produção máxima (*output*) que uma empresa eficiente pode produzir a partir de qualquer combinação de *inputs*, ao

longo de um período de tempo. Deste modo, podemos afirmar que na **eficiência técnica**^f significa que não há desperdício de recursos na produção.

Vejamos o seguinte exemplo, onde existem dois *inputs* (x_1 e x_2) e apenas um *output* (y_1). Na Figura 5.3. estão indicadas cinco empresas (A, B, C, D e E), onde podemos facilmente observar que a empresa E é mais eficiente que a empresa D, pois com a mesma quantidade de x_1 e uma menor quantidade de x_2 se produz exatamente a mesma quantidade de y_1 (valor fixo).

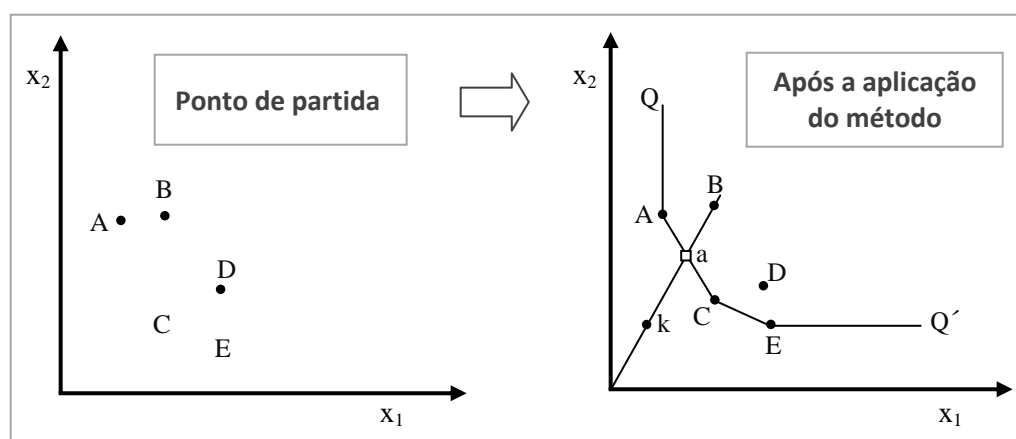


Figura 5.3-Illustração da forma de construir a fronteira
(adaptado de Pascoe, S.; Mardle, S.(2003))

Ao desenhar segmentos de reta (e semi-retas) entre os pontos mais próximos da origem do referencial, estamos a construir uma possível fronteira tecnológica, e por construção, as empresas A, C e D são obviamente mais eficientes^s. Estas representam as melhores práticas e podem servir de referência para as outras. Obviamente, o ponto k não pode representar nenhuma empresa dado que é tecnicamente inviável.

Podemos assim observar a existência de uma dupla forma de obter eficiência: Por um lado, podemos evitar o desperdício de recursos para produzir uma dada

^f Mede a intensidade dos desperdícios verificados no processo produtivo.

^s Um DMU presume-se inicialmente eficiente até que existam outros DMUs (que sejam seus pares) mais eficientes do que ele.

quantidade de *output* (*input-oriented evaluation*), por outro lado, podemos usar tão pouco *output* quanto possível para obter uma dada quantidade de *inputs* (*output-oriented evaluation*). Teremos como implicação direta desta situação, duas formulações matemáticas distintas para resolver o mesmo problema. Embora na literatura sejam referidas, na maioria das vezes, aplicações realizadas com base nos *inputs*, deve sempre avaliar-se as duas formulações para cada problema particular.

Acrescente-se também o facto de, ao tentarmos medir a ineficiência em sectores públicos, onde os mesmos desempenham um papel social e não lucrativo, existe uma dificuldade em definir o *output*, já que este não é um produto com um dado preço de mercado. A ausência de um ambiente lucrativo no sector da educação leva a que se considere apenas a eficiência técnica e não outros tipos de eficiência, como tal, não foram apresentados neste trabalho.

5.2 O porquê da utilização de métodos não paramétricos

Na escolha de um modelo que se ajuste ao nosso problema, temos que considerar diversas opções. Uma delas reside no facto de ponderarmos se o nosso modelo deve, ou não, incorporar uma medida que preveja erros aleatórios. Se assim for, as estimativas estocásticas impõem uma forma funcional explícita (temos que saber a expressão analítica da fronteira) e ter conhecimento do tipo de distribuição dos dados.

Na presente dissertação, o problema que vamos ter em causa consiste em estudar a eficiência educativa dos países da OCDE. Aparentemente poderíamos pensar que os resultados de desempenho nos *testes internacionais* estariam dependentes de um elemento estocástico (como, por exemplo, o fator sorte que é um elemento

incontrolável). No entanto, a agregação dos resultados obtidos nos testes ao longo de um período de tempo pode suavizar as flutuações derivadas do aleatório, havendo uma reduzida necessidade do uso de técnicas estocásticas (Pascoe, S.; Mardle, S. (Eds), 2003, p. 4).

Alguns autores têm utilizado modelos de regressão para analisar a importância da educação na sociedade. Essa abordagem tem a vantagem de quantificar a importância da educação através de uma expressão analítica. No entanto, um dos problemas que esta abordagem levanta é a obrigatoriedade de se considerar apenas um *output*. Outro problema que advém da aplicação de modelos de regressão consiste em sabermos, de forma clara, qual a correlação existente entre os *inputs*, e qual o peso de cada um. Face ao exposto, esta abordagem não permite medir a eficiência de cada país, mas tenta explicar o funcionamento de cada país. Sendo assim, esta metodologia poderá ser importante para definir as variáveis mais significativas e encontrar explicação para a eficiência da educação, de um dado país. Em contraste com a esta situação podem considerar-se métodos que não impõem qualquer suposição sobre a forma funcional. A escolha de métodos não paramétricos surge como uma boa opção, onde não só não se tem em consideração o erro aleatório, como também não existe a necessidade de descrever a fronteira analiticamente.

Podemos assim escolher entre métodos paramétricos e não paramétricos, consoante seja possível ou não definir, *à priori*, uma forma funcional. Entre os métodos mais aplicados temos o Data Envelopment Analysis (DEA) e o Free Disposable Hull (FDH), como métodos não paramétricos, enquanto os modelos de regressão e as fronteiras estocásticas (SFA) são métodos paramétricos.

Por sua vez, os métodos (quer sejam paramétricos ou não) podem ainda ser classificados em fronteira ou não fronteira em função de pressuporem, ou não, que as unidades de decisão (DMU) sejam tecnicamente eficientes. Deste modo temos que os modelos SFA, DEA e FDH constituem exemplo de métodos fronteiros, enquanto alguns modelos de regressão, por exemplo, OLS e COLS são métodos não

fronteiros. É evidente que esta classificação tem importância na validação dos resultados, como mostra a figura 5.4.

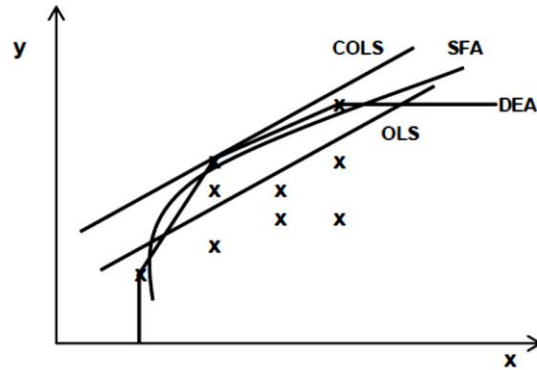


Figura 5.4-Representação de diferentes fronteiras obtidas usando diferentes métodos (adaptado de (Marques e Silva, 2006))

Resumindo, existem diferentes métodos para calcular a eficiência, havendo, portanto, diferenças significativas entre os mesmos. Os métodos não paramétricos para estimar a eficiência, não assumem uma forma funcional do conjunto de produção e também evitam descrever o comportamento probabilístico das observações de uma maneira restritiva.

5.3 Noções básicas

Começemos por formular matematicamente algumas noções básicas. O conjunto de produção, Ψ é definido por:

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{N+M} \mid x \text{ pode produzir } y\}$$

É evidente que este conjunto contém todos os DMU do problema, mas para além destes também contém outros possíveis DMU mesmo que não sejam observados.

Onde x é um vetor de *input* ($x \in \mathbb{R}_+^N$) e y é um vetor de *output* ($y \in \mathbb{R}_+^M$).

Assim, a fronteira do conjunto Ψ será:

$$\partial\Psi = \{(x, y) \in \Psi | (\theta x, y) \notin \Psi, \forall 0 < \theta < 1, (x, \lambda y) \notin \Psi, \forall \lambda > 1\},$$

sendo este conjunto designado por fronteira tecnológica, e dado pela intersecção de Ψ com o fecho do seu complementar ^t.

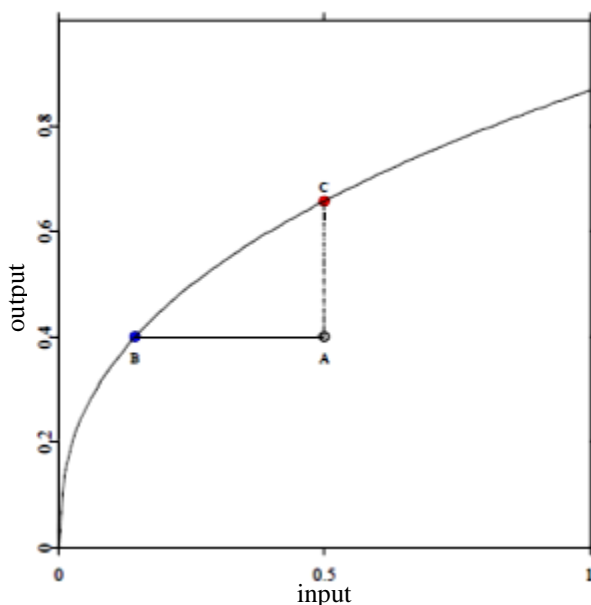


Figura 5.5-Representação do conjunto produção e da respetiva fronteira (retirado de Härdle e Jeong, (2005))

Deste modo podemos verificar visualmente que as empresas que são consideradas como ineficientes operam em pontos no interior de Ψ , enquanto as que são consideradas eficientes operam ao longo de $\partial\Psi$, ou seja, na fronteira tecnológica.

^t O fecho de um subconjunto S de W é o menor conjunto fechado de W que contém S .

O complementar de um subconjunto A de W é o conjunto A^c dos elementos de W que não pertencem a A .

Devido ao facto de podermos resolver estes problemas segundo uma abordagem de otimização do *input* (diminuindo o *input* de forma a manter ou aumentar o *output*), ou de otimização do *output* (aumentando o *output* de forma a manter ou diminuir o *input*) podemos reescrever o conjunto de produção, Ψ , tendo por base os requisitos de *input* necessários,

$$X(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^N | (x, y) \in \Psi\} \text{ onde } y \in \mathbb{R}_+^M$$

e por outro lado os *output* necessários,

$$Y(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^M | (x, y) \in \Psi\} \text{ onde } x \in \mathbb{R}_+^N$$

Vejamos, então, as seguintes figuras:

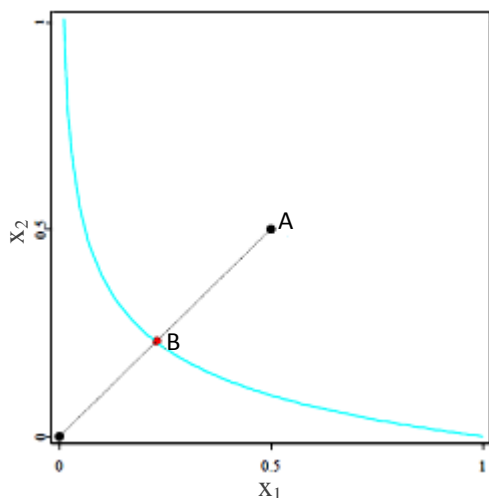


Figura 5.6- Conjunto $x(y)$, $p=2$

(adaptado de Hårdle e Jeong, 2005)

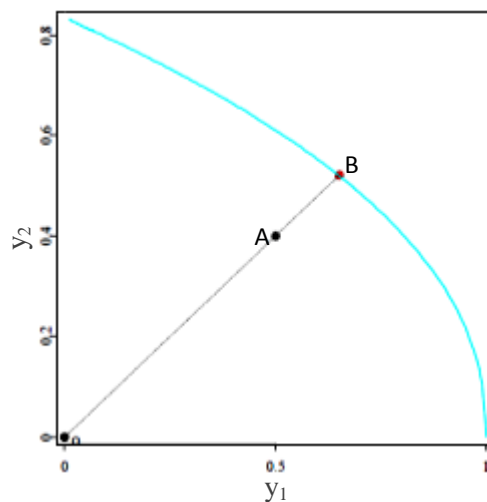


Figura 5.7- Conjunto $y(x)$, $q=2$

(adaptado de Hårdle e Jeong, 2005)

De maneira análoga podemos reescrever a fronteira tecnológica^u, definida pela fronteira técnica, i.e. o sucesso de uma empresa é dada pela produção máxima de *outputs* dado um determinado *inputs*, onde temos:

$$\partial X(y) = \{x | x \in X(y), \theta x \notin X(y), \forall 0 < \theta < 1\}$$

e

$$\partial Y(x) = \{y | y \in Y(x), \lambda y \notin Y(x), \forall \lambda > 1\}$$

Podemos agora definir a **medida de eficiência do input**, segundo Debreu-Farrell, para um dado ponto (x, y) , como sendo:

$$\theta(x, y) = \inf\{\theta | \theta x \in X(y)\} = \inf\{\theta | (\theta x, y) \in \Psi\} \text{ onde } \theta \in (0, 1]$$

Para determinar o nível de eficiência basta calcularmos:

$$x^\partial(y) = \theta(x, y)x,$$

em que $x^\partial(y)$ é a abcissa do DMU eficiente.

De modo semelhante podemos definir a **medida de eficiência do output**, segundo Debreu-Farrell, para um dado ponto (x, y) , como sendo:

$$\lambda(x, y) = \sup\{\lambda | (x, \lambda y) \in \Psi\} \text{ onde } \lambda \in [1, +\infty)$$

onde o nível de eficiência é:

$$y^\partial(x) = \lambda(x, y)y,$$

em que $y^\partial(x)$ representa a ordenada do DMU eficiente. Obviamente que se tivermos $\theta = \lambda$ então o DMU analisado é eficiente.

^u Não esquecer que existe apenas uma fronteira tecnológica, e não duas!

Resumindo, temos duas maneiras de definir a fronteira tecnológica: através da otimização do *input*, ou, através da otimização do *output*. Por outras palavras, dado um ponto (x, y) no interior do conjunto de produção Ψ , podemos obter eficiência técnica ao mover o ponto (x, y) para $(x^\partial(y), y)$, ou ao mover o ponto (x, y) para $(x, y^\partial(x))$, tal como está ilustrado na Figura 5.8.

