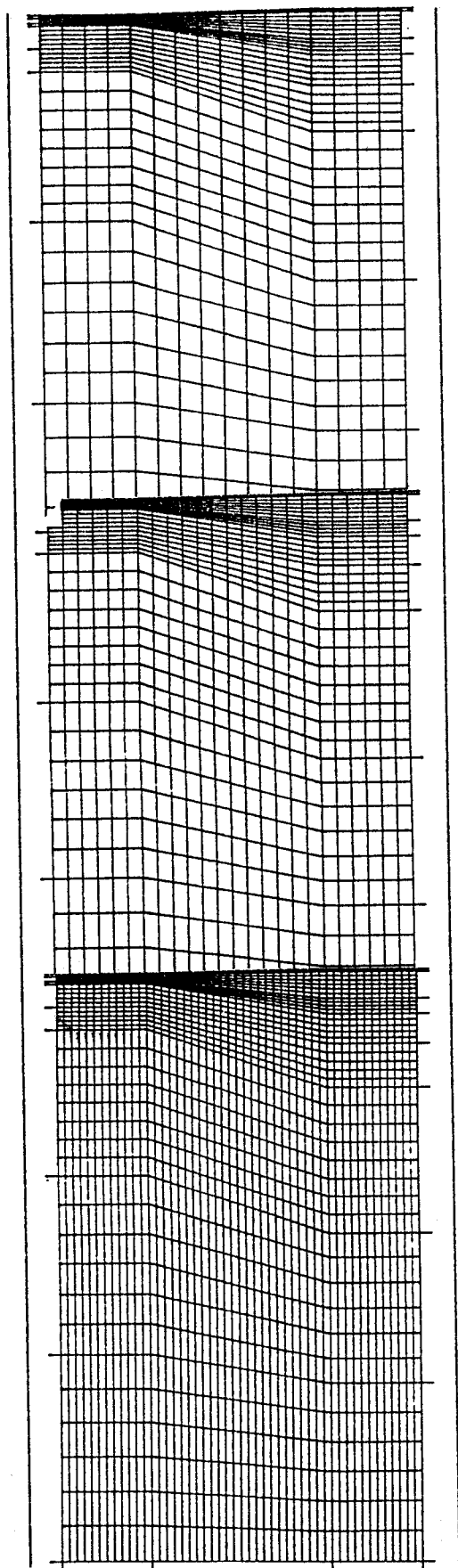


Augusto José dos Santos Fitas

PROPAGAÇÃO
DE
ONDAS DE RAYLEIGH
NUMA GEOMETRIA
BIDIMENSIONAL
PELO
MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS:
contribuição
para o modelo
da margem
continental ocidental
da Península Ibérica



Évora
1990

Augusto José dos Santos Fitas

PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH
NUMA GEOMETRIA BIDIMENSIONAL
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS:
contribuição para o modelo da margem continental
ocidental da Península Ibérica

*Dissertação apresentada à Universidade de Évora
para a obtenção do grau de DOUTOR em Física,
especialidade de Geofísica.*



103 088

Évora, 1990

À memória do meu pai:

*uma mágoa imperecível, talvez um forte sentimento
de culpa, por não te ter mostrado em vida
a garatuja destas páginas;*

À minha mãe:

*pelos teus silêncios e afagos, pela compreensão
de que sempre me rodeaste;*

À Isabel:

*pela fantasia e paixão com que soubeste sorrir aos
sacrifícios;*

Ao Manuel, ao João e à Catarina ...

L'HOMME AUX QUARANTE ÉCUS

On passe sa vie à espérer, et on meurt en esperant.
Adieu Monsieur; vous m'avez instruit, mais j'ai le
coeur navré.

LE GÉOMETRE

C'est souvent le fruit de la science.

(Voltaire, *L'homme aux quarante écus*, in
Romans, Paris, Le Livre de Poche,
1961)

NOTA PRÉVIA

Quando me foi proposto este tema para a elaboração da minha dissertação estava longe de supôr o trajecto que iria percorrer. Este caminho constituiu, mais do que a meta eventualmente alcançada, a parte mais rica desta minha experiência académica: conhecia quatro ou cinco artigos fundamentais onde, no essencial, o problema estava formulado, tudo o mais teve que ser reconstruído, pedra a pedra, a fim de chegar a resultados, de poder confrontar conclusões, de submeter os modelos ensaiados ao crivo da observação.

Durante três a quatro anos, assente numa trama muito ténue, pacientemente, foi-se urdindo toda a peça.

Primeiro houve que compreender a fundamentação analítica do método dos elementos finitos e a sua aplicação aos problemas da elastodinâmica. Nesta área a literatura mais abundante está ligada às Ciências da Engenharia, onde o método é profusamente usado, e esta foi uma das minhas grandes fontes. Depois, já conhecidos os pilares teóricos, enfrentou-se a tarefa de elaborar todo o procedimento para cálculo automático, com o propósito de colher resultados numéricos sobre o comportamento dos modelos empregues. Nesta fase do meu trajecto surgiram as primeiras grandes dificuldades que marcaram decisivamente o futuro de todo o trabalho. Um dos objectivos a que me propunha, e que não atingi, consistia na feitura de um corpo de programas, completamente testados, de aplicação do método dos elementos

finitos a diferentes tipos de problemas em sismologia. É uma tarefa que me disponho a cumprir a curto prazo. Todas as rotinas construídas, e na sua maioria publicadas nos APÊNDICES desta dissertação, permitiram os cálculos efectuados, mas devem, em muitos aspectos, ser melhoradas e completadas. Por último, a confrontação com os dados provenientes da observação constituiu também uma parcela do trabalho bastante morosa e um pouco frustrante. Todos os registos obtidos eram analógicos e grande parte deles não estava em condições de ser digitalizada, além disso uma das estações sismográficas (Ponta Delgada) esteve, durante intervalos de tempo longos, inoperativa, o que me obrigou a prescindir de bastante informação.

Embora grande parte do meu trabalho fosse uma actividade solitária (eu, os artigos, o computador e os registos sismográficos), não formei de modo nenhum um sistema isolado. Muito fiquei a dever à discussão, à entre-ajuda e solidariedade de colegas e amigos:

ao Prof.Doutor Luís Alberto Mendes Victor, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, orientador desta dissertação, que sempre incentivou e estimulou a minha actividade científica, com quem travei discussões úteis ao longo da execução deste trabalho, o que contribuiu de uma forma fundamental para a sua realização;

ao Prof.Doutor José Badal, da Universidade de Saragoça, pelas frutuosas trocas de opiniões e pelo apoio empenhado no envio de bibliografia importante e decisiva;

ao Prof.Doutor Rui Namorado Rosa, Presidente do Departamento de Física da Universidade de Évora, pelo interesse e atenção sempre manifestado sobre o decorrer do meu trabalho, como também pelo prontidão que sempre colocou em garantir o apoio material do Departamento à minha actividade de investigação;

à Prof.Doutora Ana Maria Almeida e Silva, do Departamento de Física da Universidade de Évora, amiga e colega que, em momentos chave, para além do seu estímulo, solidariamente me

substituiu em muitas tarefas;

às minhas colegas do Departamento de Física da Universidade de Évora, Dr^{as} Maria Rosa Duque e Mariana Valente, pelo encorajamento e solidariedade que incondicionalmente sempre me manifestaram;

ao Sr. José Gomes, desenhador na Universidade de Évora, pela disponibilidade e eficiência paenteadas na realização dos desenhos;

ao Instituto Geofísico da Universidade do Porto, na pessoa do seu Director, Prof. Doutor José Montenegro, pela forma pronta e colaborante com que sempre atendeu os meus pedidos de cópias de sismogramas;

à Direcção Regional dos Açores do Instituto Nacional de Meteorologia e Geofísica, pelo envio pronto das cópias de sismogramas solicitadas;

ao Serviço de Computação da Universidade de Évora, a todo o seu pessoal, pela colaboração que me foi prestada na utilização das suas instalações e dos seus meios de cálculo;

a todos os meus amigos porque, como disse o poeta, a amizade "é a solidão derrotada!".

NOTAÇÃO	7
1 - INTRODUÇÃO	9
2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E A TEORIA DA ELASTICIDADE	
2.0. <u>Introdução</u>	21
2.1. <u>Pressupostos da Teoria da Elasticidade:</u>	
2.1.1. O tensor das tensões e o tensor das deformações	24
2.1.2. Lei de Hooke e energia potencial elástica	26
2.1.3. Equação de movimento e condições fronteira	28
2.2. <u>Métodos variacionais; Resolução aproximada</u>	
2.2.1. <u>Introdução</u>	29
2.2.2. <u>Algumas definições prévias</u>	31
2.2.3. <u>Formulação fraca</u>	32
2.2.4. <u>Formulação variacional do problema elastodinâmico</u>	35
2.2.5. <u>Significado físico da formulação variacional</u>	39
2.3. <u>O método dos elementos finitos</u>	
2.3.1. <u>Introdução</u>	40
2.3.2. <u>O método dos elementos finitos</u>	41
2.3.3. <u>Polinômios de Lagrange</u>	44
2.3.4. <u>Elementos finitos afins</u>	47
2.3.5. <u>Formulação isoparamétrica</u>	49
2.4. <u>Aplicação do método dos elementos finitos ao problema fundamental da elastodinâmica:</u>	
2.4.1. <u>As equações da elasticidade e a solução aproximada</u>	53
2.4.2. <u>O método dos elementos finitos e a equação elastodinâmica</u>	55
2.4.3. <u>Determinação da matriz rigidez e da matriz de massa</u>	58
2.5. <u>Erros na aproximação do método dos elementos finitos</u>	
2.5.1. <u>Introdução</u>	60
2.5.2. <u>Convergência do método</u>	61

2.5.3. Cálculo do erro	62
------------------------	----

3 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH EM MEIOS ESTRATIFICADOS HORIZONTALMENTE

3.0. <u>Introdução</u>	65
3.1. <u>Propagação de ondas planas de Rayleigh</u>	
3.1.1. Ondas de Rayleigh num meio verticalmente heterogéneo	67
3.1.2. Condições para a propagação num meio estratificado horizontalmente	71
3.1.3. Matriz propagadora	73
3.2. <u>A formulação discreta para a propagação de ondas planas de Rayleigh</u>	
3.2.2. Condições para a propagação num meio estratificado	75
3.2.2. Matriz de massa e matriz rigidez de um elemento	76
3.2.3. Matriz de massa e matriz rigidez do estrato	80
3.2.4. A equação de movimento	84
3.2.5. Discussão da equação de movimento	85
3.2.6. Expressão para a velocidade de grupo	87
3.3. <u>A resolução da equação de movimento</u>	
3.3.1. Uma primeira solução da equação quadrática aos valores e próprios	88
3.3.2. Solução da equação quadrática transformada	89
3.3.3. Nova expressão para o cálculo da velocidade de grupo	91
3.4. <u>Considerações particulares sobre a malha</u>	92

4 - CÁLCULO DOS ERROS

4.0. <u>Introdução</u>	95
4.1. <u>Resolução do problema aos valores próprios</u>	
4.1.1. Método para o Cálculo dos valores próprios	96
4.1.2. Fluxograma de cálculo	98
4.1.3. Cálculo dos erros: resultados obtidos	99
4.2. <u>Erros na aproximação do método dos elementos finitos</u>	
4.2.1. Solução teórica	103

4.2.2. Resultados obtidos

105

5 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH EM MEIOS ESTRATIFICADOS HORIZONTALMENTE (Resultados numéricos)

5.0. <u>Introdução</u>	109
5.1. <u>Modelos da Plataforma Continental a Oeste da Península Ibérica</u>	
5.1.1. Os modelos de Payo	111
5.1.2. Os modelos de gerais para a crosta e manto superior	113
5.1.3. O método dos elementos finitos e os modelos gerais	116
5.2. <u>Propagação oceanica e continental: resultados e conclusões</u>	
5.2.1. Modos de vibração	117
5.2.2. Deslocamento superficial	120
5.2.3. Elipsidade	123
5.2.4. Velocidade de fase	124
5.2.5. Velocidade de Grupo	129
5.2.6. Propagação crustal e ao longo de um canal	131
5.3. <u>Aplicação do Método de Knopoff à Propagação oceanica e continental</u>	
5.3.1. Velocidade de fase	136
5.3.2. Velocidade de Grupo	141
5.3.3. Modos de Vibração e Elipsidade	145
5.4. <u>Conclusões</u>	147

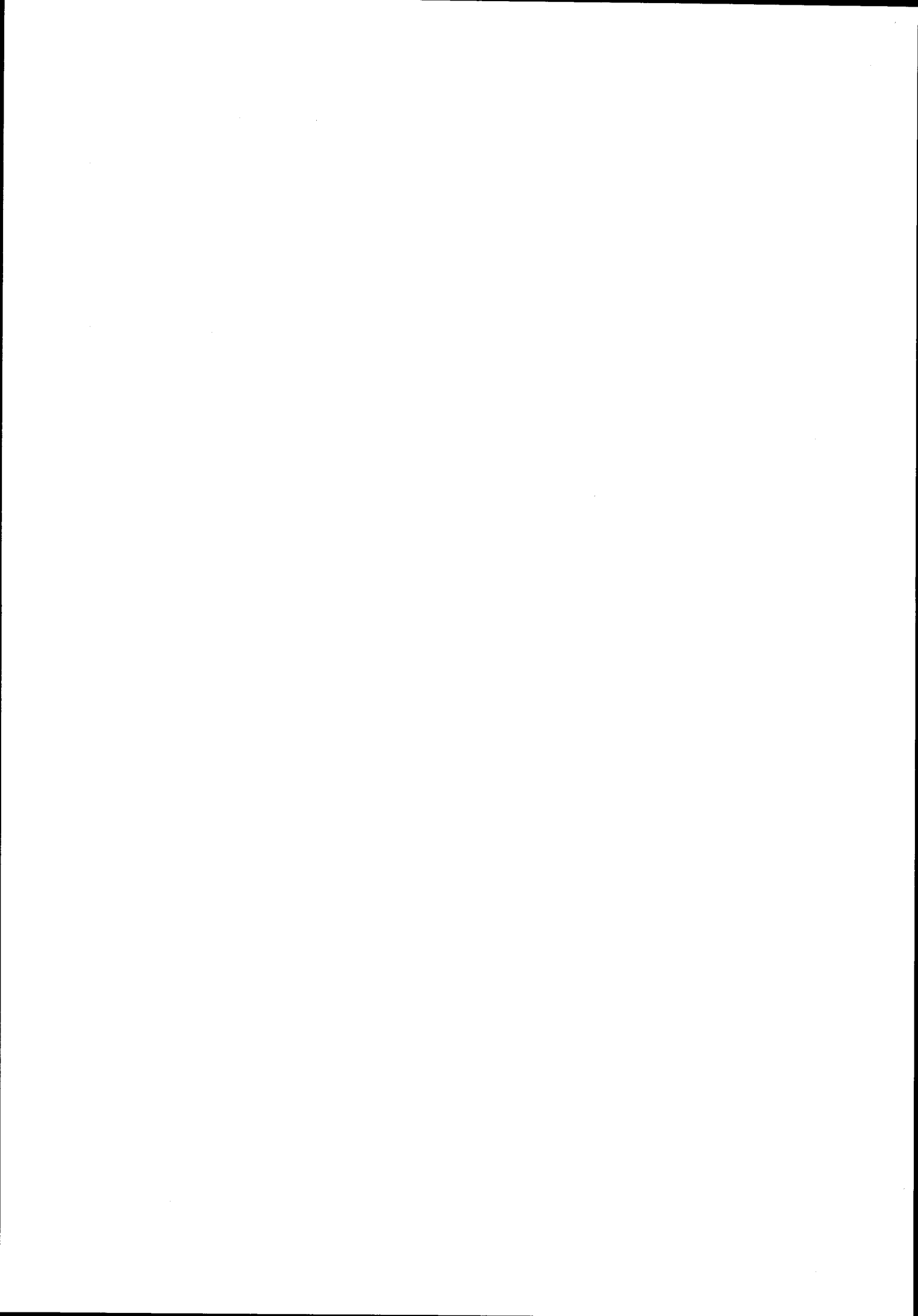
6 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH NUM MEIO NÃO HOMOGÉNEO

6.1. <u>Equação do movimento numa zona não homogéneo</u>	
6.1.1. <u>Introdução</u>	149
6.1.2. <u>Matriz rigidez e matriz de massa</u>	150
6.1.3. <u>Determinação do vector força na fronteira</u>	153
6.1.4. <u>Equação final do movimento</u>	158
6.2. <u>Campo de deslocamentos e repartição de energia</u>	161

7 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH NUM MEIO NÃO HOMOGÉNEO (Resultados numéricos)	
7.1. <u>Modelo da Margem Continental Atlântica da Península Ibérica</u>	
7.1.1. Introdução	163
7.1.2. O modelo de margem continental utilizado no método dos elementos finitos	164
7.2. <u>Propagação segundo a direcção oceano-continente</u>	
7.2.1. Deslocamento na margem continental	167
7.2.2. Deslocamento superficial	172
7.2.3. Velocidade de fase na margem continental	176
7.2.4. Factores de transmissão e reflexão	180
7.2.5. Repartição de energia	184
7.2.6. Conclusões	191
7.3. <u>Propagação segundo a direcção continente-oceano</u>	
7.3.1. Introdução	192
7.3.2. Deslocamento superficial	193
7.3.3. Velocidade de fase na margem continental	197
7.3.4. Factores de transmissão e reflexão	199
7.3.5. Repartição de energia	201
7.3.6. Conclusões	206
7.4. <u>Conclusões sobre as duas direcções de propagação</u>	207
8 - OBSERVAÇÕES DO PERCURSO ATLÂNTICO-PENÍNSULA IBÉRICA, AJUSTE DE UM MODELO	
8.1. <u>Observações Experimentais</u>	211
8.2. <u>Resultados Obtidos</u>	213
8.3. <u>Interpretação dos resultados</u>	215
9 - CONCLUSÕES	225

APÊNDICES

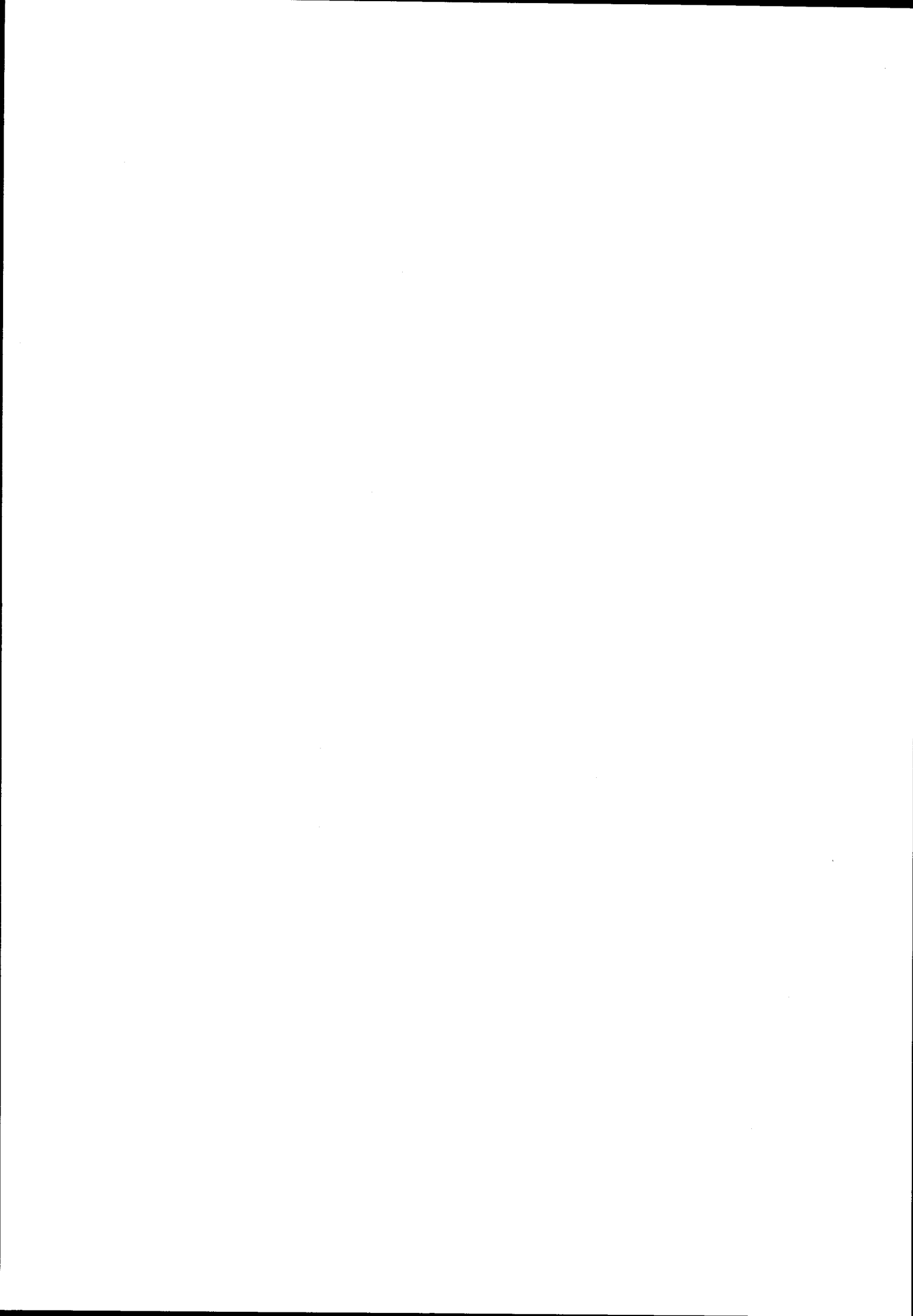
A1.	<u>Procedimento Geral de cálculo para a Propagação de ondas de Rayleigh num meio estraticado horizontalmente</u>	
A1.1.	Descrição das principais unidades (rotinas)	233
A1.2.	Fluxograma de cálculo	234
A1.3.	Rotinas em FORTRAN	235
A2.	<u>Procedimento Geral de cálculo para a matriz rigidez e matriz de massa</u>	
A2.1	Integração numérica	251
A2.2.	Fluxograma da determinação da matriz rigidez e da matriz de massa	252
A2.3.	Rotinas em FORTRAN	254
A3.	<u>Procedimento Geral de cálculo para a Propagação de ondas de Rayleigh num meio estraticado horizontalmente</u>	
A3.1.	Método Numérico para a resolução do sistema	263
A3.2.	Fluxograma para o cálculo automático	265
A3.3.	Rotinas em FORTRAN	266
A4.	<u>Procedimento Geral de cálculo para o tratamento digital dos Sismogramas</u>	
A4.1.	Fluxogramas para o cálculo automático	277
A4.2.	Rotinas em FORTRAN	279
	BIBLIOGRAFIA	291



Em toda a dissertação a notação é sempre definida no momento em que é utilizada. Contudo, procurou-se manter uma certa uniformidade dos símbolos empregues.

Em seguida apresentamos uma lista de símbolos que possuem significado constante ao longo de toda a dissertação.

- (x_1, x_2, x_3) - sistema de coordenadas cartesiano
- (x, y, z) - sistema de coordenadas cartesiano
- V - volume
- S - superfície
- Φ - deslocamento de componentes Φ_i ($i=1,2,3$)
- ϵ - tensor das deformações de componentes ϵ_{ij} ($i,j=1,2,3$)
- τ - tensor das tensões de componentes τ_{ij} ($i,j=1,2,3$)
- λ - parâmetro de Lamé
- μ - parâmetro de Lamé
- ρ - densidade volúmica
- δ_{ij} - símbolo de Kronecker
- U - energia potencial elástica
- t - tempo
- \mathcal{D}_α - conjunto de funções deriváveis
- $\mathcal{H}^m(\Omega)$ - o espaço de Sobolev
- $B(\cdot, \cdot)$ - forma bilinear
- $l(\cdot)$ - uma forma linear
- Ω - domínio ou região do espaço
- Ω_e - subdomínio de Ω
- Γ - fronteira de Ω
- ϕ_i - graus de liberdade
- a_i - funções de forma
- N_i - funções de forma
- (ξ, η) - sistema de coordenadas locais
- $\Phi_{i,j}$ - a componente i ($i=1,2,3$) do deslocamento do nodo j
- u_i - amplitude da componente do deslocamento segundo a direcção i
- $[M]_e$ - matriz de massa do elemento e
- $[K]_e$ - matriz rigidez do elemento e
- $[M]$ - matriz de massa
- $[K]$ - matriz rigidez
- $[L]_j$ - matriz rigidez do estrato j
- α - velocidades das ondas P
- β - velocidades das ondas S
- ω - frequência angular
- k - número de onda
- c - velocidade de fase
- α_j - factores de participação do modo j .
- h - largura de um elemento finito
- b_i - espessura de um elemento finito da camada i
- V_G - velocidade de grupo



1 - INTRODUÇÃO

1. O advento de técnicas convenientes a utilizar nos computadores digitais, a possibilidade de obtenção de registos sismográficos de longo período das três componentes das ondas superficiais, permitiu o início do uso intensivo deste tipo de ondas no estudo da estrutura da crosta e do manto superior do nosso planeta. De facto, a parte mais importante dos registos sismográficos obtidos nas estações de longo período da WSSN (Worldwide Standard Seismograph Network) provem das ondas superficiais, a maior parte da melhor informação colhida na banda de longo período do espectro das ondas sísmicas refere-se às ondas superficiais.

As ondas superficiais de longo período, períodos compreendidos entre 10 e 200 s, constituem uma valiosa fonte de informação quer sobre a estrutura interna da Terra, quer sobre o mecanismo focal responsável pela deflagração sísmica. Determinações baseadas em trabalhos de refração sísmica forneceram indicações aproximadas da distribuição das diferentes camadas constituintes da crosta. É esta característica, existência de estratos, que permite explicar, para este tipo de ondas, o aumento da velocidade com a profundidade e a sua dispersão. É

com base na análise das ondas superficiais que se concluiu sobre as diferenças regionais da constituição física da crosta e do manto superior, Kovach(1978).

O estudo destas ondas revelou-se determinante quer nas conclusões sobre as variações laterais da camada mais exterior do globo, quer na pesquisa, em pormenor, das zonas conhecidas como os canais de baixa velocidade que, de outra forma, não podiam ser conhecidas.

2. A solução para os problemas da propagação de ondas em meios não homogêneos, onde a variação dos parâmetros físicos é função de uma única coordenada, a profundidade, por exemplo, simplifica-se consideravelmente se se substituir este problema por um outro: a propagação das ondas num meio constituído pela sobreposição de um grande número de camadas paralelas homogêneas.

A solução para a propagação de ondas neste tipo de meios exprime-se como a solução de um sistema de equações em que cada uma destas corresponde à solução elementar da equação de onda na fronteira entre duas camadas contíguas.

A primeira formulação matricial deste problema deve-se a Thomson(1950), tendo sido posteriormente corrigida e reelaborada por Haskell(1953), daí o designar-se pelo método de Thomson-Haskell. Este método permite a construção da função de dispersão das ondas superficiais através da elaboração de matrizes de camada, constituindo estas a relação entre as componentes do movimento numa interface da estrutura estratificada com o que ocorre na interface seguinte. O produto destas matrizes conduz à relação entre o movimento na superfície livre e o movimento na interface mais profunda. Baseados nesta função, sujeita às condições físicas impostas para cada uma das situações extremas (superfície livre e profundidade), estabelecemos a função de dispersão. A resolução

numérica desta função para diferentes frequências, ω , obriga à determinação de $c(\omega)$, onde c é a velocidade de fase.

Uma optimização desta técnica para a utilização do cálculo automático foi concebida por Schwab e Knopof (1970), fundamentando-se no método de Knopof (1964) que constituía uma alternativa, assente nas mesmas hipóteses, ao método de Thomson-Haskell.

No método de Knopoff a função de dispersão não se apresenta como um produto de matrizes, mas como solução da equação secular correspondente ao sistema homogéneo de $4N+2$ equações (no caso da propagação das ondas de Rayleigh) para N camadas homogéneas situadas sobre um semi-espço infinito. Esta equação é resolvida mediante a decomposição do determinante (de ordem $4N+2$) num produto de matrizes de interface que constituem submatrizes pertencentes à matriz inicial.

Este método foi melhorado com o objectivo de aplicar-se em meios estratificados possuindo um determinado coeficiente de inelasticidade, Schwab e Knopoff (1971). Veio ainda a sofrer ulteriores aperfeiçoamentos no sentido de permitir, com o cálculo automático, para além da determinação da relação de dispersão e dos deslocamento e tensão, em função da profundidade, o cálculo de sismogramas sintéticos, Schwab et al. (1986).

Quer o método de Thomson-Haskell, quer o método de Knopoff podem considerar-se como um caso particular do método da matriz propagadora descrito por Gilbert e Backus (1965).

3. Alternativamente a determinação dos valores e funções próprias, anteriormente referidos, e consequentes cálculos da velocidade de grupo para um meio multiestratificado horizontalmente, pode ser feita à custa de métodos variacionais, Aki e Richards (1980).

As equações da elastodinâmica podem ser adequadamente

derivadas através de um princípio variacional, considerando-se a existência de um Lagrangeano para um campo harmónico num meio elástico estratificado. Como resultado é possível obter um par de equações diferenciais de 1ª ordem do tipo das equações canónicas de Hamilton. Estas equações são precisamente as que se obtêm com base em métodos matriciais que foram referidos previamente, Kenett (1974).

Lord Rayleigh desenvolveu um caso particular do Princípio de Hamilton, actualmente designado por princípio de Rayleigh, que pode escrever-se, de acordo com Bulland (1989), do seguinte modo

$$\delta \int_V \mathcal{L}(s) dv = \delta \left[\omega^2 \int_V \mathcal{K}(s) dv - \int_V \mathcal{U}(s) dv \right]$$

onde \mathcal{L} é a densidade lagrangeana de um sistema conservativo, ω a frequência própria, \mathcal{K} a densidade volúmica de energia cinética, \mathcal{U} a densidade volúmica de energia potencial, s a função própria espacial, dv o elemento de volume, V o volume considerado e δ a variação em relação a s . Uma forma de resolver o funcional anterior é feita pelo método de Rayleigh-Ritz.

É uma resolução aproximada, cujo fundamento consiste em considerar como funções próprias combinações lineares de funções base $\Phi_i(z)$ que são escolhidas por forma a satisfazerem as condições fronteira,

$$f(z) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(z) .$$

Wiggins (1976) utilizou polinómios do terceiro grau como funções base e demonstrou que o método de Rayleigh-Ritz é uma alternativa ao método matricial e é mais eficiente. Uma aproximação similar foi feita por Bulland e Gilbert (1984).

4. Um método bastante relacionado com o que acabámos de descrever é o método dos elementos finitos. Este método constitui uma técnica para determinar as funções base quando da aplicação do método de Ritz-Galerkin como forma aproximada de resolução dos problemas variacionais. Este método, dito dos elementos finitos, possui uma larga aplicação em todos os problemas de geofísica, incluindo os sismológicos, devido à sua aplicação a qualquer domínio do espaço, geometricamente irregular e não homogéneo, bem como a problemas transientes.

A utilização pela primeira vez do método dos elementos finitos para o estudo da dispersão das ondas superficiais num meio estratificado horizontalmente deve-se a Lysmer (1970), Drake (1972) e a Lysmer e Wass (1972).

Estes autores consideraram um modelo bidimensional do meio em que se propaga a onda, estando, por sua vez, assente sobre uma base rígida que corresponde ao estrato mais profundo. Todo o espaço é dividido numa malha, constituída por elementos rectangulares, estabelecendo-se as seguintes hipóteses do comportamento dinâmico desta estrutura:

- a) a massa de cada elemento está concentrada nos seus nodos (vértices de contacto entre elementos contíguos);
- b) o deslocamento dos nodos de cada elemento definem completamente o campo de deslocamentos de toda a estrutura;
- c) quer as forças externas quer as forças entre os diversos elementos transmitem-se, na estrutura definida, somente através dos nodos dos elementos.

A segunda hipótese conduz a que o campo de deslocamentos de toda a estrutura seja representado por um vector de $2N$ componentes (havendo N nodos e tratando-se da propagação de ondas de Rayleigh). Fundamentados nesta hipóteses chegaríamos a uma equação secular do tipo

$$\| [B(k)] - \omega^2 [I] \| = 0$$

em que B é uma matriz de banda, real, e I a matriz identidade. O problema da determinação dos zeros desta equação reduz-se ao problema típico do cálculo de valores próprios.

A principal vantagem do emprego do método dos elementos finitos surge do facto de possibilitar uma formulação geral na forma de expressões algébricas lineares, cuja solução corresponde à equação geral de um problema aos valores próprios.

5. Um dos problemas fundamentais em sismologia é a análise da influência, na propagação das ondas sísmicas superficiais, das irregularidades estruturais existentes na crosta. Pretende-se encontrar soluções exactas ou aproximadas para a propagação de ondas de Rayleigh ou de Love que atravessem estruturas complexas, onde existe uma geometria claramente irregular e uma variação dos valores de todas as grandezas que descrevem fisicamente o meio. A formulação deste problema não é fácil, mesmo quando sujeito a hipóteses simplificadoras tais como a existência de deformações infinitesimais e de uma fonte sísmica bastante afastada. Um dos processos que se revelou bastante eficaz na resolução desta questão, por forma a encontrar uma solução aproximada, foi o método dos elementos finitos. Drake (1972a,b) e Lysmer e Drake (1971 e 1972) desenvolveram esta técnica para os problemas de sismologia a duas dimensões em que a estrutura não homogénea está limitada à esquerda e à direita por estruturas multiestratificadas horizontalmente (estruturas regulares), fig.1.1. Admite-se que a excitação a que a estrutura está sujeita corresponde a uma excitação harmónica que, geralmente, é uma onda superficial incidente proveniente de uma das estruturas regulares.

Esta análise é feita sobretudo à custa da determinação da velocidade média de fase da propagação das ondas superficiais ao longo da zona não homogénea, dos factores de transmissão e reflexão que correspondem a uma relação entre os deslocamentos verticais superficiais, e das taxas de energia transmitida e

reflectida para cada um dos modos da onda propagada.

Embora sem contribuições teóricas novas, é importante referir ainda o estudo de Smith (1975) sobre a aplicação do método dos elementos finitos à análise da propagação de ondas de volume, bem como o trabalho de Drake e Bolt (1989) onde este método é utilizado para a modelação da propagação de ondas superficiais ao longo de zonas de subducção.

Independentemente dos problemas numéricos colocados, das técnicas de computação empregues, das limitações, ao nível da capacidade de memória, dos computadores, o método dos elementos finitos possui uma grande eficácia no estudo da propagação de ondas através de um meio não homogêneo. Todavia, outros métodos existem para o estudo desta mesma questão e que foram trabalhados por outros investigadores.

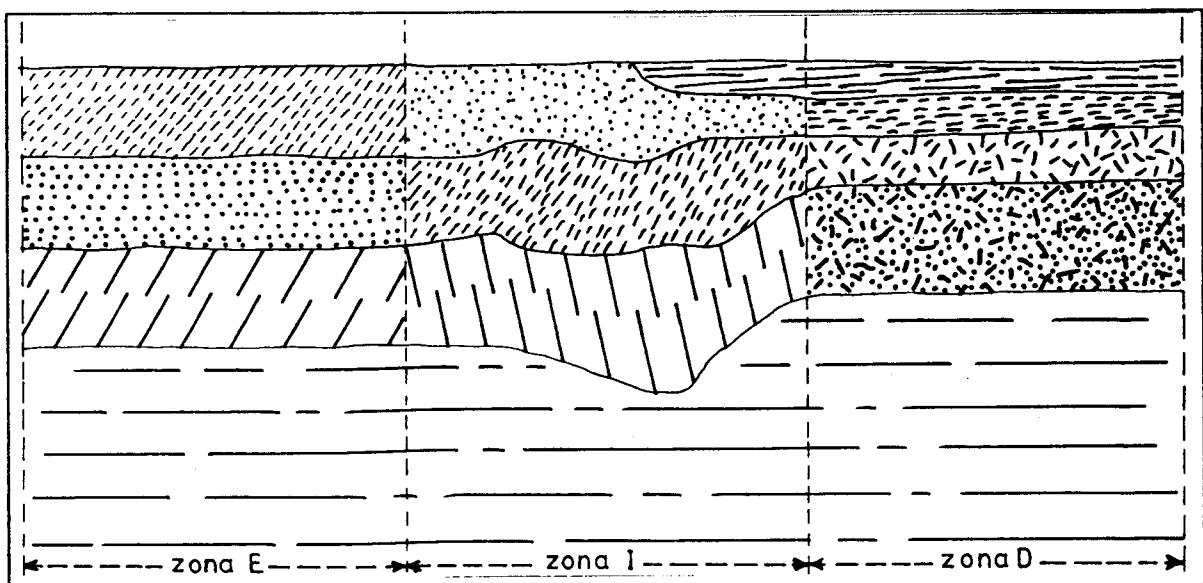


Fig.1.1 - Estrutura de geometria irregular (I) ladeada à esquerda (E) e à direita (D) por estruturas de estratificação horizontal.

6. Hudson e Knopoff (1965) desenvolveram um método baseado nos termos das funções de Green para as ondas superficiais, o

que permitia determinar os coeficientes de transmissão para as ondas de Rayleigh e de Love num problema bidimensional cuja geometria é descrita na fig.1.2(a).

Knopoff e Hudson (1964) aplicaram este método para o estudo da propagação das ondas de Love através da margem continental nos sentidos oceano-continente e inverso.

Herrera (1964) e Herrera e Mal (1965) trabalharam sobre uma teoria de pequenas perturbações para a propagação de ondas. Em geofísica é frequente encontrar regiões cuja geometria se aproxima bastante de outras zonas típicas, tal como o semi-espaço, e para as quais a função de Green é conhecida. É, portanto, natural tentar resolver o problema usando os métodos clássicos da teoria das perturbações o que permitiria transformar a região dada naquela para a qual é conhecida a função de Green.

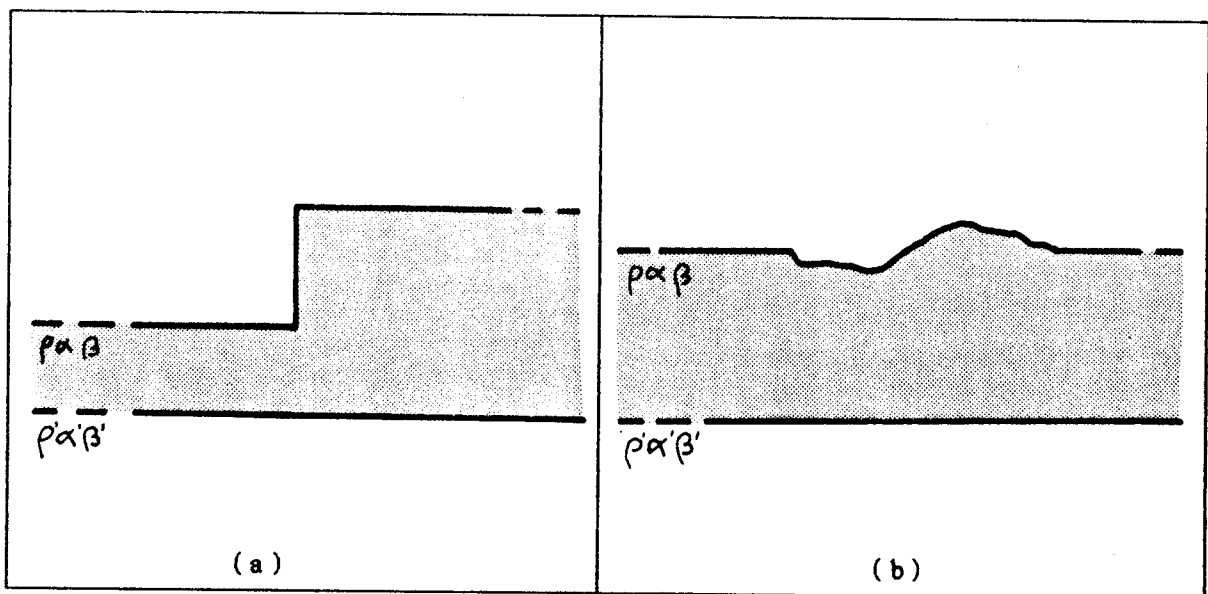


Fig.1.2.- (a) geometria utilizada por Knopoff e Hudson; (b) geometria utilizada por Herrera.

7. McGarr e Alsop (1967) determinaram, num modelo bidimensional, os coeficientes de transmissão e reflexão para as ondas de Rayleigh incidentes, segundo a normal a uma descontinuidade vertical, numa estrutura estratificada horizontalmente. O modo de Rayleigh incidente dá origem a todos os possíveis modos reflectidos no zona da esquerda, fig.1.3, a todos os possíveis modos transmitidos na estrutura à direita, bem como a outros tipos de ondas, incluindo ondas de volume.

A hipótese fundamental desta técnica é que a energia em jogo é calculada pelo campo de ondas de Rayleigh. Este método ignora quaisquer outras ondas que não sejam as ondas de Rayleigh geradas na fronteira entre os dois meios e utiliza um princípio variacional para obter o melhor ajustamento às equações de continuidade na superfície de separação dos dois meios. Alsop (1966) já utilizara este método para as ondas de Love.