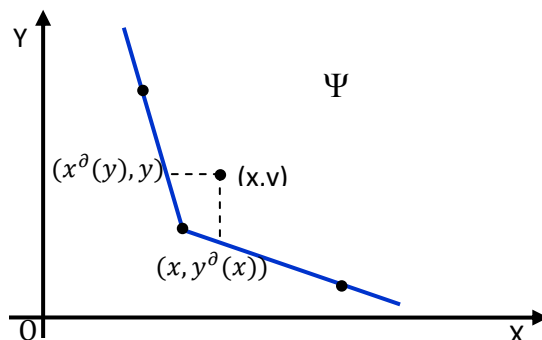


Figura 5.8-Representação de pontos de forma a definir a maior eficiência

Dado que o conjunto Ψ , para além dos conjuntos $X(y), Y(x), \partial X(y)$ e $\partial Y(x)$ são desconhecidos, apenas temos um conjunto que é conhecido – os dados. Definiremos então o conjunto dos dados da seguinte forma:

$$\chi_n = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$$

Os modelos que iremos trabalhar focam-se em modelos de fronteira determinista, onde todas as observações são assumidas como válidas e exequíveis, i.e., $p((x_i, y_i) \in \Psi) = 1$ (Simar e Wilson, 2002, p. 6).

Deste modo, é evidente que a desvantagem deste método é a sua sensibilidade a valores extremos, a pontos afastados ou a erros nas observações.

5.4 Método Free Disposable Hull

O método FDH é dos métodos mais usados na análise da eficiência de um conjunto de DMUs. Este método necessita de verificar dois pressupostos para poder ser aplicado:

Pressuposto 1:

$$p((x_i, y_i) \in \Psi) = 1$$

Pressuposto 2:

Quer os *inputs* quer os *outputs* têm que estar disponíveis livremente:

se $(x, y) \in \Psi$, então $\forall (x', y')$ tal que $x' \geq x$ e $y' \leq y$ temos $(x', y') \in \Psi$.

Verificados os pressupostos poderemos enunciar o algoritmo. Deste modo, o conjunto de produção estimado $\hat{\Psi}$, será um subconjunto de Ψ que verificará as seguintes condições:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{FDH} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{N+M} \mid y \leq y_i, x \geq x_i, (x_i, y_i) \in \chi_n\} \\ &= \bigcup_{(x_i, y_i) \in \chi_n} \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid y \leq y_i, x \geq x_i\}\end{aligned}$$

Sendo a sua interpretação geométrica a união de todas regiões para baixo e para direita de cada vértice (x_i, y_i) . Para melhor perceber o conceito observe-se a Figura 5.9.

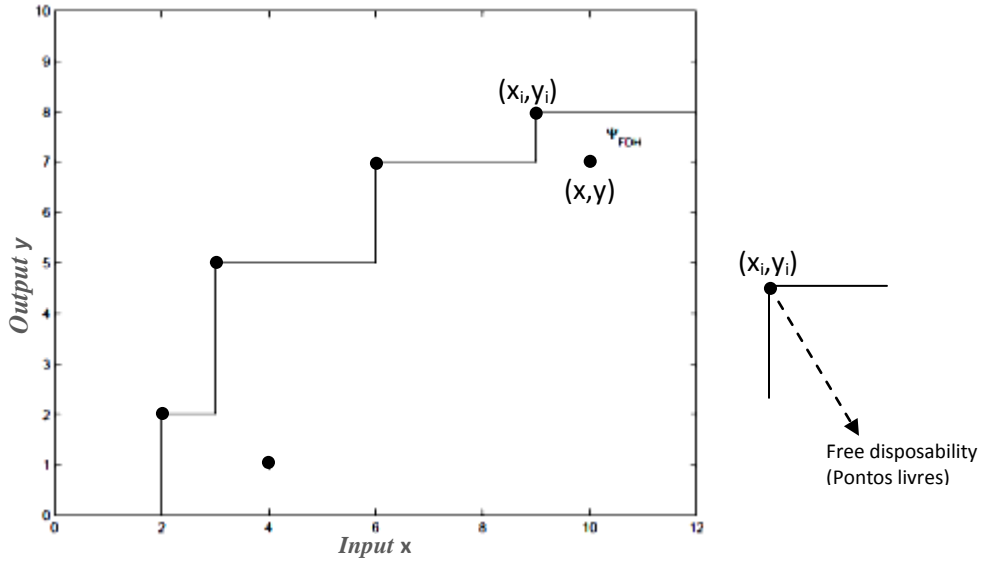


Figura 5.9-Construção do conjunto $\hat{\Psi}_{FDH}$
(retirado de Simar e Wilson (2008))

O respetivo estimador da eficiência em relação aos *inputs* para um dado ponto (x, y) é:

$$\theta_{FDH}(x, y) = \inf\{\theta \mid (\theta x, y) \in \hat{\Psi}_{FDH}\}$$

Assim, para podermos calcular este estimador, devemos fazer os seguintes passos:

- i. Definir o conjunto $D(x, y) = \{i \mid y_i \geq y, x_i \leq x, (x_i, y_i) \in \chi_n\}$;
- ii. Calcular:

$$\hat{\theta}_{FDH}(x, y) = \min_{i \in D(x, y)} \left\{ \max_{j=1, \dots, N} \left(\frac{x_i^j}{x^j} \right) \right\},$$

em que o nível de eficiência dos *inputs* é dado por:

$$\hat{x}^\theta(y) = \hat{\theta}_{FDH}(x, y)x$$

De maneira análoga, podemos definir os estimadores, usando o método FDH, numa abordagem de otimização dos *outputs*. Nesta situação, o estimador FDH de $\lambda(x, y)$ será definido por:

$$\hat{\lambda}_{FDH}(x, y) = \sup \{ \lambda | (x, \lambda y) \in \hat{\Psi}_{FDH} \}$$

Para resolver este problema de forma prática definimos o conjunto $D(x, y)$ e em seguida calculamos:

$$\hat{\lambda}_{FDH}(x, y) = \max_{i \in D(x, y)} \min_{j=1, \dots, N} \left(\frac{y_i^j}{y^j} \right),$$

em que o nível de eficiência segundo os *outputs* é:

$$\hat{\lambda}^\theta(x) = \hat{\lambda}_{FDH}(x, y)y$$

Exemplo:

Dado o conjunto das observações

$$\chi_3 = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) \right\}.$$

Podemos imediatamente concluir que $N=2$, $M=1$ e $n=3$.

Começamos por verificar a eficiência para cada um dos pontos e posteriormente indicar, se for o caso, a respetiva solução eficiente.

- Ponto $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right)$

$$D \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) = \{1\}$$

Optimização segundo o *Input*

$$\hat{\theta}_{FDH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) = \min_{i=1} \max_{j=1} \left(\frac{x_i^j}{x^j} \right) = 1 \quad (x_i = x)$$

$\therefore \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right)$ é o ponto eficiente

Optimização segundo o *Output*

$$\hat{\lambda}_{FDH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) = \min_{i=1} \max_{j=1} \left(\frac{y_i^j}{y^j} \right) = 1 \quad (y_i = y)$$

- Ponto $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right)$

$$D \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) = \{1, 2\}$$

Optimização segundo o *Input*

$$\hat{\theta}_{FDH} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) = \min_{i=1,2} \max_{j=1,2} \left(\frac{x_i^j}{x^j} \right) = \min_{i=1,2} \frac{x_i}{3} = \min \left\{ \frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{3}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}^{\theta} (15) = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

solução eficiente $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right)$

Optimização segundo o Output

$$\hat{\lambda}_{FDH} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) = \max_{i=1,2} \left\{ \frac{y_i}{15} \right\} = \max \left\{ \frac{15}{15}, \frac{15}{15} \right\} = 1$$

- Ponto $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right)$

$$D \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) = \{1,3\}$$

Optimização segundo o Input

$$\hat{\theta}_{FDH} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) = \min_{i=1,3} \max_{j=1,2} \left(\frac{x_i^j}{x^j} \right) = \min_{i=1,3} \max \left\{ \frac{x_i}{2}, \frac{x_i^2}{4} \right\} = \min \left\{ \frac{x_1}{3}, \frac{x_3}{3} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^\theta (2) = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

solução eficiente $\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}, 2 \right)$

Optimização segundo o Output

$$\hat{\lambda}_{FDH} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) = \max_{i=1,3} \left\{ \frac{y_i}{2} \right\} = \max \left\{ \frac{15}{2}, \frac{2}{2} \right\} = \frac{15}{2}$$

$$2^\theta \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = 15$$

solução eficiente $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 15 \right)$

Podemos organizar a seguinte informação:

Ponto	θ	Ponto eficiente	λ	Ponto eficiente
$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)$	---	$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)$	---	$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)$
$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15\right)$	$1/3$	$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)$	---	$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15\right)$
$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2\right)$	$1/3$	$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}, 2\right)$	$15/2$	$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 15\right)$

5.5 Método Data Envelopment Analysis

Um dos métodos mais populares para medir a eficiência é o DEA e tal como o nome indica este consiste em envolver os dados tanto quanto possível. A metodologia do método DEA utilizada neste trabalho diz respeito à introduzida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978). Esta metodologia, apesar de não ser paramétrica – não sendo conhecida uma forma funcional – assume a existência de uma fronteira de produção convexa, sendo a mesma construída usando métodos de programação linear (PL).

Um dos problemas que se levanta na elaboração do modelo a usar é se devemos assumir o efeito que a produção em escala tem na eficiência. Se assumirmos esse efeito no problema e existir proporcionalidade entre os *inputs* e os *outputs*, então teremos o atributo *constant returns to scale* (CRS)^v, caso contrário, teremos o atributo *variable returns to scale* (VRS)^w.

^v A função de produção apresenta retornos constantes de escala (CRS) se, ao alterarmos os *inputs* de maneira proporcional, o efeito nos *outputs* for também proporcional segundo esse fator. Se o efeito nos *outputs* não for proporcional, então dizemos que a função de produção apresenta retornos variáveis de escala (VRS).

^w Alguns autores introduzem também a característica *non-increasing returns to scale* (NIRS)

A Figura 5.10 aborda as diferenças geométricas (e de solução do problema) que esta temática levanta.

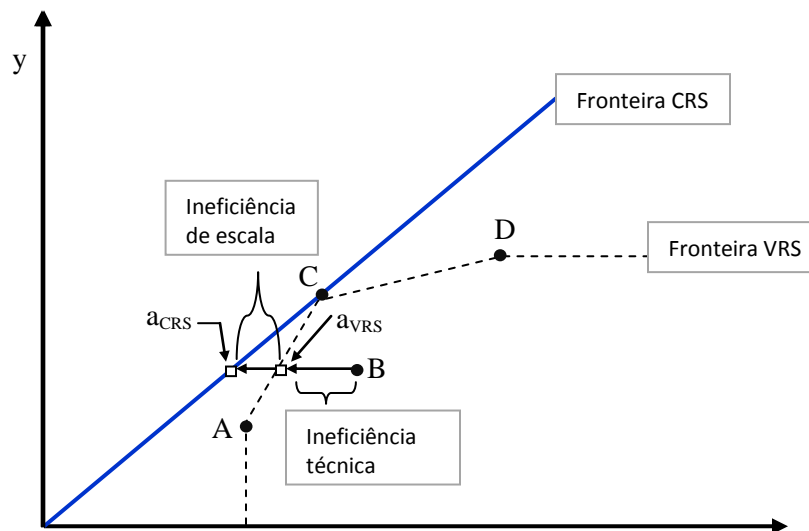


Figura 5.10-Representação da fronteira no caso de um input e um \bar{x} output
(adaptado de Pascoe, S.; Mardle, S. (2003))

Na figura, é ilustrado um problema com um *input* e com um *output* e quatro observações A, B, C e D. São indicadas também as duas fronteiras, uma obtida com base na existência de CRS e outra com base na existência de VRS. Podemos assim observar que o atributo VRS constrói a fronteira a partir de combinações convexas, por seu lado, o atributo CRS constrói a fronteira a partir de um único DMU e da sua combinação linear. Devemos também ter atenção que a fronteira gerada por VRS “envolve” melhor os dados do que a fronteira gerada por CRS (Fried, Lovell, & Schmidt, 2008, p. 48).

Assim, a medida de eficiência da empresa B, possuindo VRS, implica que o ponto B será comparado com o ponto a_{VRS} (ver Figura 5.10) que pertence à fronteira de VRS. Já a eficiência total teórica mostra a relação entre a produtividade máxima e a produtividade observada na empresa B. Deste modo o ponto a_{CRS} indica a quantidade de *inputs* necessários para que a empresa seja tecnicamente eficiente e opere à escala ótima.

Dado que o método DEA permite estimar a fronteira de produção, poderíamos fazê-lo no sentido de otimizar os *inputs* ou no sentido de otimizar os *outputs*. A solução

obtida em ambos os casos será a mesma, se estivermos a trabalhar com CRS, mas se estivermos a trabalhar com VRS, iremos obter duas soluções distintas.

5.5.1 Testes de retorno de escala

Iremos ver, de seguida, como aplicar testes de hipóteses de modo a identificar qual o tipo de retornos de escala que devemos usar na nossa análise.

Seja \mathcal{L} um conjunto definido por um cone convexo cujo vértice é a origem e $\Psi \subseteq \mathcal{L}$. Seja ainda $D(x, y)$ a função distância, para a otimização do *output*, definida por Shephard do seguinte modo:

$$D(x, y) = \inf \{ \beta > 0 \mid (x, \beta^{-1}y) \in \Psi \},$$

Então temos que:

- 1) $D(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in \Psi$.
- 2) Se $D(x, y) = 1$, então $(x, y) \in \partial\Psi$, i.e., (x, y) pertence à fronteira tecnológica.

Então, no caso da função produção ter atributo CRS, podemos definir a função distância pela expressão:

$$D^{CRS}(x, y) = \inf \{ \beta > 0 \mid (x, \beta^{-1}y) \in \mathcal{L} \}.$$

Considere-se agora o seguinte conjunto de pares de pontos:

$$\mathcal{L}^{NIRS} = \Psi \cup \{ (x, y) \mid (x, y) \notin \Psi, \text{ Se } (x, y) \in \mathcal{L}, \exists \lambda > 1 (\lambda x, \lambda y) \in \Psi \}$$

Analogamente, no caso da função produção ter atributo NIRS, podemos definir a função distância pela expressão:

$$D^{NIRS}(x, y) = \inf\{\beta > 0 | (x, \beta^{-1}y) \in \mathcal{L}^{NIRS}\}$$

Seja $\chi_n = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$ o conjunto dos dados. Então $\hat{\Psi}$ será o estimador de Ψ , assim como $\widehat{\partial\Psi}$ será o estimador de $\partial\Psi$.

Deste modo obtemos:

$$[\widehat{D}_n^{VRS}(x, y)]^{-1} = \max\{\beta | \beta y \leq Y\tau, x \geq X\tau, i\tau = 1, \tau \in \mathbb{R}_+^n\}$$

e

$$[\widehat{D}_n^{CRS}(x, y)]^{-1} = \max\{\beta | \beta y \leq Y\tau, x \geq X\tau, \tau \in \mathbb{R}_+^n\}$$

Onde $Y = [y_1 \dots y_n]$, $X = [x_1 \dots x_n]$, i é o vetor “identidade” com dimensão $(1 \times n)$ e $\tau = [\tau_1 \dots \tau_n]$ é o vetor de variáveis de intensidade com dimensão $(n \times 1)$.

Deste modo, podemos agora tentar definir a estatística de teste. Do ponto de vista prático, o que desejamos inferir é se $\partial\Psi$ tem o atributo CRS.

Logo, iremos ter:

Teste #1 H_0 : $\partial\Psi$ é globalmente CRS

vs.

H_1 : $\partial\Psi$ é VRS

Se H_0 for rejeitado, então deveremos fazer um segundo teste:

Teste #2 H_0 : $\partial\Psi$ é globalmente NIRS

vs.

H_1 : $\partial\Psi$ é VRS

Para testar o primeiro teste vamos indicar apenas um dos vários testes estatísticos que existem. Segundo Simar e Wilson (2002), o estimador S_1^{CRS} , que vamos apresentar de seguida, é um dos mais robustos.

Considere-se então:

$$\hat{S}_{1n}^{CRS} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{D}_n^{CRS}(x_i, y_i)}{\hat{D}_n^{VRS}(x_i, y_i)}$$

Se H_0 é verdadeira, então $D_n^{CRS}(x_i, y_i) = D_n^{VRS}(x_i, y_i), \forall i = 1, \dots, n$ e $S^{CRS} = 1$, caso contrário, $S^{CRS} < 1$. Como, por construção, $\hat{S}_{1n}^{CRS} \leq 1$, a hipótese nula, H_0 , deve ser rejeitada quando \hat{S}_{1n}^{CRS} é substancialmente inferior a 1.

No caso de H_0 ser rejeitada podemos fazer o segundo teste. Para tal, estima-se o valor de

$$\hat{S}_{1n}^{NIRS} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{D}_n^{NIRS}(x_i, y_i)}{\hat{D}_n^{VRS}(x_i, y_i)},$$

onde $[\hat{D}_n^{NIRS}(x, y)]^{-1} = \max\{\beta | \beta y \leq Y\tau, x \geq X\tau, i\tau \leq 1, \tau \in \mathbb{R}_+^n\}$.

Então podemos afirmar que, antes de aplicar o método DEA, devemos, primeiro, identificar o tipo de retorno de escala que temos presente, em seguida, identificar se a amostra em causa possui *outliers* e só posteriormente aplicar o algoritmo do DEA (o método DEA é sensível a *outliers*).

Um dos processos aplicados para detetar *outliers* é baseado num método que iremos apresentar no próximo subcapítulo – o método Order-m – e por isso não será apresentado nesta secção.

Começemos agora por abordar o método DEA usando a teorias dos conjuntos, para mais tarde verificarmos, que o método em causa pode ser formulado como um problema de PL.

Este método necessita de verificar três pressupostos para poder ser aplicado:

Pressuposto 1

$$p((x_i, y_i) \in \Psi) = 1$$

Pressuposto 2

Quer os *inputs* quer os *outputs* têm que estar disponíveis livremente:

Se $(x, y) \in \Psi$, então $\forall (x', y')$ tal que $x' \geq x$ e $y' \leq y$ temos $(x', y') \in \Psi$.

Pressuposto 3

Ψ tem que ser um conjunto convexo, isto é, se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Psi$ então $\alpha(x_1, y_1) + (1 - \alpha)(x_2, y_2) \in \Psi, \forall \alpha \in [0,1]$.

O estimador do conjunto de produção utilizando o método DEA é:

$$\hat{\Psi}_{CRS} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{N+M} \left| y \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i y_i; x \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \text{ tal que } \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right. \right\}$$

e o respetivo estimador da eficiência em relação aos *inputs*, é dado pela expressão:

$$\hat{\theta}_{CRS}(x, y) = \inf \{ \theta | (\theta x, y) \in \hat{\Psi}_{CRS} \}$$

Para efeitos práticos este estimador pode ser calculado do seguinte modo:

$$\hat{\theta}_{CRS}(x, y) = \min \left\{ \theta > 0 \left| y \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i y_i; \theta x \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \text{ tal que } \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right. \right\}$$

Por analogia, podemos definir os estimadores em relação aos *outputs*. Deste modo teremos:

$$\hat{\lambda}_{CRS}(x, y) = \sup\{\lambda | (x, \lambda y) \in \hat{\Psi}_{CRS}\} =$$

$$= \max \{ \lambda | \lambda y \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i y_i; x \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \text{ tal que } \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n \}$$

De forma análoga poderemos obter as expressões, dos estimadores do conjunto de produção e dos estimadores da eficiência em relação aos *inputs* e aos *outputs* para o VRS e o NIRS.

A Figura 5.11. ilustra um exemplo, onde as observações estão assinaladas por pequenas circunferências, a fronteira (real) está representada por uma linha a azul e a respetiva fronteira estimada está assinalada pela união de semi-rectas, vermelhas.

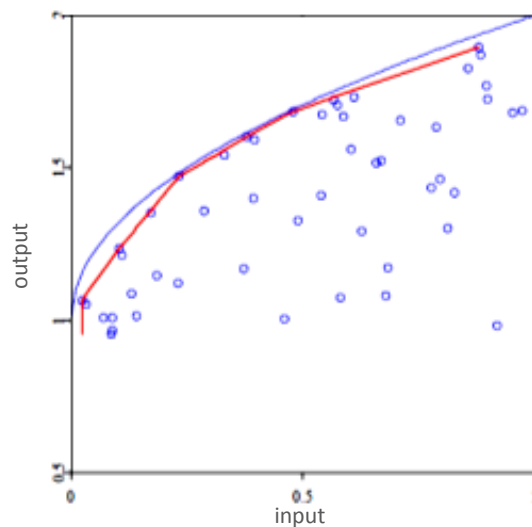


Figura 5.11-Simulação de DMUs e representação da fronteira (retirado de Härdle e Jeong (2005))

Tal como já foi referido acima, os problemas que usam o método DEA, podem ser formulados como problemas de programação linear. Suponhamos que existem n DMUs a serem avaliados (por exemplo, n países), onde cada DMU necessita de m *inputs* diferentes para produzir n *outputs* diferentes. A eficiência do $j^{\text{ésimo}}$ DMU, h_j , será medida à custa da razão entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs*:

$$h_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij}} = \frac{\text{soma ponderada dos outputs}}{\text{soma ponderada dos inputs}}$$

onde x_{ij} são os valores positivos observados da i -ésimo *input* do respetivo j -ésimo DMU e y_{rj} são os valores observados do r -ésimo *output* do respetivo j -ésimo DMU. O método de DEA pode ser assim apresentado como um problema de PL.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W_o = w_o \\ \text{s.a.} \quad & w_o x_{io} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^m \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, o \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Onde w_o é um escalar que pode ser interpretado como a distância da Farrell. A solução ótima do problema é o valor mínimo de w_o – que será sempre inferior ou igual a 1 – obtido quando multiplicamos w_o por x *inputs*. Esta é a redução máxima possível dos *inputs* para manter, pelo menos, o mesmo *output* (Pascoe, S.; Mardle, S. (Eds), 2003, p. 52).

Os métodos apresentados, FDH e DEA, apresentam algumas diferenças significativas. Embora ambos os métodos tenham como pressupostos a disponibilidade ilimitada de *output* e/ou *input* (podendo ou não usar todos os recursos disponíveis) e a existência de uma distribuição estatística, o método DEA exige também a convexidade do conjunto de produção, i.e., dadas duas observações, então todas as combinações lineares que se situam entre elas pertencem ao conjunto de produção. Mais se acrescenta, que o método FDH identifica a solução ótima para

cada observação ineficiente e não um conjunto de observações fictícias geradas por uma combinação linear, como faz do DEA.

Um dos aspetos que se deve salientar é que, em ambos os métodos, existem problemas ao nível da convergência para situações onde N e/ou M são valores elevados. O estimador FDH converge, com uma razão de convergência igual a $\frac{1}{n^{N+M+1}}$. Por sua vez, o estimador DEA converge com uma razão de convergência igual a $\frac{2}{n^{N+M+1}}$ (Fried, Lovell, & Schmidt, 2008, p. 440). Deste modo, o método FDH deve ser usado como um diagnóstico para verificarmos se é razoável aplicar o método DEA, dado que, se obtivermos um elevado número de observações na fronteira obtida pelo método FDH, esta poderá indicar problemas de dimensão (Fried, Lovell, & Schmidt, 2008, p. 441).

Exemplo:

Considerando o conjunto de dados

$$\chi_3 = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) \right\},$$

começemos por verificar qual o tipo de retornos de escala e posteriormente aplicar o método DEA, para cada um dos pontos $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right)$.

Por definição temos:

$$[D_3^{\wedge CRS}(x, y)]^{-1} = \max \left\{ \beta \mid \beta y \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, x \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (C1)$$

$$[D_3^{\wedge VRS}(x, y)]^{-1} = \max \left\{ \beta \mid \beta y \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, x \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix}, \tau_i = 1 \right\} \quad (C2)$$

Vamos agora substituir cada um dos pontos em (C1) e em (C2):

◆ Para o ponto $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)$ vamos ter:

$$\left[D_3^{ACRS} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)\right]^{-1} = \max \left\{ \beta \mid 15\beta \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix} \right\}$$

Como $\tau_i \geq 0, \forall i \in \{1,2,3\}$, temos $15\beta = 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3$.

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3 \\ \text{s.a.} & \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \leq 1 \\ & 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \leq 2 \\ & \tau_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{array}$$

Aplicando o método do Simplex^x, $15\beta = 15 \Leftrightarrow \beta = 1$.

Analogamente vamos ter:

$$\begin{aligned} & \left[D_3^{AVRS} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)\right]^{-1} = \\ & = \max \left\{ \beta \mid 15\beta \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix}, \tau_1 = 1 \right\}, \end{aligned}$$

Como $\tau_i \geq 0, \forall i \in \{1,2,3\}$, temos $15\beta - 15 = 15\tau_2 + 2\tau_3$.

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 15\tau_2 + 2\tau_3 \\ \text{s.a.} & 3\tau_2 + 3\tau_3 \leq 0 \\ & 6\tau_2 + 4\tau_3 \leq 0 \\ & \tau_i \geq 0, i = 2,3 \end{array}$$

Aplicando o método do Simplex, $15\beta - 15 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$

^x O software que usamos para aplicar o método simplex foi o LiPS versão 1.10.1

◆ Para o ponto $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15\right)$ vamos ter:

$$\left[D_3^{\wedge CR S} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15\right)\right]^{-1} = \max \left\{ \beta \mid 15\beta \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix} \right\}$$

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3 \\ \text{s.a.} & \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \leq 3 \\ & 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \leq 6 \\ & \tau_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{array}$$

Aplicando o método do Simplex, $15\beta = 45 \Leftrightarrow \beta = 3$.

Analogamente vamos ter:

$$\left[D_3^{\wedge VRS} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15\right)\right]^{-1} = \max \left\{ \beta \mid 15\beta \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix}, \tau_2 = 1 \right\}$$

Como $\tau_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$, temos $15\beta - 15 = 15\tau_1 + 2\tau_3$.

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 15\tau_1 + 2\tau_3 \\ \text{s.a.} & \tau_1 + 3\tau_3 \leq 0 \\ & 2\tau_1 + 4\tau_3 \leq 0 \\ & \tau_i \geq 0, i = 1, 3 \end{array}$$

Aplicando o método do Simplex, $15\beta - 15 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$

◆ Para o ponto $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2\right)$ vamos ter:

$$\left[D_3^{\wedge CR S} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2\right)\right]^{-1} = \max \left\{ \beta \mid 2\beta \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix} \right\}$$

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll}
 \max & 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3 \\
 \text{s.a.} & \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \leq 3 \\
 & 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \leq 0 \\
 & \tau_i \geq 0, i = 1,2,3
 \end{array}$$

Aplicando o método do Simplex, $2\beta = 30 \Leftrightarrow \beta = 15$.

Analogamente vamos ter:

$$\left[D_3^{\wedge VRS} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) \right]^{-1} = \max \left\{ \beta \mid 2\beta \leq 15\tau_1 + 15\tau_2 + 2\tau_3, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 4\tau_3 \end{bmatrix}, \tau_3 = 1 \right\}$$

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll}
 \max & 15\tau_1 + 15\tau_2 \\
 \text{s.a.} & \tau_1 + 3\tau_2 \leq 0 \\
 & 2\tau_1 + 6\tau_2 \leq 2 \\
 & \tau_i \geq 0, i = 1,2
 \end{array}$$

Aplicando o método do Simplex, $2\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$

Esquematizando os resultados obtidos, temos:

	$[D_3^{\wedge CRS}(\bullet)]^{-1}$	$[D_3^{\wedge VRS}(\bullet)]^{-1}$
$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right)$	1	1
$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right)$	1/3	1
$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right)$	1/15	1

Calculando, $S_{1,3}^{\wedge CRS} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \right] \simeq 0,45 \lll 1$ então podemos rejeitar H_0 .

Isso significa que os retornos de escala da função produção são VRS.

Por isso vamos poder aplicar o método DEA_{VRS} para cada um dos pontos $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15\right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2\right)$, tanto no sentido de otimização dos *inputs*, como no sentido de otimização dos *outputs*.

Apliquemos então:

➤ Para o ponto $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15\right)$ teremos:

Otimização ao nível do *input*

$$\begin{aligned} \theta_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) &= \\ &= \min \left\{ \theta \mid 15 \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, \begin{bmatrix} \theta \\ 2\theta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \\ 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \end{bmatrix}, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \right\} \end{aligned}$$

Como $\gamma_i \geq 0$, temos $2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 6\gamma_3 \geq 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3$, mas como pretendíamos calcular o mínimo, obtivemos $2\theta = 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3$.

Logo

$$\begin{aligned} \theta_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) &= \\ &= \min \{ \theta \mid 15 \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, \theta \geq \gamma_1 + 3\gamma_2 + 2\gamma_3, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \}. \end{aligned}$$

Passando o problema para PL

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma_1 + 3\gamma_2 + 2\gamma_3 \\ \text{s.a.} \quad & 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3 \geq 15 \\ & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \\ & \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

Aplicando o Simplex, obtemos o valor 1:

$$\theta \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) = 1$$

Mas $\theta \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) = 1 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right)$ é eficiente.

Otimização ao nível do *output*

$$\begin{aligned}\lambda_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) &= \\ &= \min \left\{ \lambda \mid 15\lambda \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \\ 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \end{bmatrix}, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \right\}\end{aligned}$$

Como $\gamma_i \geq 0$, temos $15\lambda = 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3$.

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll} \min & 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3 \\ \text{s.a.} & \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \leq 1 \\ & 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \leq 2 \\ & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \\ & \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, 3 \end{array}$$

Aplicando o Simplex, obtemos o valor 1:

$$\lambda \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) = 1$$

Mas $\lambda \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right) = 1 \Rightarrow \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right)$ é eficiente.

➤ Para o ponto $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right)$ teremos:

Otimização ao nível do *input*

$$\begin{aligned}\theta_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) &= \\ &= \min \left\{ \theta \mid 15 \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, \begin{bmatrix} 3\theta \\ 6\theta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \\ 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \end{bmatrix}, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \right\}\end{aligned}$$

Como $\gamma_i \geq 0$ e queremos o mínimo temos obviamente $6\theta = 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3$.

Portanto

$$\begin{aligned}\theta_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) &= \\ &= \min\{\theta \mid 15 \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, 6\theta \geq 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1\}\end{aligned}$$

Passando o problema para PL

$$\begin{aligned} \min \quad & 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \\ \text{s.a.} \quad & 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3 \geq 15 \\ & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \\ & \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

Aplicando o Simplex, obtenho o seguinte valor $6\theta = 2 \Leftrightarrow \theta = 1/3$

$$\theta \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \therefore \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) \text{ não é eficiente.}$$

Vamos agora calcular qual seria o ponto eficiente associado a $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right)$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}^\theta (15) = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O ponto eficiente é $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 15 \right)$.