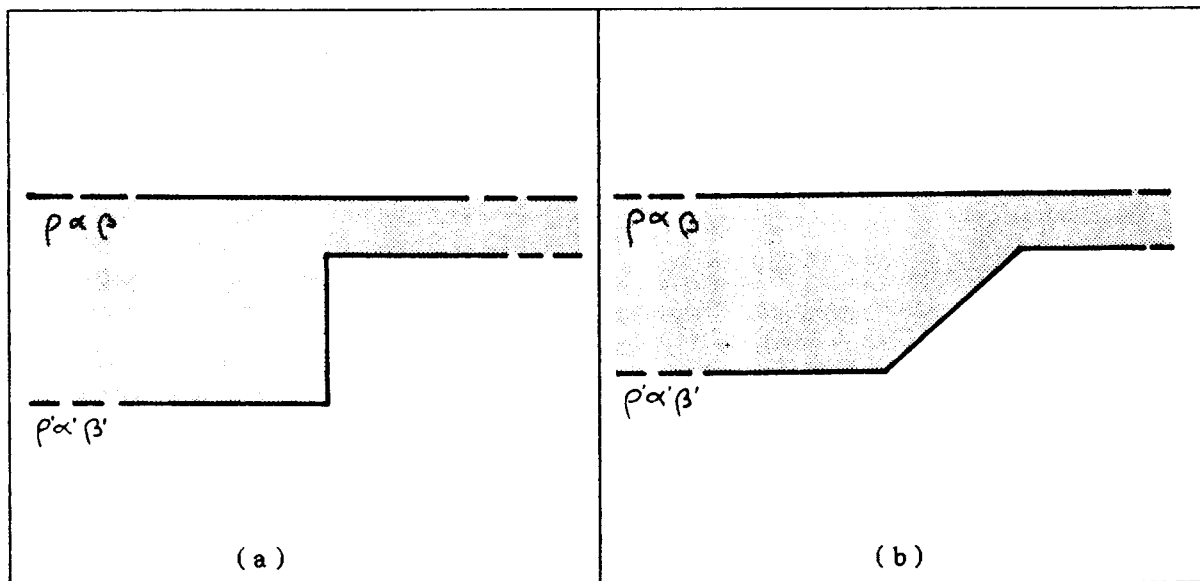


Fig.1.3.- (a) geometria utilizada por McGarr e Alsop; (b) geometria utilizada por Boore.

McGarr (1969) aplicou este método para estudar a

propagação de ondas de Rayleigh na margem continental da costa californiana. Comparou as razões entre as amplitudes verticais obtidas por sismómetros, na região oceânica e continental, com os resultados teóricos do factor de transmissão obtido por este método para as duas direcções de propagação. Consequentemente concluiu sobre as características dos modelos de ambas as estruturas.

8. Alterman e Karal (1968) aplicaram a formulação das diferenças finitas como método numérico de resolução das equações da elasticidade a uma estrutura estratificada horizontalmente. Em particular, é estudado o movimento das ondas de Rayleigh. Boore (1970 e 1972) aplicou este mesmo método ao estudo da propagação de ondas de Love através de um meio horizontalmente não homogéneo conforme a geometria representada na fig.1.3(b).

9. Há ainda a referir os trabalhos mais recentes de Seron e Badal (1986) e de Badal e Seron (1985 e 1987) onde o problema da propagação das ondas de Love através de um meio não homogéneo, de geometria bidimensional, é formulado variacionalmente e resolvido numericamente pelo método dos elementos finitos. Estes autores analisaram os resultados obtidos quando da aplicação a um modelo de margem continental Atlântica a Oeste da Península Ibérica.

10. Como acabámos de expôr a maioria destes métodos aplica-se a modelos excessivamente simplificadores da realidade física. Na generalidade, a descontinuidade vertical mencionada corresponde a um degrau existente na camada superior que está por sua vez assente sobre um semi-espaco com propriedades físicas diferentes. O método dos elementos finitos aplica-se a geometrias bastante mais irregulares. Acresce ainda o facto de que um método variacional possui, sobre um método aproximado

qualquer, um grau muito superior de exactidão dos resultados.

11. O estudo por nós efectuado da propagação bidimensional de ondas de Rayleigh através da margem continental Atlântica a Oeste da Península Ibérica é desenvolvido segundo a sucessão das fases seguintes:

a) a formulação variacional fraca do problema elastodinâmico como consequência da resolução de um problema de condições dos valores fronteira, tendo por base o Teorema de Lax-Millgram, em que a solução do funcional obtido é calculada pelo método dos elementos finitos de modo a obter as equações de movimento na forma discretizada;

b) formulação discreta para a propagação de ondas de Rayleigh em meios estratificados horizontalmente e sua aplicação concreta aos modelos das estruturas tipo continental e tipo oceânica a Oeste da Península Ibérica; comparação destes resultados com os obtidos pelo método de Knopoff que é aquele a que mais vulgarmente se recorre;

c) determinação quer dos erros provocados pela aplicação do método dos elementos finitos em relação a uma solução teórica, quer dos decorrentes dos métodos numéricos específicos que são empregues; conclusões sobre alguns dos algoritmos utilizados;

d) formulação discreta para o caso da propagação de ondas de Rayleigh num meio heterogéneo, obtenção de resultados numéricos para uma geometria correspondente à margem continental Atlântica a Oeste da Península Ibérica definida sob proposta dos modelos apresentados em b); são apresentados os resultados para as duas direcções de propagação: oceano-contidente e contidente-oceano;

e) comparação dos resultados anteriores, em particular do coeficiente de transmissão, com as observações provenientes de sismos registados simultaneamente numa estação situada na zona

oceânica (Ponta Delgada) e noutra situada na zona continental (Porto); conclusão sobre os modelos para a margem continental da Península Ibérica que melhor se ajustam aos resultados experimentais.

2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E A TEORIA DA ELASTICIDADE

2.0. Introdução

É nosso propósito em todo este capítulo desenvolver no essencial os aspectos teóricos subjacentes à utilização do método dos elementos finitos em sismologia.

Assim, inicialmente apresentamos os princípios fundamentais da mecânica dos meios contínuos que são necessários para a compreensão da sismologia, enunciando as equações que descrevem os fenómenos. Utilizamos o adjectivo contínuo no sentido de que todas as funções matemáticas utilizadas (é o caso da densidade, por exemplo), bem como as suas derivadas até à ordem em que surgem na descrição matemática, são contínuas. Por outras palavras, não nos interessa a estrutura molecular da matéria e admitimos que no seu interior não há espaços vazios. Utilizamos a formulação Lagrangeana que se revela de grande utilidade na teoria das ondas superficiais. As equações expostas, bem como as condições a que estão sujeitas, constituem a descrição física utilizada no desenvolvimento ulterior de aplicação do método dos elementos finitos. Esta síntese assentou nas obras

Aki e Richards (1980), Ben-Menahem e Singh (1981), Pilant (1979), Tolstoy (1973).

Todos os fenômenos físicos que ocorrem na natureza podem ser descritos em termos de equações às derivadas parciais. Nos casos em que, quer a equação, quer o domínio de aplicação são simples, obtém-se uma solução analítica, vulgarmente na forma de uma série infinita. Contudo, para domínios irregulares e complexos, casos que maioritariamente ocorrem na prática, desenvolveram-se esforços para encontrar novos métodos na determinação de soluções das equações às derivadas parciais. É neste contexto que surgiram os métodos baseados em soluções aproximadas.

Para a solução de uma determinada equação às derivadas parciais podemos recorrer à formulação de um problema variacional equivalente. É o que expomos no segundo ponto, com o enunciado do teorema de Lax-Millgram, Oden e Reddy (1978), Babushka e Aziz (1972), e que para seu devido enquadramento necessita de uma curta introdução de algumas entidades matemáticas, em particular dos espaços de Sobolev, Carey e Oden (1983), Johnson (1987), e determinadas definições relacionadas com este último conceito, desenvolvidas de uma forma muito resumida. Ainda dentro deste ponto aplicamos o teorema atrás mencionado ao caso concreto dos problemas da elastodinâmica, Ciarlet (1978), Babushka e Aziz (1972), Seron e Badal (1986), concluindo sobre a formulação variacional deste tipo de problemas. A fechar apresentamos um possível enunciado do Teorema de Lax-Millgram como teorema particular a utilizar na solução das equações diferenciais da elasticidade. Uma forma equivalente de chegar a esta mesma solução seria a utilização do Princípio de Rayleigh tal como é referenciado em Oden e Reddy (1982) e Buland (1988).

No entanto, os métodos variacionais tradicionais não são eficazes na resolução de problemas geometricamente complexos que possuem descontinuidades nas suas propriedades físicas e

geométricas. Há que recorrer a métodos aproximados.

O método dos elementos finitos é um procedimento variacional onde as funções aproximadas da solução são deduzidas com base na partição do domínio dado num conjunto de subdomínios. É o que apresentamos no terceiro subcapítulo; fundamentando-nos na formulação de Ciarlet (1978), também exposta em Caray e Oden (1983). As funções utilizadas na aproximação são polinómios algébricos, polinómios de Lagrange, que constituem a base das funções de interpolação. Aos subdomínios constituídos designamo-los por elementos finitos e são concebidos numa forma geométrica simples. As funções de aproximação, também designadas por funções interpoladoras, são definidas pelos valores que as variáveis assumem em determinados pontos específicos, pontos nodais, pontos que existem sobre a fronteira de elementos finitos adjacentes. O método dos elementos finitos utilizado na discretização do problema permite-nos trabalhar com um número finito de incógnitas.

No quarto subcapítulo aplicamos às equações definidas no segundo subcapítulo as conclusões encontradas no terceiro. Chegamos às conclusões já apresentadas por Lysmer e Drake (1971 e 1972).

Começamos por dizer que o método dos elementos finitos permite-nos encontrar uma solução aproximada do problema formulado variacionalmente, logo um dos aspectos importantes a ter em conta é a convergência da solução aproximada para a solução exacta. Pretende-se calcular a ordem de grandeza do erro que cometemos ao praticar este tipo de solução. Com base em Ciarlet (1978), Johnson (1987), Zienkiewicz (1972) e Badal e Seron (1984) apresentamos no último subcapítulo os erros neste tipo de aproximação.

*

* *

2.1. Pressupostos da Teoria da Elasticidade:

2.1.1. O tensor das tensões e o tensor das deformações

Primeira hipótese de trabalho: vamos considerar o meio material que será objecto do nosso estudo, como um meio contínuo, isto é, um volume infinitesimal possui as mesmas propriedades mecânicas de todo o volume V considerado. O volume V do meio definido está limitado pela superfície S e supomos que, como segunda hipótese de trabalho, pode sofrer deformações, deformações muito pequenas a que, sob o ponto de vista matemático, podemos aplicar a teoria das transformações infinitesimais afins, ou seja, dois pontos infinitamente próximos permanecem, após a deformação, igualmente na mesma situação (infinitamente próximos).

Adoptamos a descrição Lagrangeana do movimento, bem como um sistema de coordenadas cartesiano que passaremos a designar por (x_1, x_2, x_3) ou (x, y, z) , todos os tensores utilizados são cartesianos.

Para estudarmos a distorção de um meio sólido ou fluido, elástico ou não, utilizamos o tensor das deformações. Se o meio é elástico as forças que lhe são aplicadas podem provocar, além de uma translacção e rotaçção, como na mecânica do corpo rígido, uma variaçção relativa da posiçção das partículas materiais que o constituem, voltando o corpo ao seu estado primitivo no caso de as forças aplicadas cessarem de actuar. Admitimos que o meio é isotrópico: as suas propriedades mecânicas são em qualquer ponto independentes da direcçção.

Definimos tensor das deformações pela expressão

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.1.1a)$$

ou

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\Phi_{ij} + \Phi_{ji}] \quad (2.1.1b)$$

em que Φ_i é a componente segundo a direcção i do deslocamento $\vec{\Phi}$; este tensor é um tensor simétrico. As componentes ϵ_{ij} tem uma interpretação geométrica simples: ϵ_{ii} corresponde à deformação em extensão de um elemento linear que antes da deformação era paralelo à direcção x_i ; ϵ_{ij} corresponde à diminuição, provocada pela deformação, do ângulo entre dois elementos lineares que, antes da deformação, se orientavam segundo as direcções x_i e x_j , respectivamente.

A deformação corresponde ao movimento relativo das partículas do meio, resultando da existência de interacções entre partículas adjacentes no seio do contínuo. Para o estudo destas forças internas introduz-se o conceito de tensão e de tensor das tensões.

Tensão é um vector, força por unidade de área, que agindo através da superfície interna do meio, permite definir a força de contacto (por unidade de área) exercida pelas partículas de um lado da superfície sobre as que se situam do outro lado da fronteira de separação. Este conceito implica quer a continuidade do meio, quer o facto de as interacções entre as diferentes partes do meio se reduzirem a acções de superfície. Enquanto que as forças mássicas dentro do meio actuam em cada elemento de volume que o constitui, as forças de superfície actuam num ponto material P através do elemento de superfície a que este pertence.

Seja $\Delta\vec{F}$ a força resultante no elemento de superfície ΔS , provocada pela interacção da parte I do meio sobre a parte II do mesmo. Se \vec{n} for a normal a ΔS (possuindo a direcção de I para II), ao limite

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \vec{T}(\vec{n}) \quad (2.1.2)$$

designamos por tensão no ponto P . Se na expressão anterior decompuermos $\Delta\vec{F}$ nas suas componentes $\Delta\vec{F}_i$, definimos o tensor das tensões τ_{ij} como o limite



$$\tau_{ij} = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta s_j} \quad (2.1.3)$$

em que $\Delta s_j = n_j \Delta S = \vec{n} \cdot \vec{e}_j$, onde e_j representa o versor da direcção x_j . Tendo presente o resultado anterior (2.1.3) e a expressão (2.1.2) constatamos que a componente T_i da tensão \vec{T} está relacionada com o tensor das tensões pela fórmula

$$T_i(\vec{n}) = \tau_{ij} n_j \quad (2.1.4)$$

onde aplicamos a convenção de Einstein para o índice j .

2.1.2. Lei de Hooke e energia potencial elástica

Por definição, um corpo elástico volta ao seu estado inicial quando se anulam as forças exteriores que sobre ele actuam. Este retorno ao estado inicial resulta da existencia de tensões internas; as tensões e deformações anulam-se no estado de repouso. A experiência mostra que o comportamento elástico da maior parte das substâncias é descrito correctamente, sob a hipótese das defromações infinitesimais, através da relação linear

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.1.5)$$

A relação (2.1.5) é designada como a Lei de Hooke generalizada, onde os c_{ijkl} constituem as componentes de um tensor de quarta ordem. Com base em argumentos de natureza termodinamica, Aki e Richards (1980), prova-se a relação

$$c_{ijkl} = c_{klij}$$

sempre que o processo de deformação seja adiabático. Esta hipótese é aceite em sismologia, pois para comprimentos de onda superiores a alguns milímetros os períodos resultantes são

muito menores que a constante de tempo de difusão térmica nas rochas ($(\text{distancia})^2/\text{difusividade}$). Assim o número de constantes elásticas reduz-se a 21, número de parâmetros elásticos necessários para especificar o comportamento elástico do meio cristalino sujeito às hipóteses por nós enunciadas.

As constantes físicas de um material isotrópico são, por definição, independentes da escolha dos eixos de referência. Em particular, o tensor c_{ijkl} deve ser um invariante perante as transformações de eixos ortonormados. Demonstra-se que o tensor de quarta ordem mais geral, e que obedece às características de isotropia, tem por componentes as que se apresentam na expressão seguinte

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.1.6)$$

As propriedades mecânicas dum meio elástico isotrópico são definidas por dois parâmetros independentes, λ e μ , que se designam por parâmetros de Lamé. A lei de Hooke (2.1.6) exprime-se, neste caso, por

$$\tau_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + \mu \epsilon_{ij} \quad (2.1.7)$$

onde $\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ representa a variação de volume por unidade da mesma grandeza.

A hipótese de que os materiais que formam a crosta terrestre são isotrópicos justifica-se do seguinte modo: apesar de muitos materiais conterem substâncias cristalinas e no seu seio não haver isotropia, acontece que as suas dimensões são muito pequenas quando comparadas com as da crosta e, por outro lado, estão caoticamente dispersos, logo os materiais comportar-se-ão no seu todo como isotrópicos.

A aplicação em sismologia da relação linear entre tensão e deformação baseia-se na admissão de que o estado de referência, em relação ao qual se mede o aumento de tensão, é um

estado onde a deformação é nula, o que corresponde à configuração da Terra imediatamente anterior à ocorrência do sismo.

Uma grandeza importante para o estudo que adiante desenvolveremos é a energia interna. Energia interna, ou energia potencial elástica, U , correspondente a um determinado estado de tensão-deformação é dada pela seguinte expressão

$$U = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \tau_{kl} \quad (2.1.8)$$

2.1.3. Equação de movimento e condições fronteira

Num determinado volume V , delimitado pela superfície S , a equação que relaciona as forças aplicadas com os deslocamentos sofridos é

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \text{div } \tau + F \quad (2.1.9)$$

onde F representa as forças mássicas ou gravíticas e τ o tensor das tensões. A equação anterior, devido a

$$\tau_{j i , j} = \frac{\partial \tau_{j i}}{\partial x_j}$$

pode ainda apresentar-se

$$\rho \ddot{\Phi}_i = \tau_{j i , j} + F_i \quad (2.1.10)$$

e admitindo a convenção de Einstein para o índice j .

As expressões (2.1.10), (2.1.1) e (2.1.5) constituem um sistema de 15 equações a 15 incógnitas, o que nos permite determinar qualquer das variáveis pretendidas (deslocamento, tensão e deformação) desde que conheçamos as condições iniciais e as condições fronteira. Estas condições podem apresentar-se, para uma região Ω delimitada pela fronteira $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, da

seguinte forma:

a) condições iniciais ($i=1,2,3$) (r é o vector posição)

$$\Phi_i(r,0) = \Phi_{0i} \quad \text{em } \Omega \quad (2.1.11a)$$

$$\dot{\Phi}_i(r,0) = \dot{\Phi}_{1i} \quad \text{em } \Omega \quad (2.1.11b)$$

b) condições fronteira ($i=1,2,3$)

$$\Phi_i = \hat{\Phi}_i \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{de Dirichelet}) \quad (2.1.12a)$$

$$\tau_{ij}n_j = \hat{T}_i \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{de Newmann}) \quad (2.1.12b)$$

Em seguida vamos discutir a existência e unicidade de solução do problema aos valores fronteira expressos nas equações (2.1.10), (2.1.1), (2.1.5) e nas condições (2.1.11) e (2.1.12), determinando-a através da formulação variacional deste problema.

*
* *

2.2 Métodos variacionais; Resolução aproximada

2.2.1. Introdução

Pretendemos estudar a formulação variacional da resolução de equações diferenciais da forma

$$\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.1)$$

em que Δ é um operador linear que transforma um espaço

vectorial de funções, U , num outro espaço V .

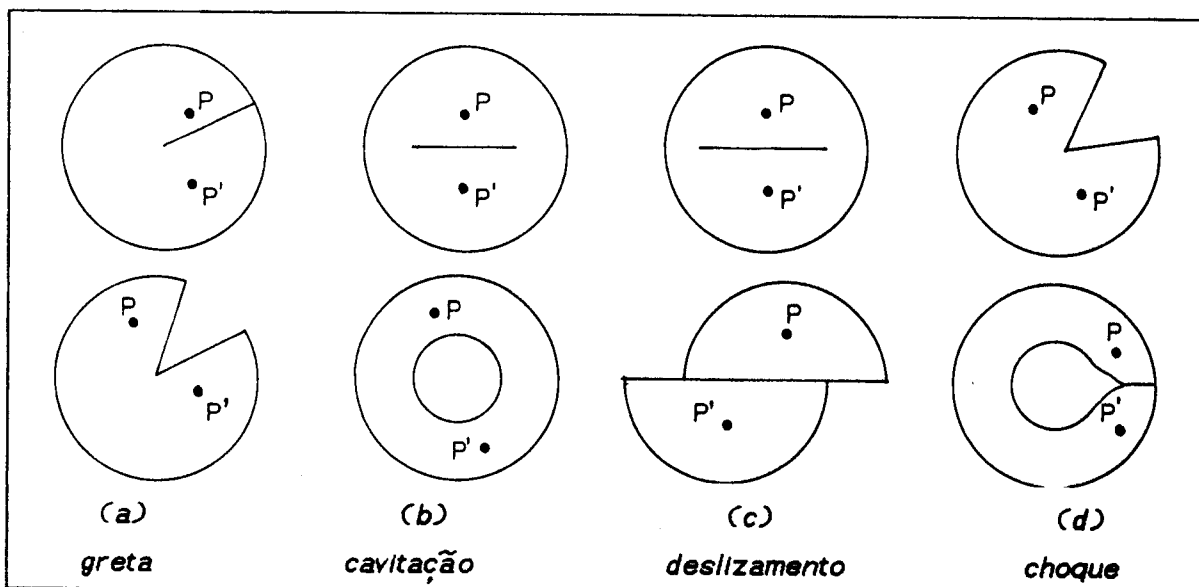


fig. 2.1 . Fenómenos mecânicos que podem ocorrer e que se excluem nesta dissertação.

Tomemos, como exemplo, a equação diferencial

$$-\nabla^2 u = -\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = f \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.2a)$$

sujeita às seguintes condições fronteira

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (2.2.2b)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e Γ é a fronteira de Ω ; ou seja vamos resolver o problema de Dirichlet da equação de Poisson. Admitindo que $f \in C^1(\Omega)$ e $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, determinar a solução do problema (2.2.2) significa encontrar a função $u(x,y)$ que é contínua no domínio Ω e satisfaz a equação (2.2.2a) em Ω , anulando-se em Γ . Se $f \in C^1(\Omega)$ então $u \in C^2(\bar{\Omega})$, u pertence ao espaço de funções contínuas com derivadas parciais contínuas até, incluindo, à ordem 2 e nulas em Γ . Este conjunto de funções deriváveis, \mathfrak{D}_α ,

simbolicamente

$$\mathfrak{D}_\alpha = \{ u(x) \in C^2(\Omega) , x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 , u=0 \text{ em } \Gamma \} \quad (2.2.3)$$

representa um espaço linear, o que não acontece se as condições fronteira forem não homogêneas.

Nas considerações feitas assumimos que a fronteira Γ é suficientemente regular, isto é, satisfaz as condições de Lipschitz. Damos alguns exemplos de domínios (a duas dimensões), fig 2.1, cujas fronteiras não satisfazem as condições de Lipschitz, correspondendo, em sismologia, a não considerar, como resultado da deformação provocada, o aparecimento de fraturas, cavitações, deslocamentos e choques.

2.2.2. Algumas definições prévias

Dada a região Ω limitada e pertencente a \mathbb{R}^3 , espaço euclidiano tridimensional, para cada inteiro $m \geq 0$ o espaço de Sobolev, $\mathfrak{H}^m(\Omega)$, é constituído por todas as funções $V(x,y,z) \in L^2(\Omega)$, ditas de quadrado somável, tal que as suas derivadas parciais de ordem σ

$$D^\sigma = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^{\sigma_1} \partial y^{\sigma_2} \partial z^{\sigma_3}} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = |\sigma| , |\sigma| \leq m \quad (2.2.4)$$

também pertencem ao espaço $L^2(\Omega)$. Sinteticamente podemos usar, para o espaço de Sobolev, a representação

$$\mathfrak{H}^m(\Omega) = \left\{ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^\sigma v}{\partial x^{\sigma_1} \partial y^{\sigma_2} \partial z^{\sigma_3}}, \dots, \frac{\partial^m v}{\partial z^m} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (2.2.5)$$

Este espaço possui as seguintes propriedades :

(a) é linear,

$$u, v \in \mathfrak{H}^m(\Omega) , \quad \alpha u + \beta v \in \mathfrak{H}^m(\Omega) \quad \text{com} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(b) possui a propriedade do produto interno $(u,v)_m$, definida de acordo com

$$(u,v)_m = \int_{\Omega} \left[u \cdot v + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + \frac{\partial^m u}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial^m v}{\partial z^m} \right] dx dy dz \quad (2.2.6)$$

(c) tem uma norma que, conhecida a operação anterior, é definida como

$$\|u\|_m = \sqrt{(u,u)_m} \quad (2.2.7)$$

assim $\|u-v\|_m$ é a distância entre $u, v \in \mathcal{H}^m(\Omega)$;

(d) é um espaço de Hilbert.

Um operador Δ , linear no domínio \mathcal{D}_α ,

$$\Delta = \sum_{|\sigma|, |\nu| \leq m} (-1)^{|\sigma|} D^{|\sigma|} (a_{\sigma\nu} D^{|\nu|}) \quad (2.2.8)$$

é simétrico quando para cada $u, v \in \mathcal{D}_\alpha$ verifica-se $(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$, é positivo definido se existir um $\gamma > 0$ tal que

$$(\Delta u, u) \geq \gamma \|u\|^2 \quad (2.2.9)$$

2.2.3. Formulação fraca

Regressando à solução fraca do problema de Dirichlet para a equação de Poisson em \mathcal{R}^3

$$-\nabla^2 u = f \quad \text{em } \Omega \in \mathcal{R}^3 \quad u=0 \quad \text{em } \Gamma \quad (2.2.10)$$

onde $f \in C(\Omega)$: u pertence a $C^2(\Omega)$ e anula-se em Γ . Se multiplicarmos ambos os termos de (2.2.10) por $\psi(x)$, pertencendo o seu domínio a Ω e verificando-se $\psi=0$ em Γ , e integrarmos o resultado

$$-\int_{\Omega} \Psi \nabla^2 u \, dx = \int_{\Omega} \Psi f \, dx \quad (2.2.11)$$

aplicando os teoremas do gradiente e a integração por partes, concluímos que

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} \Psi f \, dx, \quad \Psi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad (2.2.12)$$

Com $f \in L^2(\Omega)$ a equação anterior terá solução se $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, logo $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ (espaço $\mathcal{H}^1(\Omega)$ em que as funções u se anulam sobre a fronteira). Posto isto, podemos dizer que determinar a solução de (2.2.10) é equivalente a encontrar $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \Psi)_0 = (f, \Psi)_0 \quad \text{para } \Psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \quad (2.2.13)$$

A expressão (2.2.13) corresponde à formulação variacional fraca do problema (2.2.10).

Quando o operador Δ em (2.2.1) é positivo no seu domínio \mathcal{D}_α , $f \in \mathcal{H}$, \mathcal{H} é um espaço de Hilbert, a solução u , demonstra-se, é uma função que minimiza um funcional $Q(u)$. Inversamente, se determinarmos u que minimiza $Q(u)$ em \mathcal{H} , encontramos de facto a solução de (2.2.1). Este resultado é muito importante porque na prática é mais fácil minimizar o funcional do que resolver de uma forma exacta a equação referida. É o que se estabelece no teorema:

Teorema I

Seja $\Delta: \mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é um espaço de Hilbert, um operador linear positivo e $f \in \mathcal{H}$. Então o funcional

$$Q(u) \equiv (\Delta u, u) - 2(f, u)$$

assume o valor mínimo para $u_0 \in \mathcal{D}_\alpha$ se e só se u_0 for solução de (2.2.1).

Está assim determinada a equivalencia entre a equação $\Delta u = f$

em \mathcal{D}_α e o cálculo do mínimo do funcional $Q(u)$. A formulação variacional facilitará a resolução aproximada do problema logo que se estabeleçam as condições de existência e unicidade de solução.

É importante fazer ainda algumas considerações sobre o teorema apresentado. Tendo presente que \mathcal{D}_α é o espaço linear de funções em que estas, bem como as suas derivadas até à segunda ordem, são contínuas, este teorema é válido sob a condição do operador de (2.2.1) ter uma solução $u_0 \in \mathcal{D}_\alpha$ ou o funcional $Q(u) \equiv (\Delta u, u) - 2(f, u)$ assumir o seu mínimo em \mathcal{D}_α . Ora nenhuma dessas condições por vezes acontece, o que implica a necessidade de construir um espaço que constitua o domínio do operador e que seja suficientemente amplo para incluir soluções de problemas onde existam descontinuidades. O domínio é dado por

$$\mathcal{H}_0^m(\Omega) = \{ u \in \mathcal{H}^m(\Omega) : D^\alpha u = 0 \text{ em } \Gamma \} \quad (2.2.14)$$

e passando a solução da equação (2.2.1), u_0 , a corresponder à solução de

$$(\Delta u_0, u) = (f, u) \quad , \quad u \in \mathcal{H}_0^m(\Omega) \quad (2.2.15)$$

ou seja, (2.2.15) corresponde ao novo enunciado da formulação variacional fraca de (2.2.1).

O enunciado da condição suficiente de existência e unicidade de soluções de (2.2.1), cuja formulação fraca corresponde à determinação de $\tilde{u} \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$B(\tilde{v}, \tilde{u}) = l(\tilde{v}) \quad \text{para qualquer } \tilde{v} \in \mathcal{H} \quad (2.2.16)$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e $l(\cdot)$ é uma forma linear em \mathcal{H} , é o que apresentamos de imediato no teorema de Lax Milgram.

Teorema de Lax Milgram

Seja \mathcal{H} em espaço de Hilbert e $B(-,-): \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ uma forma bilinear em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ com as seguintes propriedades :

a) é continua: $|B(\tilde{u}, \tilde{v})| \leq M \|\tilde{u}\| \|\tilde{v}\|$

b) é positiva-definida: $|B(\tilde{u}, \tilde{u})| \geq \gamma \|\tilde{u}\|^2$

para todo o $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{H}$. Logo para qualquer funcional linear $l: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$ em \mathcal{H} , existe um unico vector \tilde{u}_0 em \mathcal{H} tal que

$$B(\tilde{u}_0, \tilde{v}) = l(\tilde{v}) \quad \text{para qualquer } \tilde{v} \in \mathcal{H}$$

2.2.4. Formulação variacional do problema elastodinâmico

Dada uma região do espaço $\Omega \in \mathcal{R}^3$, delimitada pela fronteira Γ contínua no sentido de Lipschitz e o intervalo de tempo $(0, T)$, queremos determinar o campo $\tilde{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (correspondente a $\tilde{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ em 2.1), definido em $\Omega \times (0, T)$, que corresponde à solução do problema misto aos valores fronteira (condições de Dirichelet e Newmann) representado pelas equações (2.1.10, 2.1.11 e 2.1.12). De uma forma sucinta a equação a resolver, desprezando as forças mássicas, é

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = f_i(t) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T) \quad (2.2.17)$$

cujas condições fronteira são

$$\begin{aligned} u_i &= 0 & \text{em} & \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j &= 0 & \text{em} & \Gamma_1 \\ \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j &= g_{\alpha i} & \text{em} & \Gamma_2 \\ \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j &= g_{b i} & \text{em} & \Gamma_3 \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

Os n_j são as componentes da normal à superfície fronteira, g_{a1} e g_{b1} designam as forças superficiais por unidade de área que actuam sobre o volume considerado e os seus valores correspondem ao instante inicial. As condições iniciais definem-se por

$$\begin{aligned} u_i(\vec{r}, t) &= u_{0i} && \text{em} && \Omega && \text{e} && t=0 \\ \frac{\partial u_i(\vec{r}, t)}{\partial t} &= u_{1i} && \text{em} && \Omega && \text{e} && t=0 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

As relações entre o tensor das deformações e o deslocamento, o tensor das tensões e o deslocamento, estão expressas em (2.1.1) e (2.1.7), respectivamente.

Para a formulação variacional do problema elastodinâmico definido pelas equações (2.2.17) a (2.2.19) introduzimos o espaço,

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^3, u_i = 0 \text{ em } \Gamma_1, 1 \leq i \leq 3 \} \quad (2.2.20)$$

equipado com a norma

$$\| \vec{v} \| = \left[\sum_{i=1}^3 \| v_i \|^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.21)$$

onde $\mathcal{H}^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev de ordem 1. Definimos ainda uma forma bilinear em $\mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega)$ como

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) \, d\omega \quad (2.2.22)$$

e a forma linear por

$$l(\vec{u}) = \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} f_i v_i \, d\omega + \int_{\Gamma_2} g_{a1} v_i \, d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} g_{b1} v_i \, d\gamma_3 \right] \quad (2.2.23)$$

Minimizar o funcional $Q(\vec{v}) = \frac{1}{2} B(\vec{u}, \vec{v}) - l(\vec{v})$ é equivalente, de acordo com o Teorema de Lax Millgram, a encontrar $\vec{u} \in \mathcal{H}(\Omega)$ que é

solução de

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v}) \quad \text{para qualquer } \vec{v} \in \mathcal{K}(\Omega)$$

Neste sentido há, portanto, que verificar, de acordo com o teorema em causa, se a forma bilinear $B(\vec{u}, \vec{v})$ satisfaz as hipóteses requeridas por este.

Primeiro, $B(\vec{u}, \vec{v})$ é simétrica:

$$\begin{aligned} B(\vec{u}, \vec{v}) &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) \, d\omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\lambda \nabla \cdot \vec{u} \nabla \cdot \vec{v} + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij}(\vec{v}) \epsilon_{ij}(\vec{u}) \right] \, d\omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\lambda \nabla \cdot \vec{v} \nabla \cdot \vec{u} + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) \right] \, d\omega \\ &= B(\vec{v}, \vec{u}) \end{aligned}$$

como se conclui.

Segundo, $B(\vec{u}, \vec{v})$ é continua:

devido à desigualdade de Holder para o caso da soma

$$\sum_{i=1}^3 |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^3 |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^3 |y_i|^q \right)^{1/q} \quad (2.2.24)$$

em que $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$ (no caso de $p=q=2$ esta desigualdade é vulgarmente conhecida por desigualdade de Schwarz), obtemos

$$|B(\vec{u}, \vec{v})| \leq \left[\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 \, d\omega \right]^{1/2} \times \left[\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\epsilon_{ij}(\vec{v})|^2 \, d\omega \right]^{1/2}$$

tendo presente a desigualdade de Korn, onde se diz existir uma constante $C(\Omega)$ tal que para todo o $\vec{v} \in \mathcal{K}(\Omega)$

$$\|\tilde{v}\| \leq C(\Omega) \left(\sum_{i,j=1}^3 |\epsilon_{ij}(\tilde{v})|^2 + \sum_{i=1}^3 |v_i|^2 \right)^{1/2} \quad (2.2.25)$$

logo, no espaço \mathfrak{H} ,

$$|\tilde{v}| = \left(\sum_{i,j=1}^3 |\epsilon_{ij}(\tilde{v})|^2 \right)^{1/2}$$

passando a escrever-se

$$\begin{aligned} |B(\tilde{u}, \tilde{v})| &\leq M |\tilde{u}| |\tilde{v}| \\ &\leq M \|\tilde{u}\| \|\tilde{v}\| \end{aligned}$$

em que $M = \max(\lambda, 2\mu)$.

Terceiro, a forma bilinear é elíptica:

de acordo com (2.2.25) e sabendo que

$$B(\tilde{v}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} \left[\lambda (\nabla \cdot \tilde{v})^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 |\epsilon_{ij}(\tilde{v})|^2 \right] d\omega$$

chegamos a

$$B(\tilde{v}, \tilde{v}) \geq \alpha \|\tilde{v}\|_{1,\Omega}^2$$

que é o resultado pretendido.

Verificadas as hipóteses do Teorema II o problema

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\tilde{u}) \epsilon_{ij}(\tilde{v}) d\omega = \\ = \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} f_i v_i d\omega + \int_{\Gamma_2} g_{\alpha i} v_i d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} g_{\beta i} v_i d\gamma_3 \right] \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

tem solução para qualquer $\tilde{u} \in \mathfrak{H}(\Omega)$, ou, de uma forma equivalente, existe uma função $\tilde{u} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ que minimiza o funcional

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(\vec{v}))^2 \right\} d\omega - \left(\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\omega + \int_{\Gamma_2} \vec{g}_a \cdot \vec{v} d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{g}_b \cdot \vec{v} d\gamma_3 \right) \quad (2.2.27)$$

para cada instante considerado.

2.2.5. Significado físico da formulação variacional

A expressão anterior corresponde à energia potencial total e, o primeiro integral,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(\vec{v}))^2 \right\} d\omega$$

corresponde à energia potencial elástica, \mathcal{U} em (2.1.8), armazenada em Ω , enquanto que

$$\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\omega + \int_{\Gamma_2} \vec{g}_a \cdot \vec{v} d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{g}_b \cdot \vec{v} d\gamma_3$$

representa a energia potencial devida à acção das forças exteriores. A determinação da função que minimiza, em cada instante, o funcional em (2.2.27) corresponde, em última análise, a encontrar o valor do deslocamento para o qual é mínima a energia potencial total. O que é equivalente a provar que esta função é contínua e positiva definida. Assim, poderíamos, para este caso concreto, dar um novo enunciado para o Teorema de Lax-Millgram:

O problema aos valores fronteira em elastodinâmica tem solução e é única se a energia potencial elástica é uma função contínua positiva definida, isto é se

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &> 0 && \text{para qualquer } \vec{u} \text{ e } \tau \\ \mathcal{U} &= 0 && \text{para } \vec{u} = \tau = 0 \end{aligned}$$

*
* *

2.3. O método dos elementos finitos

2.3.1. Introdução

Um problema físico caracterizado por uma equação diferencial e por determinadas condições fronteira pode, de uma forma equivalente, ser formulado variacionalmente. Determinar a sua solução corresponde a encontrar a função (contínua num domínio definido) para o qual o funcional, na formulação fraca ou variacional, é estacionário. Estamos perante a solução exacta do problema.

Um outro modo de determinar a solução reside em prescindir do seu valor exacto, mas encontrar o seu valor aproximado. Procurar uma solução utilizando um ajuste de parâmetros em que, através da substituição das presumíveis soluções no funcional em causa, procede-se a tentativas para calcular o seu valor estacionário em relação aos parâmetros definidos.

As soluções possíveis deste tipo nos métodos variacionais apresentam-se na forma de combinações lineares finitas de parâmetros indeterminados, e são conseguidas através de uma escolha apropriada de funções. A representação de uma função contínua é obtida à custa de uma combinação linear de funções, o que introduz um erro na solução encontrada. Logo, a solução encontrada é uma aproximação da solução verdadeira para as equações que descrevem o fenómeno. Como o número de termos, funções, linearmente independentes pode aumentar, o erro na aproximação reduzir-se-á e a solução aproximada converge para a solução verdadeira. Há vários métodos variacionais aproximados, tais como os de Rayleigh e Ritz, Galerkin, resíduos ponderados, o método dos elementos finitos. É sobre este último que vamos focar a nossa atenção.

2.3.2. O método dos elementos finitos

Dado o problema elastodinâmico cuja formulação variacional está expressa em (2.2.26), teremos que encontrar u que minimiza o funcional (2.2.27). O método dos elementos finitos é uma forma numérica de resolver o problema variacional e assenta em duas ideias básicas:

a) O modelo de elementos finitos do domínio $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ é a região $\hat{\Omega}$ que vai ser substituída por um conjunto de subdomínios mais simples (os chamados elementos finitos); estamos perante o problema da partição ou construção do modelo de elementos finitos da região $\overline{\Omega}$;

b) A construção de uma função aproximada da solução, u_h , designada por função interpolante e construída com base em funções mais simples, designadas estas por funções interpoladoras locais.

Primeiro definimos a função $u(x)$ no domínio fechado $\overline{\Omega}$ de fronteira Γ , lipschitziana, do espaço tridimensional \mathcal{R}^3 , em que $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, possui m derivadas contínuas, isto é, $u \in C^m(\Omega)$. Em seguida passamos à construção do modelo dos elementos finitos que nos vai permitir representar aproximadamente a função em causa.

Passo I, partição do domínio

Definimos partição de $\overline{\Omega}$ como sendo a subdivisão deste domínio num número finito, E , de subdomínios, $\overline{\Omega}_e$, designados por elementos finitos, de fronteira Γ_e com as seguintes propriedades:

(a) cada elemento $\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma_e$, onde Γ_e é lipschitziana;

(b) $\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \overline{\Omega}_e$;

(c) $\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset$ para quaisquer dois elementos considerados.

Identificamos um número finito, G , de pontos designados por nodos globais, x^1, x^2, \dots, x^G . Analogamente chamamos nodos locais ao conjunto finito, N_e , de pontos em cada elemento $\bar{\Omega}_e$, $x_e^1, x_e^2, \dots, x_e^{N_e}$.

Passo II, interpolação local

Para cada elemento finito $\bar{\Omega}_e \subset \bar{\Omega}$ definimos um conjunto de funções

$$\{a_i^{\sigma(e)}(x)\}_{i=1}^{N_e} \quad |\sigma| < q \quad (2.3.1)$$

chamadas funções interpoladoras locais de ordem q . N_e representa o número de nodos locais (do elemento Ω_e), isto é o número de pontos considerados sobre a fronteira Γ_e . Estas funções têm as seguintes propriedades:

(a) $a_i^{\sigma(e)}(x) \equiv 0$ se $x \in \bar{\Omega}_e$, a função só possui valores diferentes de zero no interior de $\bar{\Omega}_e$;

(b) os valores das derivadas destas funções nos nodos dos elementos assumem o valor zero ou um, simbolicamente,

$$D^\nu a_N^{\sigma(e)}(x_e^M) = \delta_{MN} \delta_{\sigma\nu} \quad (2.3.2)$$

onde

$$|\sigma|, |\nu| \leq q \quad (\text{inteiros positivos})$$

e

$$M, N = 1, 2, \dots, N_e \quad \text{em que} \quad e = 1, 2, \dots, E.$$

Uma representação local da função, $u_h^e(x)$, é dada através de uma combinação linear de funções interpoladoras locais $\{a_i^{\sigma(e)}(x)\}$

$$u_h^e(x) = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{|\sigma| < q} \psi_\sigma^{N(e)} a_i^{\sigma(e)}(x) \quad (2.3.4)$$

devido a (2.3.2) os coeficientes $\psi_{\sigma}^{N(e)}$, designados por graus de liberdade locais, têm a seguinte propriedade especial

$$D^{\nu} u_h^e(x) = \psi_{\sigma}^{N(e)} \quad , \quad x \in \overline{\Omega}_e \quad (2.3.5)$$

Passo III, interpolação global

A representação global é conseguida através da união das representações locais, ou seja, calculamos a $\bigcup_{e=1}^{Ne} \overline{\Omega}_e$ fazendo coincidir os nodos comuns dos diferentes elementos. A função interpoladora global

$$u_h(x) = \bigcup_{e=1}^{Ne} u_h^e(x) \quad (2.3.6)$$

cuja expressão, tendo presente (2.3.5) $D^{\sigma} u_h(x^i) = \phi_{\sigma}^i$, onde x^i representa o i^{esimo} nodo no modelo global $\overline{\Omega}$, poderá assumir a forma

$$u_h = \sum_{i=1}^G \sum_{|\sigma| < q} \phi_{\sigma}^i A_i^{\sigma}(x) \quad (2.3.7)$$

G dá-nos o número de nodos globais e $A_i^{\sigma}(x)$ as funções interpoladoras globais:

$$A_i^{\sigma}(x) = \bigcup_{e=1}^E \sum_{i=1}^{Ne} \binom{(e)}{\Omega_i^N} a_i^{\sigma(e)}(x) \quad (2.3.8)$$

sabendo que

$$\binom{(e)}{\Omega_i^N} = \begin{cases} 1, & \text{se o nodo } i \text{ do modelo global coincide com o nodo } N \text{ do elemento } \overline{\Omega}_e \\ 0, & \text{se acontecer o contrário} \end{cases}$$

A representação global de $u(x)$, $u_h(x)$, coincide com esta, bem como com as suas derivadas, nos nodos x^i .

Com base nas propriedades que acabámos de referir podemos agora avançar com uma definição mais precisa de elemento finito

de acordo com Ciarlet (1978).

Elemento Finito em \mathbb{R}^n é o tripleto $[\Omega, \mathcal{A}, \Phi]$ onde:

i) Ω é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n cuja fronteira é continua segundo Lipschitz;

ii) \mathcal{A} é um conjunto finito de funções de variável real, um espaço finito de funções, $a_i \in C^\infty(\Omega)$ com $1 < i < N_G$, onde encontraremos a solução aproximada que procuramos;

iii) Φ é um conjunto finito de formas linearmente independentes, ϕ_i , $1 < i < G$, definidas sobre o espaço \mathcal{A} ; estas formas recebem o nome de "graus de liberdade".

Assim, por definição para qualquer valor σ_i , $1 < i < G$, existe uma única função $a \in \mathcal{A}$ que satisfaz a igualdade

$$\phi_i(a) = \sigma_i$$

Consequentemente, existem funções $a_i \in \mathcal{A}$ $1 \leq i \leq G$ que satisfazem

$$\phi_j(a_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq G$$

logo para qualquer $a \in \mathcal{A}$ pode escrever-se

$$a = \sum_{i=1}^G a_i \phi_i(a) \quad (2.3.9)$$

designando-se as formas lineares ϕ_i por "grau de liberdade i " do conjunto de elementos finitos e as funções a_i por "função de forma i ", também se chamando ao seu conjunto "base funcional do elemento finito".

2.3.3. Polinómios de Lagrange

Vamos aplicar os conceitos de função de forma, ou função interpoladora, e de grau de liberdade através de um tipo particular de função interpoladora, os polinómios de Lagrange :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \frac{x-x_m}{x_k-x_m} \quad k=0,1,2, \dots, n \quad (2.3.10)$$

É fácil constatar que os polinómios L_k são de grau n e possuem a seguinte propriedade interpolatória

$$L_k(x_i) = \delta_{ki} \quad (2.3.11)$$

em que δ_{ki} é o simbolo de Kronecker. Dada uma função $\Phi(x)$ definida, por exemplo, por quatro valores discretos no intervalo $[x_0, x_3]$, pode ser representada na forma

$$\Phi(x) \simeq \tilde{\Phi}(x) = \sum_{i=0}^3 \phi_i L_i(x) \quad (2.3.12)$$

em que L_i representa a função interpoladora e ϕ_i os graus de liberdade ou os valores da função em cada um dos pontos (nodos).

Admitamos agora que pretendemos generalizar para duas dimensões: as expressões do polinómio passarão a ser

$$L_{kl}(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \frac{x-x_m}{x_k-x_m} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq l}}^n \frac{x-x_m}{x_l-x_m} \quad k,l=0,1,2, \dots, n \quad (2.3.13)$$

Suponhamos, por exemplo, que se pretende encontrar as quatro funções interpoladoras para o rectângulo representado na fig.2.2 .

Considerando, fig.2.2, um novo sistema de coordenadas, coordenadas locais, (ξ, η) , enquanto as coordenadas (x, y) se tomam como coordenadas globais, a função $\Phi(\xi, \eta)$ pode definir-se do seguinte modo

$$\Phi(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)\phi_1 + N_2(\xi, \eta)\phi_2 + N_3(\xi, \eta)\phi_3 + N_4(\xi, \eta)\phi_4 \quad (2.3.14)$$

em que

$$N_1(\xi, \eta) = L_1(\xi)L_1(\eta) \quad N_2(\xi, \eta) = L_2(\xi)L_2(\eta) \quad N_3(\xi, \eta) = L_3(\xi)L_3(\eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = L_4(\xi)L_4(\eta)$$

sendo os L_i os polinômios de Lagrange de grau 1 definidos em (2.3.13). Escreveremos de imediato

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\eta - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \frac{\eta - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{\xi - \xi_4}{\xi_3 - \xi_4} \frac{\eta - \eta_2}{\eta_3 - \eta_2} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{\xi - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3} \frac{\eta - \eta_1}{\eta_4 - \eta_1} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

e a função será calculada de acordo com a fórmula

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta)\phi_k \tag{2.3.16}$$

Note-se que as funções de forma, ou interpoladoras, escolhidas possuem o valor 1 para o nodo no qual estão definidas e o valor zero para os outros nodos, preservando a continuidade C^0 .

A expressão anterior pode ser interpretada do seguinte modo: o valor da função Φ em qualquer ponto interior do elemento é uma função dos valores ϕ_k nos nodos considerados, mediante o uso de um conjunto de funções interpoladoras apropriadas, enquanto que os graus de liberdade, ϕ_k , são os valores da solução em cada nodo e não se conhecem, constituem as incógnitas fundamentais do problema.

Em tudo o que se segue, em particular nos problemas práticos a tratar utilizaremos exclusivamente os elementos finitos lagrangeanos.

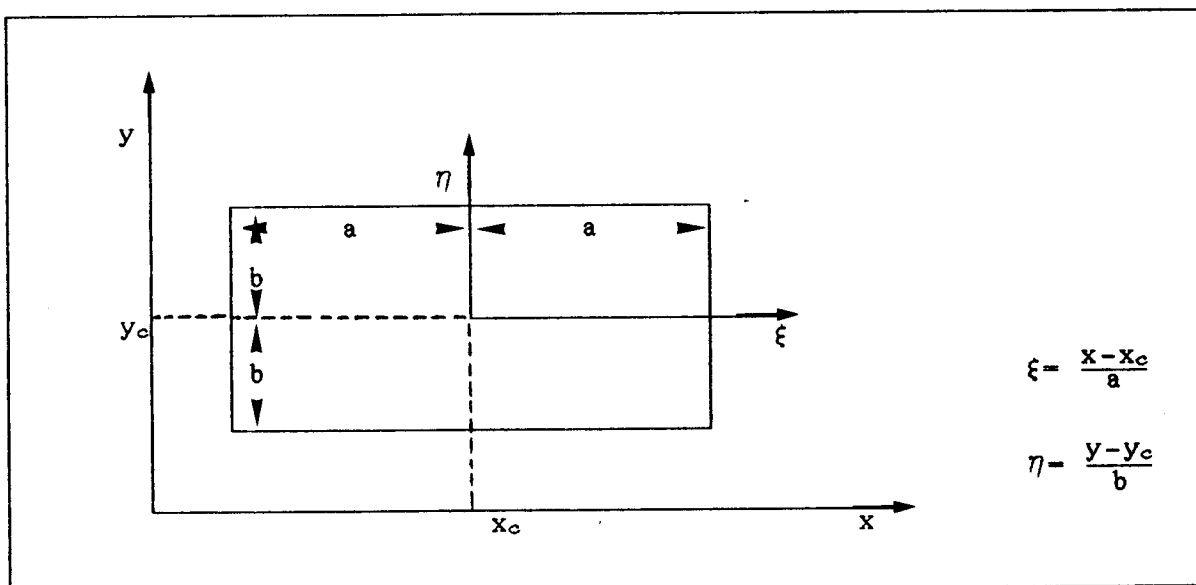


Fig. 2.2. Elemento rectangular, mostrando-se a relação entre coordenadas globais e coordenadas locais.

2.3.4. Elementos finitos afins

Quando se faz a partição do domínio $\bar{\Omega}$ em E elementos finitos, podem obter-se elementos de diferentes tipos, todavia é comum que sejam todos do mesmo tipo, por exemplo rectangulares com quatro nodos (elementos bidimensionais por nós utilizados). A questão que se coloca quando se tem uma determinada malha é se as propriedades características de um dado elemento se mantem para todos os outros elementos da malha? Ou, de outra forma, existirá em todos os elementos da família uma equivalência?

Dois elementos finitos $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ e $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\Phi})$ do mesmo tipo são equivalentes se existir uma função \mathcal{F} , possuindo função inversa, que transforme os pontos $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ em pontos $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$ tal que

$$\mathcal{F}(\hat{b}_i) = \tilde{b}_i \quad 1 \leq i \leq \hat{m} = \tilde{m} \quad (2.3.17)$$

onde $\{\hat{b}_i\}_{i=1}^{\hat{m}}$ e $\{\tilde{b}_i\}_{i=1}^{\tilde{m}}$ representam os nodos dos elementos $\hat{\Omega}$ e $\tilde{\Omega}$,

respectivamente. Se a transformação \mathcal{F} for afim, dizemos que estamos perante dois elementos finitos afins.

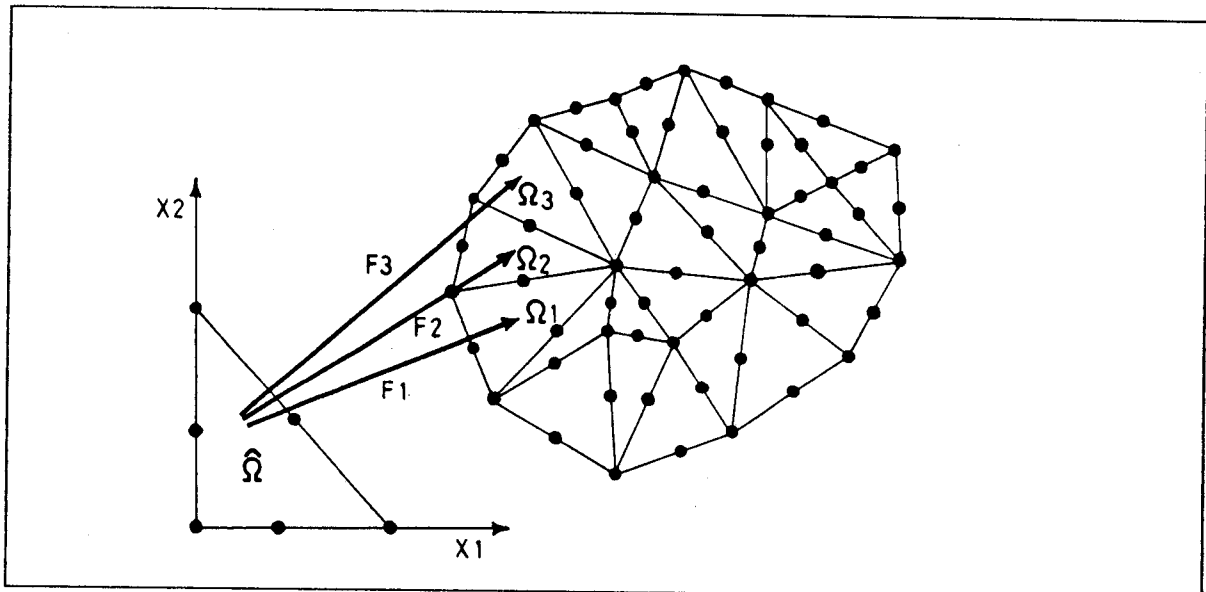


Fig. 2.3. Como se geram uma família de elementos finitos afins equivalentes com base num elemento principal $\hat{\Omega}$.

A noção de elementos finitos equivalentes permite-nos, de acordo com,

primeiro, a existência de um elemento principal, ou de referência, $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ cuja geometria e funções interpoladoras são absolutamente conhecidas,

segundo, conhecida a colecção $\{\mathcal{F}_e\}_{e=1}^E$ de transformações afins cujo domínio é $\hat{\Omega}$ e satisfazem às condições (2.3.17),

conceber uma família de elementos finitos afins.

Esta ideia está ilustrada na fig.2.3 para elementos triangulares possuindo nove nodos, onde para cada elemento $(\bar{\Omega}_e, \mathcal{A}_e, \Phi_e)$ da família se tem

$$\bar{\Omega}_e = \mathcal{F}_e(\hat{\Omega}_e)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_e &= \{a^e: \bar{\Omega}_e \rightarrow \mathbb{R}^n, a^e = \hat{a} \circ \mathcal{F}_e^{-1}, \hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}\} \\ \Phi_e &= \{\phi_i, 1 \leq i \leq N_e, \phi_i(v) = v(\mathcal{F}_e(\hat{b}_i))\} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

A ideia de família de elementos finitos afins é de uma importância bastante grande sobretudo na utilização do cálculo automático, pois em vez de se trabalhar com todos os elementos da malha utiliza-se o elemento de referência e as aplicações \mathcal{F}_e referidas.

2.3.5. Formulação isoparamétrica

Uma das vantagens do método dos elementos finitos é a facilidade com que pode discretizar-se qualquer domínio contínuo independentemente da sua geometria, o que implicará a utilização de elementos de formas muito distintas, a não ser que se usem as noções de família de elementos afins referidas no ponto anterior. Vejamos como se pode utilizar esta teoria para elementos de geometria variável. Tendo em consideração o seguinte teorema, Ciarlet (1978):

Teorema

Dado $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ um elemento finito de Lagrange em \mathbb{R}^n em que $\hat{\Phi} = \{\hat{a}(\hat{b}_i), 1 \leq i \leq N\}$ e a aplicação

$F: \hat{x} \in \hat{\Omega} \rightarrow (F_j(\hat{x}))_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ tal que $F_j \in \hat{\mathcal{A}}, 1 \leq j \leq n$ e possuindo transformação inversa F^{-1} . Então tem-se

$$\Omega = F(\hat{\Omega})$$

$$\mathcal{A} = \{a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a = \hat{a} \circ F^{-1}, \hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}\}$$

$$\Phi = \{a(F(\hat{b}_i)), 1 \leq i \leq N\}$$

Consequentemente, se Ω é um subconjunto fechado, não vazio, de \mathbb{R}^n o triplete $(\Omega, \mathcal{A}, \Phi)$ é um elemento finito de Lagrange.

O enunciado do teorema anterior pode traduzir-se do seguinte modo: um elemento de referência $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$, conforme o representado na fig.2.4, e a transformação de coordenadas F ,

$$F : \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$F : \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (2.3.20)$$

em que o determinante da matriz jacobiana da transformação é diferente de zero, possuindo, portanto, a transformação inversa F^{-1} ,

$$F^{-1} : \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (2.3.21)$$

então qualquer ponto (x, y) no domínio transformado Ω pode representar-se na forma

$$F : \begin{cases} x = \sum_{j=1}^m \hat{L}_j(\xi, \eta) x_j \\ y = \sum_{j=1}^m \hat{L}_j(\xi, \eta) y_j \end{cases} \quad (2.3.22)$$

O valor de m indica o número de nodos, cujas coordenadas são (x_j, y_j) e definem a geometria do elemento transformado, \hat{L}_j representa as funções de interpolação.

Se na definição da geometria de um elemento deformado utilizam-se os nodos considerados como incógnitas fundamentais e as funções de interpolação \hat{L}_j , utilizadas na transformação de coordenadas, são tais que $\hat{L}_j = \hat{N}_j$, $j=1, 2, \dots, m$ (\hat{N}_j são as funções de interpolação no elemento de referência), diz-se que o novo elemento $(\Omega, \mathcal{A}, \Phi)$ é isoparamétrico.

Na prática a utilização deste tipo de elementos asseguram-nos que se verificam as condições de convergência e que ao juntar todos os elementos transformados na formação do domínio global não se produzem lacunas nem justaposições entre eles. É necessário verificarmos que F possui inversa.

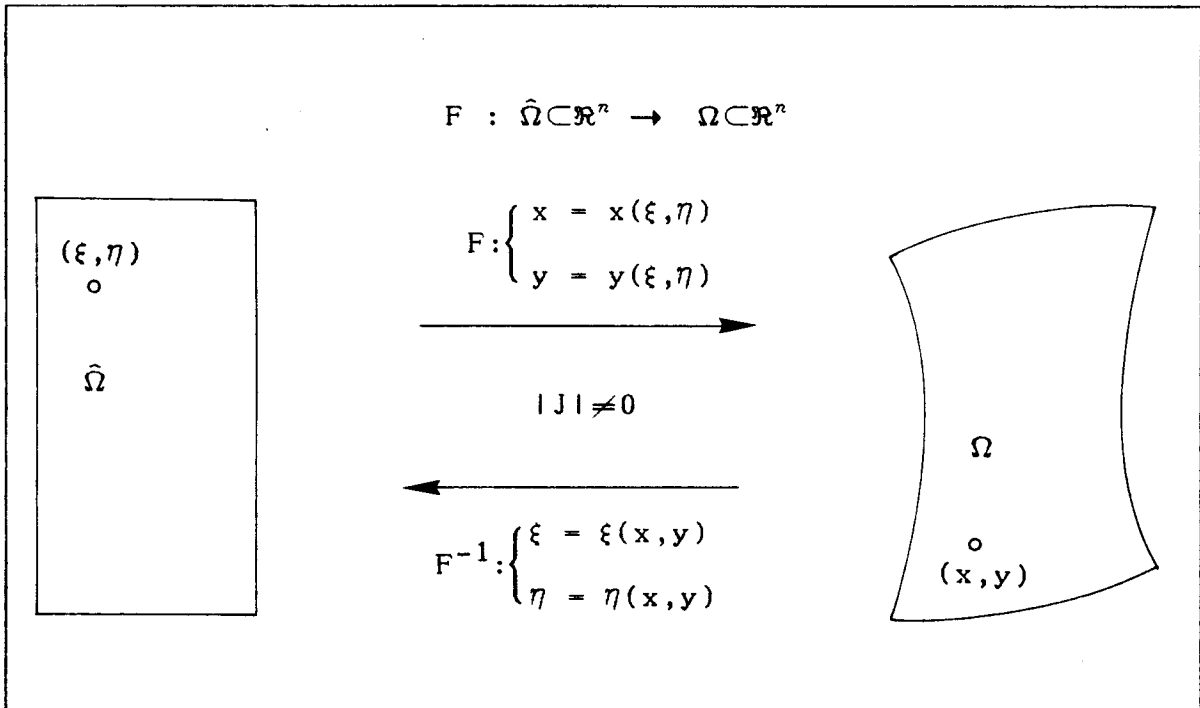


Fig. 2.4. Esquema de mudança de coordenadas

Nos elementos finitos, em geral, entram as funções de forma $N_i(x, y)$ definidas para cada elemento deformado e , ao utilizar-se o elemento de referência é preciso estabelecer todas as transformações necessárias para se poder operar com ele. Assim, conhecidas $\hat{N}_j(\xi, \eta)$ e se a transformação F é correcta verifica-se

$$N_j(x, y) = \hat{N}_j(\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad , \quad j=1, \dots, m \quad (2.3.23)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

o que implica conhecer $\frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \xi}{\partial y}$. Se o jacobiano da transformação (2.3.20), $|J|$, é diferente de zero, então

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (2.3.25)$$

Calculando $[J]^{-1}$ a partir da definição de matriz inversa chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{-1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi} & e & \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \eta} & e & \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

que em virtude de (2.3.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{|J|} \sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \eta} y_j \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{-1}{|J|} \sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \eta} x_j \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{-1}{|J|} \sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \xi} y_j \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{|J|} \sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \xi} x_j \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Substituindo estas últimas expressões em (2.3.24) resultam as fórmulas pretendidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \frac{1}{|J|} \left\{ \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \eta} y_j \right) - \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \xi} y_j \right) \right\} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} &= \frac{1}{|J|} \left\{ - \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \eta} x_j \right) + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \xi} x_j \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

que, como adiante veremos, serão bastante importantes nas determinações da matriz rigidez e de massa.

*
* *

2.4. Aplicação do método dos elementos finitos ao problema fundamental da elastodinâmica:

2.4.1. As equações da elasticidade e a solução aproximada

Vamos agora aplicar o que acabámos de expôr à equação (2.2.26). Preocupamo-nos essencialmente com a parte espacial na aproximação pelo método dos elementos finitos.

O deslocamento de qualquer ponto de um elemento é dado por

$$\tilde{u}_e(\vec{r}, t) = \{ u_1(\vec{r}, t), u_2(\vec{r}, t), u_3(\vec{r}, t) \} , \forall \vec{r} \in \Omega_e$$

cujo valor aproximado, $\tilde{w}_e(\vec{r}, t)$, se escreve na forma

$$\tilde{w}_e(\vec{r}, t) = \{ w_1(\vec{r}, t), w_2(\vec{r}, t), w_3(\vec{r}, t) \} , \forall \vec{r} \in \Omega_e \quad (2.4.1)$$

os w_i são dados por

$$w_i(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^m N_j \Phi_{ij} , \quad i=1,2,3 \quad (2.4.2)$$

onde m representa o número de nodos do elemento, $N_j = N_j(\vec{r})$ é a função de forma ou interpoladora associada ao nodo j do elemento ($j=1, \dots, m$) e $\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(t)$ é a componente i ($i=1,2,3$) do deslocamento do nodo j .

Utilizando a notação matricial

$$\tilde{w}_e(\vec{r}, t) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots N_m] \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21} & \Phi_{31} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \Phi_{32} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{1m} & \Phi_{2m} & \Phi_{3m} \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

ou

$$\tilde{w}_e(\vec{r}, t) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots N_m] \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \\ \dots \\ \tilde{\Phi}_m \end{bmatrix} = [N]_e \cdot \{\tilde{\Phi}\}_e \quad (2.4.4)$$

Para aplicar o método dos elementos finitos ao estudo do movimento de um meio contínuo, elástico, linear e isótropo, temos que substituir nas expressões da lei de Hooke (2.1.5.) e da relação entre a deformação e o deslocamento (2.1.1a.) a solução verdadeira pela solução aproximada.

Assim para a relação deformação-deslocamento vem

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\{\epsilon\}_e = [L]_e \cdot \{\tilde{u}\}_e \quad (2.4.5)$$

onde, substituindo nesta última o valor obtido em (2.4.4.), chega-se a

$$\{\epsilon\}_e = [L]_e \{\tilde{w}\}_e = [L]_e [N]_e \{\tilde{\Phi}\}_e$$

Se se fizer

$$[B]_e = [L]_e [N]_e \quad (2.4.6)$$

então

$$\{\epsilon\}_e = [B]_e \{\tilde{\Phi}\}_e \quad (2.4.7)$$

De uma forma análoga, e sabendo que $\{\tau\}$ representa a tensão, tal como $\{\epsilon\}$ define a deformação, a lei de Hooke pode matricialmente escrever-se do seguinte modo

$$\{\tau\}_e = [H]_e \{\epsilon\}_e \quad (2.4.8)$$

onde

$$\{\tau\}_e = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}$$

e

$$[H]_e = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Substituindo (2.4.7) em (2.4.8) surge a lei de Hooke na sua versão aproximada

$$\{\tau\}_e = [H]_e [B]_e \{\tilde{\Phi}\}_e \quad (2.4.9)$$

Com as expressões (2.4.7)(2.4.8) e (2.4.9) estamos em con-

dições de aplicar com rigor o método dos elementos finitos.

2.4.2. O método dos elementos finitos e a equação elastodinâmica

Vamos procurar a solução aproximada, w , da equação (2.2.26.)

$$B(\tilde{u}, \tilde{v}) = l(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$$

onde

$$B(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tau_{i,j}(\tilde{u}) \epsilon_{i,j}(\tilde{v}) \, d\omega$$

e

$$l(\tilde{u}) = \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} f_i v_i \, d\omega + \int_{\Gamma_2} g_{\alpha i} v_i \, d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} g_{\beta i} v_i \, d\gamma_3 \right]$$

em que $f_i = \rho \ddot{u}_i$.

Primeiro do que tudo dividimos o domínio Ω em N subdomínios Ω_e , logo para (2.2.26.) temos

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \{\epsilon\}_e^T \{\tau\}_e \, d\omega_e = \\ = \sum_{e=1}^N \left[\int_{\Omega_e} f_i v_i \, d\omega_e + \int_{\Gamma_{2e}} g_{\alpha i} v_i \, d\gamma_{2e} + \int_{\Gamma_{3e}} g_{\beta i} v_i \, d\gamma_{3e} \right] \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Em seguida, fazendo uso das aproximações determinadas em (2.4.7) e (2.4.9), a expressão anterior passa a escrever-se

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \{\tilde{\Phi}\}_e^T [B]_e^T [H]_e [B]_e \{\tilde{\Phi}\}_e \, d\omega_e = \\ = \sum_{e=1}^N \left[\int_{\Omega_e} \rho_e \{\tilde{\Phi}\}_e^T [N]_e^T [N]_e \{\tilde{\Phi}\}_e \, d\omega_e + \int_{\Gamma_{2e}} \{\tilde{\Phi}\}_e^T [N]_e^T \{\tilde{G}\}_e \, d\gamma_{2e} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_{3e}} \{\ddot{\Phi}\}_e^T [N]_e^T \{\ddot{G}\}_b d\gamma_{3e} \quad (2.4.11)$$

em que $\{\ddot{G}\}_a$ e $\{\ddot{G}\}_b$ representam as forças exteriores aplicadas a cada elemento.

As componentes $\{\ddot{\Phi}\}_e$ e $\{\ddot{\Phi}\}_e$ são unicamente funções do tempo. Então, definindo

$$[M]_e = \int_{\Omega_e} \rho_e [N]_e^T [N]_e d\omega_e \quad (2.4.12)$$

como a matriz de massa do elemento e ,

$$[K]_e = \int_{\Omega_e} [B]_e^T [H]_e [B]_e d\omega_e \quad (2.4.13)$$

como a matriz rigidez do elemento e , e

$$[F]_e = \int_{\Gamma_{2e}} [N]_e^T \{\ddot{G}\}_a d\gamma_{2e} + \int_{\Gamma_{3e}} [N]_e^T \{\ddot{G}\}_b d\gamma_{3e} \quad (2.4.14)$$

como a matriz das forças nodais do elemento e , a expressão (2.4.11) assume a forma

$$\sum_{e=1}^N \{\ddot{\Phi}\}_e^T [K]_e \{\ddot{\Phi}\}_e - \sum_{e=1}^N \left[\{\ddot{\Phi}\}_e^T [M]_e \{\ddot{\Phi}\}_e + \{\ddot{\Phi}\}_e^T [F]_e \right] \quad (2.4.15)$$

Juntando todas as matrizes do mesmo tipo para formar as matrizes globais do sistema, mediante a simples soma de todos os seus elementos no lugar correspondente da matriz global, obtém-se

$$[M] \{\ddot{\Phi}\} + [K] \{\ddot{\Phi}\} - [F] \quad (2.4.16)$$

que corresponde na realidade a um sistema de equações

diferenciais de segunda ordem que define o movimento do conjunto com que vamos trabalhar. O vector $\{\tilde{\Phi}\}$ representa todos os graus de liberdade do contínuo discretizado.

2.4.3. Determinação da matriz rigidez e da matriz de massa

Há que encontrar as condições necessárias a que tem que satisfazer as funções de forma para se fazer o cálculo das expressões integrais (2.4.12) e (2.4.13):

a) as funções devem evitar tornar infinito qualquer termo da função integranda;

b) se estão sujeitas a um operador diferencial de ordem R, as funções tem que ser tais que as suas derivadas sejam contínuas até à ordem R-1, pertencer à classe C^{R-1} ;

c) tendo presente (2.4.5), as funções de interpolação que intervêm na solução aproximada devem ser, pelo menos, de classe C^0 .

As funções (2.3.15), obedecem às condições expostas. Então para a discretização do meio contínuo, a geometria de um elemento finito bidimensional típico que utilizaremos nos modelos a estudar está representada na fig. 2.2. O sistema de coordenadas (x,z) corresponde às coordenadas globais do elemento, enquanto que (ξ,η) corresponde ao sistema cartesiano local, estando-se perante a seguinte transformação de coordenadas:

$$F : \begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ z = z(\xi,\eta) \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Procedendo a uma formulação isoparamétrica em que o elemento de referência é o elemento rectangular linear, as funções de forma em função das coordenadas locais são dadas pelas expressões (2.3.15), polinómio lagrangeano de grau 1,

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 \hat{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 \hat{N}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 \hat{N}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{2.4.18}$$

Sendo as transformações F aquelas que permitem passar do elemento de referência $\hat{\Omega}$ para qualquer outro elemento Ω da família afim dadas por (2.3.16.) e aqui representadas do seguinte modo

$$\begin{cases}
 x = \hat{N}_1x_1 + \hat{N}_2x_2 + \hat{N}_3x_3 + \hat{N}_4x_4 \\
 z = \hat{N}_1z_1 + \hat{N}_2z_2 + \hat{N}_3z_3 + \hat{N}_4z_4
 \end{cases}
 \tag{2.4.19}$$

A matriz jacobiana da transformação é

$$\begin{aligned}
 [J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
 &= 1/4 \begin{bmatrix} -(1-\eta)(1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi)-(1+\xi) & (1+\eta) & (1-\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.20}$$

ou

$$[J] = [D] \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{bmatrix}
 \tag{2.4.20a}$$

O volume elementar $d\omega_e$ é dado por $d\omega_e = |J| d\xi d\eta$. Nas coordenadas locais as matrizes de massa e de rigidez, (2.4.12) e

(2.4.13) respectivamente, serão escritas, a primeira, na forma

$$[M]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_e [\hat{N}]_e^T [\hat{N}]_e |J| d\xi d\eta \quad (2.4.21)$$

em que $[\hat{N}]_e$ são dados por (2.4.18), e a segunda

$$[K]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\hat{B}]_e^T [H]_e [\hat{B}]_e |J| d\xi d\eta \quad (2.4.22)$$

o símbolo $\hat{\quad}$ representa as matrizes após as transformações de coordenadas (2.4.17). Estas matrizes serão calculadas, no cap.3, para o caso de uma estrutura estratificada horizontalmente e, no cap.6, para uma estrutura não homogênea.

*
* *
*

2.5. Erros na aproximação do método dos elementos finitos

2.5.1. Introdução

Uma solução obtida pelo método dos elementos finitos é, na generalidade, afectada por três tipos de erros:

a) *Erros de Fronteira*, erros devido à representação não exacta do domínio pela malha dos elementos finitos considerados, $\bar{\Omega} \neq \Omega_0$;

b) *Erros de resolução*, erros devido aos métodos numéricos empregues nos cálculos feitos no computador;

c) *Erros de aproximação*, erros devido ao uso de uma solução

aproximada, u_h , o que é inerente à própria dimensão da malha.

2.5.2. Convergência do método

No método dos elementos finitos as dimensões da malha variam. Tem que saber-se como se comporta a solução aproximada à medida que estas dimensões vão diminuindo. Este problema corresponde à análise da convergência do método.

Admitindo, Ciarlet (1978), as seguintes hipóteses:

H1) o domínio $\bar{\Omega}$ é discretizado de acordo com as seguintes condições:

$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e$, onde cada elemento $\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma_e$, Γ_e é lipschitziana;

$\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset$ para quaisquer dois elementos considerados;

H2) existe uma constante σ tal que

$$\frac{h_e}{r_e} \leq \sigma$$

onde h_e é o comprimento característico do elemento da malha e r_e o supremo dos diâmetros das esferas inscritas em Ω_e ; o valor $h = \max(h_e)$ tende para zero à medida que se vai refinando a malha;

H3) todos os elementos finitos $(\Omega_e, \mathcal{A}_e, \Phi_e)$ são afins de um elemento de referência $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$;

podemos, então, enunciar o seguinte

Teorema

Se, além de (H1), (H2) e (H3), assumir-se que $\mathcal{A}_e(\hat{\Omega}) \subset \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}_1(\hat{\Omega})$ e não existirem derivadas direccionais de ordem ≥ 2 em $\hat{\Phi}$, verifica-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| \hat{u} - \hat{u}_h \|_{1, \Omega} = 0 \quad (2.5.1)$$

Em que $\| \cdot \|$ é dado por

$$\| u \|_{1,\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 d\Omega}$$

Está garantida a convergência da solução aproximada, \tilde{u}_h , em relação à solução exacta, \tilde{u} .

As funções interpoladoras ou de forma são dadas por (2.3.15) que, como já vimos, obedecem às condições exigidas: pertencem à classe C^0 , polinómios completos até ao grau 1 e, portanto, sem derivadas direccionais.

2.5.3. Cálculo do Erro

Para um determinado modelo, isto é, para um dado valor da malha, h , qual o valor do erro obtido?

Admitindo que as funções de base dos elementos finitos são polinómios de grau k , em que k é a ordem maior dos operadores diferenciais, no nosso caso, como anteriormente já referimos, $k=1$. Dado

$$\mathcal{A}_k(\tilde{\Omega}) \subset \tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}_1(\tilde{\Omega})$$

e, de acordo com Ciarlet (1978), verifica-se a seguinte desigualdade

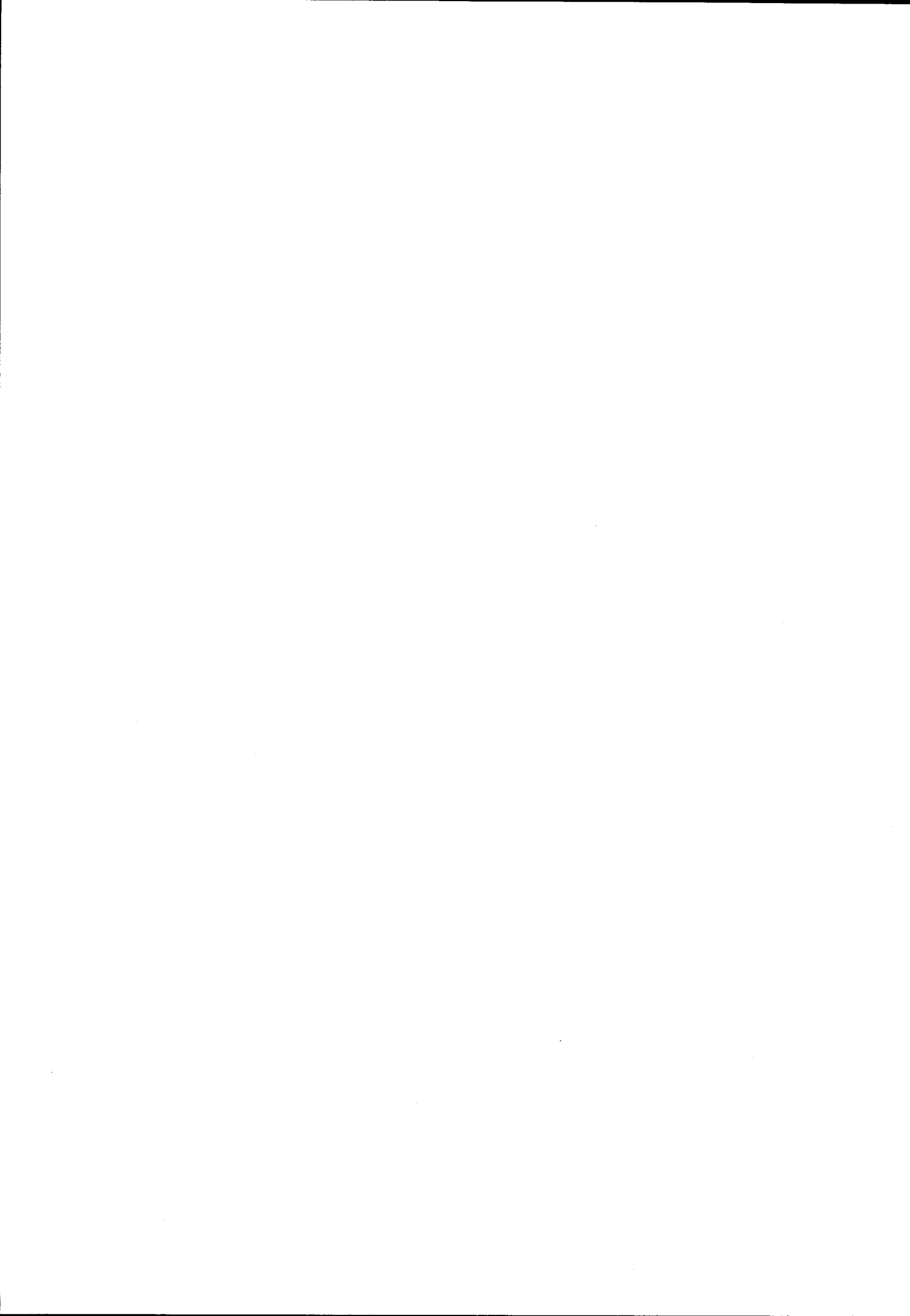
$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_h \|_{0,\Omega} \leq c h^{k+1} \quad (2.5.2)$$

onde \tilde{u}_h é a solução aproximada encontrada para uma malha cujas dimensões máximas são h , c é uma constante independente de h e

$$\| u \|_{0,\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega}$$

A expressão (2.5.2) mostra que o erro tende para zero com h , sendo um infinitésimo simultâneo com h^{k+1} , no caso presente

com h^2 . Por outro lado esta expressão é bastante útil porque dá uma ideia da precisão da solução aproximada, independentemente de se conhecer a solução verdadeira.



3 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH EM MEIOS ESTRATIFICADOS HORIZONTALMENTE

3.0. Introdução

Vamos definir no essencial toda a ferramenta necessária para o estudo das ondas superficiais numa estrutura estratificada horizontalmente, como aproximação do comportamento de um meio contínuo e verticalmente heterogéneo.

À partida há que estabelecer, Aki e Richards (1980) e Vlaar e Nolet (1978), o sistema de equações diferenciais e as condições fronteira que permitem determinar os diferentes modos de propagação das ondas de Rayleigh para o caso de uma estrutura plana (bidimensional), variando as propriedades físicas ao longo de uma das dimensões (profundidade).

A variação vertical considerada pode ser substituída por uma justaposição de camadas, de espessuras diferentes, mas onde, em cada uma delas, as propriedades físicas se mantêm constantes. A construção deste modelo em camadas deverá realçar as principais variações do modelo contínuo anterior. Gilbert e Backus (1966), através do método da matriz propagadora, estudam

a propagação das ondas superficiais num meio utilizando a associação sucessiva, no espaço, do comportamento da tensão e deslocamento em cada uma das camadas em que foi subdividido o meio. Este método engloba o primitivo método de Thomson-Haskell, Haskell (1953), e também o método de Knopoff, Knopoff (1964), Schwab e Knopoff (1970). Este último constitui uma alternativa possível de método de resolução numérica e que compararemos (Cap.5) com o método dos elementos finitos, por nós usado.

Os trabalhos de Lysmer e Drake (1971, 1972) permitiram-nos desenvolver todo o estudo da propagação de ondas de Rayleigh em meios estratificados horizontalmente, aplicando o método dos elementos finitos. Concluimos que a solução da equação final de movimento é equivalente à solução de um problema quadrático de valores próprios.

É, portanto, natural que detenhamos alguma atenção neste último problema. Valendo-nos de Wilkinson (1965), Peters (1970) e Kausel e Roesset (1981) construímos todo o algoritmo necessário para a resolução da equação de movimento (os programas em FORTRAN são apresentados no APÊNDICE 1) e cujos resultados numéricos são discutidos no Cap.5. De Smith et al. (1976) retirámos algumas subrotinas necessárias para a determinação dos vectores e valores próprios e que adaptámos ao nosso caso concreto.