Otimização ao nível do *output*

$$\begin{aligned}\lambda_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) &= \\ &= \min \left\{ \lambda \mid 15\lambda \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \\ 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \end{bmatrix}, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \right\}\end{aligned}$$

Como $\gamma_i \geq 0$ temos $15\lambda = 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3$.

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll}
 \min & 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3 \\
 \text{s.a.} & \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \leq 3 \\
 & 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \leq 6 \\
 & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \\
 & \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, 3
 \end{array}$$

Aplicando o Simplex, obtenho o seguinte valor 1:

$$\lambda \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) = 1$$

Mas $\lambda \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right) = 1 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, 15 \right)$ é eficiente

➤ Para o ponto $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right)$ teremos:

Otimização ao nível do input

$$\begin{aligned}
 \theta_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) &= \\
 &= \min \left\{ \theta \mid 2 \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, \begin{bmatrix} 3\theta \\ 4\theta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \\ 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \end{bmatrix}, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \right\}
 \end{aligned}$$

Como $\gamma_i \geq 0$ e queremos o mínimo $\frac{1}{3}\gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \leq \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 + \gamma_3$ temos obviamente $3\theta = \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3$.

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll}
 \min & \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \\
 \text{s.a.} & 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3 \geq 2 \\
 & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \\
 & \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, 3
 \end{array}$$

Aplicando o Simplex, obtenho o seguinte valor $3\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 1/3$.

Como $\theta \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) \neq 1 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right)$ não é eficiente.

Vamos agora calcular qual seria o ponto eficiente associado a $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right)$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^\theta (2) = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

O ponto eficiente é $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}, 2 \right)$.

Otimização ao nível do *output*

$$\lambda_{VRS} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) =$$

$$= \min \left\{ \lambda \mid 2\lambda \leq 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \\ 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \end{bmatrix}, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \right\}$$

Como $\gamma_i \geq 0$ temos $2\lambda = 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3$.

Passando o problema para PL

$$\begin{array}{ll} \min & 15\gamma_1 + 15\gamma_2 + 2\gamma_3 \\ \text{s.a.} & \gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 \leq 3 \\ & 2\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3 \leq 4 \\ & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \\ & \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, 3 \end{array}$$

Aplicando o Simplex, obtemos o seguinte valor:

$$\lambda \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right) = 15/2 \neq 1 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 15 \right) \text{ não é eficiente.}$$

Vamos agora calcular qual seria o ponto eficiente associado a $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 2 \right)$

$$2^\theta \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{15}{2} \times 2 = 15$$

O ponto eficiente é $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 15 \right)$.

5.6 Método de Order-m

Dado que os métodos apresentados, DEA e FDH apresentam problemas de “dimensionalidade” (para além de serem sensíveis a *outliers*) devemos, portanto, usar outro método nas situações em que tais problemas ocorram.

Esse novo método, designado por Order-m, foi desenvolvido por Léopold Simar, com a finalidade de resolver o problema dos *outliers*. É também um método não paramétrico, mas é mais robusto do que os que já utilizámos, não apresentando tantos problemas como aqueles. A sua robustez deve-se à construção da fronteira tecnológica que é realizada de forma parcial. Isto é, em vez de tentar estimar o valor absoluto mais baixo/elevado obtido segundo a otimização dos *inputs/outputs* para um dado *output/input*, este realiza a estimação para um número restrito das observações. Desta forma, analisa situações onde existam observações com valores despropositados, que nos métodos DEA/FDH poderiam ser considerados como DMU eficientes, mas nestes métodos serão considerados como *outliers* (com $\theta > 1$ ou $\lambda < 1$).

Outra das vantagens deste método, é que o mesmo tem com uma razão de convergência de \sqrt{n} . Desta forma, a razão de convergência não é influenciada pelo número de indicadores usados pelo investigador.

Começemos por introduzir um conceito extramente importante neste método - a noção de reamostragem. Todos os conceitos que iremos abordar a seguir foram obtidos de (Simar e Wilson, 2008).

A ideia da reamostragem (*bootstrap*) é a de aproximar a distribuição da amostra através da simulação ou imitação do *Data Generating Process* (DGP- Processo de geração de dados). Para aplicar este processo, a reamostragem terá que fornecer aproximações da amostragem de $\hat{\theta}(x, y) - \theta(x, y)$ ou $\hat{\theta}(x, y)/\theta(x, y)$.

O processo que iremos ilustrar abaixo será para o método DEA, mas o mesmo poderá ser realizado para o método FDH de forma análoga. Do mesmo modo, os

estimadores que analisaremos a seguir serão definidos segundo uma abordagem de otimização do *input*. No entanto, os mesmos também poderão ser definidos do ponto de vista do *output*.

Os dados χ_n são gerados por \mathcal{P} , onde

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Psi, f(x, y))$$

Seja $\hat{\mathcal{P}}(\chi_n)$ um estimador consistente tal que

$$\hat{\mathcal{P}}(\chi_n) = \mathcal{P}(\hat{\Psi}, \hat{f}(x, y))$$

Como \mathcal{P} , Ψ e θ são desconhecidos e apenas conhecemos o conjunto χ_n , temos que construir os estimadores $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\Psi}$ e $\hat{\theta}$.

Para o fazer, iremos considerar um novo conjunto $\chi_n^* = \{(x_i^*, y_i^*), i = 1, \dots, n\}$ que é construído a partir de $\hat{\mathcal{P}}$. Deste modo, podemos estimar o novo conjunto produção.

$$\hat{\Psi}^* = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid y \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i y_i^*; x \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i^* \text{ tal que } \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

E para um dado ponto fixo (x_0, y_0) temos:

$$\hat{\theta}^*(x_0, y_0) = \min \left\{ \theta > 0 \mid y_0 \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i y_i^*; \theta x_0 \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i^* \text{ tal que } \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

Assim temos que $\hat{\theta}(x_0, y_0)$ é o estimador de $\theta(x_0, y_0)$ com base na amostra χ_n gerada a partir de \mathcal{P} e $\hat{\theta}^*(x_0, y_0)$ é o estimador de $\hat{\theta}(x_0, y_0)$, com base na pseudo-amostra χ_n^* gerada a partir de $\hat{\mathcal{P}}(\chi_n)$. Se a reamostragem for consistente então

$$\left(\hat{\theta}^*(x_0, y_0) - \hat{\theta}(x_0, y_0) \right) | \hat{\mathcal{P}}(\chi_n) \sim \left(\hat{\theta}(x_0, y_0) - \theta(x_0, y_0) \right) | \mathcal{P}(\chi_n), \quad (\text{B1})$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{\hat{\theta}^*(x_0, y_0)}{\hat{\theta}(x_0, y_0)}\right) | \hat{\mathcal{P}}(\chi_n) \sim \left(\frac{\hat{\theta}(x_0, y_0)}{\theta(x_0, y_0)}\right) | \mathcal{P}(\chi_n)$$

onde o símbolo "|" significa "condicionado por" e o símbolo "~" significa "aproximado de".

Se o lado esquerdo de (B1) estiver disponível (através da simulação de Monte-Carlo), pode ser usado para disponibilizar propriedades usualmente obtidas a partir do lado direito de (B1).

Usando $\hat{\mathcal{P}}(\chi_n)$ para gerar B amostras, χ_{nb}^* de dimensão n (com $b = 1, \dots, B$) e aplicando o estimador original às pseudo amostras, origina um conjunto de B pseudo estimativas $\hat{\theta}_b^*(x, y)$. A distribuição empírica desta reamostragem fornece uma aproximação de Monte-Carlo à distribuição da amostra de $\hat{\theta}^*(x, y)$ condicionada por $\hat{\mathcal{P}}(\chi_n)$.

A qualidade destas aproximações está dependente do valor de B . Do ponto de vista prático devem escolher-se valores de B superiores ou igual a 2000 (para serem em número suficientemente grande).

Podemos agora introduzir o método Order- m , para o caso mais simples.

Para um dado nível de *outputs*, y , pertencentes ao interior do suporte Y , considere-se m variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i. i. d.)

$X_i, i = 1, \dots, m$ geradas pela função distribuição $F_{X|Y}(x|y)$ e defina-se o conjunto:

$$\Psi_m(y) = \{(x, y') \in \mathbb{R}^{p+q} | x \geq X_i, y' \geq y, i = 1, \dots, m\}$$

Então, para cada x , podemos definir

$$\tilde{\theta}_m(x, y) = \inf\{\theta | (\theta x, y) \in \Psi_m(y)\} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \max_{j=1, \dots, p} \left(\frac{x_i^j}{x^j} \right) \right\},$$

onde $\tilde{\theta}_m(x, y)$ é uma variável aleatória desde que X_i sejam variáveis aleatórias geradas por $F_{X|Y}(x|y)$.

A eficiência do estimador Order-m ao nível dos *inputs* pode ser definida por:

$$\theta_m(x, y) = E(\tilde{\theta}_m(x, y) | Y \geq y) = \theta(x, y) + \int_{\theta(x, y)}^{\infty} (1 - F_{X|Y}(ux|y))^m du$$

Devemos ter em atenção que o estimador poderá ter um valor superior a 1. Nesse caso, podemos tirar a conclusão que o DMU está a operar a um nível de eficiência superior à média dos seus pares gerados aleatoriamente a partir da subamostra de DMU com nível de *outputs* superior a y . Para poder determinar o nível mínimo de *inputs* fixando o *output*, basta calcular $x_m^{\partial}(y) = \theta_m(x, y)x$.

Capítulo 6

Estudo da Eficiência dos Países da OCDE

6.1 Descrição dos dados

Os dados utilizados no âmbito do estudo foram retirados de bases de dados da OCDE, UNESCO e UNDP tendo-se utilizado os referentes ao ano de 2009. Contudo, a base final apresentava dados em falta para uma parte dos indicadores, tendo-se optado por preencher os valores em falta pela média dos anos anteriores ou posteriores. Na Tabela 6.1 apresentam-se os países da OCDE e as respetivas siglas que foram utilizados neste estudo.

Tabela 6.1- Países da OCDE e suas respetivas siglas

País	Áustria	Austrália	Bélgica	Canadá	Suíça	Chile	República Checa
Sigla	AT	AU	BE	CA	CH	CL	CZ
País	Alemanha	Dinamarca	Estónia	Espanha	Finlândia	França	Grécia
Sigla	DE	DK	EE	ES	FI	FR	GR
País	Hungria	Irlanda	Israel	Islândia	Itália	Japão	Coreia do Sul
Sigla	HU	IE	IL	IS	IT	JP	KP
País	Luxemburgo	México	Países Baixos	Noruega	Nova Zelândia	Polónia	Portugal
Sigla	LU	MX	NL	NO	NZ	PL	PT
País	Suécia	Eslovênia	Eslováquia	Turquia	Reino Unido	USA	
Sigla	SE	SI	SR	TR	UK	US	

A Tabela 6.2 apresenta os indicadores que foram consideradas no estudo, as respetivas siglas, a sua descrição e ainda a página web de onde a informação foi retirada.

Tabela 6. 2-Indicadores, descrição, sigla e página web

Indicador	Sigla	Descrição	Página web
Percentagem da população entre 25 e 64 anos com pelo menos o secundário	PUS	- (2009)	http://www.oecd.org
Desempenho nos testes PISA	PISA	Média simples do desempenho nos testes PISA de Leitura, Matemática e Ciências. (2009)	http://www.oecd.org/
Produto Interno Bruto	PIB	PIB per capita em termos de PPP (constante Internacional 2005 \$) (2008)	http://hdr.undp.org
Salário dos professores	TS	Salário Anual dos professores do 3º ciclo após exercer a profissão durante 15 anos (2008)	http://www.oecd.org
Despesa por estudante	AE	Despesas anuais por aluno do ensino não superior incluindo os serviços básicos, serviços auxiliares e de I & D (2007)	http://www.oecd.org
Duração do ensino obrigatório	CE	Número de anos letivos obrigatórios (2008)	http://www.unesco.org
Razão entre o nº de alunos e professores	STS	Relação entre o nº de alunos do ensino secundário e o pessoal docente. (2008)	http://www.oecd.org
Esperança média de vida	EV	Esperança de vida ao nascer (em anos) (2008)	http://hdr.undp.org
Percentagem de estudantes cujos pais possuem baixos índices de escolaridade	PLL	- (2009)	http://www.oecd.org
Índice de saúde	HeL	Indicador composto por vinte e um fatores que refletem a acessibilidade aos cuidados de saúde, as instalações e a condição da população relativamente à saúde.	http://hdr.undp.org
Percentagem de população presa	PR	Número por 100 000 habitantes (2009)	http://www.oecd.org
Percentagem da população ativa empregada	ER	Percentagem da população em idade ativa (2008)	http://www.oecd.org
Índice Desenvolvimento Humano	HDI	Permite medir o desenvolvimento através da combinação de diferentes indicadores, tais como, esperança média de vida, nível educacional e rendimento. (2008)	http://hdr.undp.org

Registados os dados na base, procedeu-se ao seu tratamento estatístico construindo as bases de dados no *programa estatístico R, versão 2.14.0*. Foi necessário utilizar vários pacotes deste *software*, entre eles, FEAR 1.15, Benchmarking 0.20 e Rcmdr 1.8-3.

6.2 Aplicação de métodos paramétricos

Vamos agora usar métodos paramétricos para construir vários modelos lineares, que posteriormente usaremos conjuntamente com métodos não paramétricos, para avaliar a eficiência de vários DMUs.

Para podermos definir um RLM temos que descrever quais as variáveis usadas. Assim, temos como variável dependente: *PISA* e como variáveis independentes: *PUS, PLL, HDI, AE, CE, ER, EV, HeI, PIB, PR, STS, e TS*, as quais se encontram descritas e codificadas na Tabela 6.2.

Na Figura 6.1 é apresentado um sumário do modelo de RLM onde constam os coeficientes associados às variáveis independentes, o coeficiente de determinação r^2 , (*multiple R square*) e o coeficiente de determinação ajustado r_a^2 , (*adjusted R square*).

Sendo $r_a^2 = 0.4874$ podemos afirmar que 48,7% da variabilidade total dos resultados dos testes PISA (*PISA*) são explicados pelas variáveis independentes presentes no modelo de RLM ajustado. Obtemos um valor para a estatística do teste $F = 3,045$, com 12 e 24 graus de liberdade (g.l). Esta estatística de teste tem associado um $p\text{-value} = 0,045$, pelo que rejeitamos a hipótese H_0 em favor da hipótese H_1 . Neste caso, o modelo é significativo.


```

Call:
lm(formula = PISA ~ PUS + PLL + HDI + AE + CE + ER + EV + HeI +
    PIB + PR + STS + TS, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-21.011 -11.006  -2.116   10.951   39.913

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.824e+03  2.178e+03  -0.837  0.4119
PUS          3.153e-01  3.847e-01   0.820  0.4217
PLL         -1.845e-01  3.867e-01  -0.477  0.6382
HDI         4.086e+02  2.191e+02   1.864  0.0763 .
AE          4.818e-03  3.723e-03   1.294  0.2097
CE          2.305e+00  3.057e+00   0.754  0.4592
ER          3.817e-01  7.058e-01   0.541  0.5944
EV          1.122e+02  1.080e+02   1.040  0.3104
HeI         -7.436e+03  6.864e+03  -1.083  0.2910
PIB         -2.485e-03  1.006e-03  -2.470  0.0221 *
PR          -4.761e-02  2.956e-02  -1.611  0.1222
STS         -2.061e+00  1.171e+00  -1.761  0.0928 .
TS           6.780e-04  3.737e-04   1.814  0.0839 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 18.79 on 21 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6738,    Adjusted R-squared:  0.4874
F-statistic: 3.615 on 12 and 21 DF,  p-value: 0.004902

```

Figura 6. 1-Modelo linear determinado usando todos os indicadores

A equação da reta ajustada é:

$$PISA = -1824 + 0,3153PUS - 0,1845PLL + 408,6HDI + 0,004818AE + 2,305CE + 0,3817ER - 7436HeI - 0,002485PIB - 0,04761PR - 2,061STS + 0,000678TS$$

Deste modo podemos constatar facilmente que existem variáveis cujos coeficientes são negativos: PLL, HeI, PIB, PR e STS. Esta situação implica que, ao aumentar o valor destes indicadores, diminui-se o valor da variável PISA.