*

* *

3.1. Propagação de ondas planas de Rayleigh

3.1.1. Ondas de Rayleigh num meio verticalmente heterogéneo

A equação de movimento de um meio elástico, isotrópico e não homogéneo é dada por:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot ((\lambda+2\mu)\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}) - \vec{\nabla} \times (\mu \vec{\nabla} \times \vec{\Phi}) + \\ + 2\{(\vec{\nabla} \mu \cdot \vec{\nabla})\vec{\Phi} - (\vec{\nabla} \mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} + (\vec{\nabla} \mu) \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Phi})\} = \rho \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

onde $\vec{\Phi}$ que representa o vector deslocamento, λ e μ os parametros de Lamé e ρ a densidade. Estas três últimas grandezas caracterizam o meio e verificam as seguintes propriedades:

a) são reais e positivas;

b) no caso do meio ser verticalmente não homogéneo são uma função da profundidade, z , $\lambda=\lambda(z)$, $\mu=\mu(z)$, $\rho=\rho(z)$.

Tal como em (2.2.17) não introduzimos as forças volúmicas nem qualquer termo que represente o efeito da fonte: partimos do princípio que a gravidade não tem qualquer outro efeito a não ser o de determinar, através da compressão, os valores constantes de ρ , λ e μ , enquanto que os parâmetros da fonte estão contidos no vector $\vec{\Phi}$.

Consideramos uma representação bidimensional da Terra, cujo modelo é um meio verticalmente não homogéneo assente num semi-espaço homogéneo, fig.3.1: o eixo \overline{OX} é paralelo à interface de separação dos dois meios, sendo o seu sentido positivo dado pela direcção de propagação; o sentido positivo do eixo \overline{OZ} corresponde ao aumento da profundidade do meio. As velocidades das ondas P e S, para um meio isotrópico, são $\alpha=\sqrt{(\lambda+\mu)/\rho}$ e $\beta=\sqrt{\mu/\rho}$, respectivamente, assumindo valores menores na camada superior do que no semi-espaço. Nestas condições propagam-se ondas superficiais, ondas que sofrem um amortecimento exponencial ao longo da profundidade. No caso de serem ondas planas de frequência angular ω , propagando-se

serem ondas planas de frequência angular ω , propagando-se horizontalmente com a velocidade de fase c , a sua expressão analítica é

$$\Phi_i(x, z, t) = u_i(k, z, \omega) e^{i(\omega t - xk)} \quad (3.1.2)$$

em particular

$$\Phi_x(x, z, t) = u_1(k, z, \omega) e^{i(\omega t - xk)}$$

$$\Phi_y(x, z, t) = u_2(k, z, \omega) e^{i(\omega t - xk)}$$

$$\Phi_z(x, z, t) = u_3(k, z, \omega) e^{i(\omega t - xk)}$$

onde k é o número de onda segundo a horizontal, $k=2\pi/\lambda$, e λ o comprimento de onda. O deslocamento $\vec{\Phi}$ é dado por

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} = \vec{\Phi}(x, y, z, t) &= \{\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z\}^T \\ &= \{\Phi_x(x, z, t), \Phi_y(x, z, t), \Phi_z(x, z, t)\}^T \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

logo, no tensor das deformações e no tensor das tensões virá

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} &= \epsilon_{xy} = 0 \\ \tau_{yy} &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

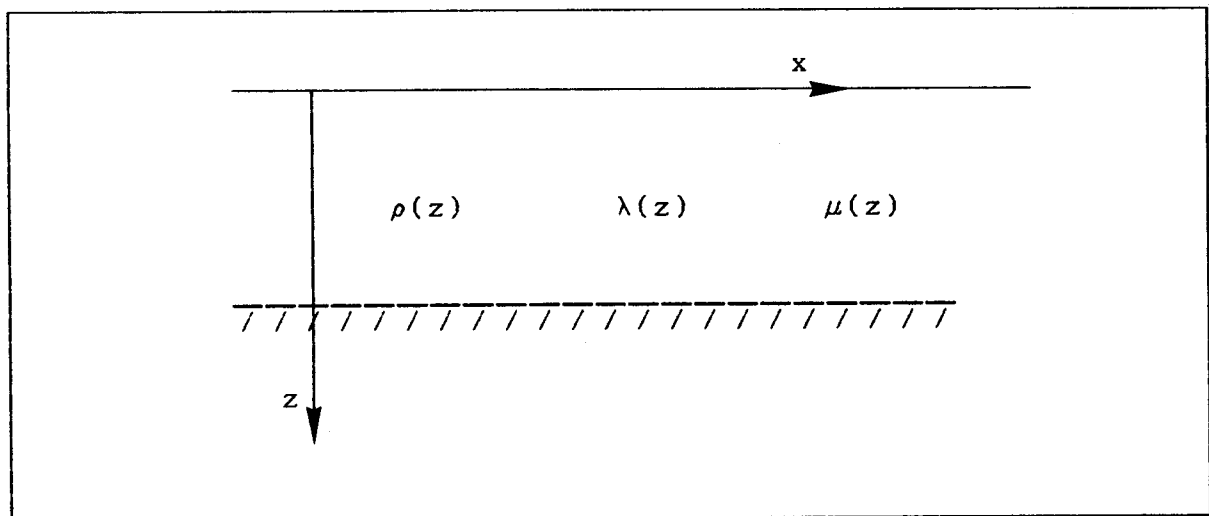


Fig. 3.1. Representação de dois meios verticalmente heterogêneos separados por uma superfície horizontal.

Exigimos que o deslocamento e tensão sejam funções contínuas, em particular na interface separadora dos dois meios, anulando-se o primeiro quando $z \rightarrow \infty$ e o segundo na superfície livre $z=0$. De acordo com (2.1.1) e (2.1.7), as expressões gerais das componentes da tensão para cada camada são

$$\tau_{xz} = u_4(k, z, \omega) e^{i(\omega t - xk)} \quad (3.1.5a)$$

$$\tau_{yz} = u_5(k, z, \omega) e^{i(\omega t - xk)} \quad (3.1.5b)$$

$$\tau_{zz} = u_6(k, z, \omega) e^{i(\omega t - xk)} \quad (3.1.5c)$$

Substituindo (3.1.2) e (3.1.5) em (2.1.10) obtemos o seguinte sistema linear de equações diferenciais lineares

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dz} \\ \frac{du_2}{dz} \\ \frac{du_3}{dz} \\ \frac{du_4}{dz} \\ \frac{du_5}{dz} \\ \frac{du_6}{dz} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

onde $[A]$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -ik & \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ -ik\lambda\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma \\ k^2\xi - \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ik\lambda\Gamma \\ 0 & k^2\mu - \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 & -ik & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que $\Gamma = (\lambda + 2\mu)^{-1}$ e $\xi = \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}$.

O sistema deve resolver-se para um determinado modelo,

$\lambda=\lambda(z)$, $\mu=\mu(z)$, $\rho=\rho(z)$, sob as seguintes condições fronteira

$$u_1(\infty) = 0 \quad u_4(0) = 0 \quad (3.1.7a)$$

$$u_2(\infty) = 0 \quad u_5(0) = 0 \quad (3.1.7b)$$

$$u_3(\infty) = 0 \quad u_6(0) = 0 \quad (3.1.7c)$$

O sistema (3.1.6) pode separar-se em dois subsistemas: o primeiro corresponde às ondas polarizadas horizontalmente, ondas de Love, e o segundo correspondente às ondas polarizadas verticalmente, ondas de Rayleigh. Assim para as ondas deste último tipo teremos

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dz} \\ \frac{du_3}{dz} \\ \frac{du_4}{dz} \\ \frac{du_6}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ik & \mu^{-1} & 0 \\ -ik\lambda\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \\ k^2\xi - \rho\omega^2 & 0 & 0 & -ik\lambda\Gamma \\ 0 & -\rho\omega^2 & -ik & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

sujeita às condições (3.1.7). Para um determinado número de onda, k , a resolução de (3.1.8) é equivalente à solução de um problema aos valores próprios. Como solução obtemos um espectro infinito de frequências $\omega_j(k)$ correspondentes aos diferentes modos normais de propagação de Rayleigh, em que os vectores próprios associados $\{u\}_j$, de componentes $\{u_{1j}, u_{3j}\}$, representam o campo de amplitudes do deslocamento para cada modo. Devido à dependência $\omega(k)$ estes modos são dispersivos. A solução completa do sistema, o campo de deslocamentos $\{\Phi\}$, de componentes $\{\Phi_1, \Phi_3\}$, é dado pela expressão

$$\{\Phi\} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{u\}_j e^{i(\omega t - k_j x)} \quad (3.1.9)$$

onde os α_j são designados como os factores de participação do modo j .

3.1.2. Condições para a propagação num meio estratificado horizontalmente

Um meio verticalmente não homogéneo pode ser substituído, numa boa aproximação, por uma sucessão equivalente de camadas homogéneas, fig.3.2. Os parâmetros $\lambda=\lambda(z)$, $\mu=\mu(z)$, $\rho=\rho(z)$, são considerados constantes em cada uma das camadas, sofrendo descontinuidades nas interfaces de contacto entre as diferentes camadas. A vantagem deste modelo de estratificação horizontal reside no facto de que, para cada camada, a equação do movimento (3.1.1) assume uma forma mais simples (3.1.10),

$$\mu \nabla^2 \vec{\Phi} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} \quad (3.1.10)$$

embora, paralelamente, haja a desvantagem de para todas as interfaces ter que definir condições fronteira, isto é, a continuidade do deslocamento e da tensão.

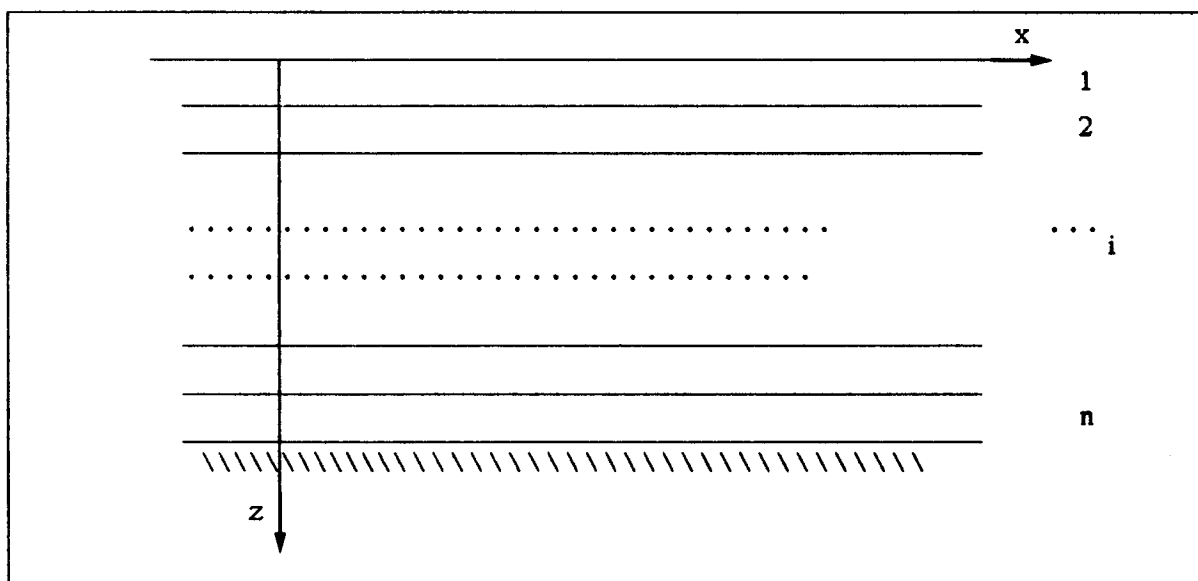


Fig. 3.2. Estrutura infinita plana e horizontalmente estratificada

Consideremos o meio semi-infinito constituído por N camadas homogéneas e isotrópicas, paralelas entre si, fig.3.2.

Tal como anteriormente o eixo \overline{OX} é paralelo à estratificação, sendo o seu sentido positivo dado pela direcção de propagação, e o sentido positivo do eixo \overline{OZ} corresponde ao aumento da profundidade do meio.

Para N camadas tem que verificar-se, para a propagação de ondas de Rayleigh, as seguintes condições fronteira:

a) continuidade dos deslocamentos nas interfaces entre as diferentes camadas;

$$\begin{aligned} u_1(z'_j) &= u_1(z''_j) & j &= 1, 2, \dots, N-1 \\ u_3(z'_j) &= u_2(z''_j) & j &= 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.1.11a)$$

b) continuidade das tensões, normal e transversal, nas diferentes interfaces;

$$\begin{aligned} u_4(z'_j) &= u_3(z''_j) & j &= 1, 2, \dots, N-1 \\ u_6(z'_j) &= u_4(z''_j) & j &= 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.1.11b)$$

c) na superfície livre anulam-se as tensões;

$$\begin{aligned} u_4(0) &= 0 \\ u_6(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.11c)$$

d) o deslocamento anula-se na base rígida (semi-infinita) que sustenta inferiormente todo o modelo

$$\begin{aligned} u_1(H) &= 0 \\ u_3(H) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.11d)$$

Os z'_j e z''_j correspondem, respectivamente, às cotas superior e inferior da interface z_j , H é profundidade total do modelo.

Há que resolver N sistema do tipo (3.1.8) respeitando as condições fronteira expressas em (3.1.11), obtendo-se no final uma solução do tipo (3.1.9).

3.1.3. Matriz propagadora

Um dos métodos para resolver o problema anterior é o da matriz propagadora. As expressões (3.1.6) e (3.1.8) podem abreviadamente escrever-se

$$\frac{df(z)}{dz} = A(z) f(z) \quad (3.1.12)$$

em que $f(z)$ é o vector coluna de dimensão n , $A(z)$ a matriz quadrada de dimensão n ($n=4$ para o caso das ondas de Rayleigh).

Definimos matriz propagadora como sendo $P(z, z_0)$ dada pela expressão

$$P(z, z_0) = I + \int_{z_0}^z A(\zeta_1) d\zeta_1 + \int_{z_0}^z A(\zeta_1) \int_{z_0}^{\zeta_1} A(\zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 + \dots \quad (3.1.13)$$

onde I é a matriz identidade de ordem 4. $P(z, z_0)$ satisfaz a equação (3.1.12)

$$\frac{dP(z, z_0)}{dz} = A(z) P(z, z_0) \quad (3.1.14)$$

Uma outra propriedade importante da matriz propagadora é que

$$f(z) = P(z, z_0) f(z_0)$$

isto é, $P(z, z_0)$ gera o vector f em z , ao actuar sobre o mesmo vector em z_0 . É, portanto, generalizável para uma sucessão de n camadas, obtendo-se

$$f(z) = P(z, z_{n-1}) P(z_{n-1}, z_{n-2}) \dots P(z, z_0) f(z_0) \quad (3.1.16)$$

Sabemos ser possível exprimir o vector $f(z)$ em função das amplitudes do deslocamento das ondas nos dois sentidos : P^+ , S^+ e P^- , S^- , ou seja, ondas P e S progredindo no sentido positivo e negativo, respectivamente. Então, para as ondas de Rayleigh

$$f = [F] \begin{bmatrix} P^+ \\ S^+ \\ P^- \\ S^- \end{bmatrix}$$

o que nos permite escrever para a camada $n+1$

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}^+ \\ S_{n+1}^+ \\ P_{n+1}^- \\ S_{n+1}^- \end{bmatrix} = [F]_{n+1}^{-1} P(z_n, z_0) f(z_0)$$

A expressão anterior, tendo presente por um lado (3.1.16) e também que P_{n+1}^- e S_{n+1}^- anulam-se, assume a forma

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}^+ \\ S_{n+1}^+ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} a_1(z_0) \\ a_3(z_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A condição para que exista solução não trivial é que o determinante

$$\begin{vmatrix} g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{vmatrix}$$

se anule para cada valor da frequência. Da resolução deste determinante obtemos a função de dispersão. O método de Thomson-Haskell, Haskell (1953) corresponde à solução aqui apresentada: deriva as matrizes de cada uma das camadas, do seu produto final retira a função de dispersão. Uma melhoria deste método foi obtido por Knopoff (1964) e posteriormente por Schwab e Knopoff (1970). Knopoff constrói um determinante contendo as matrizes de todas as camadas, analisando-o em

seguida como um produto de vários determinantes, correspondendo cada um deles a uma das camadas que constitui a estrutura global. Através deste novo algoritmo consegue-se uma melhoria na resolução numérica do problema.

*
* *

3.2. A formulação discreta para a propagação de ondas planas de Rayleigh

3.2.2. Condições para a propagação num meio estratificado

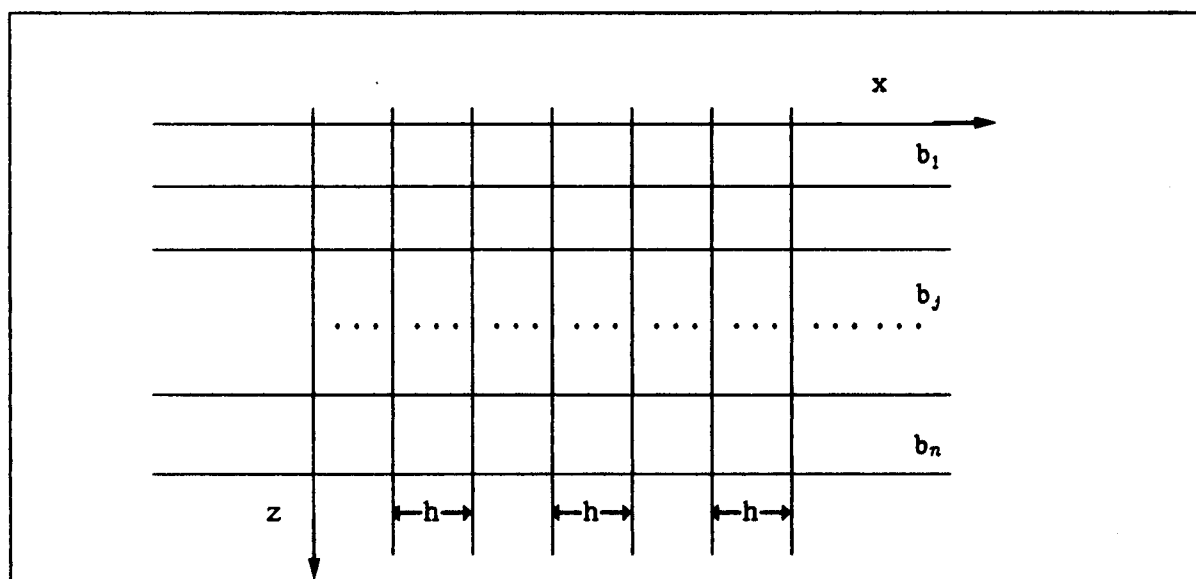


Fig. 3.3. *Malha de elementos rectangulares adaptada a uma estrutura estratificada horizontalmente.*

Obter o número de onda k , bem como a variação da amplitude com a profundidade para cada um dos modos de Rayleigh que se propagam com uma determinada frequência ω através de uma estrutura do tipo da representada na fig.3.2, implica inicialmente a discretização do meio. Esta operação obriga à definição de uma malha, cujas características, fig.3.3, são as seguintes:

a) os elementos são rectangulares, de igual largura (h) e espessuras distintas (b_j);

b) o número de estratos utilizados é maior que o número de camadas em que se subdivide o meio contínuo real, isto é cada camada é subdividida em vários estratos com as mesmas características físicas.

Além destas hipóteses geométricas o sistema físico ao ser estudado dinamicamente tem como aceite os seguintes pressupostos:

a) a massa de cada elemento está concentrada nos seus nodos, pontos materiais situados sobre a fronteira de cada elemento;

b) as forças entre os diferentes elementos são transmitidas através das massas concentradas nos nodos dos elementos.

3.2.2. Matriz de massa e matriz rigidez de um elemento

Dado um elemento genérico do estrato j , a amplitude do deslocamento num ponto interior deste elemento, tendo presente (2.4.4) e (2.4.18), é dado por

$$u_j(x, z, t) = \frac{1}{hb_j} [(b_j - z)(h_j - x), x(b_j - z), x_j z_j, z(h_j - x)] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

onde os Φ_j representam os deslocamentos nodais ao longo de uma direcção. A relação (2.1.7) entre o tensor das deformações e os

deslocamentos, atendendo à transformação, passa a escrever-se

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{hb_j} \begin{bmatrix} z-b_j & 0 & b_j-z & 0 & z & 0 & -z & 0 \\ 0 & x-h & 0 & -x & 0 & x & 0 & h-x \\ x-h & z-b_j & -x & b_j-z & x & z & h-x & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1x} \\ \Phi_{1z} \\ \Phi_{2x} \\ \Phi_{2z} \\ \Phi_{3x} \\ \Phi_{3z} \\ \Phi_{4x} \\ \Phi_{4z} \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

De acordo com (3.1.3), a lei de Hooke reduz-se a

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{zz} \\ T_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

Fazendo

$$[N]_j^T = \frac{1}{hb_j} \begin{bmatrix} (b_j-z)(h-x) & 0 & (b_j-z)x & 0 & xz & 0 & z(b_j-x) & 0 \\ 0 & (b_j-z)(h-x) & 0 & (b_j-z)x & 0 & xz & 0 & z(b_j-x) \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

$$[S]_j = \frac{1}{hb_j} \begin{bmatrix} z-b_j & 0 & b_j-z & 0 & z & 0 & -z & 0 \\ 0 & x-h & 0 & -x & 0 & x & 0 & h-x \\ x-h & z-b_j & -x & b_j-z & x & z & h-x & -z \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

e

$$[H]_j = \begin{bmatrix} 2\mu_j+\lambda_j & \lambda_j & 0 \\ \lambda_j & 2\mu_j+\lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

as matrizes elementares de rigidez e massa escritas em (2.4.21) e (2.4.22) respectivamente, tomam a forma

$$[M]_j = \int_0^h \int_0^{b_j} \rho_j [N]_j^T [N]_j \, dx dz \quad (3.2.7)$$

$$[K]_j = \int_0^h \int_0^{b_j} [S]_j^T [H]_j [S]_j \, dx dz \quad (3.2.8)$$

Resolvendo as operações indicadas obtemos as matrizes simétricas seguintes:

$$[M]_j = \rho_j b_j \frac{h}{36} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

e, fazendo

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \frac{\lambda_j + \mu_j}{4} & \Xi_j &= \frac{\lambda_j - \mu_j}{4} \\ \Gamma_j &= \left(\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{3}\right) \frac{b_j}{h} & \Gamma_j^* &= \left(\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{3}\right) \frac{h}{b_j} \\ \Sigma_j &= \left(\frac{\mu_j}{3}\right) \frac{b_j}{h} & \Sigma_j^* &= \left(\frac{\mu_j}{3}\right) \frac{h}{b_j} \end{aligned}$$

obtem-se $[K]_j$ de elementos

$$k_{11} = k_{33} = k_{55} = k_{77} = \Gamma_j + \Sigma_j^*$$

$$k_{12} = k_{38} = k_{47} = k_{56} = \Lambda_j$$

$$k_{13} = k_{67} = \frac{\Sigma_j^*}{2} - \Gamma_j$$

$$\begin{aligned}
 k_{14} &= k_{27} = k_{36} = k_{58} = \Xi_j \\
 k_{15} &= k_{37} = -\frac{\Gamma_j + \Sigma_j^*}{2} \\
 k_{16} &= k_{25} = k_{34} = -\Lambda_j \\
 k_{17} &= k_{35} = \frac{\Gamma_j - \Sigma_j^*}{2} \\
 k_{18} &= k_{23} = k_{45} = k_{67} = -\Xi_j \\
 k_{22} &= k_{44} = k_{66} = k_{88} = \Gamma_j^* + \Sigma_j \\
 k_{24} &= k_{68} = \frac{\Gamma_j^* - \Sigma_j}{2} \\
 k_{26} &= k_{48} = -\frac{\Gamma_j^* + \Sigma_j}{2} \\
 k_{28} &= k_{46} = \frac{\Sigma_j^* - \Gamma_j}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.10}$$

O índice j representa o elemento j .

Vamos em seguida calcular as matrizes homónimas para uma camada que é composta por uma associação infinita de elementos.

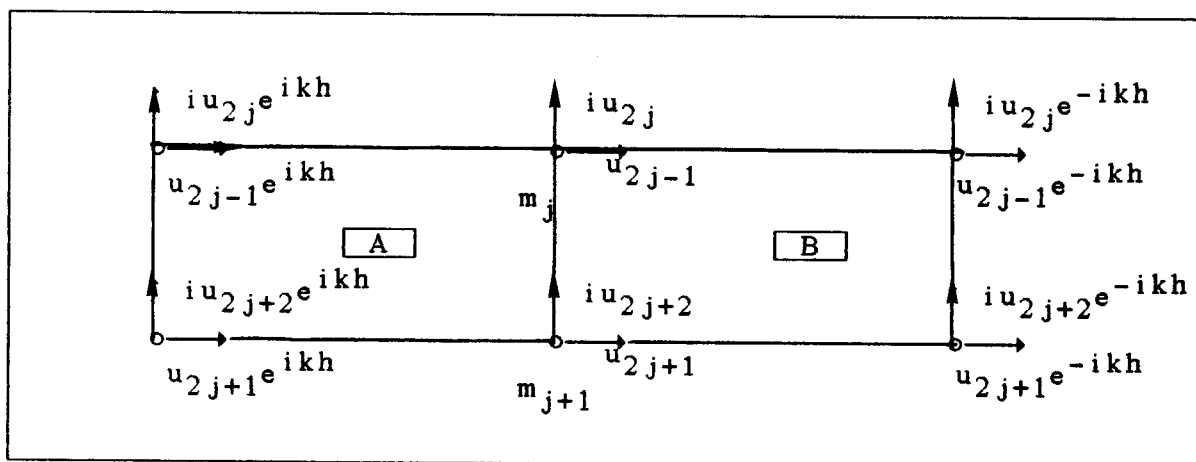


Fig. 3.4. Elementos finitos contiguos dentro da mesma camada.

3.2.3. Matriz de massa e rigidez do estrato

Consideremos dois elementos contínuos A e B, de iguais dimensões, na mesma camada, conforme o representado na fig.3.4. Deste modo o vector das componentes dos deslocamentos dos nodos do elemento A , $[\Phi]_a$

$$[\Phi]_a = e^{i\omega t} \begin{bmatrix} u_{2j-1} e^{ikh} \\ u_{2j} e^{ikh} \\ u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2j+1} \\ u_{2j+2} \\ u_{2j+1} e^{ikh} \\ u_{2j+2} e^{ikh} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

ou, de uma forma mais sucinta,

$$[\Phi]_a = e^{i\omega t} [E] [u]_j$$

em que $[E]$ e $[u]_j$ são

$$[E] = \begin{bmatrix} e^{ikh} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ikh} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & e^{ikh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{ikh} \end{bmatrix} \quad [u]_j = \begin{bmatrix} u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2j+1} \\ u_{2j+2} \end{bmatrix}$$

e designamos este último por vector amplitude do deslocamento do estrato j , já que é comum a todos os elementos que formam o estrato. Por comparação, através da fig.3.4, entre os elementos A e B, facilmente se conclui que o vector deslocamento para o elemento B se escreve

$$[\Phi]_b = [\Phi]_a e^{-ikh} = e^{i\omega t} e^{-ikh} [E] [u]_j \quad (3.2.12)$$

Conhecidos os vectores deslocamento para os elementos A e B é agora possível calcular as forças transmitidas a todo o estrato devido às massas m_j e m_{j+1} ; a relação entre as forças $\{F\}$ e os deslocamentos $\{\Phi\}$ no elemento l é

$$\{F\}_l = [K]_l \{\Phi\}_l \quad (3.2.13)$$

onde $[K]_l$ representa a matriz rigidez do elemento em causa. As forças induzidas pelos deslocamentos nos nós comuns aos elementos A e B constituirão o vector $\{F\}_j$, de componentes

$$\begin{aligned} F_{2j-1} &= \{K_3\} \{\Phi\}_a + \{K_1\} \{\Phi\}_b \\ F_{2j} &= \{K_4\} \{\Phi\}_a + \{K_2\} \{\Phi\}_b \\ F_{2j+1} &= \{K_5\} \{\Phi\}_a + \{K_7\} \{\Phi\}_b \\ F_{2j+2} &= \{K_6\} \{\Phi\}_a + \{K_8\} \{\Phi\}_b \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

em que $\{K_i\}$ corresponde à linha i da matriz rigidez do elemento. Atendendo a (3.2.12) e (3.2.11) as relações anteriores podem condensar-se em

$$\{F\}_j = [L]_j \{u\}_j \quad (3.2.15)$$

onde $[L]_j$ é a matriz constituída pelos seguintes elementos

$$\begin{aligned}
 l_{11} &= l_{33} = \Gamma_j(2-2\cos kh) + \Sigma_j^*(2+\cos kh) \\
 l_{12} &= l_{23} = \Lambda_j(2i\operatorname{sen} kh) \\
 l_{13} &= \Gamma_j(\cos kh - 1) - \Sigma_j^*(\cos kh + 1) \\
 l_{14} &= l_{32} = l_{41} = -\Lambda_j(2i\operatorname{sen} kh) \\
 l_{21} &= l_{34} = \Xi_j(2i\operatorname{sen} kh) \\
 l_{22} &= l_{44} = \Gamma_j^*(2+\cos kh) + \Sigma_j(2-2\cos kh) \\
 l_{24} &= -\Gamma_j^*(2+\cos kh) - \Sigma_j(1-\cos kh) \\
 l_{31} &= \Gamma_j(1-\cos kh) - \Sigma_j^*(1+2\cos kh) \\
 l_{33} &= \Gamma_j(2-2\cos kh) + \Sigma_j^*(2+\cos kh) \\
 l_{42} &= -\Gamma_j^*(2+4\cos kh) + \Sigma_j(1-\cos kh) \\
 l_{43} &= -\Xi_j(2i\operatorname{sen} kh)
 \end{aligned}$$

As dimensões dos elementos finitos aproximar-se-ão tanto mais do contínuo quanto menor for h , assim se calcularmos $\lim_{h \rightarrow 0} [L]_j$, obteremos uma nova matriz $[L]_j$, denominada matriz rigidez do estrato j ,

$$[L]_j = \begin{bmatrix} \Gamma_j k^2 + \Sigma_j^* & -\Xi_j k & \Gamma_j k^2 - \Sigma_j^* & \Lambda_j k \\ -\Xi_j k & \Sigma_j k^2 + \Gamma_j^* & \Lambda_j k & \Sigma_j k^2 - \Gamma_j^* \\ \Gamma_j k^2 - \Sigma_j^* & -\Lambda_j k & \Gamma_j k^2 + \Sigma_j^* & \Xi_j k \\ -\Lambda_j k & \Sigma_j k^2 - \Gamma_j^* & \Xi_j k & \Sigma_j k^2 + \Gamma_j^* \end{bmatrix} \quad (3.2.16)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \Lambda_j &= \frac{\lambda_j + \mu_j}{2} & \Xi_j &= \frac{\lambda_j - \mu_j}{2} & \Gamma_j &= \left(\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{3}\right) b_j & \Gamma_j^* &= \left(\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{3}\right) \frac{1}{b_j} \\
 \Sigma_j &= \left(\frac{\mu_j}{3}\right) b_j & \Sigma_j^* &= \left(\frac{\mu_j}{3}\right) \frac{1}{b_j}
 \end{aligned}$$

A matriz $[L]_j$ surge como matriz simétrica porque considerámos as componentes verticais, segundo OZ, quer das forças quer dos

3.2.4. A equação de movimento

As equações de movimento horizontal e vertical de um ponto de massa m_j são, pela segunda lei de Newton,

$$F_{2j-1} = -\omega^2 u_{2j-1} m_j$$

$$F_{2j} = -\omega^2 u_{2j} m_j$$

No caso de definida a densidade ρ_j , a segunda lei de Newton para o estrato j dá origem ao sistema de equações

$$\{F\}_j = -\omega^2 [M]_j \{u\}_j \quad (3.2.18)$$

onde, por um processo análogo ao utilizado para a matriz de rigidez $[L]_j$, obtemos a matriz de massa $[M]_j$ dada por

$$[M]_j = \frac{\rho_j b_j}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

Para o caso de uma estrutura formada por n estratos a equação (3.2.18) dá lugar a

$$\{F\} = -\omega^2 [M] \{u\} \quad (3.2.20)$$

em que o $\{F\}$ e $\{u\}$ tem o mesmo significado de (3.2.18); $[M]$ é a matriz de massa da estrutura obtida a partir dos n $[M]_j$ com base na regra definida em (3.2.17). Igualando (3.2.16) a (3.2.19)

$$([L] - \omega^2 [M]) \{u\} = 0 \quad (3.2.21)$$

que representa a equação do movimento livre do sistema. A solução desta equação corresponde à resolução de uma equação aos valores próprios ω^2 , cujos vectores próprios $\{u\}$ são os vectores amplitudes do deslocamento ao longo dos diferentes estratos constituintes da estrutura em estudo. Assim para cada k , número de onda, atenda-se a (3.2.21), por determinação dos valores, ω_j , sabe-se o valor da velocidade de fase $c_j = \omega_j/k$.

3.2.5. A discussão da equação de movimento

Como acabámos de ver a equação de movimento (3.2.21) é uma equação aos vectores e valores próprios, cuja solução consiste em $2n$ valores próprios positivos e reais ω_s^2 , $s=1,2, \dots, 2n$, onde os correspondentes vectores próprios reais $\{u_s\}$ são ortogonais no sentido de

$$\{u_s\}[M]\{u_t\} = \delta_{st}$$

ou

$$\{u_s\}[L]\{u_t\} = \omega^2 \delta_{st}$$

sendo δ_{st} o simbolo de Kronecker. Se inicialmente for conhecido a frequência angular ω , em vez do número de onda k , a equação de movimento passar-se-á a escrever

$$(k^2[A] + k[B] + [C])\{u\} = 0 \quad (3.2.22)$$

em que as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ correspondem à associação, de acordo com a regra (3.2.17), das matrizes $[A]_j$, $[B]_j$, e $[C]_j$, para cada estrato j e dadas por

$$[A]_j = \frac{b_j}{6} \begin{bmatrix} 2\Gamma_j & 0 & \Gamma_j & 0 \\ 0 & 2\mu_j & 0 & \mu_j \\ \Gamma_j & 0 & 2\Gamma_j & 0 \\ 0 & \mu_j & 0 & 2\mu_j \end{bmatrix} \quad (3.2.23a)$$

$$[B]_j = \begin{bmatrix} 0 & -\Xi_j & 0 & \Lambda_j \\ -\Xi_j & 0 & -\Lambda_j & 0 \\ 0 & -\Lambda_j & 0 & \Xi_j \\ \Lambda_j & 0 & \Xi_j & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.23b)$$

$$[C]_j = \begin{bmatrix} \mu_j & 0 & -\mu_j & 0 \\ 0 & \Gamma_j & 0 & -\Gamma_j \\ -\mu_j & 0 & \mu_j & 0 \\ 0 & -\Gamma_j & 0 & \Gamma_j \end{bmatrix} = \omega^2 [M]_j \quad (3.2.23c)$$

em que $[M]_j$ é dado por (3.2.19) e

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j + \mu_j}{2} \quad \Xi_j = \frac{\lambda_j - \mu_j}{2} \quad \Gamma_j = \lambda_j + 2\mu_j$$

A solução deste segundo problema aos valores próprios colocado pela equação quadrática (3.2.23) consiste em determinar $2n$ valores próprios k_s , $s=1, \dots, 2n$, e os respectivos vectores próprios $\{u_s\}$. Estes vectores próprios são ortogonais no sentido de

$$[P]([U]^T[A][U])[P] - [U]^T[C][U] = [I] \quad (3.2.24)$$

onde $[P]$ é a matriz diagonal de elementos k_s , $[U]$ é a matriz de ordem $(2n \times 2n)$ em que as suas colunas correspondem aos vectores próprios $\{u_s\}$ e $[I]$ é a matriz identidade, Drake(1972).

O vector deslocamento, lembrando (3.1.2), será dado pela expressão

$$(\Phi) = (u) e^{i\omega t} \quad (3.2.25)$$

A solução geral da equação (3.2.22) será de acordo com (3.1.9) uma combinação linear

$$\{u\} = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \{u\}_j = [U] \{\alpha\} \quad (3.2.26)$$

onde a matriz $[U]$ contém dispostos nas suas colunas os $2n$ vectores próprios determinados e o vector $\{\alpha\}$ são os factores de participação modal. Conforme a natureza dos valores próprios k_s^2 (duas soluções $\pm k_s$) surgem quatro tipos de ondas. A primeira corresponde a k_s real, é um modo real normal de propagação das ondas de Rayleigh com uma velocidade de fase ao longo de \overline{OX} $c_s = \omega/k_s$, verificando-se através do respectivo vector próprio $\{u_s\}$ a diferença de fase entre as componentes horizontal e vertical do movimento e que vale $\pi/2$ rad. A segunda corresponde a k_s tomar um valor complexo, $k_s = k_{1s} + ik_{2s}$, se $k_{1s} \neq 0$ e $k_{2s} \neq 0$ há propagação ao longo de \overline{OX} com uma velocidade de fase dada por $c_s = \omega/k_{1s}$, enquanto que a amplitude vem afectada de um factor $e^{k_{2s}x}$, estamos perante um modo complexo de propagação. O terceiro tipo surge quando k_s é imaginário, não há propagação ao longo de \overline{OX} , vindo a amplitude afectada de um factor $e^{k_s x}$, estamos perante um modo exponencial de propagação. O último tipo verifica-se para $k_s = 0$, dando origem a propagação de ondas P ou S num plano normal ao do sistema considerado.

3.2.6. Expressão para a velocidade de grupo

Retomemos a expressão (3.2.22), onde a matriz $[C]$ se dobra em duas matrizes, sendo uma delas a matriz de massa $[M]$

$$(k^2[A] + k[B] + [G] - \omega^2[M]) \{u\} = 0 \quad (3.2.27)$$

em que, devido a (3.2.23c), $[G]$ é dada pela associação, de acordo com a regra (3.2.17), da matriz $[G]_j$, para cada estrato j

$$[G]_j = \begin{bmatrix} \mu_j & 0 & -\mu_j & 0 \\ 0 & \Gamma_j & 0 & -\Gamma_j \\ -\mu_j & 0 & \mu_j & 0 \\ 0 & -\Gamma_j & 0 & \Gamma_j \end{bmatrix}$$

Diferenciando (3.2.27)

$$(2k[A]dk + [B]dk - 2\omega[M]d\omega)(u) + (k^2[A] + k[B] + [C]) d(u) = 0$$

e multiplicando à esquerda por $(u)^T$ chega-se a

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{2(u)^T[A](u) + (u)^T[B](u)}{2\omega(u)^T[M](u)}$$

Esta expressão, à custa de (3.2.24), pode ser transformada em

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2k\omega(u)^T[M](u)} \quad (3.2.28)$$

traduzindo a velocidade de grupo de um modo real de propagação.

*
* *

3.3. A resolução da equação de movimento

3.3.1. Uma primeira solução da equação quadrática aos valores e próprios

A solução da equação (3.2.22) corresponde à resolução do problema generalizado dos valores próprios para o qual Wilkinson (1965) propõe a seguinte forma de resolução.

A equação (3.2.22) e $(v) = k(u)$ permitem-nos escrever o sistema

$$\begin{cases} (k^2[A] + k[B] + [C]) \{u\} = 0 \\ \{v\} = k \{u\} \end{cases}$$

que mediante algumas operações pode tomar a forma

$$\begin{cases} (k^2[A]^{-1}[A] + k[A]^{-1}[B] + [A]^{-1}[C]) \{u\} = 0 \\ \{v\} = k \{u\} \end{cases}$$

o que matricialmente passaremos a

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

Esta última expressão corresponde ao problema clássico dos valores próprios e resolúvel através de algoritmos conhecidos. Há, contudo, a realçar o facto que dimensionalmente passamos a trabalhar com matrizes cujas dimensões são de $(4n \times 4n)$. Este aumento pode ter consequências bastante sérias na capacidade de cálculo disponível de um computador, o que representa uma limitação importante deste método.

3.3.2. Solução da equação quadrática transformada

Como acabámos de ver equação quadrática aos valores próprios que caracteriza a solução discreta, por camadas, da propagação de uma onda de Rayleigh com frequência angular ω , não é de resolução simples. A resolução anteriormente proposta, embora possível, levanta alguns problemas, assim vamos procurar uma outra solução.

Podemos rearranjar as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$, expressões

(3.2.23a) (3.2.23b) (3.2.23c), trocando as linhas e colunas

$$[A] = \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & B_{xz} \\ B_{zx} & 0 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

por forma a transformar (3.2.1) em

$$\begin{bmatrix} k^2 A_x + C_x & kB_{xz} \\ kB_{zx}^T & k^2 A_z + C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

onde u_x e u_z correspondem a vectores formados unicamente pelas componentes horizontais e verticais da amplitude do deslocamento ao longo dos diferentes estratos, respectivamente. As submatrizes apresentadas são todas tridiagonais e, exceptuando B_{xz} , são simétricas. Mediante um artifício que transforma a equação matricial anterior nesta outra

$$\begin{bmatrix} k^2 A_x + C_x & B_{xz} \\ k^2 B_{zx}^T & k^2 A_z + C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ ku_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos uma equação linear aos valores próprios.

$$k^2 \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ B_{zx}^T & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ ku_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_x & B_{xz} \\ 0 & -C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ ku_z \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

Como a matriz $[A]$ não é simétrica os valores próprios não serão todos reais. Verifica-se a seguinte relação de ortogonalidade

$$\begin{bmatrix} ku_x \\ u_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ B_{xz}^T & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ ku_z \end{bmatrix} = [1]$$

3.3.3. Nova expressão para o cálculo da velocidade de grupo

Para o cálculo da expressão que nos dá a velocidade de grupo escreve-se (3.2.4), tendo presente a composição de [C] (3.2.2),

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ B_{xz}^T & A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x & B_{xz} \\ 0 & G_z \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_x \\ ku_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que diferenciando

$$\begin{aligned} & \left(2kdk \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ B_{xz}^T & A_z \end{bmatrix} - 2\omega d\omega \begin{bmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_x \\ ku_z \end{bmatrix} + \\ & + \left(k^2 \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ B_{xz}^T & A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x & B_{xz} \\ 0 & G_z \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ u_z dk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e multiplicando à esquerda pelo vector $(ku_x \ u_z) = (u_e)^T$ permite concluir que a velocidade de grupo do modo j é

$$V_j^G = \frac{d\omega}{dk_j} = \frac{(u_e)_j^T \overset{*}{A} (u_d)_j}{(u_e)_j^T \overset{*}{M} (u_d)_j} \times \frac{k_j}{\omega} \quad (3.3.5)$$

em que

$$\overset{*}{A} = \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ B_{xz}^T & A_z \end{bmatrix} \quad \overset{*}{M} = \begin{bmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix} \quad (u_d) = \begin{bmatrix} u_x \\ ku_z \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

*
* *

3.4. Considerações particulares sobre a malha

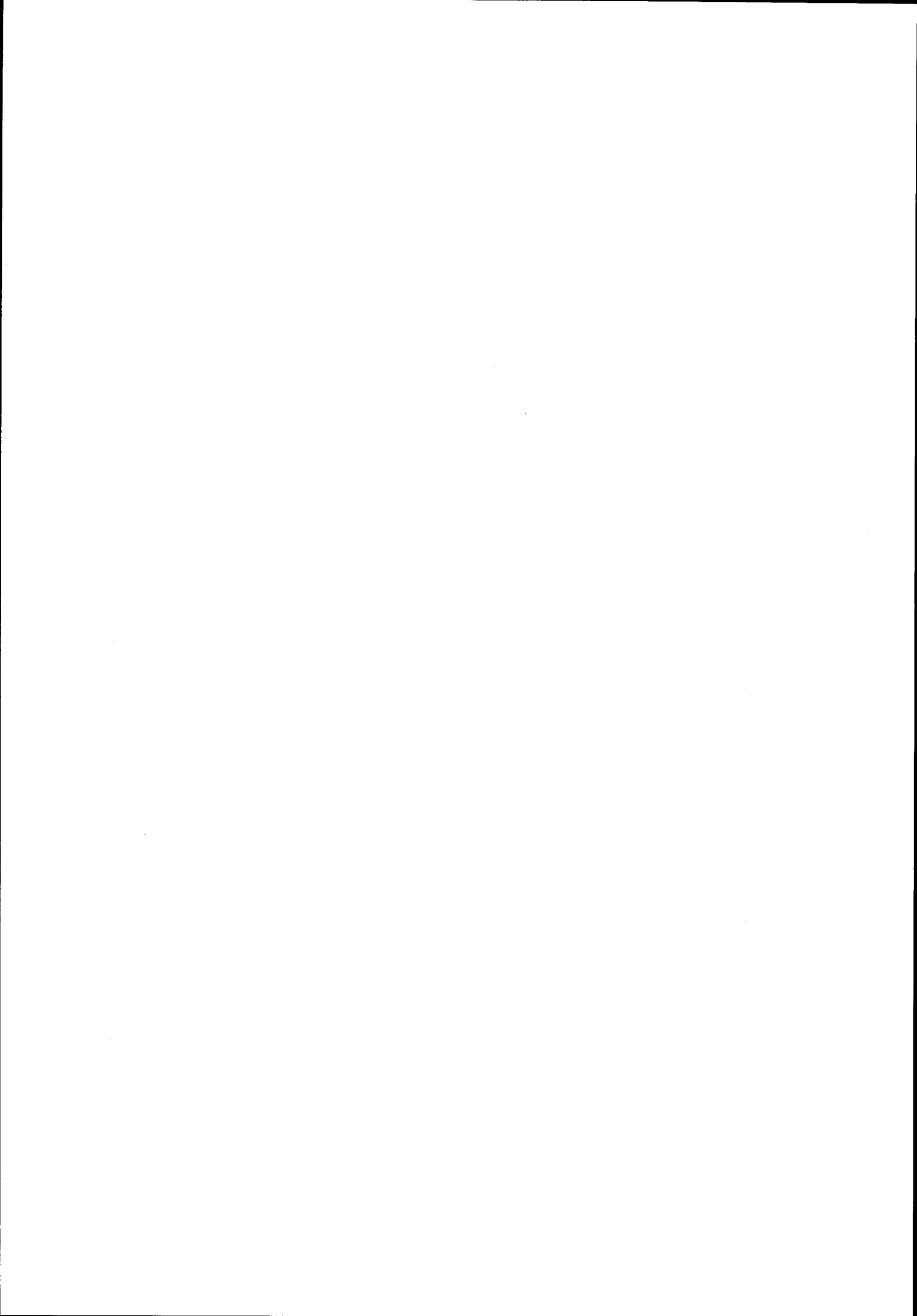
Uma das características fundamentais da utilização do método dos elementos finitos reside na escolha da malha a usar e, em particular, das suas dimensões.

Alguns autores, em particular Shipley et al. (1977) e Lysmer e Kuhlemeyer (1969), estudaram alguns aspectos da construção da malha neste método. O primeiro destes autores chama a atenção no artigo citado para o facto dos modelos de elementos finitos se comportarem como filtros de passa baixa com uma frequência de corte que depende das dimensões da malha. A rede mais fina por nós empregue implica a existência de uma frequência de Nyquist com um valor à volta de 4.5s, logo é de colocar algumas reservas aos resultados obtidos para os períodos inferiores a este valor. Não obstante, consideramos todos os resultados obtidos na gama de períodos indicados no QUADRO 5.6.

O segundo estudo citado mostra que existe uma relação entre o comprimento utilizado para o elemento, ao longo da direcção de propagação da perturbação, e o comprimento de onda desta. Utilizando elementos finitos lineares os autores mostram que, para qualquer onda necessita-se no mínimo de quatro elementos por comprimento de onda, obtendo-se resultados aceitáveis a partir de oito elementos por comprimento de onda. Ainda segundo os mesmos autores um parâmetro importante a controlar é profundidade da base rígida, ou a espessura do meio semi-infinito, sobre o qual se constrói todo o modelo. Este valor deve ser tal que o valor em profundidade de todo o modelo seja aproximadamente seis a oito vezes o comprimento de onda da perturbação a estudar. Esta é a razão pela qual os modelos por nós empregues possuem profundidades variáveis de acordo com os

períodos de análise.

Tendo em conta as conclusões das referências apontadas, temos que dizer que não existe um processo geral para determinar as características da malha de elementos finitos a utilizar nos problemas que nos iremos estudar. Assim preocupámo-nos essencialmente com a relação entre as dimensões exigidas pelo problema concreto e as dimensões de cada um dos elementos finitos usados na discretização: esta questão é a única fonte restrições a ter presente, pois relaciona-se com a capacidade física de memória do computador empregue, bem como com os algoritmos aplicados na resolução numérica do problema.



4 - CÁLCULO DOS ERROS

4.0. Introdução

A resolução numérica do problema da propagação de ondas de Rayleigh, mediante o método dos elementos finitos, implica erros que é necessário analisar com pormenor antes de passar à fase de cálculo propriamente dita. Estes erros, como já o referimos em (2.5.1), são de diversos tipos e preocupamo-nos fundamentalmente com:

a) *Erros de resolução*, erros devido aos métodos numéricos utilizados na resolução dos problemas aos valores próprios;

b) *Erros de aproximação*, erros devido à existência de uma solução aproximada discreta, u_h , o que está relacionado com as dimensões da malha.

Na determinação do último tipo de erros temos que necessariamente possuir a solução analítica da propagação de ondas de Rayleigh num meio estratificado horizontalmente. Encontrar esta solução nos modelos por nós utilizados é uma tarefa bastante morosa e eventualmente inprofícua, pois as conclusões podem ser extraídas, sem perda de generalidade, com base num modelo de

características semelhantes e muito mais simples. Este modelo simplificado (camada homogênea assente sobre um meio semi-infinito) é descrito por Tolstoy e Usdin (1953)[pag.857].

*
* *

4.1. A resolução do problema aos valores próprios

4.1.1. Método para o Cálculo dos valores próprios

A solução de (3.3.4), tal como aponta Peters (1970), desde que as matrizes [A] e [B] não sejam simétricas e esta última não seja singular, é equivalente à do problema típico de valores próprios:

$$\lambda [A] [u] - \lambda [B] [u]$$

$$\lambda [B]^{-1}[A] [u] - \lambda [u]$$

Tudo se resume portanto a determinar os valores e vectores próprios de $[M] = [B]^{-1}[A]$, em que [A] e [B] são dadas por (3.2.2.) e [M] é uma matriz não simétrica.

No sentido de muito sumariamente descrevermos o método por nós utilizado na resolução do problema aos valores próprios, há que relembrar:

(a) *Transformações de semelhança não alteram o espectro (conjunto de valores próprios) de uma matriz qualquer;*

(b) *Dada uma matriz qualquer é sempre possível transformá-la num produto de uma matriz unitária [Q] por uma matriz triangular superior [R].*

Assim no método proposto para numericamente se obterem os vectores e valores próprios, o primeiro passo corresponde à transformação da matriz [M] numa matriz superior de Hessenberg, [H], utilizando transformações de semelhança

$$[M] \xrightarrow{(a)} [H] = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

O segundo passo corresponde à transformação de [H], atendendo a (b),

$$[H] = [Q] [R]$$

o que corresponde ao algoritmo QR, designação do algoritmo empregue na determinação dos valores próprios. Este algoritmo assenta essencialmente nas relações

$$[A]_s = [Q]_s [R]_s \quad , \quad [R]_s [Q]_s = [A]_{s+1}$$

das quais obtemos

$$[A]_{s+1} = [Q]_s^T [A]_s [Q]_s$$

Logo é possível escrever

$$[A]_{s+1} = [Q]_s^T [Q]_{s-1}^T \dots [Q]_1^T [H] [Q]_1 \dots [Q]_{s-1} [Q]_s$$

em que esta sucessão matricial $[A]_i$ tende para a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

em que os λ_i são os valores próprios procurados.

4.1.2. Fluxograma de cálculo

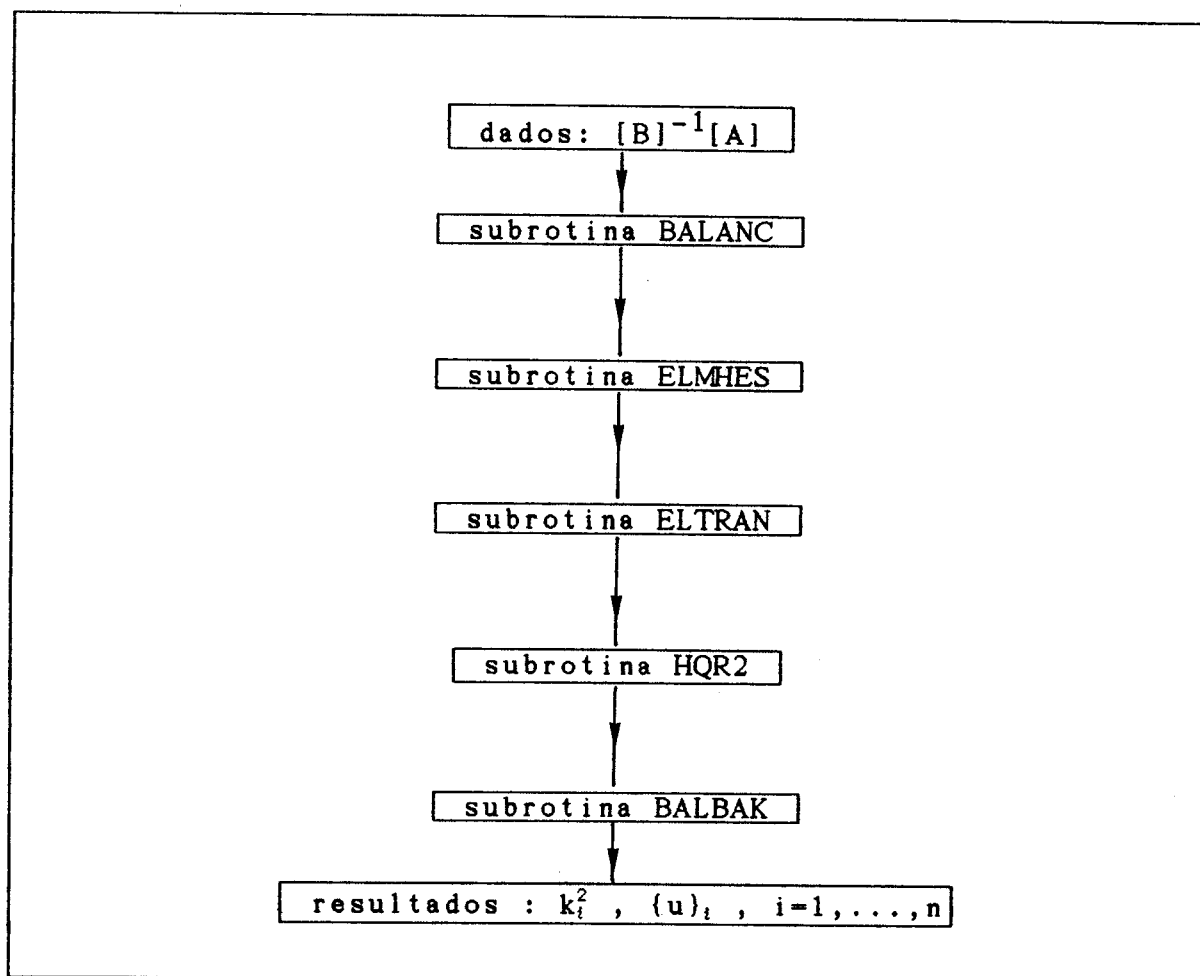


Fig. 4.1.- Fluxograma da seqüência de cálculo dos valores e vectores próprios

Na resolução numérica do problema aos valores próprios utilizamos as subrotinas em FORTRAN 77 publicadas por Smith et al. (1976), organizadas de acordo com o fluxograma apresentado na fig.4.1.

O objectivo de cada uma das rotinas empregue é o seguinte:

a) subrotina BALANC - equilibrar a matriz da qual pretende determinar-se os valores próprios, por forma a reduzir a sua norma euclideana, utilizando transformações de semelhança;

b) subrotina ELMHES - reduz a matriz já equilibrada à forma de matriz de Hessenberg superior, à custa de transformações de semelhança;

c) subrotina ELTRAN - memoriza as transformações de semelhança da subrotina anterior;

d) subrotina HQR2 - calcula os vectores e valores próprios da matriz superior de Hessenberg baseando-se no algoritmo QR;

e) subrotina BALBAK - esta subrotina permite transformar os vectores próprios calculados anteriormente nos vectores próprios da matriz original e que começou, inicialmente, a ser modificada pela subrotina BALANC.

4.1.3 Cálculo dos Erros: resultados obtidos

O erro é determinado substituindo cada um dos valores próprios, e correspondente vector próprio, na equação matricial do movimento (3.2.27). Assim, definimos o vector erro de resolução para o modo j como

$$\{e\}_j = (k_j^2[A] + k_j[B] + [G] - \omega^2[M]) \{u\}_j \quad (4.1.1)$$

$\neq 0$

cuja norma

$$e_j = \left[\{e\}_j^T \{e\}_j \right]^{1/2}$$

o que nos permite estimar o erro de resolução para um determinado modo de propagação de ondas de Rayleigh.

Vamos aplicar o que acabámos de ver a um dos modelos referidos em Tolstoy e Usdin (1953), fig.4.1: uma camada de espessura, h_1 , e cujos parametros físicos são α_1 , β_1 , ρ_1 , assente sobre um meio semi-infinito fisicamente caracterizado por α_2 , β_2 e ρ_2 , verificando-se as relações

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = 3.147$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1.39$$

Ao aplicarmos a este modelo o método dos elementos finitos há que ter em conta a espessura do meio semi-infinito, h_2 ; fizémos $h_2 = E \times h_1$, onde $E = 2, 4, 8$.

De acordo com estas características definimos três modelos, contendo cada um quatro submodelos (de acordo com o número de estratos em que cada uma das duas camadas se subdivide), conforme o seguinte quadro

QUADRO 4.1

	modelo 1	modelo 2	modelo 3
β_1 (km/s)	2.300	2.300	2.300
ρ_1 (g/cm ³)	2.160	2.160	2.160
h_1 (km)	10.0	10.0	10.0
E	2	4	8
n_1	4, 8, 16, 32	4, 8, 16, 32	4, 8, 16, 32
n_2	4, 8, 16, 32	4, 8, 16, 32	4, 8, 16, 32

n_1 - numero de estratos da camada de espessura h_1

n_2 - numero de estratos da camada de espessura h_2

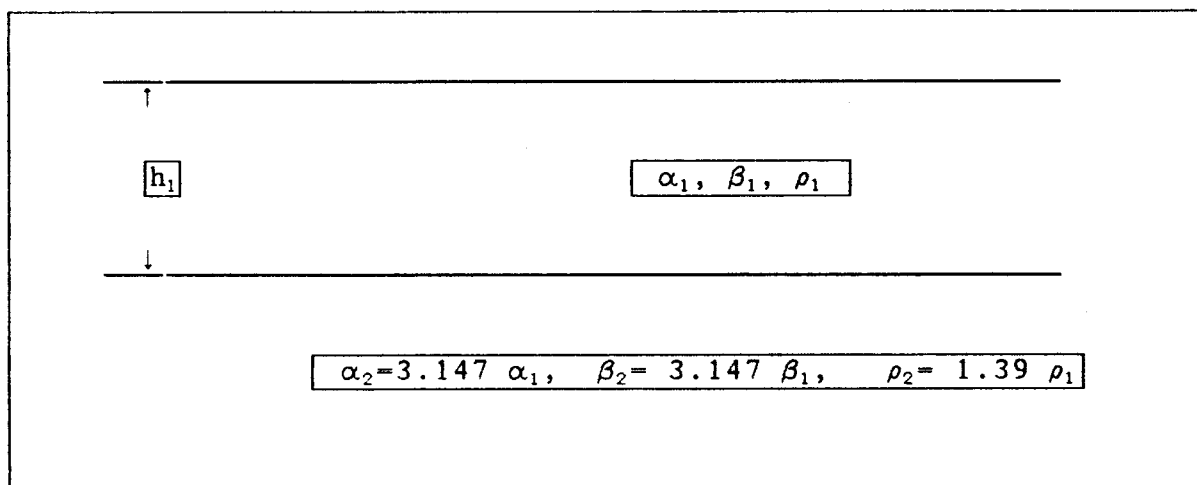


Fig. 4.1 - Camada elástica sobre um meio elástico semi-infinito

O QUADRO 4.2 mostra os valores obtidos de k_j^2 , valores próprios da equação (3.3.4) e a correspondente norma do vector erro de resolução para o modelo 1, com $n_1=n_2=8$, e para um periodo de 2.5s. Os resultados demonstram a eficiência do algoritmo utilizado no cálculo numérico da equação matricial referida. Há que assinalar que o número de valores próprios obtidos para cada modelo é igual ao dobro do número total de estratos utilizados na discretização. Por outro lado todos os valores calculados estão contidos no modelo física e geometricamente igual ao anterior, mas em que o número de estratos considerados (em que cada camada é subdividida) aumentou.

QUADRO 4.2

Valores próprios para o MODELO 1 ($n_1=n_2=8$)
Período 2.5s

	VALOR PRÓPRIO	ERRO de Resolução
1)	-0.20517D+02 0.00000D+00	0.25189D-07 0.00000D+00
2)	-0.15242D+02 0.00000D+00	0.20880D-07 0.00000D+00
3)	-0.88968D+01 0.00000D+00	0.37477D-07 0.00000D+00
4)	-0.53258D+01 0.00000D+00	0.12374D-07 0.00000D+00
5)	-0.42306D+01 0.00000D+00	0.32195D-07 0.00000D+00
6)	-0.36662D+01 0.00000D+00	0.45941D-07 0.00000D+00
7)	-0.23362D+01 0.00000D+00	0.36194D-07 0.00000D+00
8)	-0.21188D+01 0.00000D+00	0.38522D-07 0.00000D+00
9)	0.13472D+01 0.00000D+00	0.20682D-07 0.00000D+00
10)	-0.14353D+01 0.28601D+00	0.90921D-07 0.18270D-07
11)	-0.14353D+01-0.28601D+00	0.90921D-07-0.18270D-07
12)	0.94682D+00 0.00000D+00	0.14800D-07 0.00000D+00
13)	-0.14036D+01 0.00000D+00	0.40921D-07 0.00000D+00
14)	-0.10385D+01 0.53074D-01	0.50395D-07-0.56542D-07
15)	-0.10385D+01-0.53074D-01	0.50395D-07 0.56542D-07
16)	0.45281D+00 0.00000D+00	0.11375D-07 0.00000D+00
17)	0.37952D+00 0.00000D+00	0.52776D-07 0.00000D+00
18)	-0.58112D+00 0.00000D+00	0.54522D-07 0.00000D+00
19)	-0.47986D+00 0.10420D+00	0.38409D-07-0.73135D-07
20)	-0.47986D+00-0.10420D+00	0.38409D-07 0.73135D-07
21)	-0.39962D+00 0.00000D+00	0.41365D-07 0.00000D+00
22)	0.17998D+00 0.00000D+00	0.22351D-07 0.00000D+00
23)	-0.13552D+00 0.15585D+00	0.28689D-07-0.20457D-07
24)	-0.13552D+00-0.15585D+00	0.28689D-07 0.20457D-07
25)	-0.30898D+00 0.00000D+00	0.13374D-07 0.00000D+00
26)	-0.14508D+00 0.84414D-01	0.72681D-07 0.99199D-07
27)	-0.14508D+00-0.84414D-01	0.72681D-07-0.99199D-07
28)	0.10047D+00 0.00000D+00	0.60988D-07 0.00000D+00
29)	0.53015D-01 0.00000D+00	0.44034D-07 0.00000D+00
30)	-0.33565D-02 0.23998D-01	0.30814D-07 0.42778D-07
31)	-0.33565D-02-0.23998D-01	0.30814D-07-0.42778D-07
32)	0.24009D-01 0.00000D+00	0.61973D-07 0.00000D+00

*

* *

4.2. Erros na aproximação do método dos elementos finitos

4.2.1. Solução teórica

O problema que se pretende resolver analiticamente é o da propagação de ondas superficiais de Rayleigh através do modelo referido em 4.1.3, fig.4.1. Não apresentamos o desenvolvimento analítico, mas, socorrendo-nos de Ben-Menahem e Singh (1981), escrevemos as expressões finais.

As amplitudes do deslocamento na camada (1) e (2) são, respectivamente,

$$\vec{\Phi}_{(1)} = A_1' (\vec{e}_x + \vec{e}_z \eta_{\alpha_1}) e^{-ik\eta_{\alpha_1} z} + A_1'' (\vec{e}_x + \vec{e}_z \eta_{\alpha_1}) e^{ik\eta_{\alpha_1} z} + B_1' (-\eta_{\beta_1} \vec{e}_x + \vec{e}_z) e^{-ik\eta_{\beta_1} z} + B_1'' (\eta_{\beta_1} \vec{e}_x + \vec{e}_z) e^{ik\eta_{\beta_1} z}$$

e

$$\vec{\Phi}_{(2)} = A_2 (\vec{e}_x - i\gamma_{\alpha_2} \vec{e}_z) e^{-k\gamma_{\alpha_2} z} + B_2 (i\gamma_{\beta_2} \vec{e}_x + \vec{e}_z) e^{-k\gamma_{\beta_2} z}$$

onde

$$\eta_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_1^2} - 1}, \quad \gamma_{\alpha_2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha_2^2}}, \quad \eta_{\beta_1} = \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}, \quad \gamma_{\beta_2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}}$$

\vec{e}_x , \vec{e}_z representam os versores segundo a direcção \overline{OX} e \overline{OZ} , respectivamente. As condições fronteira são as seguintes:

- as tensões anulam-se para $z=0$ em qualquer instante;
- há continuidade das tensões e deslocamentos na superfície de separação $z=H$ para qualquer instante;
- $\vec{\Phi}_{(2)}$ tende para zero quando z tende para infinito.

O que implica que cheguemos a um sistema homogéneo de seis equações a seis incógnitas, A_1' , A_1'' , B_1' , B_1'' , A_2 , e B_2 . A condição para que este sistema possua solução não trivial con-

duz-nos à equação de dispersão para este caso concreto

$$\begin{aligned} \Delta_R &= A_0 + B_0 \cos(kH\eta_{\alpha_1})\cos(kH\eta_{\beta_1}) + C_0 \sin(kH\eta_{\alpha_1})\sin(kH\eta_{\beta_1}) + \\ &+ D_0 \cos(kH\eta_{\alpha_1})\sin(kH\eta_{\beta_1}) + E_0 \sin(kH\eta_{\alpha_1})\cos(kH\eta_{\beta_1}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= 4k^2 (2k^2 - k_{\beta_1}^2) \times \\ &\times \left[\left(2k^2f - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 \right) \left(2k^2f - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 + k_{\beta_1}^2 \right) - 2k^2f \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} (2k^2f - k_{\beta_1}^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 4k^4 \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} \left[(2k^2f - k_{\beta_1}^2)^2 + f^2(2k^2 - k_{\beta_1}^2)^2 \right] - \\ &- 4k^4 \left(2k^2f - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 + k_{\beta_1}^2 \right)^2 - (2k^2 - k_{\beta_1}^2)^2 \left(2k^2f - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= 4k^4 \eta_{\alpha_2} \eta_{\beta_2} \left[\left(2k^2f - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 \right)^2 - 4k^4f^2 \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} \right] + \frac{(2k^2f - k_{\beta_1}^2)^2}{\eta_{\alpha_2} \eta_{\beta_2}} \\ &\times \left[\left(2k^2f - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 + k_{\beta_1}^2 \right)^2 - \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} (2k^2f + k_{\beta_1}^2)^2 \right] \end{aligned}$$

$$D_0 = - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 k_{\beta_1}^2 \left[(2k^2 - k_{\beta_2}^2)^2 \frac{\gamma_{\beta_2}}{\eta_{\beta_1}} - 4k^4 \gamma_{\alpha_2} \eta_{\beta_1} \right]$$

$$E_0 = - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_2}^2 k_{\beta_1}^2 \left[(2k^2 - k_{\beta_2}^2)^2 \frac{\gamma_{\alpha_2}}{\eta_{\alpha_1}} - 4k^4 \gamma_{\beta_2} \eta_{\alpha_1} \right]$$

e

$$f = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \quad k_{\beta_2} = \frac{\omega}{\beta_2} \quad k_{\beta_1} = \frac{\omega}{\beta_1} \quad k_{\alpha_2} = \frac{\omega}{\alpha_2} \quad k_{\alpha_1} = \frac{\omega}{\alpha_1}$$

4.2.2. Resultados obtidos

Como referimos em (2.5.3.) os erros de aproximação do método dos elementos finitos são proporcionais ao quadrado da maior dimensão da malha utilizada. Se chamarmos S_h ao resultado obtido com uma malha de dimensão h , $S_{h/2}$ será o resultado encontrado no caso das dimensões da malha serem metade da anterior. Designando por S_T o resultado teórico (determinação da velocidade de fase, c , na equação (4.2.1)) o erro de aproximação é dado por

$$\begin{aligned} e_h &= S_T - S_h \\ &= C h^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} e_{h/2} &= S_T - S_{h/2} \\ &= C \left(\frac{h}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Então teremos que verificar

$$\frac{e_h}{e_{h/2}} = 4 \quad (4.2.2.)$$

Usando o modelo definido no parágrafo 4.1.3 e para o período de 2.5 s resolvemos a expressão teórica (4.2.1.). Seleccionámos os valores da velocidade de fase tal que

$$\beta_1 > c > \beta_2$$

o que corresponde aos quatro primeiros modos de propagação.

Através do método dos elementos finitos calculámos os valores próprios de (3.3.4), e consequentemente a velocidade de fase, sujeitos à mesma condição para os três modelos do QUADRO 4.1, nas suas quatro variantes (8,16,32 e 64 estratos). Os resultados obtidos na comparação entre os valores teóricos e o

método dos elementos finitos, para a velocidade de fase dos quatro primeiros modos reais, estão expressos nos QUADROS 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, respectivamente

Os valores apresentados nos quadros anteriores e correspondentes à coluna REA demonstram que o comportamento dos erros de discretização se ajusta bem ao teoricamente previsto.

QUADRO 4.3
(modo fundamental)

MODELO	NºESTRATOS	EA	ER	REA
1	8	.20826D+00	.82034D-01	
	16	.44189D-01	.17406D-01	.47129D+01
	32	.10587D-01	.41702D-02	.41738D+01
	64	.25918D-02	.10209D-02	.40848D+01
2	8	.21309D+00	.83936D-01	
	16	.45452D-01	.17903D-01	.46882D+01
	32	.10987D-01	.43278D-02	.41368D+01
	64	.27089D-02	.10670D-02	.40558D+01
3	8	.21751D+00	.85677D-01	
	16	.47334D-01	.18644D-01	.45952D+01
	32	.11955D-01	.47091D-02	.39593D+01
	64	.30799D-02	.12131D-02	.38816D+01

$EA = S_T - S_h$; erro absoluto cometido na aproximação pelo m.e.f.

$ER = EA/S_T$; erro relativo cometido na aproximação pelo m.e.f.

$REA = \frac{EA_h}{EA_{h/2}}$; quociente entre os erros absolutos correspondentes aos submodelos em que o numero de estratos é o dobro

QUADRO 4.4
(1º modo superior)

MODELO	NºESTRATOS	EA	ER	REA
1	8	.97187D+00	.27874D+00	
	16	.24834D+00	.71226D-01	.39134D+00
	32	.68061D-01	.19520D-01	.36487D+00
	64	.17309D-01	.49644D-02	.39321D+00
2	8	.95364D+00	.27351D+00	
	16	.25520D+00	.73194D-01	.37368D+01
	32	.70244D-01	.20146D-01	.36330D+01
	64	.17923D-01	.51405D-02	.38192D+01
3	8	.96785D+00	.27759D+00	
	16	.26846D+00	.76997D-01	.36051D+01
	32	.76006D-01	.21799D-01	.35320D+01
	64	.19918D-01	.57127D-02	.38159D+01

QUADRO 4.5
(2º modo superior)

MODELO	NºESTRATOS	EA	ER	REA
1	8	.24907D+00	.62030D-01	
	16	.64367D-01	.16030D-01	.38695D+01
	32	.17523D-01	.43640D-02	.36732D+01
	64	.45414D-02	.11310D-02	.38585D+01
2	8	.26144D+00	.65110D-01	
	16	.70503D-01	.17558D-01	.37082D+01
	32	.21054D-01	.52434D-02	.33486D+01
	64	.58408D-02	.14546D-02	.36046D+01
3	8	.29195D+00	.72709D-01	
	16	.76124D-01	.18958D-01	.38351D+01
	32	.20391D-01	.50783D-02	.37332D+01
	64	.52711D-02	.13127D-02	.38684D+01

QUADRO 4.6
(3º modo superior)

MODELO	NºESTRATOS	EA	ER	REA
1	8	.11482D+01	.20519D+00	
	16	.32851D+00	.58708D-01	.34951D+01
	32	.93194D-01	.16654D-01	.35250D+01
	64	.24434D-01	.43666D-02	.38141D+01
2	8	.16907D+01	.30214D+00	
	16	.45166D+00	.80716D-01	.37433D+01
	32	.14164D+00	.25312D-01	.31887D+01
	64	.38997D-01	.69692D-02	.36320D+01
3	8	.25797D+01	.46102D+00	
	16	.71486D+00	.12775D+00	.36086D+01
	32	.19906D+00	.35574D-01	.35911D+01
	64	.56598D-01	.10114D-01	.35170D+01

5 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH EM MEIOS ESTRATIFICADOS HORIZONTALMENTE (Resultados numéricos)

5.0. Introdução

Toda a teoria exposta no Cap.3 permitiu-nos construir um programa de cálculo automático capaz de obter resultados sobre a propagação de ondas de Rayleigh em meios estratificados horizontalmente. Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos obtidos e a sua interpretação física.

De início há que definir as características dos meios escolhidos que são horizontalmente estratificados. Começamos este capítulo com o estabelecimento, baseando-nos nos trabalhos de Payo (1970), Perez (1978), Marillier e Mueller (1982), Banda et al. (1981), dos modelos das estruturas Continental e Oceânica a Oeste da Península Ibérica que passaremos a usar em todos os cálculos posteriores.

Especificadas as características dos dois modelos de base, oceânico e continental, procedemos ao estudo da propagação de ondas de Rayleigh no seu interior, utilizando o método dos

elementos finitos. Em 5.2 interpretamos fisicamente a diferença entre um percurso tipicamente oceânico e tipicamente continental sugerida pelos resultados numéricos obtidos na determinação de diferentes grandezas: modos de vibração, deslocamentos superficiais, elipsidade, velocidade de fase e de grupo, propagação crustal e canalizada.

Em 5.3 expomos os resultados obtidos para os mesmos modelos, mas utilizando o método de Knopoff. Embora, também aqui se proceda à interpretação física das diferenças entre os dois modelos (continental e oceânico), o objectivo deste ponto é permitir a compararação dos resultados deste método com o método dos elementos finitos. Procuraremos não repetir conclusões semelhantes para os diferentes métodos, realçando antes os aspectos em que há diferenças.

Os programas para cálculo automático do método de Knopoff foram-nos cedidos pelo Instituto de Geodesia e Geofísica da Universidade de Trieste quando participámos, em Outubro de 1986, num curso de sismologia no Instituto Internacional de Física Teórica em Trieste.

*

* *

5.1. Modelos das Zonas Oceânica e Continental a Oeste da Península Ibérica

5.1.1. Os modelos de Payo

Payo (1970), utilizando uma disposição triangular de estações sismográficas padronizadas na Península Ibérica (Porto, Málaga e Toledo), determinou as velocidades de fase das ondas de Rayleigh, mediante técnicas de análise espectral, e concluiu como modelo apropriado da zona continental uma estrutura horizontalmente estratificada, cujas características físicas são dadas pelos valores do QUADRO 5.1.

QUADRO 5.1

espessura da camada (km)	velocidade das ondas P (km/s)	velocidade das ondas S (km/s)	densidade (g/cm ³)
2.0	3.40	2.00	2.30
18.0	5.90	2.30	2.80
10.0	6.60	3.70	2.90
20.0	7.60	4.50	3.30
30.0	8.10	4.70	3.35
100.0	8.15	4.20	3.40
100.0	8.49	4.77	3.53
∞	8.81	4.89	3.60

Neste modelo há a salientar: (a) uma espessura da crosta continental com o valor de 30 km; (b) velocidades de 7.60 km/s e 4.50 km/s para as ondas P e S, respectivamente, na camada imediatamente abaixo do Moho; (c) a existência de um canal de baixa velocidade com uma espessura de 100 km onde as ondas S possuem uma velocidade de 4.20 km/s. Como o autor refere esta última característica é similar a outras zonas contíguas da

Península, como é o caso da região Alpina e do Mediterrâneo referidos em Knopoff et al.(1966) e Berry e Knopoff(1967), respectivamente.

Perez et al. (1978), baseando-se nas curvas de dispersão calculadas a partir dos registos de sismos próximos, epicentros nas zonas do Cabo de S.Vicente e Pirinéus, recolhidos no Observatório Central Geofísico de Toledo, melhorou o modelo anteriormente obtido para a crosta continental da península. Propôs como valores característicos da nova estrutura os que são apresentados no QUADRO 5.2.

QUADRO 5.2

espessura da camada (km)	velocidade das ondas P (km/s)	velocidade das ondas S (km/s)	densidade (g/cm ³)
2.0	3.40	2.00	2.30
18.0	5.90	2.30	2.80
10.0	6.60	3.70	2.90
20.0	7.60	4.50	3.30
30.0	8.10	4.70	3.35
100.0	8.15	4.20	3.40
100.0	8.49	4.77	3.53
∞	8.81	4.89	3.60

Este modelo não difere substancialmente do anterior.

Ao proceder à inversão, o autor refere que obter-se-ão os mesmos resultados caso se subdividisse a segunda camada (espessura de 18 km) em duas subcamadas (9 km cada), possuindo a segunda uma velocidade para as ondas S de 3.3 km/s. Este terceiro modelo supõe a existência de um primeiro canal de baixa velocidade muito mais à superfície. Banda (1981) também corrobora esta característica da crosta continental da

Península Ibérica, estribando-se em dados de perfis sísmicos ao longo da Península.

QUADRO 5.3

espessura da camada (km)	velocidade das ondas P (km/s)	velocidade das ondas S (km/s)	densidade (g/cm ³)
3.0	1.52	0.00	1.03
2.0	2.10	1.50	1.93
5.0	6.40	3.70	2.90
30.0	7.70	4.25	3.30
100.0	7.30	4.10	3.40
∞	8.50	4.89	3.50

No QUADRO 5.3 apresentamos, Perez et al.(1978), o modelo da crosta Oceânica a oeste da Península Ibérica. As suas características principais são as seguintes : (a) uma camada de água com espessura média de 3 km; (b) a existência de um estrato de sedimentos não consolidados, cuja espessura poderá variar entre 1 e 3 km; (c) uma camada basáltica com 5 km de espessura e cuja velocidade para as ondas S é de 3.7 km/s; (d) o Moho surge a uma profundidade média de 10 km.

5.1.2. Os modelos de gerais para a crosta e manto superior

No sentido de completar os modelos propostos para profundidades superiores a 400 km utilizaremos os valores propostos, no modelo CAL8, por Dziewonski e Anderson (1981) . Para a crosta continental teremos o modelo geral descrito pelo QUADRO 5.4, enquanto que para a crosta oceânica o mesmo é apresentado no QUADRO 5.5.

QUADRO 5.4

espessura da camada (km)	velocidade das ondas P (km/s)	velocidade das ondas S (km/s)	densidade (g/cm ³)
2.0	3.40	2.00	2.30
18.0	5.90	2.30	2.80
10.0	6.60	3.70	2.90
20.0	7.60	4.50	3.30
30.0	8.10	4.70	3.35
100.0	8.15	4.20	3.40
100.0	8.49	4.77	3.53
120.0	8.81	4.89	3.60
100.0	9.41	5.09	3.64
100.0	9.72	5.26	3.84
40.0	9.97	5.26	4.98
30.0	10.54	5.70	4.16
130.0	10.68	5.85	4.22
200.0	11.10	6.26	4.43
200.0	11.48	6.44	4.61
200.0	11.78	6.54	4.74
200.0	12.06	6.64	4.83
100.0	12.32	6.75	4.92

Fig. 5.1- Representação gráfica das grandezas apresentadas no QUADRO 5.4

QUADRO 5.5

espessura da camada (km)	velocidade das ondas P (km/s)	velocidade das ondas S (km/s)	densidade (g/cm ³)
3.0	1.52	0.00	1.03
2.0	2.10	1.50	1.93
5.0	6.40	3.70	2.90
30.0	7.70	4.25	3.30
100.0	7.30	4.10	3.40
120.0	8.50	4.89	3.50
140.0	9.08	4.89	3.60
100.0	9.41	5.09	3.64
100.0	9.72	5.26	3.84
40.0	9.97	5.26	4.98
30.0	10.54	5.70	4.16
130.0	10.68	5.85	4.22
200.0	11.10	6.26	4.43
200.0	11.48	6.44	4.61
200.0	11.78	6.54	4.74
200.0	12.06	6.64	4.83
100.0	12.32	6.75	4.92

Fig. 5.2- Representação gráfica das grandezas apresentadas no QUADRO 5.5

5.1.3. O método dos elementos finitos e os modelos gerais

Tendo em conta os dois modelos, oceânico e continental, a ser empregues na utilização do método dos elementos finitos, há que definir para cada um deles a profundidade, de tal modo que, como se escreveu em (3.4.), o seu valor seja seis a oito vezes o comprimento da onda que se propaga no seu interior. Como esta grandeza depende do período, para valores diferentes deste utilizaremos profundidades diferentes: QUADRO 5.6.

QUADRO 5.6

prof. (km)	n ^o camadas	períodos (s)									
400.0	42			1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	9.0		
800.0	55		10.5	12.0	13.5	15.0	16.5	18.0	19.5	21.0	
1200.0	64			22.5	24.0	25.5	27.0	28.5	30.0		
1600.0	72	33.0	36.0	39.0	42.0	45.0	48.0	51.0	54.0	57.0	60.0

Na segunda coluna do quadro mencionado estão indicadas o número total de camadas utilizadas no método dos elementos finitos, para cada uma das profundidades utilizadas. As cotas das camadas de um modelo de maior profundidade são idênticas às cotas comuns aos modelos de menor profundidade, acrescentado-se unicamente novos estratos mais profundos. O modelo cuja profundidade é de 800 km corresponde ao modelo de 400 km com 42 camadas a que se juntaram mais 13 camadas a profundidades superiores, não alterando os níveis e as características das 42 camadas já existentes.