Método de procura do “melhor modelo”/seleção de variável

Alguns autores referem que uma abordagem usada para construir modelos matemáticos deve utilizar sensivelmente 60% dos dados para o ajustamento dos mesmos e usar os restantes 40% na validação do modelo dado (Maroco, 2007). Uma vez que a amostra em estudo é constituída por 34 países, sendo, portanto, de dimensão reduzida, considerámos importante não retirar dados e fazer o ajustamento com a sua totalidade.

Recorre-se, então, ao ajustamento do nosso modelo, usando os procedimentos de seleção das variáveis descritas no capítulo 4. Esta escolha do “melhor modelo” – que melhor se aproxima à realidade – implica uma escolha no sentido de minimizar a perda de informação, e modelar melhor os dados.

No sentido de determinar o “melhor modelo” vamos utilizar os três métodos mais usuais – *Backward*, *Forward* e *Stepwise*. Após determinar, para cada método, qual o “melhor modelo”, iremos avaliar cada um deles, comparando os valores de r_a^2 , os valores do Quadrado Médio Residual (*QMRE*) e também o valor de *AIC*. De entre todos os possíveis modelos, o que tem maior r_a^2 e menor *QMRE* será, provavelmente, o melhor.

Um dos melhores modelos utilizados foi $PISA \sim AE+HDI+HeI+PIB+PR+TS$, como mostra a Figura 6.2.

```
Step: AIC=199.04
PISA ~ AE + HDI + HeI + PIB + PR + TS

      Df Sum of Sq    RSS   AIC
<none>          8989.8 199.04
- TS      1      897.9  9887.6 200.18
- PR      1     1410.9 10400.7 201.85
- AE      1     1569.2 10559.0 202.35
- PIB     1     2301.3 11291.1 204.56
- HeI     1     2985.4 11975.2 206.50
- HDI     1     9286.2 18275.9 220.46

Call:
lm(formula = PISA ~ AE + HDI + HeI + PIB + PR + TS, data = Dataset)

Coefficients:
(Intercept)      AE      HDI      HeI      PIB      PR      TS
 3.736e+02   6.952e-03  6.236e+02 -4.350e+02 -2.493e-03 -5.382e-02  5.484e-04
```

Figura 6. 2-Determinação de um modelo usando direção backward e critério AIC

Formalmente podemos escrever:

$$PISA = 373,6 + 0,006952AE + 623,6HDI - 435HeI - 0,002493PIB - 0,05382PR + 0,000584TS$$

```
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-29.928 -12.859  -0.337   7.868  41.670

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.736e+02  9.461e+01  3.949 0.000534 ***
AE           6.952e-03  3.263e-03   2.130 0.042767 *
HDI          6.236e+02  1.203e+02   5.182 2.08e-05 ***
HeI         -4.350e+02  1.480e+02  -2.938 0.006831 **
PIB         -2.493e-03  9.665e-04  -2.580 0.015887 *
PR          -5.382e-02  2.664e-02  -2.020 0.053795 .
TS           5.484e-04  3.403e-04   1.611 0.119158

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 18.59 on 26 degrees of freedom
(1 observation deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.6045, Adjusted R-squared:  0.5132
F-statistic: 6.623 on 6 and 26 DF,  p-value: 0.0002441
```

Figura 6. 3-Sumário do modelo

Com o intuito de construir mais modelos, iremos usar o teste de colinearidade das variáveis. Este teste vai dar-nos uma ideia de quais serão as variáveis que podem entrar no modelo. Deste modo, podemos testar, por exemplo:

$$H_0: \rho(PISA, AE) = 0 \text{ vs. } H_1: \rho(PISA, AE) \neq 0$$

```
> cor.test(fdh$AE, fdh$PISA, alternative="two.sided", method="pearson")

Pearson's product-moment correlation

data: fdh$AE and fdh$PISA
t = 2.1405, df = 32, p-value = 0.04004
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.01787199 0.61809332
sample estimates:
      cor
0.3538988
```

Figura 6. 4-Teste de colinearidade entre *PISA* e *AE*

Como o *p-value* é aproximadamente $0,04001 < 0,05$ podemos rejeitar H_0 , isto é, existe evidência significativa de que $\rho(PISA, AE) \neq 0$. Logo é provável que a variável *AE* vá fazer parte do modelo final.

De maneira análoga, podemos realizar o mesmo teste com as variáveis *PISA* e *HDI*.

```
> cor.test(fdh$HDI, fdh$PISA, alternative="two.sided", method="pearson")

Pearson's product-moment correlation

data: fdh$HDI and fdh$PISA
t = 4.5142, df = 32, p-value = 8.104e-05
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.3619212 0.7943587
sample estimates:
      cor
0.6237469
```

Figura 6. 5-Teste de colinearidade entre *PISA* e *HDI*

Podemos concluir que a variável *HDI* estará provavelmente presente no modelo a construir. Um modelo possível de escolher é $PISA \sim HDI + PUS + PR$.

```

Call:
lm(formula = PISA ~ HDI + PR + PUS, data = Dataset)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-36.422 -11.616  -2.537  13.567  34.625

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 283.50421   64.47300   4.397 0.000127 ***
HDI          211.28933   83.79713   2.521 0.017233 *
PR           -0.05564    0.02748  -2.025 0.051866 .
PUS           0.52615    0.25909   2.031 0.051227 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 19.5 on 30 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4985, Adjusted R-squared:  0.4483
F-statistic: 9.939 on 3 and 30 DF,  p-value: 0.0001041

```

Figura 6. 6-Sumário do modelo

Formalmente podemos escrever

$$PISA = 283,50421 + 211,28933HDI - 0,05564PR + 0,52615PUS$$

Como sabemos, se $r^2 = 0$ o modelo não se ajusta aos dados, enquanto que, se $r^2 = 1$ o ajustamento é perfeito. O valor de r^2 aceitável, para que o modelo se considere ajustado, é algo subjetivo. No caso das ciências exatas, os valores $r^2 > 0.9$ são geralmente aceites como indicadores de um bom ajustamento, enquanto que no caso das ciências sociais, são os valores $r^2 > 0.5$ que se consideram aceitáveis para o ajustamento do modelo aos dados. Deste modo, podemos verificar que apenas o primeiro modelo apresentado cumpre este critério.

Outros critérios que os modelos de regressão linear devem cumprir são:

- Os erros têm que ser aleatórios, independentes e com distribuição normal de média zero e variância constante.
- As variáveis independentes têm que ser ortogonais, isto é, $Cov(X_i, X_j) \neq 0$.

Veamos agora a análise dos resíduos (erros) no **primeiro modelo** PISA~AE+HDI+HeI+PIB+PR+TS). Temos que verificar que eles são independentes, por outras palavras, que $Cov(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = 0$ ($k \neq l; k, l = 1, \dots, 13$).

Sendo assim, temos formalmente o seguinte teste:

H_0 : Não existe auto-correlação entre os resíduos

Vs.

H_1 : Existe auto-correlação positiva entre os resíduos.

```

Durbin-Watson test
data: PISA ~ AE + HDI + HeI + PIB + PR + TS
DW = 1.8398, p-value = 0.5873
alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0

```

Figura 6. 7-Aplicação do teste de Durbin-Watson

Com base na Figura 6.7. podemos concluir que os resíduos são independentes. A justificação para este facto consiste no valor DW=1,8398 ser inferior a dois, ou então se o valor de p-value= 0,5873.

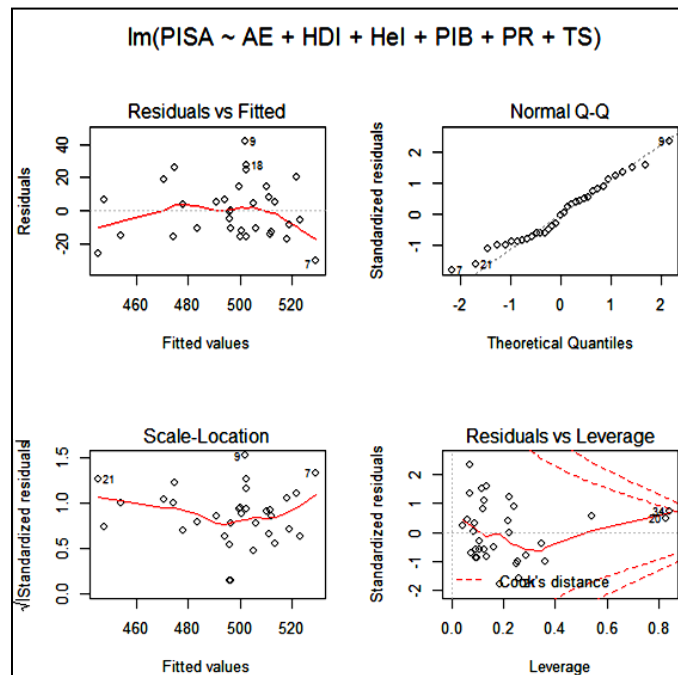


Figura 6. 8-Análise gráfica dos resíduos

Analisando o primeiro gráfico da Figura 6.8 (Residuals vs Fitted), podemos concluir que os resíduos são aleatórios. Para concluirmos que os resíduos têm distribuição normal, podemos usar o segundo gráfico (Normal Q-Q), ou então realizar o teste de Shapiro-Wilk (este teste é mais adequado do que o de Kolmogorov-Smirnov dado que a amostra tem uma dimensão reduzida). Teremos assim o seguinte teste formal:

$$H_0: res \sim N(\mu, \sigma)$$

vs.

$$H_1: res \not\sim N(\mu, \sigma)$$

```

Shapiro-Wilk normality test

data:  res
W = 0.9665, p-value = 0.3716

```

Figura 6. 9-Teste de Shapiro-Wilk

Como podemos observar o p-value é igual a $0,3716 > 0,05$, logo não devemos rejeitar H_0 , em favor de H_1 , isto é, existe evidência significativa que a variável resíduos tem uma distribuição normal.

Por fim, para verificarmos que o modelo obtido é válido, temos que garantir que $Cov(X_i, X_j) \neq 0$, ou então, que $Cor(X_i, X_j) \neq 0$. Para tal, vamos usar a matriz de correlação entre as variáveis tendo atenção que queremos realizar uma inferência estatística para tirar conclusões relativamente à população.

```

      PISA  AE  HDI  HeI  PIB  PR  TS
PISA  1.00  0.35  0.62  0.34  0.32 -0.28  0.27
AE    0.35  1.00  0.58  0.54  0.92 -0.13  0.71
HDI   0.62  0.58  1.00  0.75  0.65 -0.13  0.45
HeI   0.34  0.54  0.75  1.00  0.52 -0.30  0.51
PIB   0.32  0.92  0.65  0.52  1.00 -0.09  0.78
PR   -0.28 -0.13 -0.13 -0.30 -0.09  1.00 -0.15
TS    0.27  0.71  0.45  0.51  0.78 -0.15  1.00

n= 34

P
      PISA  AE  HDI  HeI  PIB  PR  TS
PISA  0.0400 0.0000 0.0496 0.0630 0.1061 0.1247
AE    0.0400 0.0003 0.0011 0.0000 0.4788 0.0000
HDI   0.0000 0.0003 0.0000 0.0000 0.4551 0.0073
HeI   0.0496 0.0011 0.0000 0.0017 0.0870 0.0019
PIB   0.0630 0.0000 0.0000 0.0017 0.6325 0.0000
PR    0.1061 0.4788 0.4551 0.0870 0.6325 0.4119
TS    0.1247 0.0000 0.0073 0.0019 0.0000 0.4119

Adjusted p-values (Holm's method)
      PISA  AE  HDI  HeI  PIB  PR  TS
PISA  0.4004 0.0013 0.4464 0.5040 0.6366 0.6366
AE    0.4004 0.0047 0.0151 0.0000 1.0000 0.0000
HDI   0.0013 0.0047 0.0000 0.0005 1.0000 0.0806
HeI   0.4464 0.0151 0.0000 0.0224 0.6089 0.0231
PIB   0.5040 0.0000 0.0005 0.0224 1.0000 0.0000
PR    0.6366 1.0000 1.0000 0.6089 1.0000 1.0000
TS    0.6366 0.0000 0.0806 0.0231 0.0000 1.0000

```

Figura 6. 10-Matriz de correlação

Apesar de existirem alguns valores ajustados de p-value inferiores a 0,05, como na sua maioria os seus valores são superiores a 0,05, podemos afirmar que $Cor(X_i, X_j) \neq 0$.

Vejamos analogamente que os resíduos satisfazem as condições do **segundo modelo** $PISA \sim HDI + PR + PUS$.

```

Durbin-Watson test

data: PISA ~ HDI + PR + PUS
DW = 1.8176, p-value = 0.5949
alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0

```

Figura 6. 11-Teste de Durbin-Watson

Através, da Figura 6.11. podemos concluir que os resíduos são independentes. Também podemos concluir que os resíduos são aleatórios.

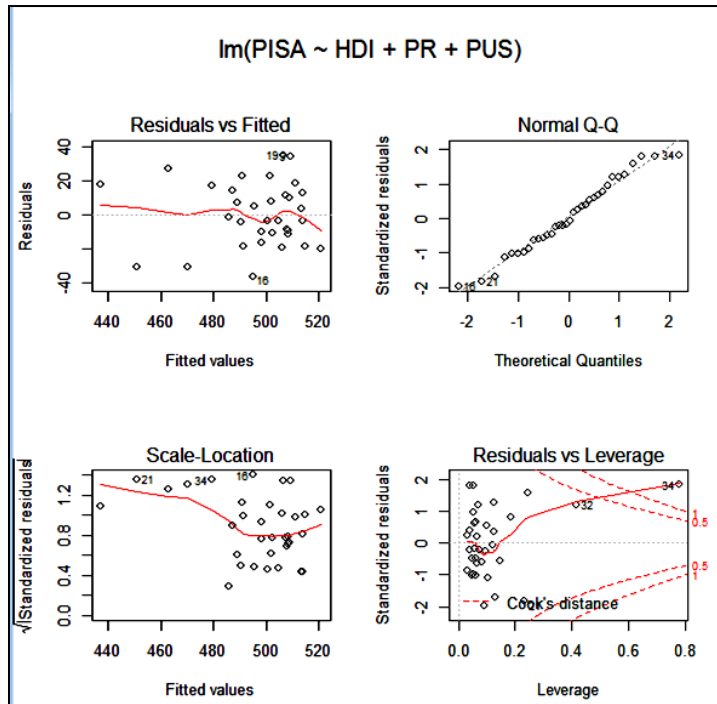


Figura 6. 12-Análise gráfica dos resíduos

De igual modo, usando o Teste de Shapiro-Wilk, podemos concluir que os resíduos assumem uma distribuição normal.

```

Shapiro-Wilk normality test

data: res
W = 0.9801, p-value = 0.7767

```

Figura 6. 13-Teste de Shapiro-Wilk

Por fim, para verificarmos que o modelo obtido é válido temos que garantir que, $Cor(X_i, X_j) \neq 0$. Para tal vamos usar a matriz de correlação entre as variáveis tendo

atenção que quero o teste de inferência estatística, para tirar conclusões relativamente à população.