*
* *

5.2. Propagação oceânica e continental:
resultados e conclusões

5.2.1 Modos de vibração

Os cálculos para a determinação dos deslocamentos quer vertical, quer horizontal, em função da profundidade, foram feitos para todos os períodos indicados no QUADRO 5.6 e para ambos os tipos de estruturas, oceânica e continental.

Nas fig.5.3 apresentamos, a título de exemplo e como forma de ilustrarmos as conclusões a tirar, os resultados obtidos para os deslocamentos horizontais nas zonas oceânica e continental para três períodos distintos, o que corresponde a modelos com profundidades diferentes. Analogamente, na fig.5.4, a representação corresponde a deslocamentos verticais em ambas as regiões. Da análise destes resultados podemos extrair algumas conclusões sobre a propagação das ondas de Rayleigh nas estruturas escolhidas:

a) para cada modo de propagação, nos exemplos considerados apresentamos valores só até ao quarto modo superior, a profundidade atingida aumenta com o período;

b) para cada período a profundidade atingida por cada modo aumenta com a sua ordem;

c) em todos os casos o número de planos nodais no deslocamento horizontal corresponde à ordem do modo, enquanto que no deslocamento vertical corresponde ao número de planos nodais menos um.

Por outro lado, a comparação entre a propagação, ao longo dos vários períodos considerados, nos dois tipos de estruturas mostra acentuadas diferenças na propagação para os baixos e médios períodos que começam a atenuar-se para os grandes períodos. E isto passa-se porque as irregularidades estruturais entre os dois tipos de modelo manifestam-se essencialmente na zona menos profunda, até aos 150 km (repare-se nos QUADROS 5.4 e

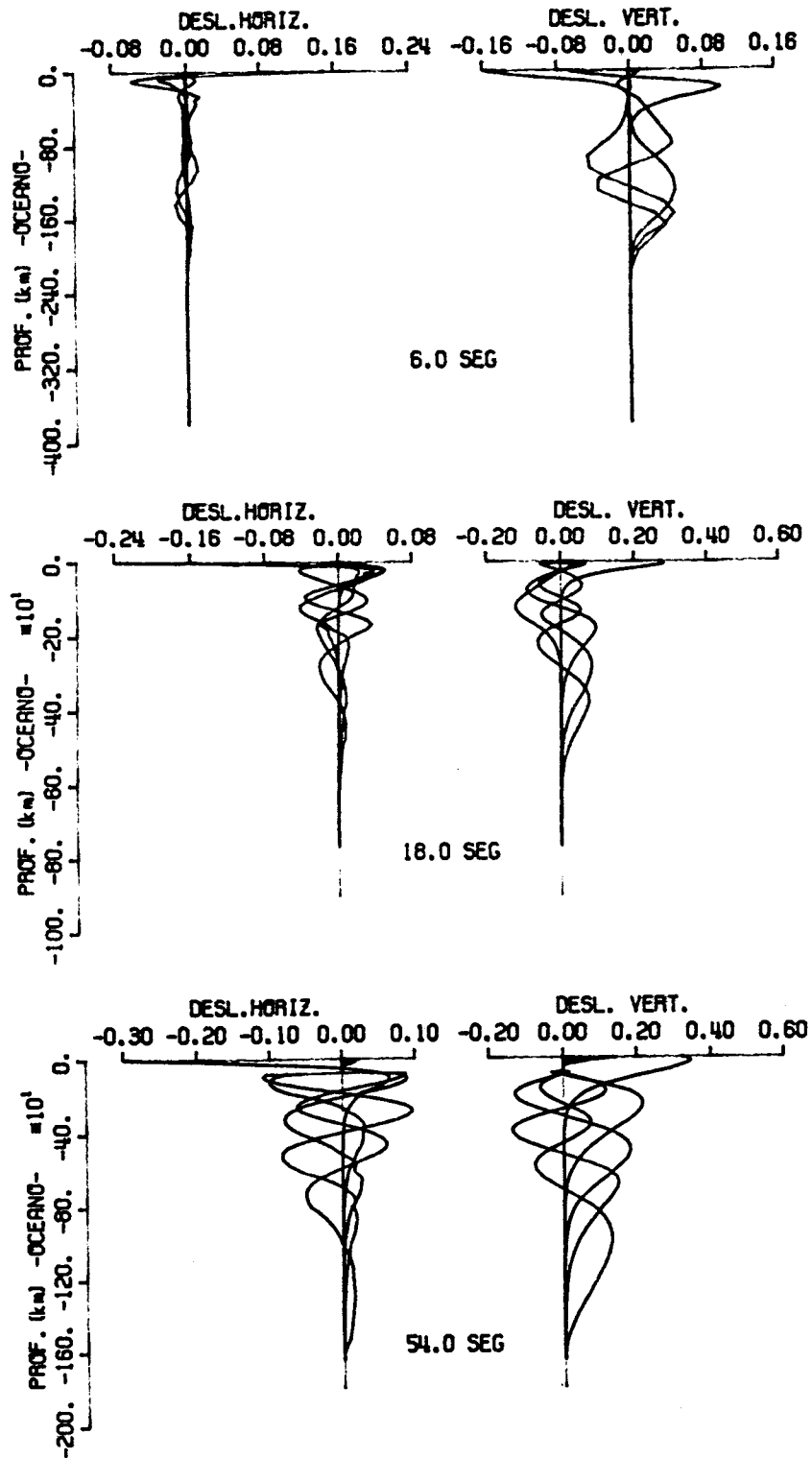


Fig.5.3. Variação do deslocamento horizontal e vertical com a profundidade para os cinco primeiros modos de Rayleigh para os períodos indicados (oceano).

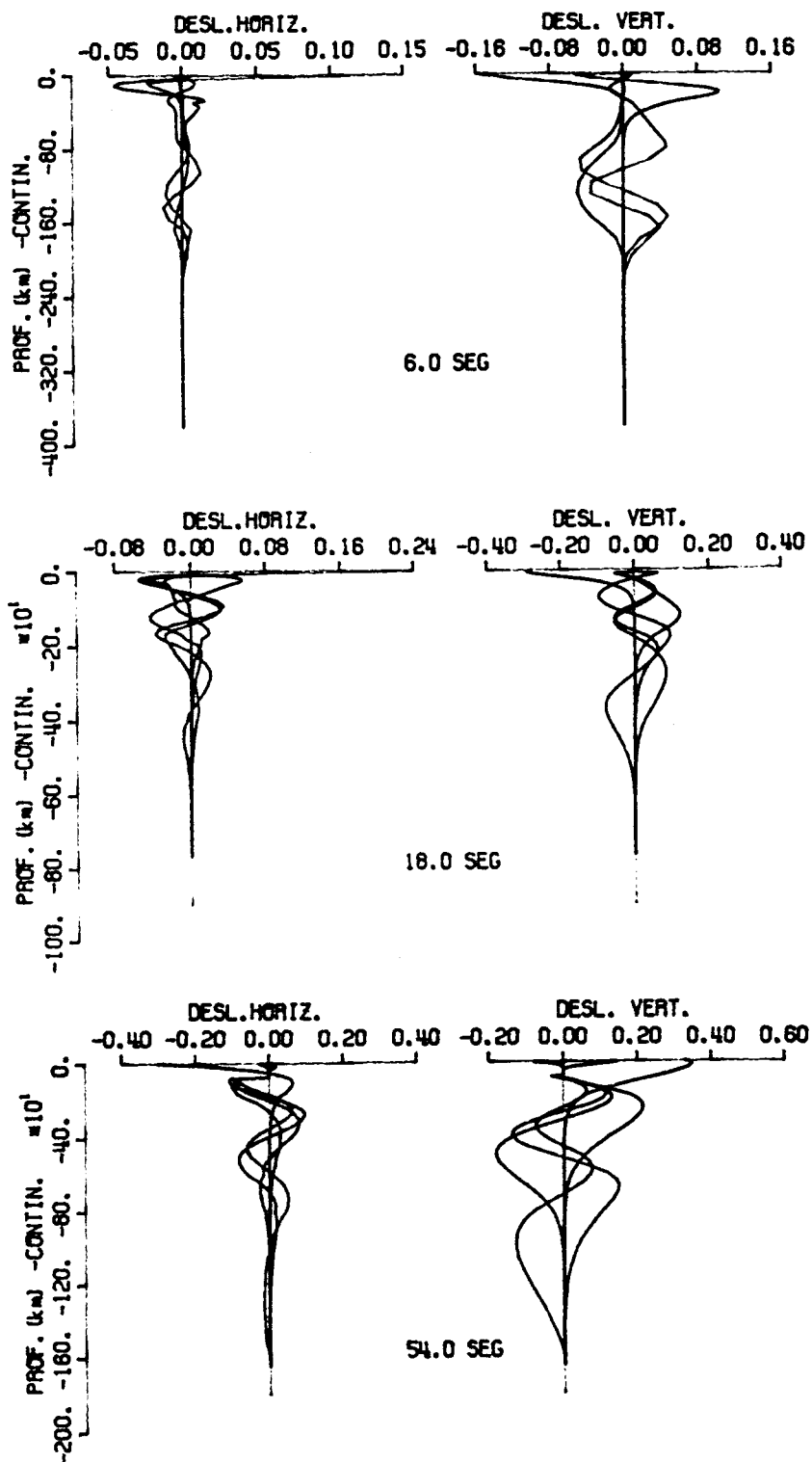


Fig.5.4 - Variação do deslocamento horizontal e vertical com a profundidade para os cinco primeiros modos de Rayleigh para os períodos indicados (continente)

5.5), logo estas características afectarão sobretudo as ondas cujos períodos são inferiores, aproximadamente, a 30s.

5.2.2. Deslocamento superficial

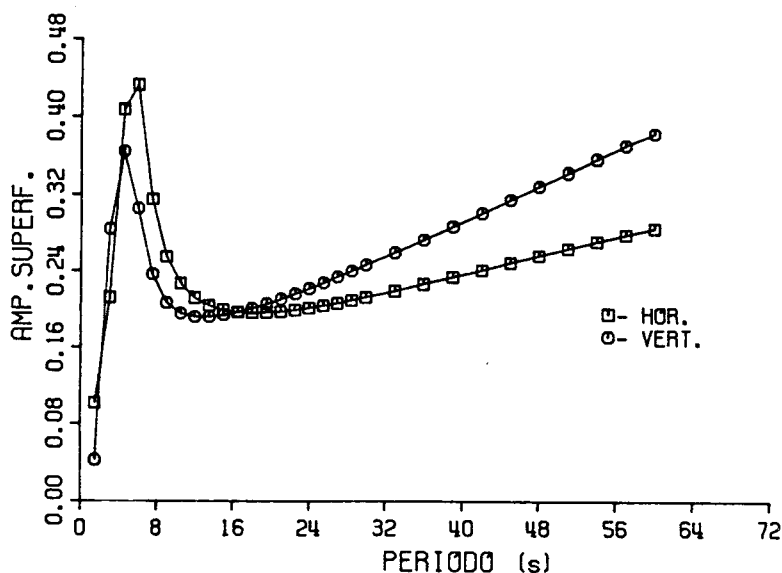


Fig.5.5. Amplitudes superficiais das ondas de Rayleigh (modo fundamental) na zona oceânica.

Na estrutura oceânica o deslocamento horizontal superficial do modo fundamental, em valor absoluto, é superior ao deslocamento vertical superficial para períodos inferiores a 18 s, enquanto que para períodos superiores a este valor a situação é inversa (fig.5.5). A amplitude do deslocamento vertical à superfície, na zona oceânica, decresce no intervalo compreendido entre, aproximadamente, 4.5 s e 12 s, atingindo um mínimo neste último valor. Um comportamento análogo possui o módulo da componente horizontal do deslocamento à superfície: decresce no intervalo definido, aproximadamente, entre os valores do período 4.5 s e 18 s, possuindo neste último valor um mínimo relativo.

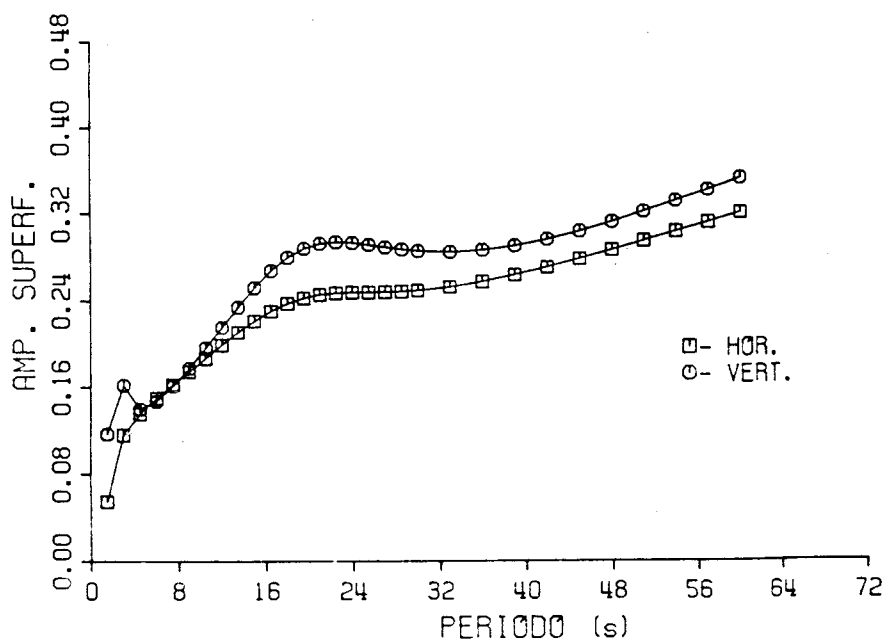


Fig.5.6. Amplitudes superficiais das ondas de Rayleigh (modo fundamental) na zona continental.

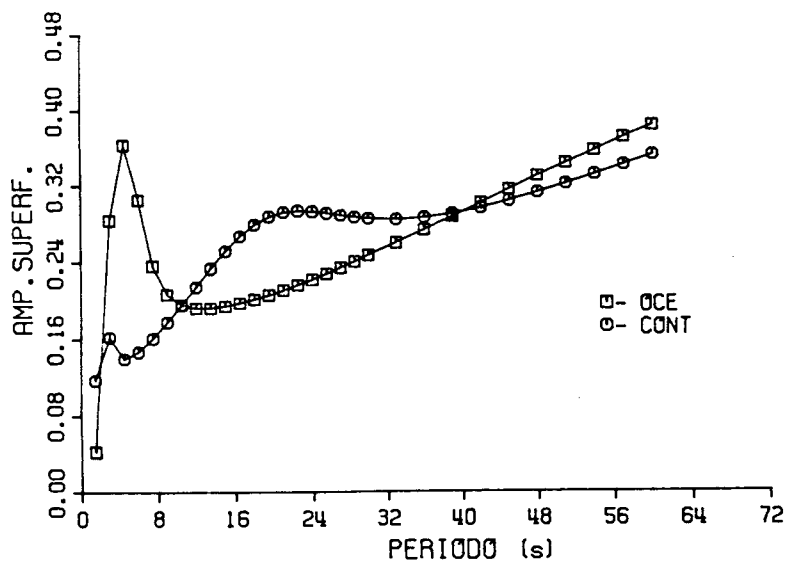


Fig.5.7. Componente vertical das amplitudes superficiais das ondas de Rayleigh (modo fundamental)

De uma forma similar, é possível extrairmos algumas con-

clusões sobre o deslocamento superficial, correspondente ao modo fundamental de propagação, na estrutura continental: em valor absoluto a componente vertical é sempre superior à horizontal; ambas as componentes, em valor absoluto, crescem com o período, possuindo, todavia, uma zona, entre os 22.5 s e 33 s, onde a componente vertical sofre um ligeiro decréscimo.

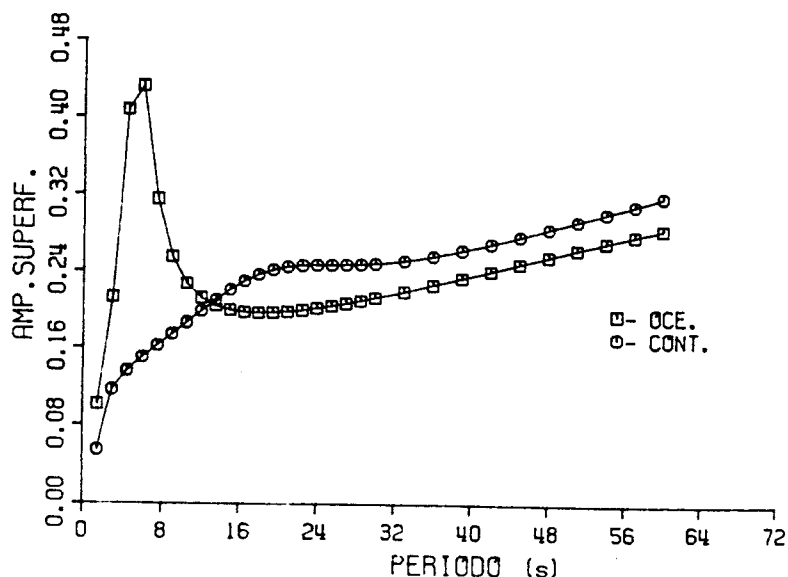


Fig.5.8. Componente horizontal das amplitudes superficiais das ondas de Rayleigh (modo fundamental)

Do que acabámos de escrever é de sublinhar a diferença nítida de comportamento nos dois tipos de estruturas do deslocamento superficial correspondente ao modo de propagação fundamental, o que evidenciamos através das figs. 5.7 e 5.8. Assim:

a) a componente vertical (fig.5.7.) do deslocamento superficial para períodos inferiores a 10.5 s e superiores a 42 s é maior na zona oceânica do que na continental; no intervalo compreendido entre ambos os valores mencionados verificamos o contrário; para curtos e longos períodos o valor absoluto desta componente do deslocamento superficial é maior na zona oceânica do que na continental;

b) quanto à componente horizontal (fig.5.8.) possui, para períodos inferiores a 13.5 s, valores superiores na região oceânica em relação à continental; existindo uma inversão desta situação para valores superiores a 13.5 s.

5.2.3 Elipsidade

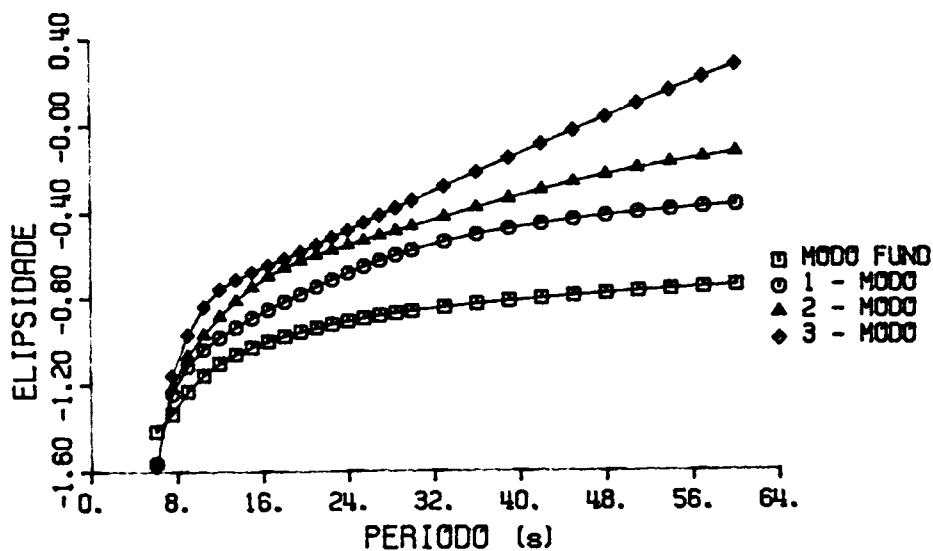


Fig.5.19.- Elipsidade à superfície das ondas de Rayleigh (zona oceânica)

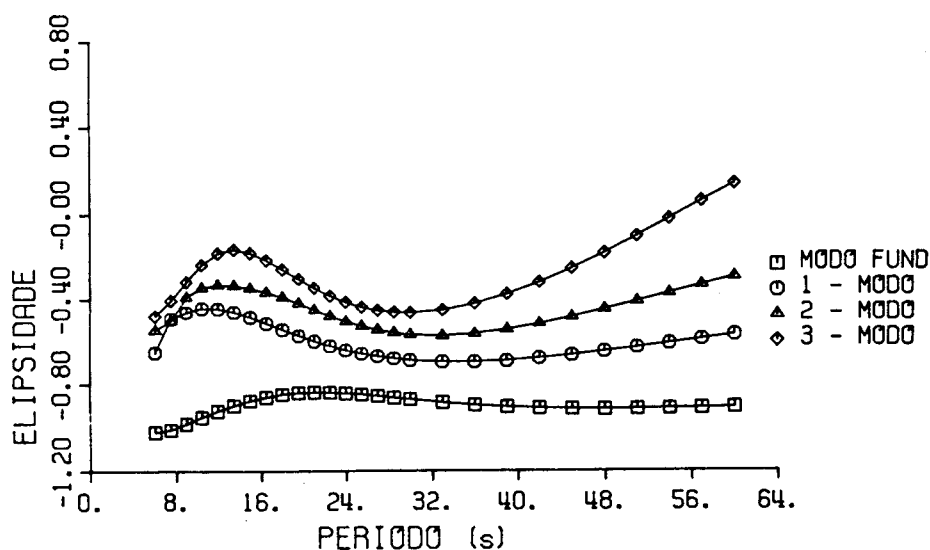


Fig.5.10.- Elipsidade à superfície das ondas de Rayleigh (zona continental)

A representação gráfica da elipsidade do movimento ondulatório da partícula à superfície para os quatro primeiros modos e para as zonas oceânica e continental é feita pelas fig.5.9 e fig.5.10, respectivamente.

De um exame atento desta representação verificamos que em ambas as estruturas e em períodos superiores a 6 s as curvas de elipsidade dos diferentes modos não se intersectam, tal como é referido por Panza et al. (1972): para um determinado período a elipsidade é uma função crescente do modo de vibração.

Concluimos também que na propagação das ondas de Rayleigh na estrutura oceânica o movimento das partículas materiais à superfície, para os modos considerados, é sempre retrógrado, deixando de o ser para o terceiro modo superior e só para períodos superiores a 48 s; para todos os modos considerados a elipsidade é uma função crescente do período. Na estrutura continental o movimento das partículas à superfície também é retrógrado, deixando de o ser para o terceiro modo superior e para períodos superiores a 57 s. Aqui há uma certa similitude de comportamento em ambas as estruturas. Contudo, na propagação no modelo continental a elipsidade não cresce com o período possuindo máximos e mínimos relativos no intervalo considerado:

		max.rel.		min.rel
modo fundamental	...	22.5	...	--
1 ^o modo superior	...	10.5	...	36.0
2 ^o modo superior	...	12.0	...	33.0
3 ^o modo superior	...	13.5	...	30.0

5.2.4. Velocidade de fase

Nos QUADROS 5.7 e 5.8 apresentamos os resultados obtidos para a velocidade de fase na propagação do modo fundamental e

dos quatro modos superiores de Rayleigh nas zonas oceânica e continental, respectivamente. Com o objectivo de proceder a uma melhor leitura dos valores procedemos à sua representação gráfica: fig. 5.14 e 5.15.

QUADRO 5.7
 velocidade de fase -km/s- (met.elem.finit.)
 estrutura oceânica

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	2.210	3.337	4.237	4.204	4.102
3.0	1.579	2.817	4.031	4.107	4.133
4.5	2.199	4.115	4.166	4.234	4.282
6.0	2.961	4.126	4.208	4.353	4.564
7.5	3.379	4.139	4.264	4.490	4.795
9.0	3.546	4.156	4.338	4.657	4.855
10.5	3.629	4.177	4.430	4.809	4.915
12.0	3.675	4.204	4.536	4.895	4.943
13.5	3.704	4.237	4.646	4.919	5.000
15.0	3.723	4.275	4.743	4.935	5.054
16.5	3.736	4.319	4.817	4.954	5.104
18.0	3.745	4.368	4.868	4.979	5.150
19.5	3.751	4.422	4.903	5.014	5.196
21.0	3.756	4.478	4.929	5.057	5.242
22.5	3.760	4.535	4.950	5.104	5.291
24.0	3.763	4.590	4.970	5.153	5.345
25.5	3.766	4.640	4.991	5.202	5.405
27.0	3.768	4.685	5.012	5.248	5.469
28.5	3.771	4.724	5.035	5.292	5.534
30.0	3.774	4.757	5.059	5.334	5.599
33.0	3.780	4.811	5.109	5.415	5.729
36.0	3.787	4.852	5.162	5.496	5.862
39.0	3.797	4.887	5.216	5.578	6.001
42.0	3.808	4.918	5.272	5.662	6.140
45.0	3.821	4.949	5.328	5.749	6.265
48.0	3.835	4.979	5.386	5.839	6.366
51.0	3.852	5.010	5.445	5.932	6.442
54.0	3.869	5.042	5.504	6.028	6.508
57.0	3.887	5.075	5.565	6.124	6.571
60.0	3.907	5.110	5.626	6.217	6.638

QUADRO 5.8
 velocidade de fase -km/s- (met.elem.finit.)
 estrutura continental

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	2.079	3.294	3.538	3.642	3.768
3.0	2.734	3.633	3.927	4.270	4.208
4.5	2.930	3.818	4.218	4.278	4.385
6.0	2.994	4.056	4.230	4.326	4.481
7.5	3.036	4.258	4.243	4.381	4.575
9.0	3.077	4.258	4.363	4.456	4.689
10.5	3.122	4.274	4.416	4.555	4.786
12.0	3.174	4.290	4.462	4.656	4.851
13.5	3.233	4.307	4.513	4.742	4.902
15.0	3.299	4.325	4.569	4.809	4.948
16.5	3.370	4.345	4.630	4.864	4.996
18.0	3.441	4.367	4.691	4.913	5.056
19.5	3.509	4.394	4.747	4.958	5.127
21.0	3.572	4.423	4.795	5.000	5.196
22.5	3.626	4.456	4.838	5.042	5.255
24.0	3.671	4.491	4.877	5.084	5.308
25.5	3.708	4.527	4.913	5.129	5.360
27.0	3.738	4.564	4.948	5.177	5.414
28.5	3.762	4.599	4.983	5.227	5.472
30.0	3.780	4.633	5.016	5.277	5.534
33.0	3.807	4.693	5.082	5.378	5.671
36.0	3.824	4.744	5.145	5.475	5.822
39.0	3.835	4.788	5.207	5.570	5.980
42.0	3.843	4.828	5.267	5.663	6.136
45.0	3.849	4.865	5.327	5.757	6.272
48.0	3.855	4.900	5.386	5.852	6.376
51.0	3.861	4.934	5.445	5.950	6.453
54.0	3.867	4.968	5.504	6.048	6.518
57.0	3.874	5.003	5.563	6.145	6.583
60.0	3.882	5.038	5.622	6.237	6.652

O comportamento da velocidade de fase permite-nos dizer que, na generalidade, todos os valores desta grandeza para a propagação dos diferentes modos ao longo da zona oceânica são superiores aos valores correspondentes na zona continental, excepto para períodos inferiores a 4.5 s. A variação da velocidade de fase para os grandes períodos, em todos os modos considerados, é bastante suave e tem tendência a tomar o mesmo valor nas duas zonas consideradas. Este último facto pode ser

explicado pelas características de ambos os modelos que são praticamente idênticos a partir dos 400 km de profundidade, logo a propagação de ondas de longo período, consequentemente de maior penetração, traduz esta identidade.

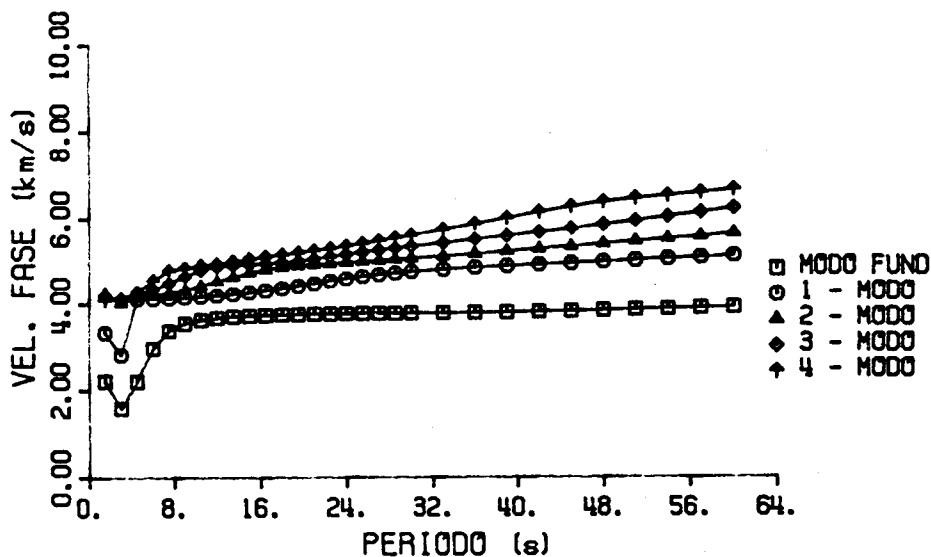


Fig.5.14. - Velocidade de fase dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona oceânica (modelo Payo)

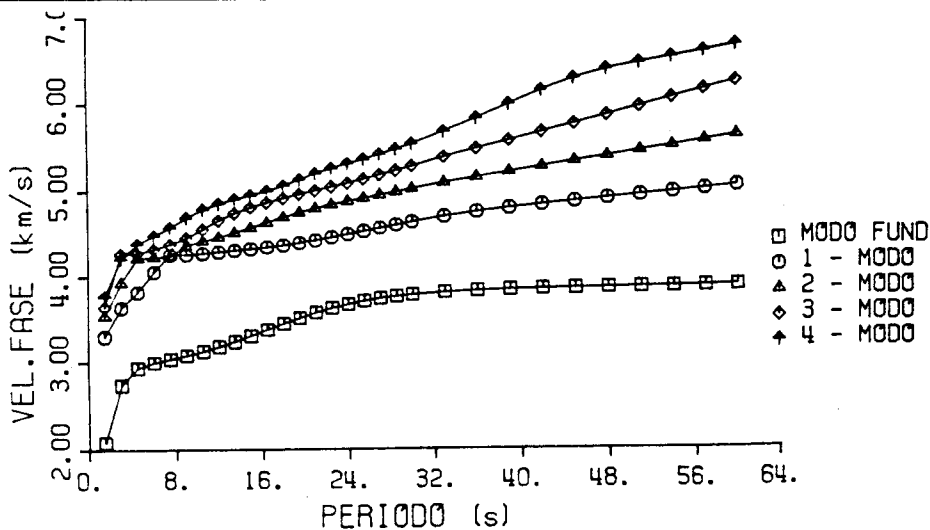


Fig.5.15. - Velocidade de fase dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona continental (modelo Payo)

As diferenças mais substanciais no comportamento da propagação das ondas de Rayleigh entre a crosta oceânica e continental estão expressas nas curvas correspondentes ao modo fundamental: para curtos períodos a velocidade aumenta rapidamente com o período, havendo uma acentuada distinção entre o declive desta curva para as dois tipos de estrutura em questão; este facto realça as diferenças estruturais de estratificação dos dois modelos ao nível da crosta e manto superior.

QUADRO 5.9
velocidade de grupo -km/s- (met.elem.finit.)
estrutura oceânica

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	1.967	2.637	4.019	4.049	4.098
3.0	1.059	1.527	3.041	4.094	4.074
4.5	1.075	4.088	4.041	3.199	3.125
6.0	1.592	4.080	4.023	3.927	3.786
7.5	2.470	4.066	3.965	3.826	3.955
9.0	2.984	4.044	3.892	3.822	4.200
10.5	3.251	4.015	3.824	4.065	4.816
12.0	3.407	3.980	3.797	4.569	4.579
13.5	3.508	3.940	3.855	4.781	4.535
15.0	3.576	3.899	4.013	4.777	4.584
16.5	3.624	3.859	4.218	4.726	4.627
18.0	3.658	3.826	4.409	4.640	4.658
19.5	3.682	3.805	4.553	4.551	4.668
21.0	3.699	3.802	4.631	4.492	4.653
22.5	3.710	3.824	4.662	4.466	4.615
24.0	3.717	3.874	4.667	4.471	4.562
25.5	3.721	3.947	4.658	4.503	4.520
27.0	3.721	4.035	4.644	4.546	4.509
28.5	3.720	4.126	4.629	4.587	4.524
30.0	3.717	4.213	4.616	4.617	4.548
33.0	3.705	4.351	4.597	4.653	4.577
36.0	3.689	4.441	4.589	4.668	4.582
39.0	3.670	4.495	4.587	4.675	4.601
42.0	3.648	4.523	4.588	4.675	4.698
45.0	3.626	4.534	4.590	4.671	4.924
48.0	3.604	4.534	4.593	4.666	5.224
51.0	3.584	4.527	4.596	4.668	5.448
54.0	3.565	4.515	4.600	4.684	5.546
57.0	3.550	4.499	4.605	4.728	5.542
60.0	3.538	4.483	4.610	4.807	5.464

5.2.4. Velocidade de Grupo

Nos QUADROS 5.9 e 5.10 apresentamos os resultados obtidos para a velocidade de grupo na propagação do modo fundamental e dos quatro modos superiores de Rayleigh nas zonas oceânica e continental, respectivamente. Com o objectivo de proceder a uma melhor leitura dos valores procedemos à sua representação gráfica: fig. 5.16 e 5.17.

QUADRO 5.10
 velocidade de grupo -km/s- (met.elem.finit.)
 estrutura continental

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	1.732	2.927	3.442	3.369	3.400
3.0	2.095	3.341	3.165	2.888	4.193
4.5	2.682	3.261	4.186	4.147	3.736
6.0	2.815	3.280	4.178	4.131	4.165
7.5	2.849	3.638	4.141	4.098	4.096
9.0	2.843	4.167	3.986	3.968	4.096
10.5	2.817	4.166	4.114	3.935	4.296
12.0	2.782	4.164	4.113	3.998	4.443
13.5	2.750	4.158	4.078	4.145	4.510
15.0	2.730	4.145	4.043	4.280	4.532
16.5	2.733	4.123	4.037	4.355	4.474
18.0	2.763	4.092	4.077	4.408	4.365
19.5	2.822	4.058	4.155	4.456	4.329
21.0	2.906	4.024	4.236	4.482	4.429
22.5	3.006	3.997	4.300	4.483	4.540
24.0	3.113	3.982	4.343	4.468	4.591
25.5	3.217	3.981	4.372	4.446	4.595
27.0	3.315	3.996	4.393	4.427	4.570
28.5	3.402	4.025	4.410	4.419	4.531
30.0	3.476	4.064	4.427	4.425	4.488
33.0	3.592	4.153	4.461	4.471	4.427
36.0	3.669	4.236	4.493	4.528	4.410
39.0	3.718	4.302	4.521	4.572	4.443
42.0	3.746	4.349	4.544	4.601	4.576
45.0	3.761	4.382	4.564	4.618	4.867
48.0	3.764	4.402	4.581	4.629	5.223
51.0	3.761	4.414	4.598	4.646	5.460
54.0	3.753	4.419	4.614	4.682	5.549
57.0	3.741	4.419	4.630	4.748	5.533
60.0	3.726	4.416	4.646	4.850	5.447

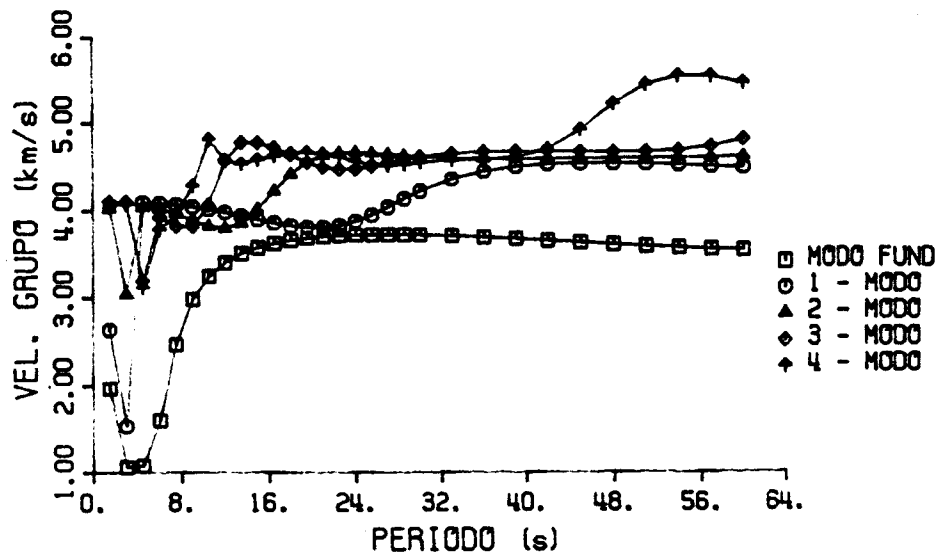


Fig. 5.16. -Velocidade de grupo dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona oceânica (modelo Payo)

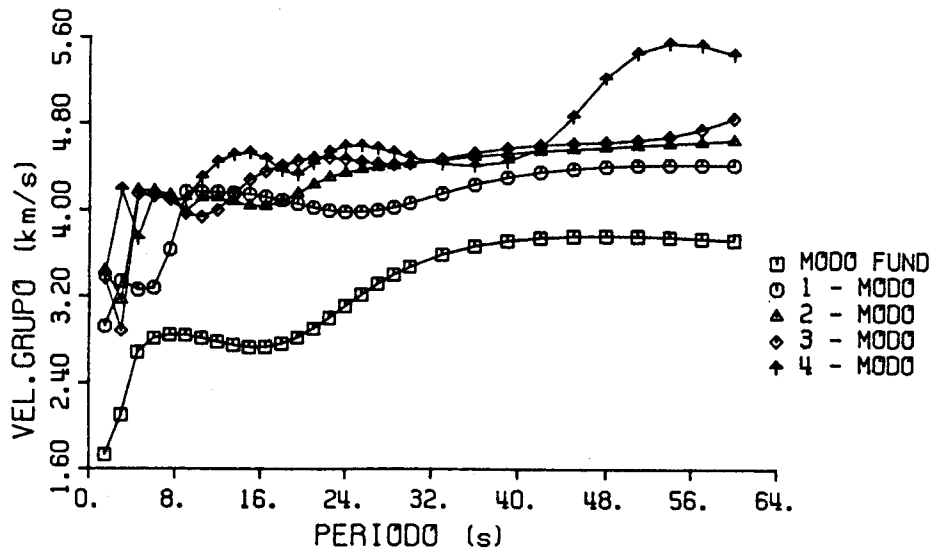


Fig. 5.17. -Velocidade de grupo dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona continental (modelo Payo)

O comportamento da velocidade de grupo é muito mais claro, sobre as características físicas das duas estruturas, do que o

da velocidade de fase.

Uma primeira característica a assinalar corresponde ao carácter oscilatório das curvas que é tanto mais acentuado quanto mais elevado é o modo, o que traduz a existência de canais de baixa velocidade. Este aspecto manifesta-se sobretudo nos curtos períodos o que corresponde às ondas que se propagam em pleno no seio do referido canal. Na zona oceânica a oscilação referida verifica-se no intervalo de períodos inferiores a 24 s, enquanto que na zona continental o mesmo comportamento é manifesto em períodos até aos 33 s; esta diferença é reveladora de que o canal de baixa velocidade se encontra a uma profundidade maior na zona continental.

Na região oceânica a velocidade de grupo do modo fundamental e do primeiro modo superior, para períodos entre 16.5 e 25.5 s, encontram-se muito próximo.

5.2.6. Propagação crustal e ao longo de um canal

Tal como fizemos referência no estudo das curvas da velocidade de fase, o seu comportamento permite dividi-las em dois tipos de famílias: (1) de acentuado declive; (2) de declive pouco acentuado. Panza (1972) refere estes dois tipos de curvas, quando da existência duma zona estratificada com um canal de baixa velocidade, como correspondendo, a primeira à propagação das ondas essencialmente na crosta, a segunda à propagação ao longo de canais de baixa velocidade.

Vamos de uma forma mais explícita tentar identificar, nos casos que estamos a estudar, estes dois tipos de propagação.

A análise do comportamento destes dois tipos de famílias de ondas pode ser feita, Panza (1972), em termos da densidade de energia normalizada $\epsilon(z)$. Seja

$$\epsilon(z) = \rho(z) \left\{ \left(\frac{\dot{u}_z(z)}{\dot{u}_{z0}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{u}_x(z)}{\dot{u}_{z0}} \right)^2 \right\}$$

onde $u_z(z)$ e $u_x(z)$ são os valores reais da amplitude do deslocamento vertical e horizontal da partícula para a profundidade z , u_{z0} é a amplitude do deslocamento vertical na superfície livre, e $\rho(z)$ a densidade. Procedendo a uma representação desta grandeza, $\epsilon(z)$, em função do período $-T-$ e da profundidade $-Z-$ para os quatro primeiros modos superiores propagando-se nas estruturas oceânica e continental, fig.5.18 a 5.21, respectivamente, será mais simples a extracção de conclusões.

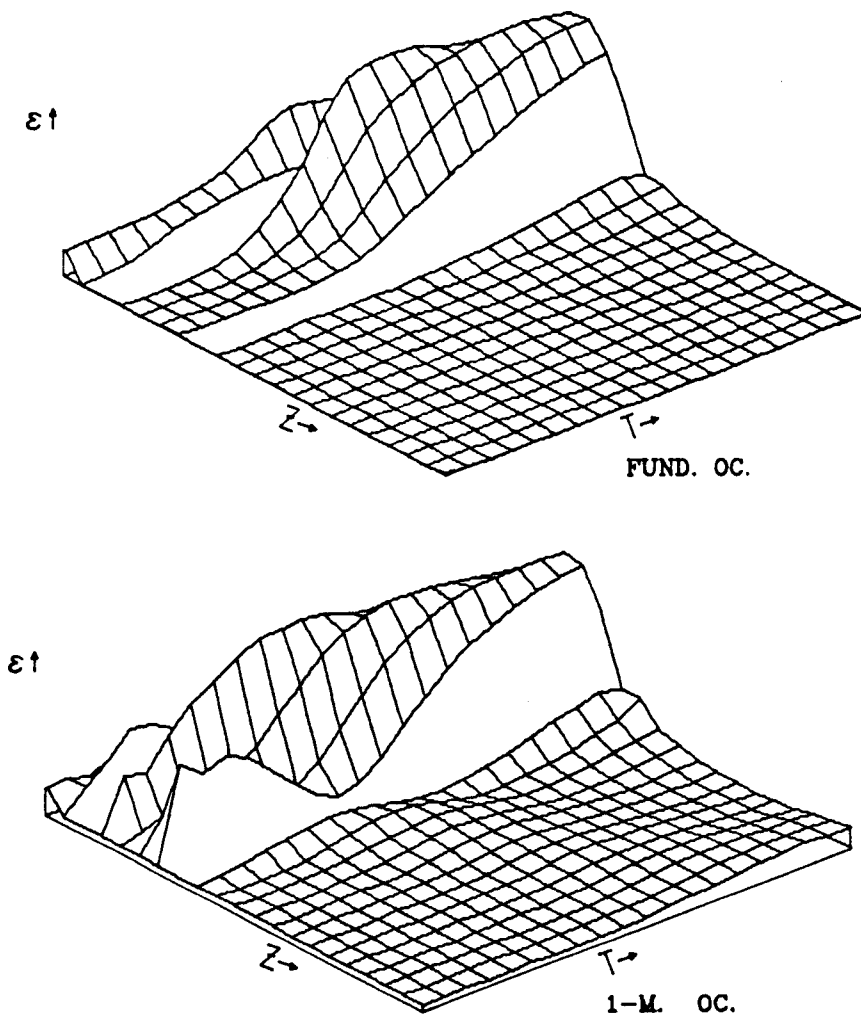


Fig. 5.18. - Representação na estrutura oceânica de ϵ em função de T (período) e da Z (profundidade) dos dois primeiros modos

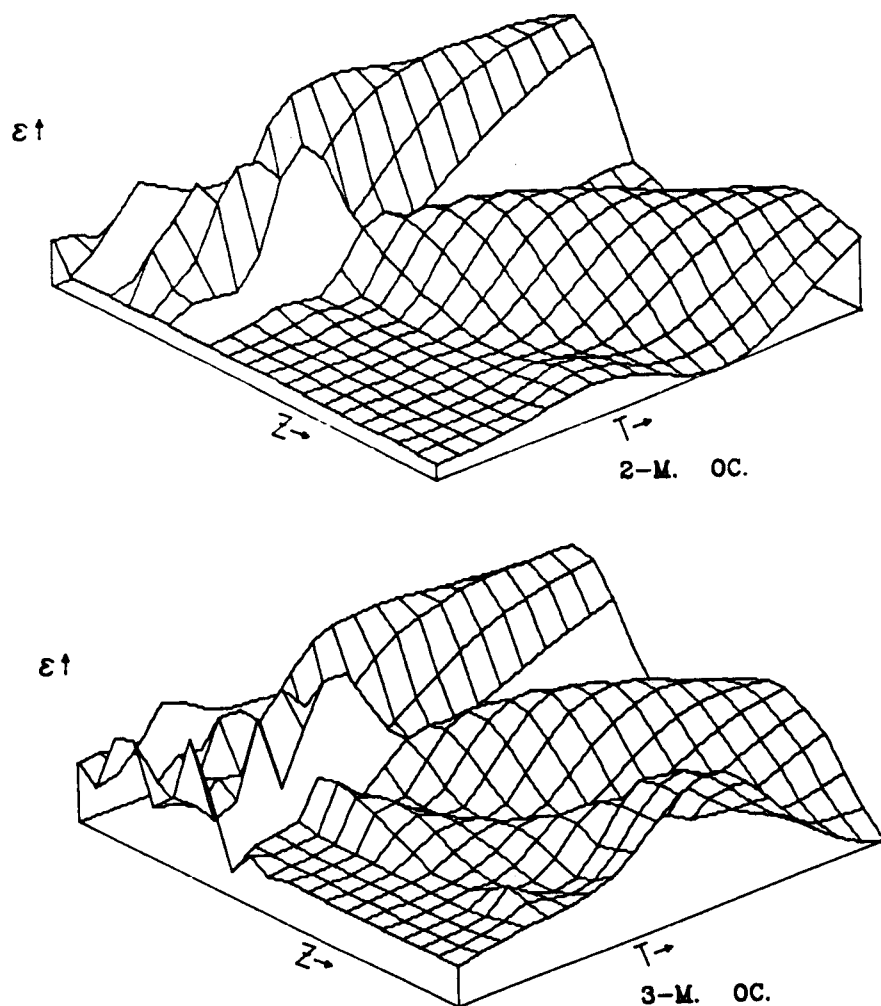


Fig. 5.19.-Representação na estrutura oceânica de ϵ em função de T (período) e da Z (profundidade) do segundo e terceiro modos superiores

Para a zona oceânica concluimos:

(a) o modo fundamental tem uma propagação para os baixos períodos essencialmente ao longo da crosta, enquanto que para períodos sensivelmente superiores a 30s o percurso é feito ao longo do canal de baixa velocidade, situado entre os 40km e 140km;

(b) nos modos superiores o caminho seguido pela ondas é percorrido ao longo do canal de baixa velocidade, acentuando-se esta tendência à medida que o período aumenta.

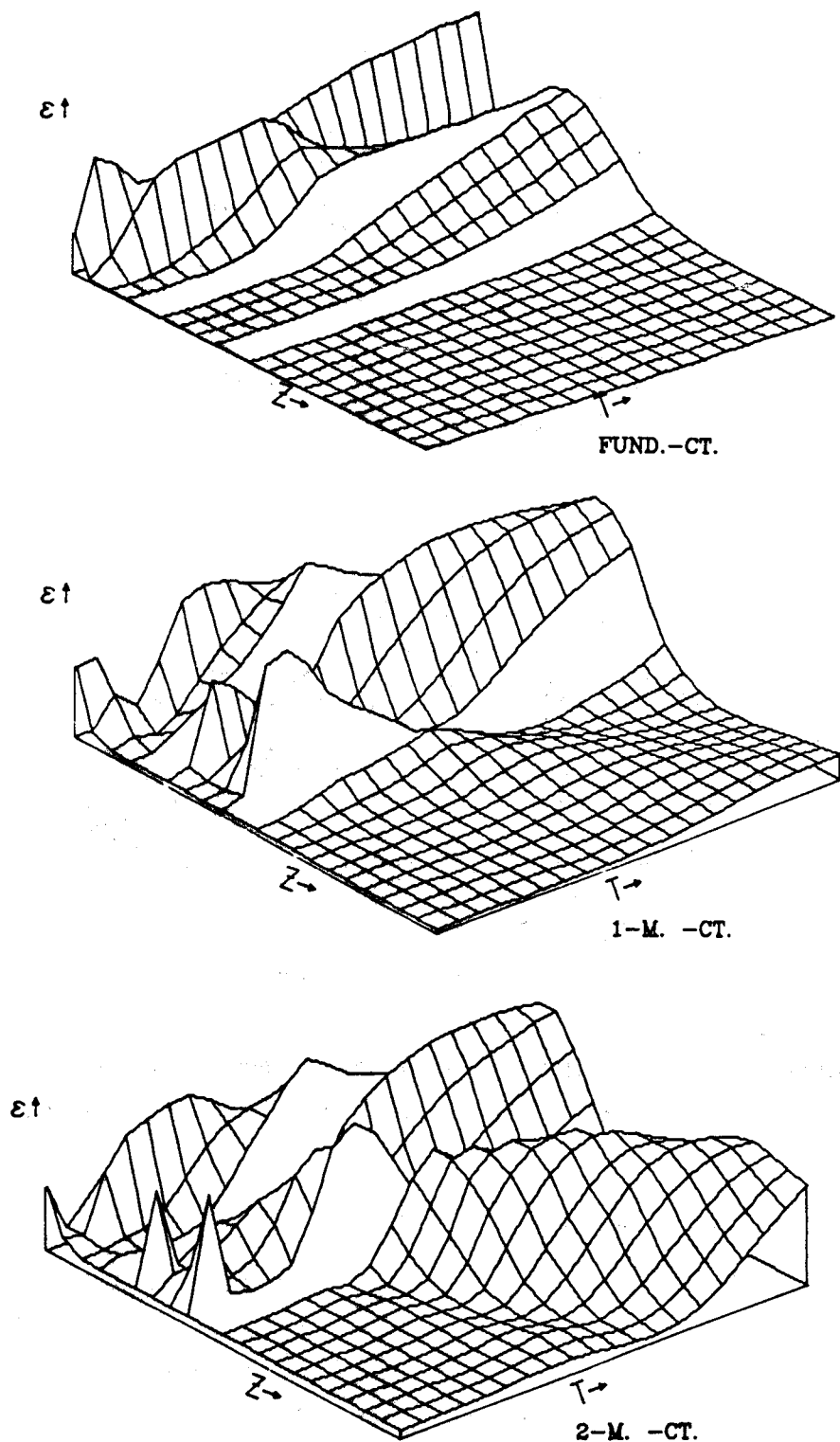


Fig.5.20.- Representação na estrutura continental de ϵ em função de T (período) e da Z (profundidade) dos três primeiros modos

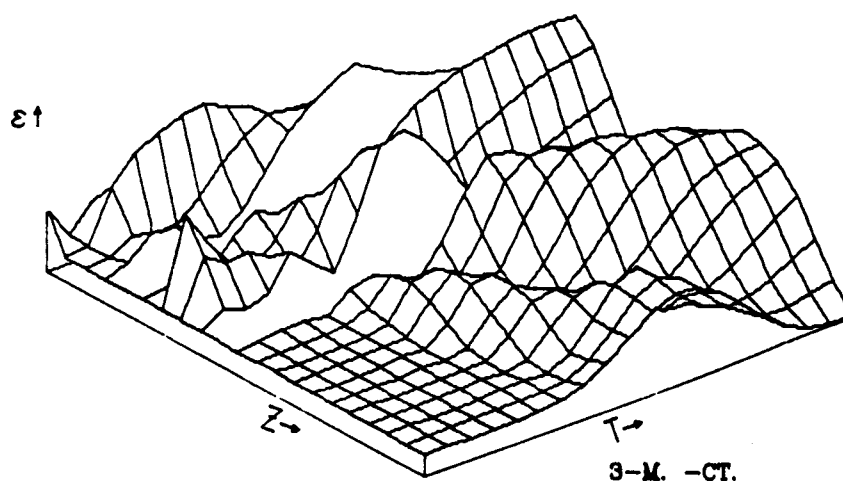


Fig. 5.21- Representação na estrutura continental de ϵ em função de T (período) e da Z (profundidade) do terceiro modo superior

Para a zona continental concluímos: (a) o modo fundamental propaga-se essencialmente ao longo da crosta, embora para períodos superiores a 40 s uma parte da energia percorre o canal de baixa velocidade, situado entre os 80 km e os 180 km; o valor desta última fracção aumenta com o período; (b) os outros modos possuem uma propagação sobretudo ao longo do canal de baixa velocidade, contudo uma fracção importante desta energia, para períodos inferiores a 21s, propaga-se ao longo da crosta.

A diferença estrutural entre os dois modelos reside, no essencial, na espessura da crosta (menor na estrutura oceânica) e na profundidade do canal de baixa velocidade (maior na estrutura continental). Estes dois aspectos explicam que todos os modos superiores se propaguem, na zona oceânica, ao longo do canal de baixa velocidade para todo o intervalo de períodos considerado, enquanto que, na zona continental, só a partir dos 21 s a propagação canalizada passa a prevalecer.

*

* *

5.3. Aplicação do Método de Knopoff à Propagação Oceanica e Continental

5.3.1. Velocidade de fase

Nos QUADROS 5.11 e 5.12 apresentamos os resultados obtidos, utilizando o método de Knopoff, para a velocidade de fase de propagação do modo fundamental e dos quatro modos superiores de Rayleigh nas zonas oceânica e continental, respectivamente.

QUADRO 5.11
velocidade de fase -km/s- (método Knopoff)
estrutura oceânica

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	1.310	2.157	3.091	4.321	4.776
3.0	1.481	2.688	3.977	4.326	4.573
4.5	2.134	4.114	4.318	4.532	4.957
6.0	2.921	4.311	4.657	4.862	5.067
7.5	3.359	4.136	4.430	4.676	4.894
9.0	3.534	4.152	4.582	4.864	5.126
10.5	3.618	4.173	4.399	4.741	4.969
12.0	3.667	4.199	4.500	4.859	5.129
13.5	3.697	4.231	4.609	5.076	5.298
15.0	3.717	4.268	4.710	4.930	5.151
16.5	3.730	4.311	4.791	5.087	5.344
18.0	3.740	4.359	4.850	5.134	5.421
19.5	3.747	4.412	4.891	5.178	5.499
21.0	3.752	4.468	4.921	5.222	5.583
22.5	3.756	4.524	4.944	5.270	5.674
24.0	3.759	4.580	4.966	5.322	5.774
25.5	3.762	4.631	4.986	5.188	5.586
27.0	3.765	4.677	5.008	5.236	5.443
28.5	3.768	4.717	5.030	5.280	5.507
30.0	3.771	4.751	5.054	5.322	5.571
33.0	3.777	4.805	5.103	5.402	5.698
36.0	3.785	4.847	5.156	5.481	5.829
39.0	3.794	4.883	5.210	5.562	5.967
42.0	3.805	4.915	5.265	5.645	6.108
45.0	3.818	4.945	5.321	5.731	6.239
48.0	3.833	4.976	5.379	5.820	6.345
51.0	3.849	5.007	5.437	5.913	6.425
54.0	3.866	5.039	5.496	6.009	6.488
57.0	3.885	5.072	5.556	6.106	6.541
60.0	3.905	5.107	5.618	6.201	6.591

QUADRO 5.12
 velocidade de fase -km/s- (método de Knopoff)
 estrutura continental

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	1.903	3.084	3.530	3.813	4.169
3.0	2.600	3.623	3.881	4.136	4.579
4.5	2.856	3.802	4.454	4.747	5.056
6.0	2.944	4.038	4.309	4.548	5.278
7.5	3.001	4.361	4.697	5.067	5.541
9.0	3.050	4.255	4.646	4.886	5.127
10.5	3.100	4.271	4.530	4.754	5.141
12.0	3.156	4.287	4.631	5.028	5.404
13.5	3.218	4.303	4.504	4.721	4.995
15.0	3.286	4.321	4.560	4.793	5.069
16.5	3.358	4.341	4.620	4.852	5.136
18.0	3.431	4.363	4.681	4.904	5.197
19.5	3.500	4.389	4.737	4.950	5.263
21.0	3.564	4.419	4.787	4.992	5.342
22.5	3.619	4.451	4.830	5.033	5.241
24.0	3.665	4.486	4.869	5.075	5.294
25.5	3.703	4.523	4.906	5.119	5.344
27.0	3.734	4.559	4.942	5.166	5.396
28.5	3.758	4.595	4.977	5.215	5.451
30.0	3.777	4.628	5.011	5.265	5.511
33.0	3.804	4.689	5.077	5.366	5.644
36.0	3.821	4.741	5.140	5.462	5.792
39.0	3.833	4.785	5.201	5.555	5.949
42.0	3.841	4.825	5.262	5.647	6.107
45.0	3.847	4.862	5.321	5.740	6.249
48.0	3.853	4.897	5.380	5.835	6.359
51.0	3.859	4.932	5.438	5.933	6.438
54.0	3.866	4.966	5.497	6.031	6.499
57.0	3.873	5.000	5.556	6.129	6.552
60.0	3.880	5.035	5.614	6.223	6.601

O comportamento da velocidade de fase permite-nos dizer que, na generalidade, todos os valores desta grandeza para o modo fundamental e os dois primeiros modos superiores na zona oceânica são superiores aos valores correspondentes na zona continental. A variação da velocidade de fase para os grandes períodos, em todos os modos considerados, é bastante suave e

tem tendência a tomar o mesmo valor nas duas zonas consideradas. A conclusão retirada é, em grande medida análoga à que referimos em 5.2.3.

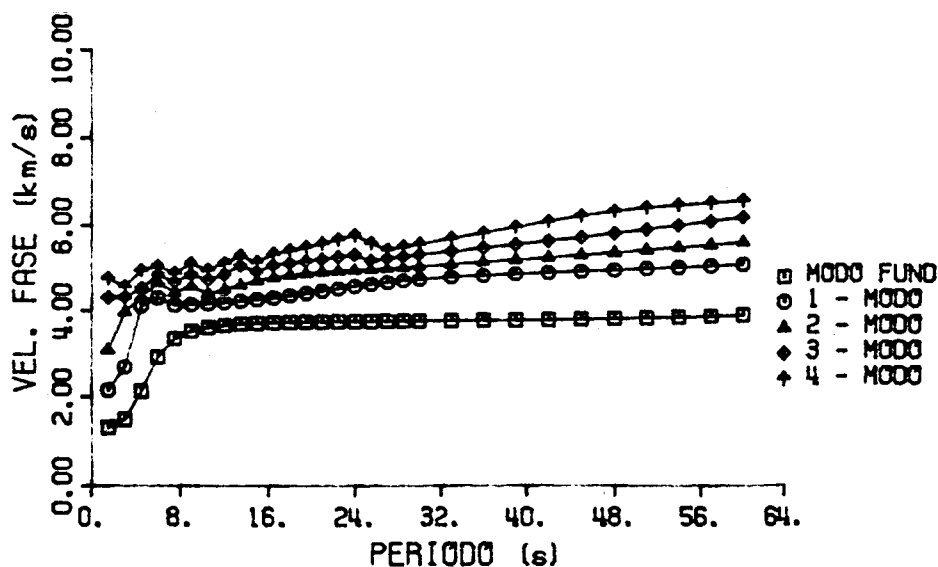


Fig. 5.22.- Velocidade de fase dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona oceânica (modelo Payo)

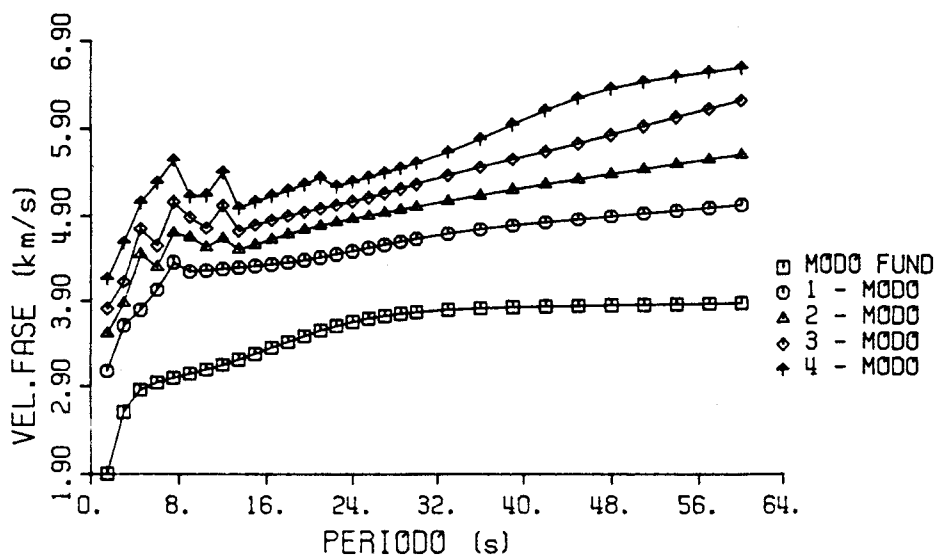


Fig. 5.23.- Velocidade de fase dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona continental (modelo Payo)

Os valores expostos correspondentes aos dois métodos, QUADROS 5.7/5.8 e QUADROS 5.9/10, respectivamente, revelam algumas diferenças que, recorrendo à variação relativa da velocidade de fase (fig. 5.24 e 5.25), passamos a assinalar.

Para a estrutura oceânica observamos:

a) no modo fundamental esta variação tem um valor máximo de 40% para 1.5s, decrescendo rapidamente para valores da ordem dos 0.1% a partir dos 7.5s;

b) no primeiro modo superior o valor máximo é de 35% para 1.5s, decrescendo também para valores da ordem do 0.1% a partir dos 7.5s;

c) enquanto que no segundo modo superior o valor máximo é de 27% para 1.5s decrescendo a partir dos 10.5s para valores da ordem dos 0.7%, atingindo 0.1% a partir dos 24 s;

d) e para o terceiro e quarto modos o valor máximo situa-se entre os 10% e 15% para o período de 6 s, baixando para valores entre os 3% e 8% no intervalo 13.5 s a 24 s, para atingir valores entre os 0.2% e 0.5% a partir dos 27 s.

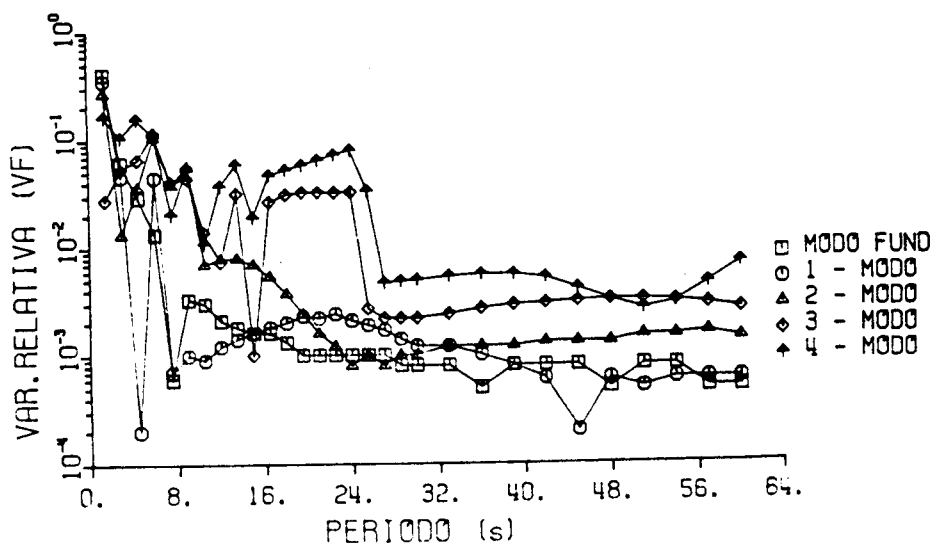


Fig. 5.24.- Variação relativa para velocidade de fase pelo m.e.f. em relação ao método de Knopoff dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona oceânica

Analogamente temos para a estrutura continental que a variação relativa:

a) no modo fundamental tem um valor máximo de 8% no intervalo entre 1.5s e 7.5s, decrescendo rapidamente para valores da ordem dos 0.5% a partir dos 9 s e atingindo o valor de 0.1% para períodos superiores a 12 s;

b) no primeiro modo superior tem um valor máximo de 6% no intervalo entre 1.5s e 7.5s, decrescendo rapidamente para valores da ordem dos 0.1% a partir dos 9 s;

c) no segundo modo superior o valor máximo de 10% situa-se no intervalo entre 1.5s e 12 s, decrescendo rapidamente para valores da ordem dos 0.2% a partir dos 13.5s e atingindo o valor de 0.1% para períodos superiores a 30 s;

d) no terceiro modo o valor máximo é de 15% para o período de 7.5s, baixando para valores de 0.3% a partir dos 15 s;

e) no quarto modo superior o valor máximo é de 21% para o período de 7.5s, baixando para valores entre 9% e 2% no intervalo entre 9 s e 22 s, decrescendo, depois, rapidamente para valores da ordem dos 0.2%.

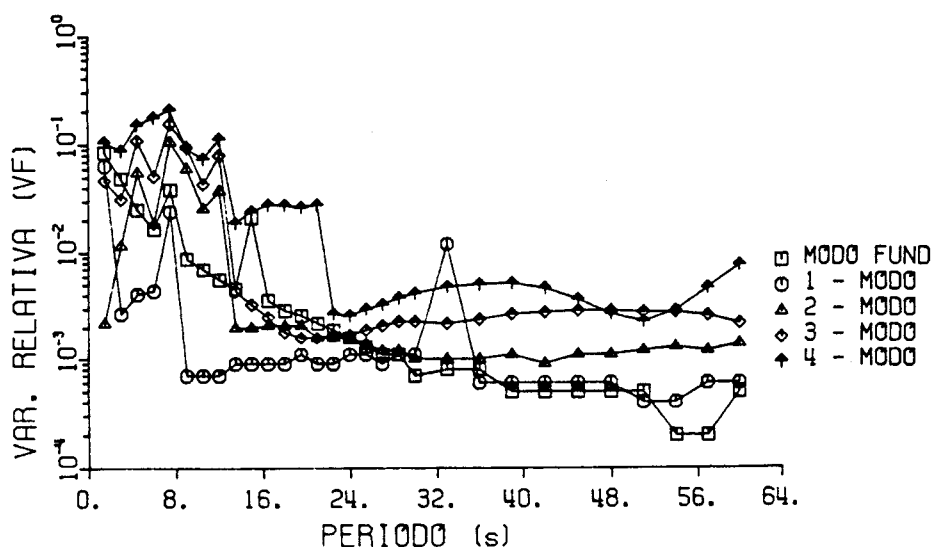


Fig.5.25.- Variação relativa para velocidade de fase pelo m.e.f. em relação ao método de Knopoff dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona continental.

5.3.2. Velocidade de Grupo

Nos QUADROS 5.12 e 5.13 apresentamos os resultados obtidos para a velocidade de grupo na propagação do modo fundamental e dos quatro modos superiores de Rayleigh nas zonas oceânica e continental, respectivamente.

QUADRO 5.12
 velocidade de grupo -km/s- (método de Knopoff)
 estrutura oceânica

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	1.276	1.869	1.928	3.655	3.618
3.0	0.984	1.536	2.960	3.953	3.700
4.5	0.993	4.082	3.776	3.558	4.661
6.0	1.532	3.939	3.710	3.972	4.461
7.5	2.421	4.066	3.836	3.782	4.578
9.0	2.955	4.045	3.776	4.171	4.655
10.5	3.231	4.017	3.828	3.905	4.622
12.0	3.390	3.982	3.782	4.239	4.631
13.5	3.493	3.943	3.808	4.536	4.715
15.0	3.562	3.901	3.938	4.773	4.471
16.5	3.611	3.860	4.133	4.602	4.584
18.0	3.646	3.824	4.322	4.648	4.642
19.5	3.671	3.800	4.479	4.665	4.622
21.0	3.689	3.793	4.585	4.655	4.577
22.5	3.701	3.811	4.636	4.617	4.530
24.0	3.709	3.857	4.653	4.561	4.486
25.5	3.714	3.928	4.652	4.472	4.513
27.0	3.715	4.015	4.642	4.524	4.495
28.5	3.715	4.107	4.629	4.573	4.512
30.0	3.712	4.195	4.616	4.611	4.539
33.0	3.702	4.337	4.597	4.652	4.568
36.0	3.686	4.430	4.587	4.668	4.563
39.0	3.667	4.486	4.584	4.671	4.566
42.0	3.646	4.516	4.585	4.669	4.635
45.0	3.624	4.528	4.587	4.661	4.835
48.0	3.603	4.529	4.589	4.652	5.148
51.0	3.582	4.523	4.593	4.648	5.429
54.0	3.563	4.511	4.597	4.658	5.605
57.0	3.548	4.496	4.601	4.696	5.698
60.0	3.535	4.480	4.606	4.772	5.745

QUADRO 5.13
 velocidade de grupo -km/s- (método de Knopoff)
 estrutura continental

T (s)	modo fund.	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
1.5	1.639	2.689	3.441	3.284	3.067
3.0	1.827	3.332	3.127	2.623	3.953
4.5	2.530	3.259	4.072	3.977	4.371
6.0	2.702	3.253	4.125	4.049	4.860
7.5	2.765	4.091	4.058	4.288	4.382
9.0	2.782	4.165	4.031	4.436	4.483
10.5	2.771	4.163	3.918	4.183	4.574
12.0	2.746	4.161	3.960	4.482	4.566
13.5	2.720	4.155	4.076	4.089	4.421
15.0	2.705	4.142	4.039	4.231	4.432
16.5	2.710	4.120	4.028	4.313	4.529
18.0	2.742	4.091	4.064	4.376	4.553
19.5	2.803	4.056	4.139	4.441	4.468
21.0	2.888	4.023	4.221	4.480	4.391
22.5	2.989	3.995	4.285	4.486	4.527
24.0	3.097	3.978	4.329	4.471	4.590
25.5	3.204	3.976	4.358	4.447	4.601
27.0	3.302	3.990	4.380	4.424	4.580
28.5	3.391	4.018	4.399	4.412	4.542
30.0	3.466	4.056	4.417	4.416	4.497
33.0	3.584	4.145	4.453	4.463	4.425
36.0	3.662	4.230	4.488	4.524	4.395
39.0	3.713	4.297	4.517	4.569	4.411
42.0	3.742	4.345	4.541	4.596	4.518
45.0	3.757	4.378	4.562	4.609	4.784
48.0	3.761	4.399	4.579	4.616	5.161
51.0	3.758	4.411	4.596	4.628	5.459
54.0	3.750	4.416	4.612	4.658	5.627
57.0	3.739	4.417	4.627	4.718	5.711
60.0	3.725	4.414	4.642	4.819	5.756

Embora haja algumas discrepâncias numéricas com os valores apresentados em 5.2.4, as conclusões são muito semelhantes às que, nesse mesmo parágrafo, apresentámos. Assim é notório o carácter oscilatório das curvas que é tanto mais acentuado quanto mais elevado é o modo, revelando desta maneira a existência de canais de baixa velocidade. Este aspecto

manifesta-se sobretudo para períodos inferiores a 13.5s, o que corresponde aos períodos das ondas que se propagam em pleno no seio do canal.

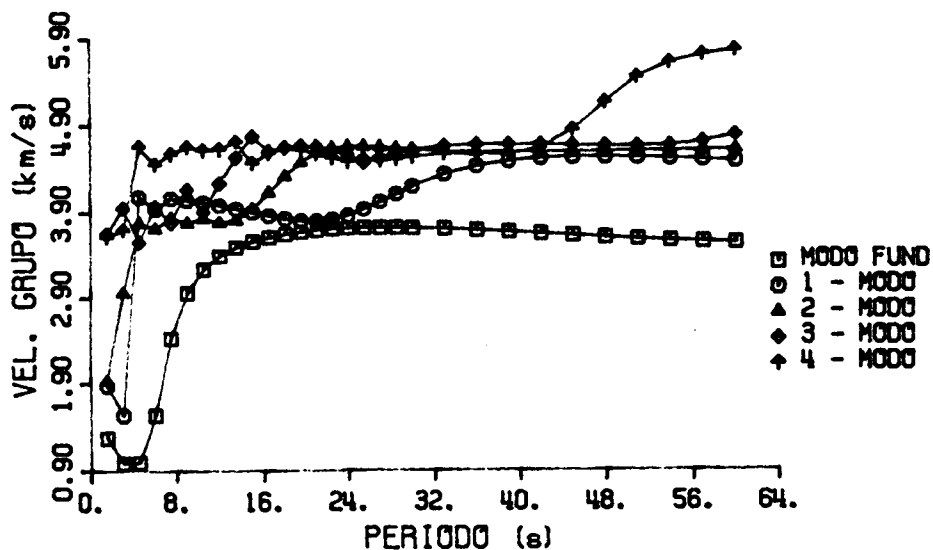


Fig.5.26.- Velocidade de grupo dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona oceânica.

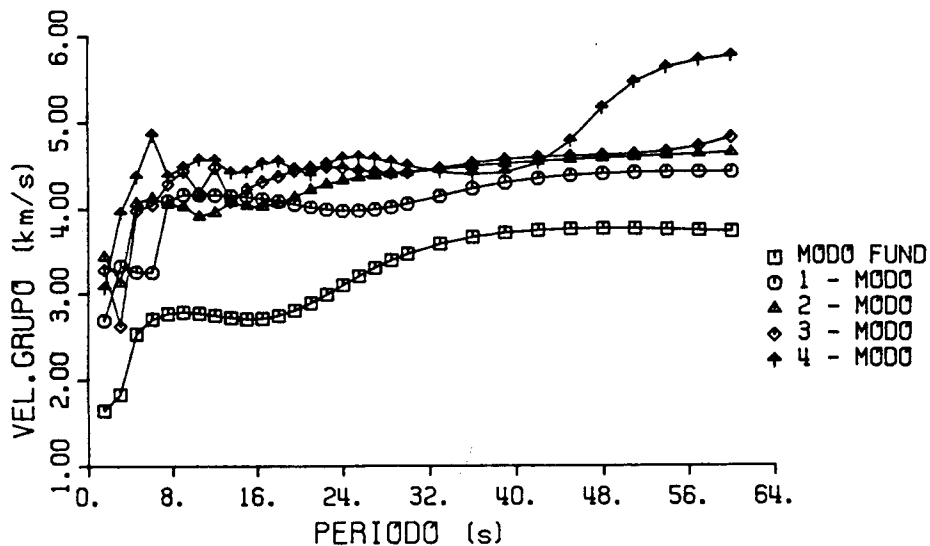


Fig.5.27.- Velocidade de grupo dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona continental

Importa agora, tal como fizemos para a velocidade de fase, comparar os resultados obtidos para a velocidade de grupo pelos dois métodos. De uma forma análoga recorreremos à variação relativa que graficamente está representado nas fig.5.28 e 5.29. Para a zona oceânica constatamos:

a) o valor máximo da variação (50% no segundo modo superior) situa-se no intervalo compreendido entre 1.5s e 6 s decrescendo o seu valor, excepção feita para o modo referido, com a ordem do modo;

b) a partir do intervalo anterior a variação decresce rapidamente para valores situados entre os 0.1% e 1%, aumentando estas percentagens, aproximadamente, com a ordem do modo de Rayleigh considerado;

c) para períodos superiores a 39 s verifica-se de novo um aumento que para o quarto modo superior atinge os 15%, atingindo nos outros modos valores da ordem dos 2 %.

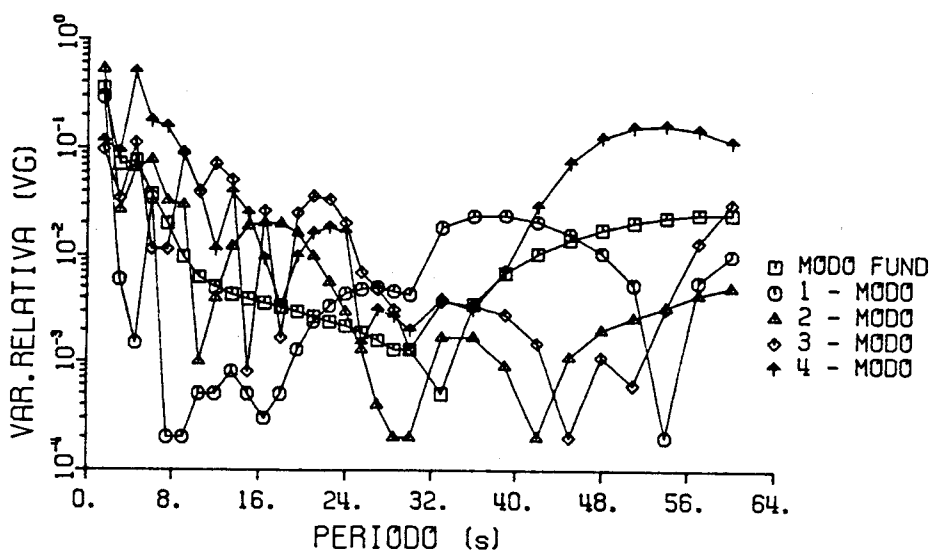


Fig. 5.28.-Variação relativa para velocidade de grupo pelo m.e.f. em relação ao método de Knopoff dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona oceânica

Na variação relativa para a zona continental temos:

a) o valor máximo (17% no quarto modo superior) situa-se no intervalo compreendido entre 1.5s e 7.5s;

b) a partir do intervalo anterior decresce rapidamente para valores situados entre os 0.1% e 1% ;

c) para períodos superiores a 36 s verifica-se de novo um aumento que para o quarto modo superior atinge os 6%, este aumento é tanto mais acentuado quanto maior fôr a ordem do modo considerado.

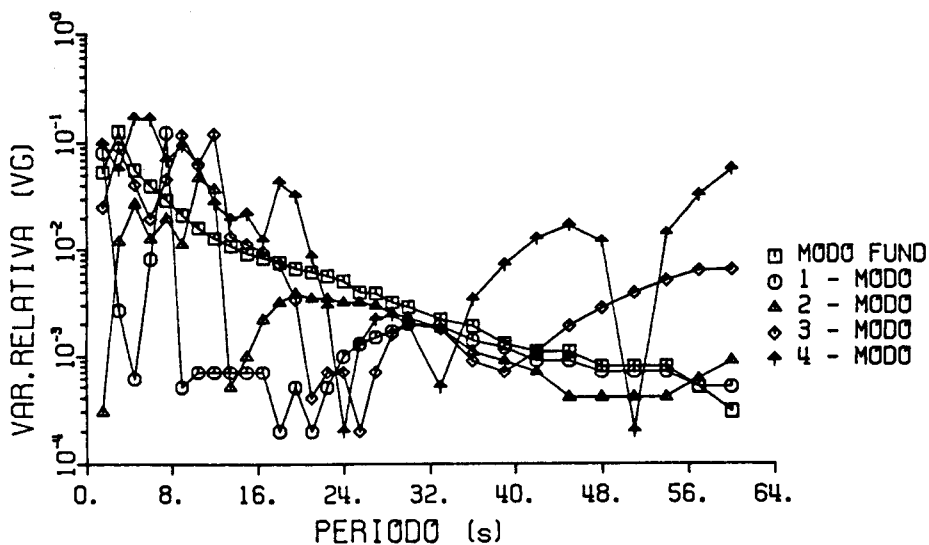


Fig.5.29.-Variação relativa para velocidade de grupo pelo m.e.f. em relação ao método de Knopoff dos cinco primeiros modos de Rayleigh na zona continental.

5.3.3 Modos de vibração e Elipsidade

Os cálculos para a determinação dos deslocamentos quer vertical, quer horizontal, em função da profundidade foram feitos para todos os períodos indicados no QUADRO 5.6 para ambos os tipos de estruturas, oceânica e continental. Quanto à representação gráfica dos resultados da elipsidade do movimento

ondulatório da partícula à superfície para os quatro primeiros modos, para a estrutura oceânica e continental, fazêmo-la na fig.5.30 e fig.5.31, respectivamente.

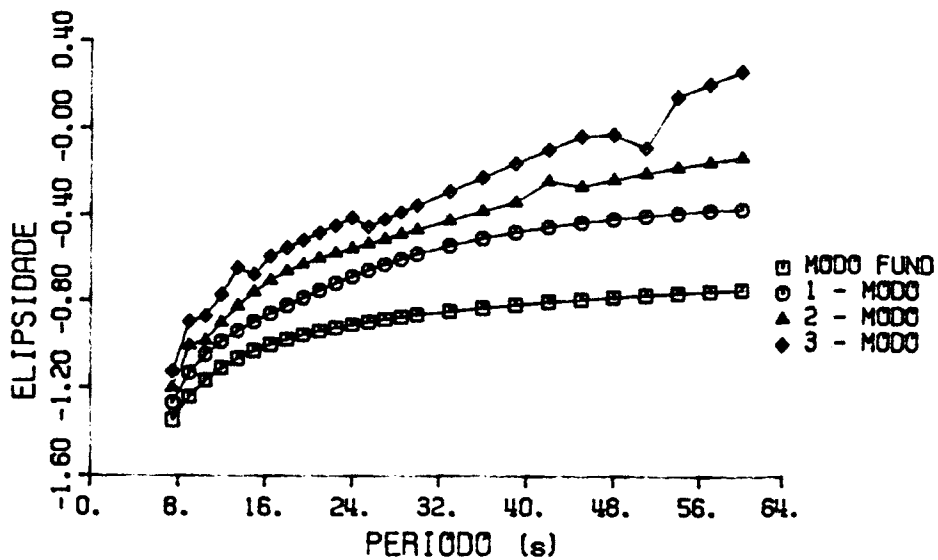


Fig.5.30.- *Elipsidade à superfície das ondas de Rayleigh (zona oceânica)*

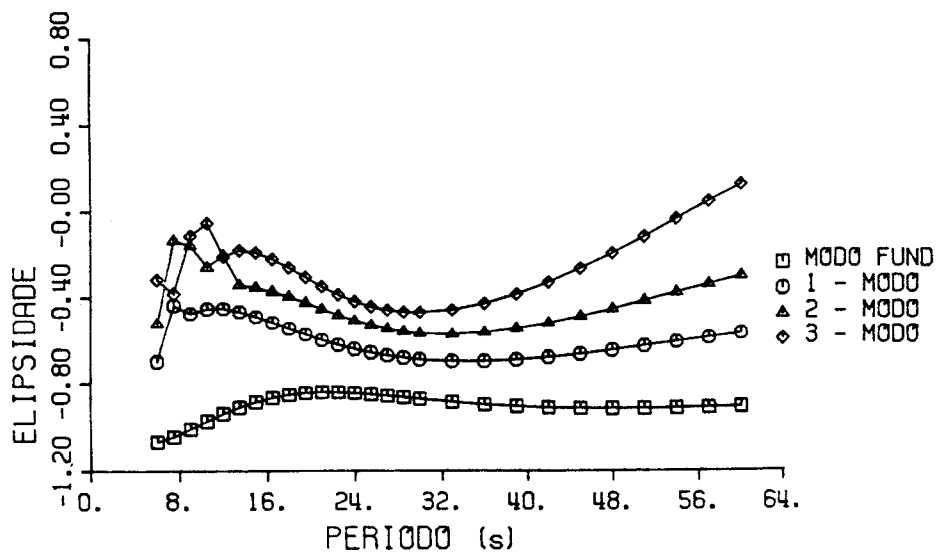


Fig.5.31.- *Elipsidade à superfície das ondas de Rayleigh (zona continental)*

Concluimos que para a propagação das ondas de Rayleigh na estrutura oceânica:

a) o movimento das partículas materiais à superfície, para os modos considerados, é sempre retrógrado, deixando de o ser para o terceiro modo superior e só para períodos superiores a 51 s;

b) para todos os modos considerados a elipsidade é, na generalidade, uma função crescente do período, sofrendo, no entanto, no segundo e terceiro modo superior pequenas oscilações;

c) as curvas de elipsidade dos diferentes modos não se intersectam, para um determinado período a elipsidade é uma função crescente do modo de vibração.