	PISA	HDI	PUS	PR
PISA	1.00	0.62	0.52	-0.28
HDI	0.62	1.00	0.56	-0.13
PUS	0.52	0.56	1.00	0.14
PR	-0.28	-0.13	0.14	1.00

n= 34

P	PISA	HDI	PUS	PR
PISA		0.0000	0.0018	0.1061
HDI	0.0000		0.0006	0.4551
PUS	0.0018	0.0006		0.4376
PR	0.1061	0.4551	0.4376	

Adjusted p-values (Holm's method)

	PISA	HDI	PUS	PR
PISA		0.0005	0.0073	0.3183
HDI	0.0005		0.0032	0.8752
PUS	0.0073	0.0032		0.8752
PR	0.3183	0.8752	0.8752	

Figura 6. 14-Matriz de correlações

Podemos verificar através da Figura 6.14 que não é satisfeita a condição da multicolinearidade, dado que existem valores de *p-value* inferiores a 0,05. Logo, estando algumas variáveis independentes fortemente correlacionadas entre si, podem invalidar o modelo usado. Apesar disso, como o valor $r^2 = 0,4985$ (muito próximo de 0,5) e, na seleção dos modelos, foi um dos poucos que apresentou resultados aceitáveis, iremos usar este modelo, apesar das suas limitações.

6.3 Aplicação de métodos não paramétricos

6.3.1 Método Free Disposable Hull

Com o objetivo de avaliar a eficiência dos países da OCDE no ano 2008, aplicamos o método FDH, a dois modelos distintos. No primeiro modelo temos os indicadores como *input* a *Despesa por estudante* (AE), e como *output* o *desempenho obtido nos testes PISA* (PISA). No segundo modelo temos como *input* a *percentagem de estudantes cujos pais possuem baixos índices de escolaridade* (PLL), e com *output* o *desempenho obtido nos testes PISA* (PISA).

Embora não exista consenso os investigadores nesta área, optamos por interpretar a eficiência no sentido dos *inputs*, dado que decisor apenas controla o *input* e não o *output*.

Na Tabela 6.3 apresentam-se, para o modelo 1, os valores da eficiência e respetiva ordenação no sentido da otimização dos *inputs*, bem como os valores da eficiência e respetiva ordenação do no sentido dos *outputs*.

Tabela 6. 3-Valores da eficiência, para o *input* e para o *output* dos países da OCDE, obtidos pelo método FDH (Mod. 1)

País	Eficiência input	Ordenação	Eficiência Output	Ordenação
AT	0.3309569	34	1.116475	29
AU	0.7185771	13	1.047812	14
BE	0.5564623	20	1.067151	17
CA	0.8282163	11	1.032093	11
CH	0.4660742	24	1.051257	15
CL	1.0	1	1.0	1
CZ	0.8073005	12	1.046436	12
DE	0.6402043	15	1.065269	16
DK	0.4026249	30	1.088742	24
EE	1.0	1	1.0	1
ES	0.4296702	27	1.122238	32
FI	1.0	1	1.0	1
FR	0.4713755	23	1.094002	26
GR	0.6125256	18	1.086488	22
HU	0.8702814	9	1.010894	9
IE	0.4882557	22	1.093561	25
IL	0.6166511	17	1.120611	31
IS	0.4250754	28	1.085264	20
IT	0.4241410	29	1.118083	30
JP	0.8316276	10	1.026246	10
KP	1.0	1	1.0	1
LU	0.2115669	33	1.128061	33
MX	1.0	1	1.0	1
NL	0.6363318	16	1.047610	13
NO	0.3504376	32	1.085914	21
NZ	1.0	1	1.0	1
PL	1.0	1	1.0	1
PT	0.6449644	14	1.070670	18
SE	0.4336031	26	1.096429	28
SI	0.5382765	21	1.085170	19
SR	1.0	1	1.0	1
TR	0.6125256	18	1.129717	34
UK	0.4411969	25	1.086783	23
US	0.3532689	31	1.094883	27

Observando a Tabela 6.3, podemos verificar que existem oito países eficientes: Chile, Estónia, Finlândia, Coreia do Sul, México, Nova Zelândia, Polónia e Eslováquia, cujas coordenadas pertencem à fronteira tecnológica.

Relativamente à Finlândia, Coreia do Sul, Nova Zelândia e Estónia são DMU que têm na sua vizinhança conjuntos de países (por exemplo, República Checa e Hungria) que são menos eficientes. Os restantes quatro países (México, Chile, Polónia e Eslováquia) constituem um conjunto de pontos isolados de países, resultando, deste modo, a explicação para que os mesmos sejam considerados eficientes.

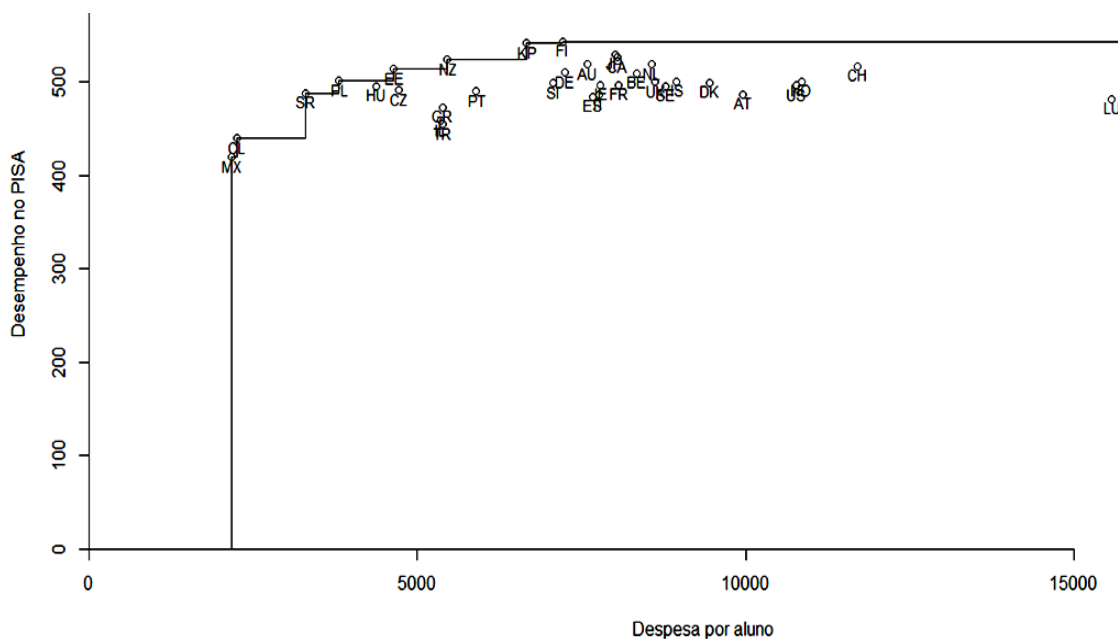


Figura 6. 15-Representação gráfica da fronteira obtida usando o método FDH (mod.1)

Vejamos agora a análise do segundo modelo que foi realizada de maneira análoga à do modelo 1.

Tabela 6. 4-Valores da eficiência para o *input* e para o *output* dos países da OCDE obtidos pelo método FDH (mod. 2)

País	Eficiência input	Ordenação	Eficiência output	Ordenação
AT	0.33333333	9	1.116475	26
AU	0.12142857	21	1.047812	9
BE	0.29824561	10	1.067151	13
CA	0.50000000	7	1.005697	5
CH	0.12592593	20	1.051257	10
CL	0.06896552	26	1.237196	33
CZ	0.08994709	23	1.106925	24
DE	0.14529915	18	1.065269	12
DK	0.26153846	11	1.088742	17
EE	0.60714286	6	1.030751	6
ES	0.05095541	30	1.122238	28
FI	1.0	1	1.0	1
FR	0.15044248	17	1.094002	20
GR	0.10000000	22	1.149292	30
HU	0.064663878	28	1.096429	22
IE	0.15887850	16	1.093561	19
IL	0.23529412	12	1.185387	31
IS	0.17525773	15	1.085264	15
IT	0.06530612	27	1.118083	27
JP	1.0	1	1.0	1
KP	0.61904762	5	1.0036993	4
LU	0.08290155	24	1.128061	29
MX	0.03219316	32	1.294356	34
NL	0.20000000	14	1.047610	8
NO	0.89473684	4	1.058142	11
NZ	0.07456140	25	1.036818	7
PL	0.05519481	29	1.084614	14
PT	0.03400000	31	1.110090	25
SE	0.13492063	19	1.096429	22
SI	0.004282116	34	1.089178	18
SR	1.0	1	1.0	1
TR	0.01977750	33	1.195031	32
UK	0.42500000	8	1.086783	16
US	0.23287671	13	1.094883	21

Podemos assim observar que apenas três dos países da OCDE têm 100% de eficiência, apresentando-se os restantes como muito pouco eficientes. Graficamente podemos observar que temos apenas três países a pertencer à fronteira tecnológica: Japão, Finlândia e Eslováquia.

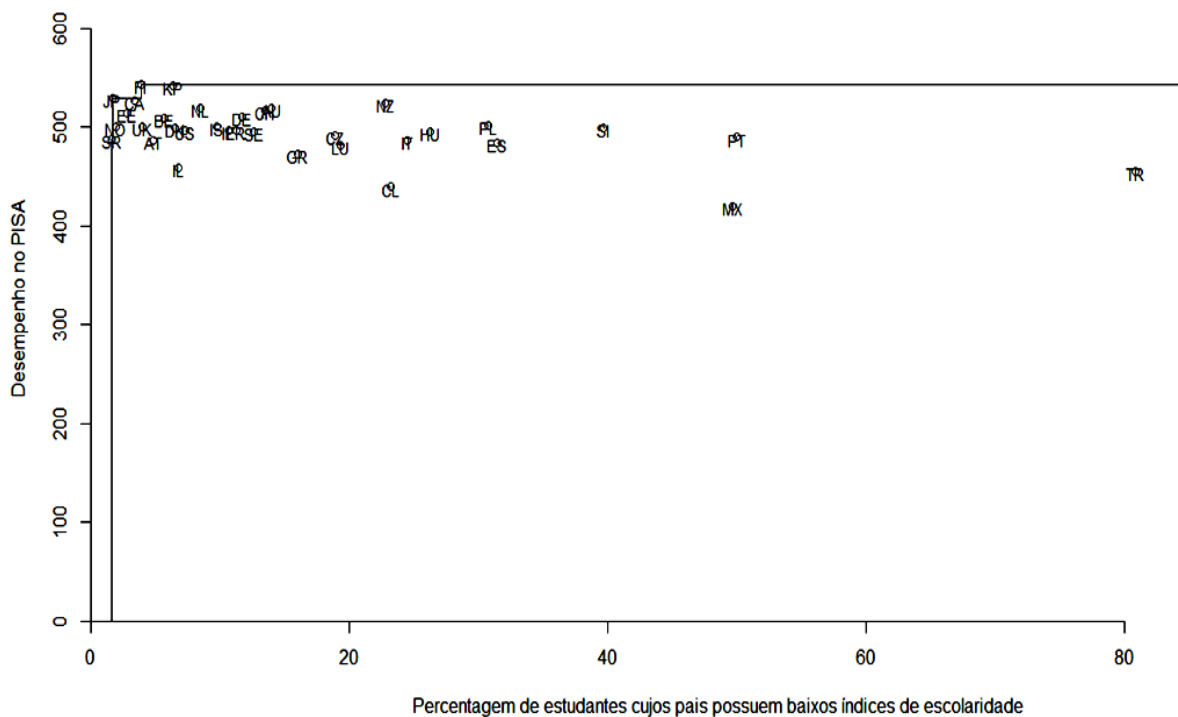


Figura 6. 16-Representação gráfica da fronteira obtida usando o método FDH (mod. 2)

6.3.2 Método Data Envelopment Analysis

Vamos agora verificar se os resultados se manteriam ao usar o método DEA^y. Antes de aplicarmos o método DEA temos que determinar o retorno de escala. A metodologia mais genérica seria aplicar os testes de hipóteses, mas como estamos a trabalhar com um caso muito simples – um *input* e um *output* – basta usar as capacidades gráficas do software R. Deste modo, vamos apresentar três gráficos da fronteira tecnológica (ver Figura 6.17) assumindo diferentes retornos de escala. No caso da curva a tracejado vermelho assumimos retornos de escala constantes (CRS),

^yNa aplicação do método DEA foi usado o pacote Benchmarking 0.20 para o software R.

a curva a tracejado verde assume retornos de escala decrescentes (NIRS), e por fim a curva a cheio preta assume retornos de escala variáveis (VRS).

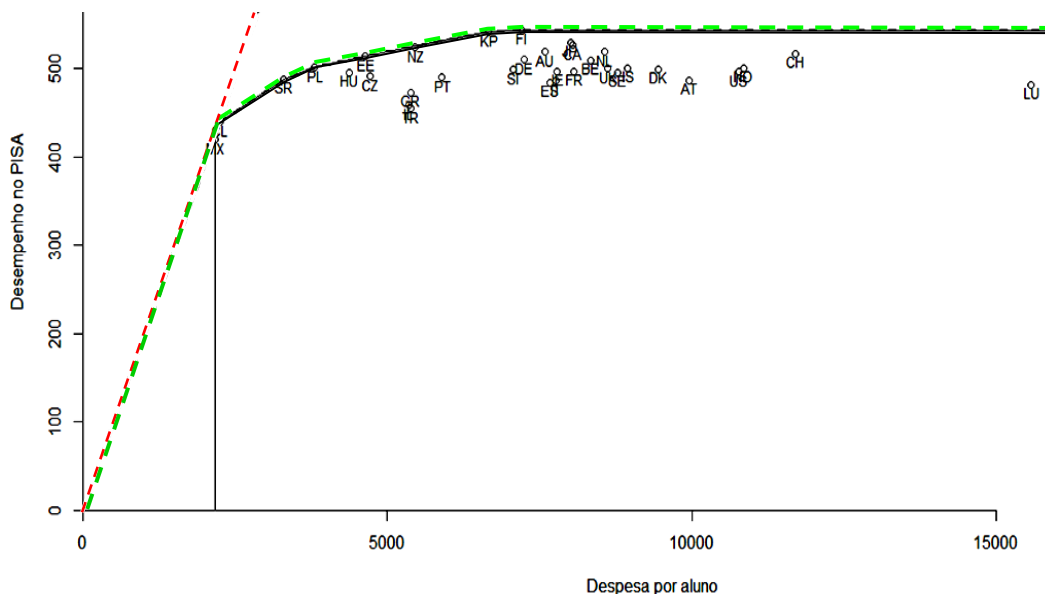


Figura 6. 17-Representação gráfica da fronteira obtida usando o método DEA (mod. 1)

Podemos assim verificar graficamente, que devemos aplicar o método DEA assumindo retornos de escala variáveis. Através da análise da Figura 6.17 também podemos concluir que existem vários países com um nível de eficiência bastante elevado: México (MX), Chile (CL), Eslováquia (SR), Polónia (PL), Estónia (EE), Nova Zelândia (NZ), Coreia do Sul (KP) e Finlândia (FI).

A tabela 6.5 foi construída aplicando o método DEA com retornos de escala variáveis (DEA_{VRS}). A mesma apresenta, para cada país, a sua eficiência, ordenação e países “vizinhos”^z.

^z Um país é eficiente relativamente a um país ou a um conjunto de países. Considera-se como países “vizinhos” de um país, aqueles, relativamente aos quais se realiza a comparação de eficiência.

Tabela 6. 5- Valores de eficiência obtidos após aplicação do método DEA_{VRS} (mod. 1)

País	Eficiência input	Ordenação	Pares
AT	0.3281456	33	CL;SR
AU	0.6581541	13	EE;KP
BE	0.5210419	19	EE;PL
CA	0.6927535	12	EE;KP
CH	0.4162580	28	EE;KP
CL	1.0	1	CL
CZ	0.7135406	11	PL;SR
DE	0.6076038	14	EE;PL
DK	0.3947665	30	PL;SR
EE	1.0	1	EE
ES	0.4190014	26	CL;SR
FI	1.0	1	FI
FR	0.4505538	23	PL;SR
GR	0.5516892	17	CL;SR
HU	0.8220052	9	PL;SR
IE	0.4676915	22	PL;SR
IL	0.4973823	20	CL;SR
IS	0.4237654	25	PL;SR
IT	0.4185982	27	CL;SR
JP	0.7229936	10	EE;KP
KP	1.0	1	KP
LU	0.2028575	34	CL;SR
MX	1.0	1	MX
NL	0.5836780	15	EE;KP
NO	0.3482776	31	PL;SR
NZ	0.9896707	8	EE;KP
PL	1.0	1	PL
PT	0.5687717	16	PL;SR
SE	0.4095503	29	PL;SR
SI	0.5266646	18	PL;SR
SR	1.0	1	SR
TR	0.4792458	21	CL;SR
UK	0.4366647	24	PL;SR
US	0.3362127	32	PL;SR

Os resultados obtidos são semelhantes aos do método FDH. Os países eficientes pelo método FDH também são eficientes pelo método DEA à exceção da Nova Zelândia. É de referir que, no caso da Nova Zelândia, o valor obtido pelo método DEA é muito próximo de um, enquanto que pelo método FDH é exatamente 1.

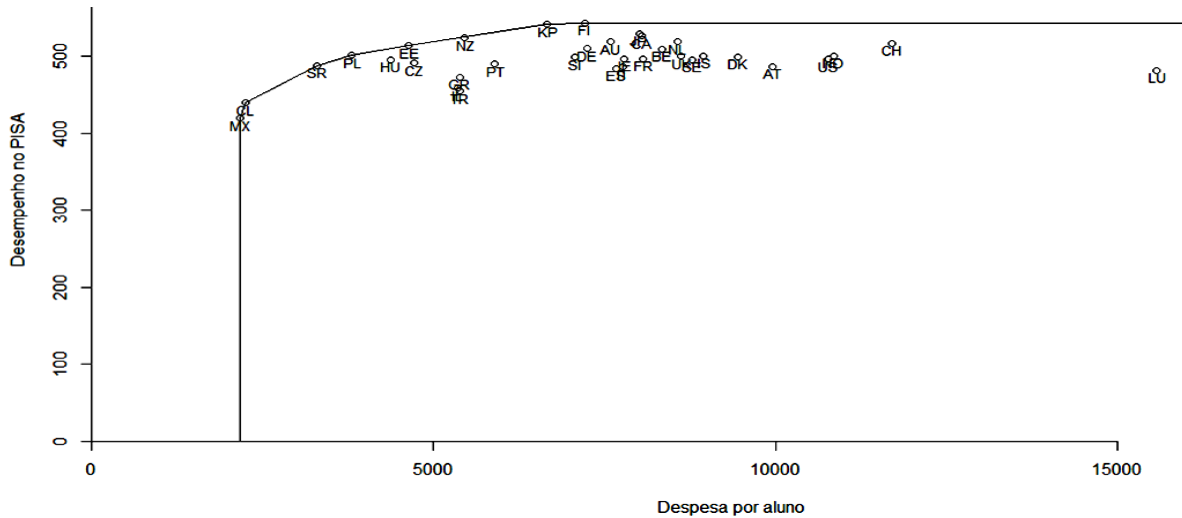


Figura 6. 18-Representação gráfica da fronteira obtida usando o método DEA_{VRS} (mod1)

Aplicando o mesmo procedimento ao segundo modelo, vamos apresentar três gráficos da fronteira tecnológica (ver Figura 6.19) assumindo diferentes retornos de escala. No caso da curva a tracejado vermelho temos CRS, na curva a tracejado verde temos NIRS, e na curva a cheio preta temos VRS.

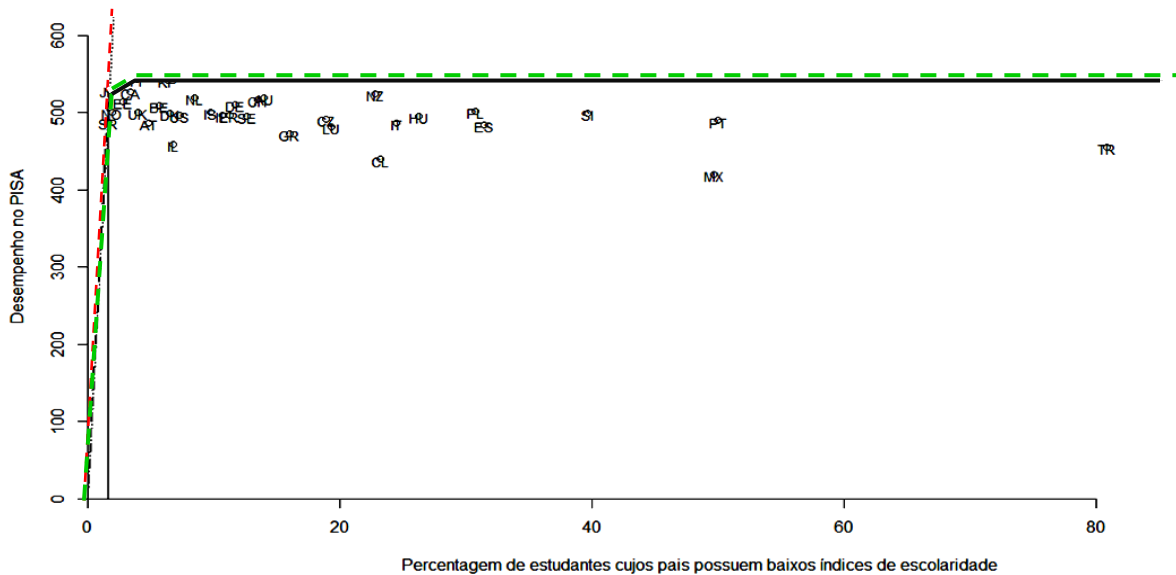


Figura 6. 19-Representação gráfica da fronteira obtida usando o método DEA (mod. 2)

A tabela 6.6 mostra os valores analíticos de eficiência de cada um dos países. Podemos verificar que se mantêm três países com 100% de eficiência, que são exatamente os mesmos que tinham 100% de eficiência quando aplicamos o método FDH.

Tabela 6. 6-Valores de eficiência obtidos após aplicação do método DEAhrs (mod. 2)

País	Eficiência input	Ordenação	Pares
AT	0.33333333	9	27
AU	0.11955250	21	18; 27
BE	0.28966392	10	18; 27
CA	0.49787385	7	18; 27
CH	0.12367693	20	18; 27
CL	0.06896552	26	27
CZ	0.08502582	23	18; 27
DE	0.14130368	18	18; 27
DK	0.25026877	11	18; 27
EE	0.59354561	5	18; 27
ES	0.05095541	30	27
FI	1.0	1	9
FR	0.14344813	17	18; 27
GR	0.1	22	27
HU	0.06153282	28	18; 27
IE	0.15153699	16	18; 27
IL	0.23529412	12	27
IS	0.16810334	15	18; 27
IT	0.06530612	27	27
JP	1.0	1	18
KP	0.56880210	6	9; 18
LU	0.08290155	24	27
MX	0.032193834	32	27
NL	0.19693834	14	18; 27
NO	0.85783133	4	18; 27
NZ	0.07399070	25	18; 27
PL	0.05296511	29	18; 27
PT	0.032007229	33	18; 27
SE	0.12843756	19	18; 27
SI	0.04096386	31	18; 27
SR	1.0	1	27
TR	0.01977750	34	27
UK	0.40722892	8	18; 27
US	0.22191781	13	18; 27

6.3.3 Método Order-m

Sabemos que o método Order-m apresenta uma fiabilidade e robustez superior aos anteriores métodos, por isso, talvez os resultados obtidos possam ser distintos.

Começemos por analisar o primeiro modelo. A Tabela 6.7 apresenta os valores da eficiência relativa aos *inputs* para os países da OCDE. Ao contrário dos outros métodos, ao aplicarmos o Order-m apenas dois países, a Finlândia e a Coreia do Sul, se mostraram eficientes.

Tabela 6. 7-Valores de eficiência obtidos após aplicação do método Order-m (mod. 1)

País	Eficiência input	País	Eficiência input
AT	2.7901289	IS	2.2862409
AU	1.3815387	IT	2.2145542
BE	1.7592589	JP	1.2024614
CA	1.2069514	KP	1.0
CH	2.1319552	LU	4.3892231
CL	0.8249610	MX	0.9254714
CZ	1.1894690	NL	1.5686557
DE	1.5421126	NO	2.7637325
DK	2.3905469	NZ	0.9990928
EE	0.9910121	PL	1.9709266
ES	2.1440409	PT	1.4694621
FI	1.0	SE	2.1819674
FR	1.9820301	SI	1.7906706
GR	1.4866828	SR	0.9280140
HU	1.0961579	TR	1.5054457
IE	1.9226862	UK	2.1937015
IL	1.4950404	US	2.6625770

Consideremos agora o segundo modelo. A tabela 6.8 realça o facto de apenas dois países poderem ser considerados como tendo 100% de eficiência.

Tabela 6. 8-Valores de eficiência obtidos após aplicação do Order-m (mod. 2)

País	Eficiência input
AU	8.13223529
AT	2.7984692
BE	3.2260084
CA	2.0000000
CL	13.7288660
CZ	10.2677319
DK	3.6975398
EE	1.6244118
FI	1.0
FR	6.3824884
DE	6.6660504
GR	9.2580624
HU	14.5439374
IS	5.35864439
IE	6.0626432
IL	3.9602255
IT	14.5676213
JP	1.0
KP	1.6153846
LU	11.3558426
MX	28.4214153
NL	5.0000000
NZ	13.3111765
NO	1.0901996
PL	17.3767647
PT	27.2434480
SR	0.9570181
SI	22.4144339
ES	18.1496208
SE	6.9614789
CH	7.7227941
TR	46.5721629
UK	2.2889651
US	4.0901336

Dado que o método Order-m tem uma razão de convergência que não é influenciada pelo número de indicadores em estudo, consideramos oportuno aplicar esta metodologia a outros modelos com mais fatores de produção (*inputs*).

Apliquemos em seguida o método de Order-m aos seguintes modelos, construídos a partir da regressão linear múltipla.

Tabela 6. 9-Variáveis pertencentes aos modelos A e B

Modelo A		Modelo B	
<i>Inputs</i>	<i>Outputs</i>	<i>Inputs</i>	<i>Outputs</i>
<ul style="list-style-type: none"> • AE; • HDI; • HeI; • PIB; • PR; • TS. 	<ul style="list-style-type: none"> • PISA. 	<ul style="list-style-type: none"> • HDI; • PUS; • PR. 	<ul style="list-style-type: none"> • PISA.

O modelo A apresenta seis variáveis de *inputs* sendo, por isso, um modelo com um número de variáveis ligeiramente mais reduzido do que o modelo completo. Não devemos esquecer que este modelo apresentava o coeficiente de determinação ajustado $r_a^2 = 0.4874$.

Os resultados obtidos da aplicação deste modelo estão representados na Tabela 6.10. A leitura desta permite-nos concluir que existem apenas quatro países com uma eficiência total: Canadá, Finlândia, Japão e Coreia do Sul.

No mesmo modelo, também podemos observar que são vinte e seis os países, cuja eficiência se distancia de 100%, em um valor inferior ou igual a 10%. Como a dimensão da amostra é de trinta e quatro países, estes vinte e seis países representam sensivelmente 76%. Logo, mais de metade da amostra é quase eficiente e portanto podemos concluir que a razão de convergência é baixa.

Tabela 6. 10-Valores obtidos após aplicação do modelo A

País	Eficiência <i>input</i>
AU	1.0255802
AT	0.9995811
BE	0.9977866
CA	1.0
CL	0.8337181
CZ	1.0276004
DK	0.9862041
EE	0.9765439
FI	1.0
FR	0.9988807
DE	1.0027394
GR	0.9296636
HU	0.89296636
IS	0.9482810
IE	1.0145945
IL	1.0797209
IT	0.9831268
JP	1.0
KP	1.0
LU	1.0222583
MX	0.8177057
NL	1.0137353
NZ	0.9987304
NO	0.9949626
PL	0.9816261
PT	0.9203731
SR	0.9041821
SI	0.9510744
ES	1.0554763
SE	1.0110977
CH	1.0097091
TR	0.8580362
UK	0.9952442
US	1.0615748

Aplicando a mesma metodologia ao Modelo B, obtemos a Tabela 6.11. Através desta tabela podemos concluir que o número de países eficientes também é quatro: Finlândia, Japão, Coreia do Sul e Nova Zelândia.

Tabela 6. 11-Valores obtidos após aplicação do modelo B

País	Eficiência input
AU	0.9994521
AT	0.9979064
BE	0.9947873
CA	1.0226501
CL	1.0809672
CZ	1.0421120
DK	0.9976244
EE	0.9965345
FI	1.0
FR	0.9954852
DE	1.0203319
GR	1.0186126
HU	0.9791019
IS	0.9539280
IE	1.0098824
IL	1.0672239
IT	0.9666273
JP	1.0
KP	1.0
LU	1.0475417
MX	1.0220855
NL	0.9996203
NZ	1.0
NO	1.0455622
PL	0.9906936
PT	0.8191494
SR	1.0229878
SI	0.9963182
ES	1.03757718
SE	1.0247405
CH	1.0097339
TR	0.8896478
UK	0.9973701
US	1.0499905

Em ambos os modelos, Portugal surge como um país ineficiente, apesar de, no modelo A, apresentar uma taxa de eficiência de aproximadamente 92%, o que significa que a mesma se distancia dos 100% cerca de 8% (um valor inferior a 10%).

Capítulo 7

Considerações Finais

O principal objetivo desta dissertação consistiu em determinar a eficiência educativa dos países da OCDE. Como tal, foi necessário recorrer a bases de dados publicados anualmente por esta instituição e também pela UNESCO e pelo UNDP. A construção de uma base de dados que contivesse as variáveis a estudar, aplicando métodos paramétricos e não paramétricos, foi uma das primeiras dificuldades para levar a cabo este trabalho, uma vez que, nem todos os dados necessários se encontravam totalmente disponíveis. Como tal, para alguns dados em falta, teve que se optar por substituí-los por valores plausíveis. Assim, por exemplo, na falta de um dado referente a um indicador de um determinado ano foi utilizada a média entre os dados referentes ao ano anterior e ao ano posterior ao mesmo. Logo, esta substituição pode-nos ter conduzido a resultados um pouco deturpados da realidade. Para além disso, embora se tenha optado por utilizar indicadores referentes ao ano 2009^{aa}, houve necessidade de, em alguns indicadores, utilizar dados de anos adjacentes a este, uma vez que os dados de 2009 não se encontravam disponíveis, ou então, apenas existiam em número insuficiente.

Embora existissem publicações dos resultados dos testes PISA referentes anos 2000, 2003, 2006 e 2009, não fazia sentido concatenar os dados, de modo a construir uma série temporal, pois o mesmo não seria viável fazer com os restantes indicadores.

Ao construir o indicador *PISA* não foram atribuídos pesos diferentes aos três testes que fazem parte do PISA (Leitura, Matemática e Ciências), o que face ao que foi

^{aa} A escolha do ano 2009 deve-se ao facto de este ser o ano mais recente de divulgação dos resultados dos testes Pisa, à data do início desta dissertação,

referido no Capítulo 2, pode levantar alguma crítica, uma vez que estes diferem na sua natureza. Por exemplo, o resultado do teste de Matemática depende em grande medida da escola, enquanto o teste de Leitura pode ser influenciado por outras variáveis externas à escola.

No desenvolvimento deste trabalho, começámos por realizar uma análise exploratória do problema no sentido de encontrar um modelo que permitisse conhecer quais as variáveis que apresentam um peso mais significativo no desempenho dos alunos nos testes PISA. Para realizar esta análise exploratória foram utilizados métodos paramétricos - as regressões lineares múltiplas. Uma das desvantagens desta escolha reside no facto de estar previamente a impor uma forma funcional explícita, limitando o tipo de função de produção. No entanto, esta desvantagem é posteriormente atenuada ao aplicarmos métodos não paramétricos.

Durante a análise exploratória, concluiu-se que o modelo que melhor se ajustou aos dados foi:

$$PISA = 373,6 + 0,006952AE + 623,6HDI - 435HeI - 0,002493PIB - 0,05382PR + 0,000584TS,$$

onde *PISA* representa o indicador do desempenho no estudo PISA, *AE* significa a despesa por estudante, *HDI* traduz o índice de desenvolvimento humano, *HeI* representa o índice de saúde, *PIB* traduz o produto interno bruto, *PR* significa a percentagem de população presa e *TS* o salário dos professores. Devemos também salientar que este modelo apresentava uma fragilidade, pois o mesmo não cumpria o completamente o critério da correlação entre as variáveis.

Apesar de terem sido construídos diversos modelos (quatro) e de ter aplicado diversos métodos não paramétricos, verificou-se, que em todos os cenários, Portugal apresentava-se como um país ineficiente, em contraste com outros países como a Finlândia e o Japão.

Deve-se também realçar o facto de que os outros países do Sul da Europa pertencentes à União Europeia (Grécia, Itália, Eslovênia e Espanha) apresentam, em geral, melhores resultados do que Portugal, em especial nos modelos construídos com base em métodos paramétricos. A situação em que Portugal apresenta piores

resultados é no Modelo 2 (*input*: PLL *output*: PISA), quer na aplicação do método DEA, quer na aplicação do método FDH, por isso, a situação de Portugal é uma das piores de todos os países da OCDE.

Face a esta situação podem retirar-se as seguintes conclusões:

- No modelo 1, verificamos que o México e Estónia são países com gastos na educação substancialmente inferiores a Portugal. o que implica que quando se realiza uma comparação entre estes países, Portugal não pode fazer parte da fronteira tecnológica^{bb} (não esquecer que a otimização está a ser realizada no sentido dos *inputs*).
- No modelo 2, Portugal apresenta-se como um país com uma elevada percentagem de estudantes cujos pais possuem baixos índices de escolaridade. Como os países que fazem parte da fronteira tecnológica apresentam um bom desempenho nos testes internacionais PISA e são aqueles em que há uma reduzida percentagem de pais com baixos índices de escolaridade, é evidente, que os resultados de Portugal só poderiam ser dos piores da OCDE.
- Na aplicação dos modelos A e B, onde foi apenas aplicado o método Order-m, Portugal continua a revelar que é um país com uma elevada ineficiência educativa, mesmo quando se compara com os outros países do sul da Europa.

Com base no modelo 2, podemos concluir que existe uma relação muito forte entre a escolaridade dos progenitores e a escolaridades dos filhos. Deste modo, investir no futuro é antes de mais investir no presente.

^{bb} Mas é curioso, que a Estónia apresenta melhores resultados que Portugal.

Poderíamos assim assumir que, sendo Portugal um dos países da OCDE com maiores desequilíbrios entre classes sociais, uma opção que poderia ser eficaz, seria a de melhorar as condições socioeconómicas da população, estimulando o papel da Educação como função impulsionadora de ascensão de classes sociais e permitindo que as classes com menores rendimentos possam melhorar a sua condição social.

Talvez uma explicação para a ineficiência educativa em Portugal seja a não perceção por parte população do papel da educação e portanto a desvalorização da mesma. Sendo assim, no caso de Portugal não se pode explicar a sua ineficiência apenas com os gastos feitos na Educação, mas sim com outros problemas.

Tal como em outros estudos realizados sobre a eficiência do ensino em Portugal, a situação do país não se alterou, continuando a mostrar uma elevada ineficiência. Apesar do esforço desenvolvido nos últimos anos, a verdade é que as qualificações da população aumentaram significativamente, mas este aumento não é refletido no desempenho dos testes PISA. A busca para a explicação deste facto é talvez um dos fatores chave que poderá permitir ao país melhorar o seu desempenho. Um dos outros tópicos chave é perceber como os outros países do sul da europa pertencentes à OCDE estão organizados e qual é o motivo pelo qual estes países apresentam um melhor desempenho do que Portugal.

Referências Bibliográficas

Afonso, A., e St. Aubyn, M. (2005a). Non-parametric approaches to education and health efficiency in OECD countries. *Journal of Applied Economics* , pages 227-246.

Afonso, A., e St. Aubyn, M. (2005b). *Cross-country efficiency of secondary education provision - a semi-parametric analysis with non-discretionary inputs*. European Central Bank.

Afzal, M., et.al. (2010). *Relationship between school education and economic growth in Pakistan: ARDL bounds testing approach to cointegration*. University of the Punjab, Department of Economics. Pakistan economic and social review.

Agasisti, T., e Vittadini, G. (2010). *The Determinants of Students' Achievement: a Multilevel Analysis of new Italian Data*. Italy: Politecnico di Milano and Università degli Studi di Milano-Bicocca.

Al-Samarrai, S. (2002). *Achieving education for all: How much does money matter?* Germany: University Library of Munich.

Arze del Granado, J., Fengler, W., Ragatz, A., e Yavuz, E. (2007). *Investing in Indonesia's Education: Allocation, Equity, and Efficiency of Public Expenditures*. Germany: University Library of Munich.

Barro, R. J., e Lee, J.-W. (2000). *International Data on Educational Attainment: Updates and Implications*. Center for International Development at Harvard University.

Baskaran, T., e Hessami, Z. (2010). *Globalization and the Composition of Public Education Expenditures: A Dynamic Panel Analysis*. Department of Economics. University of Konstanz.

Benos, N. (2005). Education Systems, Growth and Welfare. *University of Cyprus Working Papers in Economics 5-2005* .

Blázquez, M., e García, J. I. (2007). *School To Work Transitions And The Impact Of Public Expenditure On Education*. Department of Economic Analysis (Economic Theory and Economic History). Universidad Autónoma de Madrid (Spain).

Bratti, M., Checchi, D., e Filippin, A. (2007). *Territorial Differences in Italian Students' Mathematical Competencies: Evidence from PISA 2003*. Institute for the Study of Labor (IZA).

Budria, S., e Pereira, P. T. (2007). The wage effects of training in Portugal: differences across skill groups, genders, sectors and training types. *Applied Economics* , vol. 39(6), pages 787-807.

Cabugueira, A. C. (2001). *O Capital Humano: Contributo reflexivo para o estudo da relação entre a educação, a economia e o desenvolvimento humano*. Trás-os-Montes e Alto Douro: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Cadima, J., e Silva, P. (2009). *Apontamentos da disciplina de Matemática e Estatística*. DM/ISA.

Carneiro, P. (2008). Equality of opportunity and educational achievement in Portugal. *Portuguese Economic Journal* , vol. 7(1), pp. pages 17-41.

Carnoy, M., & McEwan, P. J. (2000) *Is private education more effective and cost-effective than public? The case of Chile*. Stanford: Stanford University.

Castelló-Climent, A., e Hidalgo-Cabrillana, A. (2009) *Quality and quantity of education in the process of development*. Open Access publications from Universidad Carlos III de Madrid.

Clements, B. (1999). *The Efficiency of Education Expenditure in Portugal*. IMF.

Cherchye, L., De Witte, K., e Ooghe, E. (2007). *Equity and efficiency in private and public education: a nonparametric comparison*. Center for Economics Studies.

Coelho, C. A., (2000). “Regressão Linear. Notas de Apoio à disciplina de licenciatura. Estatística e Delineamento Experimental” do Curso de Mestrado em Matemática Aplicada às Ciências Biológicas do ISA.

Cooray, A. (2010). *The Role of Education in Economic Growth*. School of Economics. Australia: University of Wollongong.

Coulombe, S., e Tremblay, J.-F. (2009). Education, Productivity and Economic Growth: A Selective Review of the Evidence. *International Productivity Monitor* , vol. 18, pp. pages 3-24.

Daraio, C., e Léopold, S. (2007). *Advanced Robust and Nonparametric Methods in Efficiency Analysis*. Springer.

Gruetter, M. (2005). *Returns to Foreign Education: Yet Another But Different Cross Country Analysis*. Institute for the Study of Labor (IZA).

Gundlach, E., Woessmann, L., e Gmelin, J. (1999). *The Decline of Schooling Productivity in OECD Countries*. Kiel Institute for the World Economy.

Hanushek, E. A., e Woessmann, L. (2010). *The high cost of low education performance*. PISA, OCDE.

Hanushek, E. A., e Woessmann, L. (2007a). *The role of education quality in economic growth*. Policy Research Working Paper Series 4122. The World Bank.

Hanushek, E. A., e Woessmann, L. (2007b). *The Role of School Improvement in Economic Development*. CESifo Group Munich.

Hanushek, E., e Woessmann, L. (2009). *Do Better Schools Lead to More Growth? Cognitive Skills, Economic Outcomes, and Causation*. Stanford Institute for Economic Policy Research.

Härdle, W., e Jeong, S.-O.,. (2005). *Nonparametric Productivity Analysis*. Sonderforschungsbereich 649. Berlin, Germany: Humboldt University.

Holbrook, C. E. (2006). *The Economics of Education: A Case Study of Wachusett Regional High School*. Economics Honors Papers., Paper 3.

Lopez, R., Thomas, V., e Wang, Y. (1998). *Addressing the education puzzle : the distribution of education and economic reform*. The World Bank.

Marques, R. C., e Silva, D. (2006). Inferência estatística dos estimadores de eficiência obtidos com a técnica fronteira não paramétrica de DEA: Uma metodologia de Bootstrap. *Inv. Op.* , vol.26, no.1, p.89-110.

Martins, P. S., e Pereira, P. T. (2004). Does education reduce wage inequality? Quantile regression evidence from 16 countries. *Labour Economics* , vol. 11(3), pages 355-371.

Mimoun, M. B., e Raies, A. (2009). Education and economic growth: the role of public expenditures allocation. *Economics Bulletin* , vol. 29(3), 2404-2416.

Mukherjee, A. N. (2007). *Public expenditure on education: A review of selected issues and evidence*. National Institute of Public Finance and Policy.

Neves, T., Pereira, J., e Nata, G. (2012). One dimensional school rankings: a non-neutral device that conceals and naturalizes inequalities. *International Journal of School Disaffection* , Vol.9 n° 1, pp.7-22.

Pascoe, S.; Mardle, S. (Eds). (2003). *Efficiency analysis in EU fisheries: Stochastic Production Frontiers and Data Envelopment Analysis*. UK: CEMARE, University of Portsmouth.

Pereira, P. T., e Martins, P. S. (2001). *Is there a Return-Risk Link in Education?* Institute for the Study of Labor (IZA).

Pereira, P. T., e Martins, P. S. (2004). Returns to education and wage equations. *Applied Economics* , vol. 36(6), pages 525-531.

Pessoa, A. (2008). *Educational Reform in Developing Countries: Private Involvement and Partnerships.*, Faculdade de Economia do Porto. Porto: FEP Working Papers 284, Universidade do Porto.

Sarabando, P. (s.d.). *Análise de regressão linear simples*. Obtido em 16 de Agosto de 2013, de <http://www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/psarabando/regressao%20simples%20aluno.pdf>

Schoellman, T. (2008). *Measuring and Accounting for Cross-Country Differences in Education Quality*. Germany: University Library of Munich.

Schütz, G. (2009). *Does the Quality of Pre-primary Education Pay Off in Secondary School? An International Comparison Using PISA 2003*. Ifo Institute for Economic Research at the University of Munich.

Sequeira, T. N., e Ferraz, N. (2008). *Is Education prejudiced by Country-Risk? A Panel-Data Study using Attainment Data and Country-Risk as a Rational Expectation*. Departamento de Gestão e Economia (Portugal). Universidade da Beira Interior.

Sequeira, T., e Robalo, P. (2008). Schooling Quality in a Cross Section of Countries: a replication exercise and additional results. *Economics Bulletin* , vol. 9(9), pages 1-7.

Simar, L., e Wilson, P. (2008). Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: Recent Developments and Perspectives. In (Fried, Lovell, & Schmidt, 2008), *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Change* (pp. 421-521). New York: Oxford University Press.

Simar, L., e Wilson, P. (1999). *Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: the State of the Art*. Catholique de Louvain - Institut de statistique.

Simar, L., e Wilson, P. W. (2002). Non-parametric tests of returns to scale. *European Journal of Operational Research* , vol. 139(1), pp. pages 115-132.

St. Aubyn, M. (2002). Avaliação da Eficiência em Portugal nos Sectores da Saúde e da Educação. *Desenvolvimento Económico Português no Espaço Europeu: Determinantes e Políticas* (p. Sessão 3). Banco de Portugal.

St. Aubyn, M., e Pereira, J. (2004). *What Level of Education Matters Most for Growth? Evidence from Portugal*. Technical University of Lisbon.: Department of Economics at the School of Economics and Management (ISEG) .

Teixeira, A., e Fortuna, N. (2003). *Human Capital, Innovation Capability and Economic Growth*. Porto: Universidade do Porto, Faculdade de Economia do Porto.

Wadud, M. A., Islam, Q. B., e Islam, T. S. (2007). Relationship between education and GDP growth: a multivariate causality analysis for Bangladesh. *Economics Bulletin* , vol. 3(35), pages 1-7.

Woessmann, L. (2000a). *Schooling Resources, Educational Institutions, and Student Performance: The International Evidence*. Kiel Institute for the World Economy.

Woessmann, L. (2000b). *Specifying Human Capital: A Review, Some Extensions, and Development Effects*. Kiel Institute for the World Economy.

Yamamura, E. (2010). *Public spending on education: Its impact on students skipping classes and completing school*. Germany: University Library of Munich.