Na estrutura continental verificamos:

a) o movimento das partículas à superfície também é retrógrado, deixando de o ser para o terceiro modo superior e para períodos superiores a 57 s;

b) a elipsidade não cresce com o período possuindo máximos e mínimos relativos no intervalo considerado;

c) as curvas de elipsidade dos diferentes modos não se intersectam, para períodos superiores a 16 s; verifica-se esta intersecção para o segundo e terceiro modos superiores.

Comparando estas conclusões com as expostas em 5.2.3 podemos afirmar uma forte coincidência entre os resultados dos dois métodos, verificando-se algumas diferenças nos modos superiores e para o intervalo de períodos até aos 16 s.

*

* *

5.4. Conclusões

As irregularidades estruturais entre os dois modelos

existem sobretudo na zona menos profunda, até aos 150 km, o que é manifesto nas diferenças de comportamento das curvas da velocidade de fase e de grupo no intervalo de períodos compreendido entre os 10 s e os 30 s. À superfície as diferenças entre a zona oceânica e continental são atestadas pelos valores da elipsidade dos diferentes modos de propagação, para cada uma das regiões, que são bastante distintos.

Há uma boa coincidência de valores obtidos, para as diferentes grandezas, através dos dois métodos, elementos finitos e Knopoff, embora surjam discrepâncias para períodos inferiores a 7.5s. Estas diferenças podem ser devidas, em particular, às características do método dos elementos finitos: necessidade de um maior número de subcamadas para o estudo dos curtos períodos.

6 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH NUM MEIO NÃO HOMOGÉNEO

6.1. Equação do movimento numa zona não homogénea

6.1.1. Introdução

Até aqui temos considerado meios físicos lateralmente homogéneos, as suas propriedades físicas só variam verticalmente. Todavia, é frequente o meio de propagação ser completamente não homogénea, isto é, as suas propriedades físicas variam segundo qualquer direcção. Interessa, portanto, estudar o efeito sobre a propagação das ondas de Rayleigh provocado pelas irregularidades estruturais existentes num meio contínuo. A estrutura que bidimensionalmente está representada na fig.1.1, modelo a que geometricamente faremos recurso, é complexa e compõe-se de três zonas distintas: uma zona não homogénea, intermédia, delimitada à esquerda e à direita por zonas de estratificação horizontal. As superfícies de separação entre as três regiões são normais à direcção de propagação, sendo a fronteira inferior de todo o modelo a base rígida em que assenta toda a estrutura.

Perante uma excitação sísmica queremos conhecer a resposta

estacionário da zona não homogénea. Esta excitação é uma função harmónica de frequência angular, ω , que pode ser causada pelas tensões originadas pelas ondas de Rayleigh incidentes, provenientes da estrutura estratificada da esquerda ou da direita. Em problemas onde a excitação é periódica, a solução, após um certo intervalo de tempo, não depende das condições iniciais e, uma vez calculada, representa a resposta final, estacionária, do meio.

Na região não homogénea, todos os materiais são caracterizados pelas grandezas ρ , λ , μ , agora funções de x e z , $\rho(x,z)$, $\lambda(x,z)$, $\mu(x,z)$. Já determinámos, partindo das expressões gerais, a matriz de massa e de rigidez de uma estrutura estratificada horizontalmente (Cap.3). Em seguida desenvolveremos os cálculos destas matrizes para o meio não homogéneo.

6.1.2. Matriz rigidez e matriz massa

No parágrafo (2.4.3), para um sistema cartesiano local (ξ, η) , chegámos às expressões gerais, para um elemento, da matriz rigidez, $[K]_e$ e matriz massa, $[M]_e$, dadas, respectivamente, por

$$[K]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\hat{B}]_e^T [H]_e [\hat{B}]_e |J| d\xi d\eta \quad (6.1.1)$$

e

$$[M]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_e [\hat{N}]_e^T [\hat{N}]_e |J| d\xi d\eta \quad (6.1.2)$$

em que $[\hat{N}]_e$ é a matriz linha cujos elementos estão descritos em (2.4.18). O jacobiano $|J|$ calcula-se a partir de (2.4.20). Com estes elementos, já conhecidos, e após a integração, a matriz de massa de cada elemento está perfeitamente determinada; é

uma matriz simétrica de dimensões $(2n \times 2n)$, onde n representa o número de nodos do elemento.

Para a determinação da matriz rigidez, tendo presente (6.1.1), o jacobiano é conhecido, a matriz $[H]$ é a matriz de Hooke representada em (3.2.6), falta-nos calcular $[\hat{B}]$. As matrizes com a notação $[\hat{\cdot}]$ referem-se às coordenadas locais (ξ, η) , ou ao elemento de referência, enquanto que as matrizes sem $\hat{\cdot}$ referem-se às coordenadas globais (x, z) .

Relembrando (2.4.6)

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (6.1.3)$$

e desenvolvendo os cálculos indicados chegamos a

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.1.4)$$

As derivadas parciais presentes em (6.1.4) exprimem-se em função das coordenadas locais, coordenadas do elemento de referência, recorde-se (2.3.28), logo

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left\{ \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \eta} z_j \right) - \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \xi} z_j \right) \right\}$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial z} = \frac{1}{|J|} \left\{ -\frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \eta} x_j \right) + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\hat{N}_j}{\partial \xi} x_j \right) \right\}$$

Neste caso concreto, retomando (2.4.18), as derivadas parciais assumem a forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \eta-1 & 1+\eta & \eta+1 & -1-\eta \\ -1+\xi & -1-\xi & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \quad (6.1.5)$$

Agora já é possível calcular a matriz $[\hat{B}]_e$.

As expressões (2.4.20), (3.2.6) e (6.1.5) permitem-nos determinar o integrando de (6.1.1). O cálculo do integral nos limites de integração referidos definem a matriz rigidez de um elemento. Esta matriz é simétrica de ordem (8×8) , no caso de elementos com quatro nodos: $8=2 \times 4$

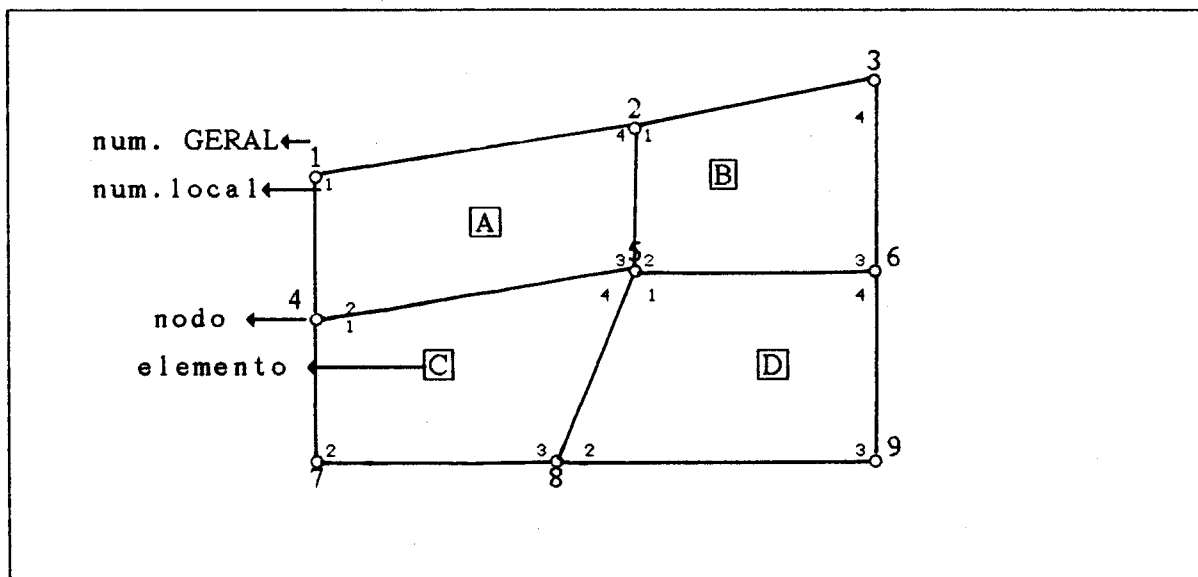


Fig. 6.1 -Zona não homogênea formada por quatro elementos \square e nove nodos \circ .

Para a determinação da matriz rigidez, e também da matriz de massa, de uma zona é necessário proceder à associação das matrizes homónimas dos seus diferentes elementos.

No exemplo ilustrado na fig.6.1 o domínio considerado possui quatro elementos e nove nodos. As quatro matrizes $[K]_A, [K]_B, [K]_C$ e $[K]_D$ associar-se-ão para formar a matriz $[K]$ da região, tendo esta a dimensão (18×18) (visto existirem 9 nodos).

Baseando-nos no exemplo apresentado vamos determinar alguns coeficientes da sua matriz de rigidez em função da associação das matrizes homónimas dos seus elementos constituintes. Representamos o termo genérico correspondente à linha i e coluna j da matriz rigidez do elemento A por k_{ij}^A , enquanto reservamos a designação k_{ij} para a descrição análoga da matriz rigidez da zona. Note-se que no primeiro caso i e j representam numeração local, enquanto que no segundo representam a numeração global dos nodos. Utilizando a ilustração da fig.6.2, temos por exemplo:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } k_{11} &= k_{11}^A \\
 \text{b) } k_{33} &= k_{77}^A + k_{11}^B \\
 \text{c) } k_{79} &= k_{35}^A + k_{17}^C \\
 \text{d) } k_{99} &= k_{55}^A + k_{33}^B + k_{77}^C + k_{11}^D
 \end{aligned}
 \tag{6.1.6}$$

Cálculos perfeitamente similares poderiam ser feitos para a matriz de massa.

6.1.3. Determinação do vector força na fronteira

Para um elemento e a expressão (2.4.16) traduz a sua equação de movimento

$$[M]_e \{\ddot{\Phi}\}_e + [K]_e \{\dot{\Phi}\}_e = [F]_e \quad (6.1.7)$$

onde $[F]_e$ corresponde ao termo das forças que actuam na sua fronteira. No caso em estudo este termo define as forças entre a zona estratificada e a heterogénea.

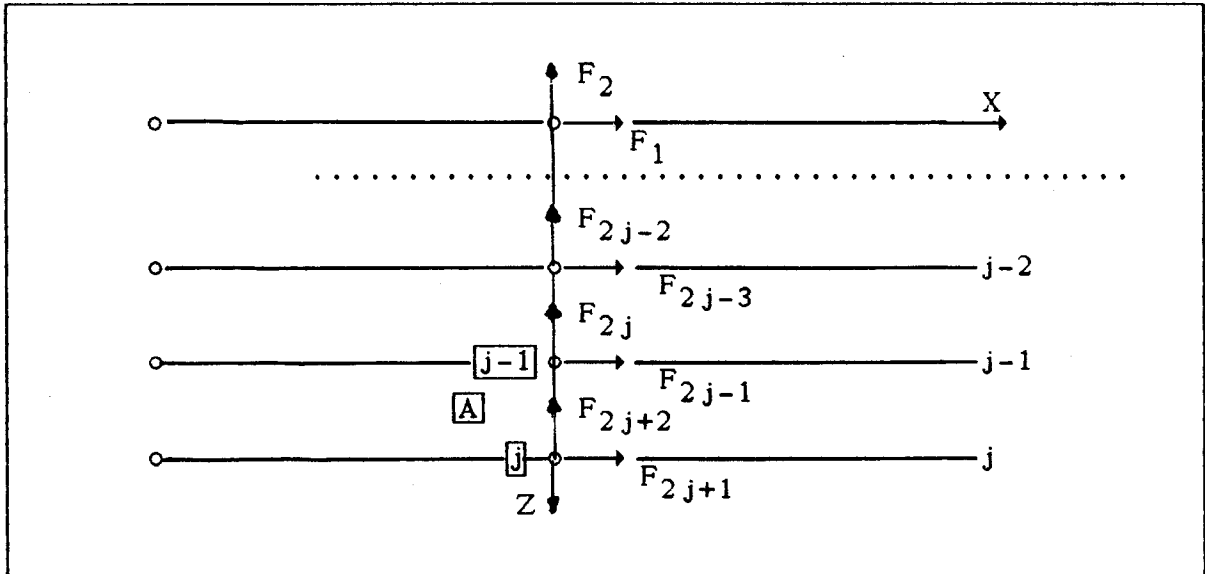


Fig.6.2 - Forças existentes num plano vertical em $x=0$ e numa estrutura estratificada horizontalmente, para o caso das ondas de Rayleigh

Recorrendo ao já desenvolvido no Cap.3 as forças provocadas pelos deslocamentos dos nodos devidas ao movimento de um elemento finito $[A]$, fig.6.2, exprimem-se por (3.2.13)

$$[F]_a = [K]_a \{\Phi\}_a$$

Como $[K]_a$ e $\{\Phi\}_a$ são dados, respectivamente, por (3.2.10) e (3.2.11a), efectuando as operações indicadas na fórmula anterior, incluindo o $\lim_{h \rightarrow 0}$, concluímos que

$$\begin{bmatrix} F_{2j-1} \\ F_{2j} \\ F_{2j+1} \\ F_{2j+2} \end{bmatrix} = \{-ik [A]_j + [D]_j\} \begin{bmatrix} u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2j+1} \\ u_{2j+2} \end{bmatrix} \quad (6.1.8)$$

Obtivémos o vector força sobre a superfície de contacto nos nodos $[j-1]$ e $[j]$. A matriz $[A]_j$ de (6.1.8) é análoga à de (3.2.23a) e $[D]_j$ é definida por

$$[D]_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_j & 0 & \lambda_j \\ -\mu_j & 0 & \mu_j & 0 \\ 0 & -\lambda_j & 0 & \lambda_j \\ -\mu_j & 0 & \mu_j & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.9)$$

Se associarmos os n nodos (n estratos) da superfície de separação, o vector força $\{F\}$ devido, em particular, ao deslocamento correspondente ao modo de vibração l é dado pela equação

$$\{F\}_l = [R]_l \{u\}_l \quad (6.1.10)$$

A matriz $[R]_l$, de dimensão $2n \times 2n$, obtem-se através da associação para os n estratos de $\{-ik[A]_j + [D]_j\}$ de acordo com a regra definida em (3.2.17).

O deslocamento correspondente a todos os modos de propagação segundo a direcção positiva do eixo \overline{OX} , $\{\Phi\}^+$, é, tendo presente (3.1.9), a expressão

$$\{\Phi\}^+ = \sum_{l=1}^{2n} \alpha_l \{u\}_l e^{i(\omega t - k_l x)} \quad (6.1.11)$$

É imediato que a amplitude será

$$\{u\}^+ = \sum_{l=1}^{2n} \alpha_l \{u\}_l \quad (6.1.12)$$

ou, matricialmente,

$$\{u\}^+ = [U] \{\alpha\} \quad (6.1.13)$$

O vector coluna $\{\alpha\}$ contem os factores de participação dos modos $l=1, \dots, 2n$, e $[U]$ é a matriz onde as colunas correspondem a todos os vectores próprios $\{u\}_l$, $l=1 \dots 2n$. A equação (6.1.13) pode inverter-se

$$\{\alpha\} = [U]^{-1} \{u\}^+ \quad (6.1.14)$$

o que permite determinar os factores de participação dos diferentes modos para a solução geral da equação de movimento das ondas de Rayleigh. As amplitudes do vector força para $x=0$, tendo presente (6.1.10) e (6.1.11), são

$$\{F\}^+ = \sum_{l=1}^{2n} \alpha_l \{-ik_l [A] + [D]\} \{u\}_l$$

ou

$$\{F\}^+ = \{-i[A][U][K] + [D][U]\} \{\alpha\}$$

que, devido a (6.1.14), escrevemos

$$\{F\}^+ = [R] \{u\}^+ \quad (6.1.15)$$

onde

$$[R] = -i[A][U][K][U]^{-1} + [D] \quad (6.1.16)$$

A Matriz $[R]$ conduz-nos ao cálculo das forças nodais que actuam em $x>0$ admitindo que as ondas se propagam no sentido positivo. Esta matriz é simétrica, de dimensão $2n \times 2n$, e de coeficientes complexos. À sua custa formulamos as condições fronteira nas superfícies que separam a zona não homogénea das zonas multiestratificadas horizontalmente que a ladeiam.

As forças correspondentes ao movimento no sentido inverso, sentido negativo de \overline{OX} , calculam-se por

$$\{F\}^- = [L]\{u\}^- \quad (6.1.17)$$

em que $[L]$ é igual a $[R]$, Lysmer e Drake (1972), excepto para os termos onde a soma dos índices da linha e coluna é ímpar, procedendo-se neste caso a uma troca de sinal.

Há a acrescentar que na equação (3.2.4) possuímos sempre para cada valor próprio, k_i^2 , duas soluções $+k_i$ e $-k_i$. Se ao número de onda $+k_i$ corresponde o vector próprio $\{u\}_i$, a $-k_i$ corresponderá também o vector próprio $\{u\}_i$, onde as componentes pares assumem o valor simétrico do anterior. Os k_i poderão ser reais ou complexos e, porque a expressão analítica do deslocamento para cada um dos modos é

$$\{\Phi\}_i = \{u\}_i e^{i(\omega t - k_i x)},$$

não é indiferente, de acordo com Lysmer and Drake (1972), a sua escolha. Segundo estes autores: para $\pm k_i$ complexo, deve escolher-se o sinal tal que a sua parte imaginária seja negativa, o que fisicamente corresponde ao amortecimento ao longo da direcção de propagação; para $\pm k_i$ real, deve escolher-se o sinal positivo se as componentes verticais do deslocamento forem reais. A justificação desta última afirmação deve-se, segundo os mesmos autores, ao facto de que a energia transmitida através da superfície vertical por unidade de tempo e de área é para o modo l

$$E_l = \frac{\omega}{4} \frac{|\alpha_l|^2}{\pm k_l}, \text{ se } k_l \text{ for real} \quad (6.1.18)$$

$$= 0, \text{ se } k_l \text{ for complexo}$$

6.1.4. Equação final do movimento

Admitamos que a excitação provocada na estrutura complexa (fig.6.3) é devida a ondas provenientes da zona [E]:

$$\{u\}_E^+ e^{i\omega t}$$

O índice superior representa o sentido de propagação, enquanto que o índice inferior representa a zona origem da excitação. Como consequência aparecem na zona [E] ondas reflectidas na superfície de contacto dadas por

$$\{u\}_E^- e^{i\omega t}$$

Por um raciocínio perfeitamente semelhante ao que acabámos de fazer, na zona [D] existem ondas cuja expressão

$$\{u\}_D^+ e^{i\omega t}$$

e que representam as ondas transmitidas.

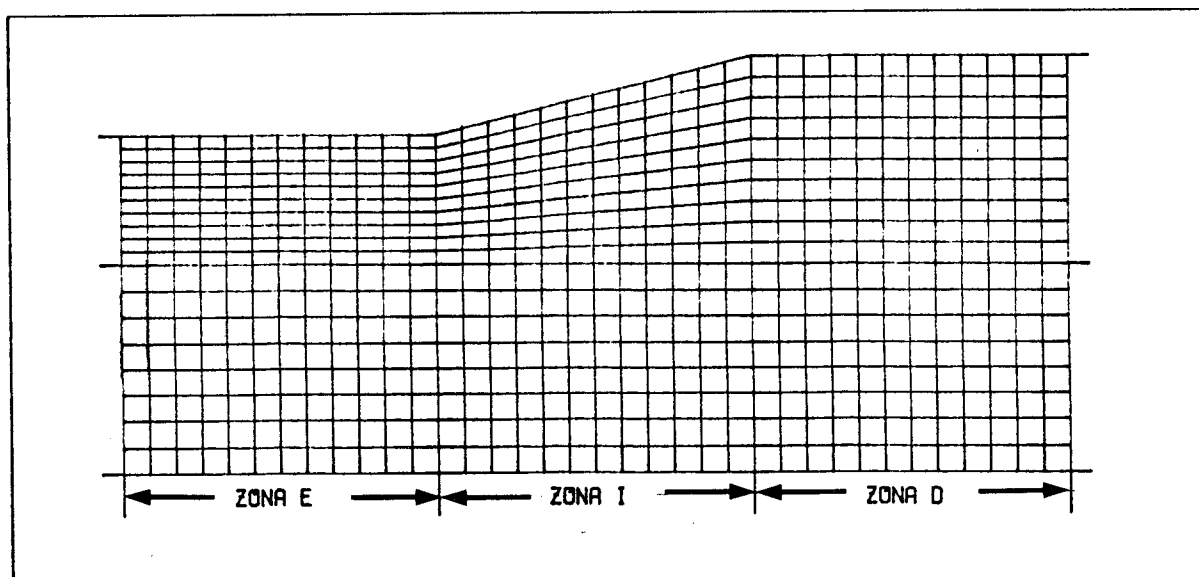


Fig 6.3. - Elementos finitos para uma estrutura não homogênea

As forças que actuam na fronteira entre a zona E e II , de acordo com a notação utilizada, são $\{F\}_E = \{F\}_E^- + \{F\}_E^+$, devido a (6.1.15) e (6.1.17),

$$\{F\}_E = \left\{ [L]_E(u)_E^- - [R]_E(u)_E^+ \right\} e^{i\omega t} \quad (6.1.20)$$

Na separação entre a zona II e D escrevemos para a expressão das forças em presença

$$\{F\}_D = [R]_D(u)_D^+ e^{i\omega t} \quad (6.1.21)$$

Logo, as forças afectando a zona não homogénea, $\{F\}_I$, são

$$\begin{aligned} \{F\}_I &= -(\{F\}_E + \{F\}_D) \\ &= \left\{ [R]_E(u)_E^+ - [L]_E(u)_E^- - [R]_D(u)_D^+ \right\} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Finalmente, a equação do movimento na zona não homogénea, no estado estacionário, onde quer as forças, quer os deslocamentos, vibram segundo um movimento harmónico com a mesma frequência, é, segundo (6.1.7) e (6.1.22),

$$\left\{ [K] - \omega^2[M] \right\} \{u\} = [R]_E(u)_E^+ - [L]_E(u)_E^- - [R]_D(u)_D^+ \quad (6.1.23)$$

em que o $[K]$ e $[M]$ representam, respectivamente, a matriz de rigidez e de massa da zona heterogénea, de dimensões $2mn \times 2mn$. O valor mn é o número de nodos da malha utilizada.

Para resolvermos a equação (6.1.23) as matrizes da zona II , $[K]$ e $[M]$, constroem-se de tal forma que os pontos nodais da fronteira entre a zona E e II ocupam as $2n$ primeiras linhas e colunas, enquanto que os pontos nodais da fronteira entre a zona D e II ocupam as $2n$ últimas linhas e colunas. Logo as matrizes $[R]$ e $[L]$ da equação (6.1.23), inicialmente de dimensão $2n \times 2n$, terão de ser ampliadas. $[R]_E$ e $[L]_E$ serão as

submatrizes superiores esquerda de duas novas matrizes onde as restantes $2mn$ colunas e linhas serão formadas por elementos nulos. O mesmo se passará para $[R]_D$, só que aqui a matriz inicial será a submatriz inferior direita de uma nova matriz, em que as primeiras $2mn$ linhas e colunas terão como elementos o valor zero.

Procedimento similar terão que sofrer os vectores $\{u\}_E^-$ e $\{u\}_E^+$. Serão ampliados e as suas componentes ocuparão as $2n$ primeiras posições, as restantes componentes, até perfazer um vector de dimensão $2mn$, serão nulas. O vector $\{u\}_D^+$ ampliar-se-á também até à dimensão $2mn$, ocupando os seus valores os $2n$ últimos elementos do novo vector, enquanto que as restantes componentes serão nulos.

O segundo membro da equação (6.1.23) apresenta-se

$$\begin{aligned} [R]_E \{u\}_E^+ - [L]_E \{u\}_E^- - [R]_D \{u\}_D^+ + [L]_E \{u\}_E^+ - [L]_E \{u\}_E^+ = \\ = ([R]_E + [L]_E) \{u\}_E^+ - [L]_E (\{u\}_E^- + \{u\}_E^+) - [R]_D \{u\}_D^+ \\ = ([R]_E + [L]_E) \{u\}_E^+ - [L]_E \{u\} - [R]_D \{u\} \end{aligned}$$

então a equação de movimento toma a forma

$$([K] - \omega^2 [M] + [L]_E + [R]_D) \{u\} = ([R]_E + [L]_E) \{u\}_E^+ \quad (6.1.24)$$

Esta expressão, onde a matriz representada no primeiro termo, $[K] - \omega^2 [M] + [L]_E + [R]_D$, é simétrica, constitui um sistema de equações lineares complexas a partir das quais podem determinar-se as amplitudes dos deslocamentos dos nodos da zona não homogénea para qualquer onda incidente $\{u\}_E^+ e^{i\omega t}$ de frequência ω .

*

* *

6.2. Campo de deslocamentos e repartição de energia

A solução da equação de movimento (6.1.24), $\{u\}$, dá-nos o campo de amplitudes complexas de toda a zona não homogénea II , provocado por uma onda incidente perpendicularmente à superfície de separação entre o meio E e II .

Os $2n$ primeiros elementos do vector $\{u\}$ são as amplitudes dos deslocamentos da fronteira à esquerda da zona não homogénea. Logo, as amplitudes dos modos de Rayleigh reflectidos calculam--se a partir de

$$\{u\}_R = \{u\}_E^- = \{u\} - \{u\}_E^+ \quad (6.1.25)$$

As últimas $2n$ componentes de $\{u\}$ correspondem aos deslocamentos sobre a fronteira à direita de II , concluímos que representam as amplitudes dos modos de Rayleigh transmitidos para a zona D

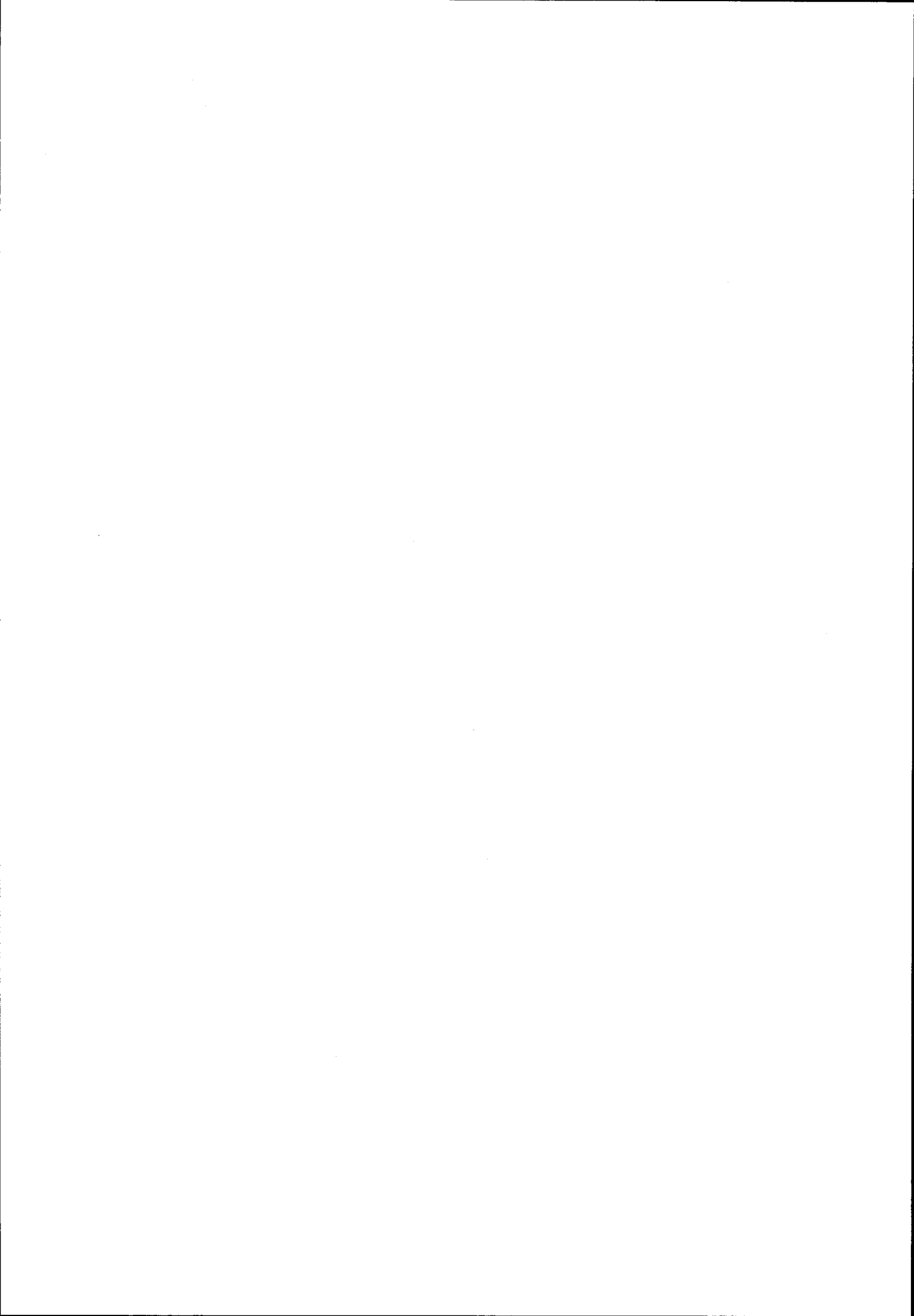
$$\{u\}_T = \{u\}_D^+ = \{u\} \quad (6.1.26)$$

Com estas duas últimas expressões e ainda (6.1.14) determinamos os factores de participação dos diferentes modos, quer no movimento reflectido, quer no movimento transmitido, assim :

$$\{\alpha\}_E = [U]_E^{-1} \{u\}_R \quad (6.1.27)$$

$$\{\alpha\}_D = [U]_D^{-1} \{u\}_T$$

O conhecimento dos factores de participação dos diferentes modos, em conjunto com a expressão (6.1.18), conduz-nos ao cálculo da energia reflectida e transmitida, por unidade de comprimento, para cada modo de propagação.



7 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE RAYLEIGH NUM MEIO NÃO HOMOGÉNEO (Resultados numéricos)

7.1. Modelo da Margem Continental Atlântica da Península Ibérica

7.1.1. Introdução

As características, tanto físicas como geométricas, da margem continental Atlântica, constituída pela zona de transição entre a região oceânica e a continental, assentam nos modelos propostos em Perez et al.(1978) e Dziewonski e Anderson(1981) e condensadamente apresentados em 5.1.

Do que se expôs há que concluir que a estrutura da Península Ibérica é do tipo continental com uma crosta de cerca de 30 km de espessura, possuindo um canal de baixa velocidade na litosfera a 80 km da superfície com uma espessura de, aproximadamente, 100 km. A zona Atlântica a oeste da Península possui uma estrutura oceânica típica com uma crosta de espessura igual a 5 km, tendo a 100 km de profundidade, na litosfera, um canal de baixa velocidade cuja espessura é, aproximadamente, também de 100 km. Ambas as estruturas foram objecto de um modelização segundo estratos horizontais, o que permitirá o estabelecimento de um modelo para a região não

homogénea situada entre elas.

7.1.2. O modelo de margem continental utilizado no método dos elementos finitos

O modelo de zona de transição, a margem continental, baseia-se nas duas estruturas, oceânica e continental, propostas no Cap.5. Os valores das suas propriedades físicas definem-se a partir da interpolação linear entre os valores das propriedades homónimas dos estratos correspondentes em ambas as regiões de estratificação horizontal.

A largura desta zona de transição não está determinada, no entanto utilizámos o valor de 150km que nos pareceu razoável após consulta de uma carta do Atlântico a Oeste da Península Ibérica, fig.8.1. No sentido de melhor definir a margem continental, subdividimo-la em três partes distintas: a da esquerda [IE] de comprimento 30km, representando uma estrutura tipicamente oceânica, a zona não homogénea propriamente dita [II] de comprimento 90km, e a da direita [ID] correspondendo a uma estrutura tipicamente continental, com o comprimento 30km.

A fim de melhor estudar as características geométricas da zona de transição utilizámos três modelos para a zona [II] (fig.7.1): modelo A, referido anteriormente, largura 90km; modelo B de largura 40km, isto é reduzimos a zona de transição a cerca de metade; modelo C de largura 10km, onde simulamos praticamente uma zona de descontinuidade entre a crosta oceânica e continental. Em qualquer dos modelos referidos a determinação das propriedades físicas é sempre feita pelo mesmo processo. A gama de períodos das ondas sobre o qual se estende o nosso estudo, bem como as profundidades utilizadas nos modelos, continuam a ser os indicados no QUADRO 5.6.

Nos QUADROS 7.1, 7.2 e 7.3 apresentamos as características principais da malha utilizada para os três modelos A,B, e C, respectivamente, tendo sempre presente as suas variantes em

profundidade (quatro valores distintos).

QUADRO 7.1

MODELO A	A1	A2	A3	A4
Largura (km)	150	150	150	150
Profundidade (km)	400	800	1200	1600
Largura de cada elemento (km)	5	5	10	10
Numero de camadas	42	55	64	72
Num. elementos por camada	30	30	15	15
Numero total de elementos	1260	1650	960	1080
Numero de nodos	1302	1680	1024	1095
Num. de equações utilizadas	2604	3380	2048	2190
Num. de coef. utilizados	221249	375858	253044	319236
Num. elem. poupados na matriz	96.7%	96.7%	94.1%	94.0%

QUADRO 7.2

MODELO B	B1	B2	B3	B4
Largura (km)	100	100	100	100
Profundidade (km)	400	800	1200	1600
Largura de cada elemento (km)	5	5	5	5
Numero de camadas	42	55	64	72
Num. elementos por camada	20	20	20	20
Numero total de elementos	840	1100	1280	1440
Numero de nodos	882	1155	1344	1512
Num. de equações utilizadas	1764	2310	2688	3024
Num. de coef. utilizados	147576	250458	337524	425796
Num. elem. poupados na matriz	95.2%	95.3%	95.3%	95.3%

QUADRO 7.3

MODELO C	C1	C2	C3	C4
Largura (km)	70	70	70	70
Profundidade (km)	400	800	1200	1600
Largura de cada elemento (km)	5	5	5	5
Numero de camadas	42	55	64	72
Num. elementos por camada	14	14	14	14
Numero total de elementos	588	770	896	1008
Numero de nodos	630	825	960	1080
Num. de equações utilizadas	1260	1650	1920	2160
Num. de coef. utilizados	103224	175218	236148	297924
Num. elem. poupados na matriz	93.5%	93.6%	93.6%	93.6%

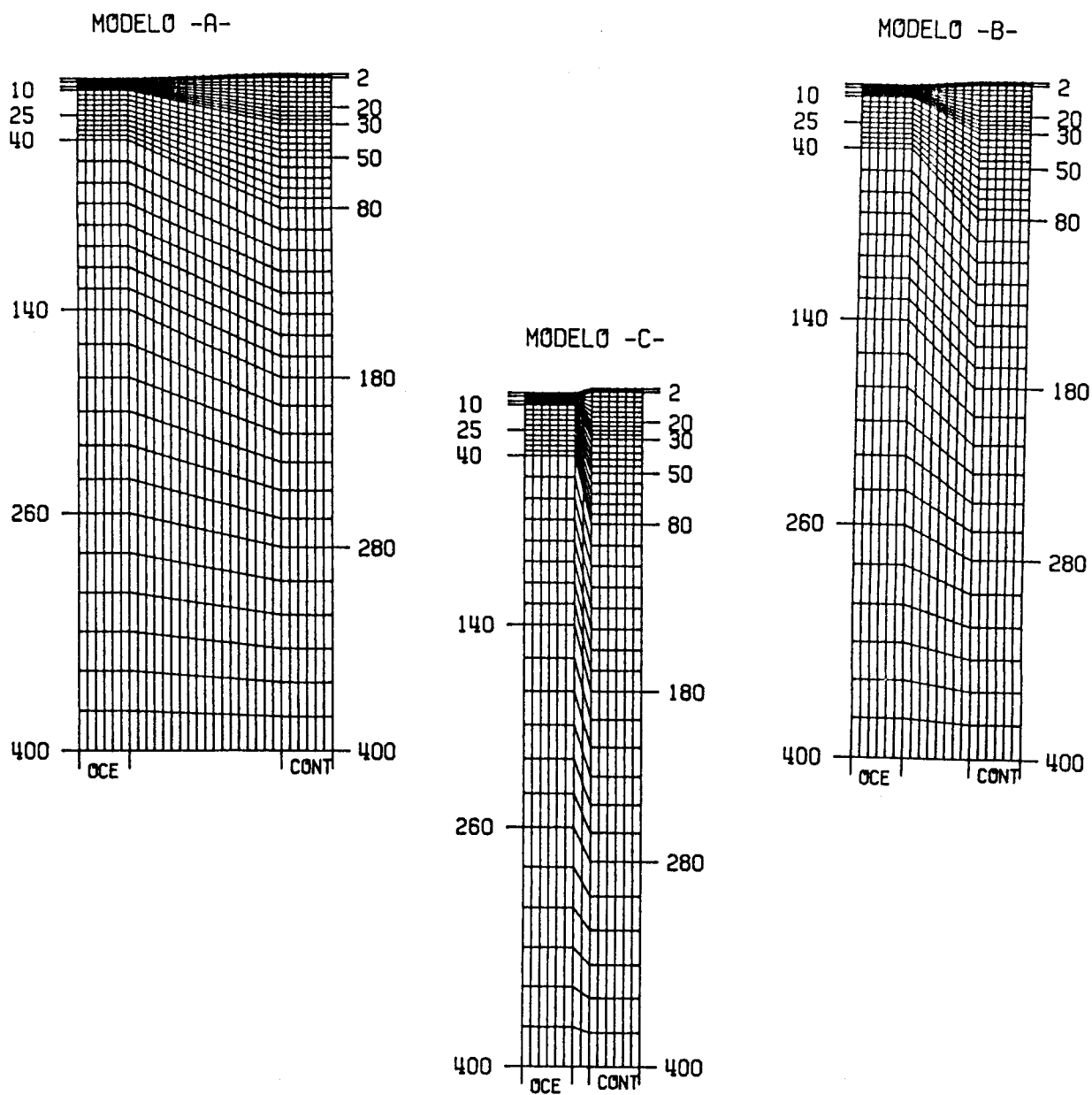


Fig.7.1.- Os três modelos utilizados na modelização da zona de transição:
A, B, C.

*
* *

7.2. Propagação segundo a direcção oceano-continente

7.2.1 Deslocamento na margem continental

Vamos mostrar o comportamento do campo de deslocamentos complexos, vertical e horizontal, de toda a zona não homogénea, como resposta do meio à excitação, com uma determinada frequência, provocada pelo modo fundamental de Rayleigh de amplitude igual à unidade, fase nula, e incidindo perpendicularmente à superfície de separação dos dois meios segundo o sentido oceano-continente.

Como exemplos do campo de deslocamentos, para o Modelo A, apresentamos as figs.7.2, 7.3, 7.4 e 7.5. As duas primeiras correspondem a uma excitação cujo período é de 12s e representam o deslocamento horizontal e vertical, respectivamente. As duas últimas figuras correspondem a uma ilustração análoga à anterior, mas para um período de 18s. As divisões indicadas nas figuras referidas são de 10km e 5km, ao longo da profundidade e da superfície, respectivamente.

Nos cálculos as profundidades são as já mencionadas, embora nas figuras a representação esteja bastante reduzida em profundidade, de forma a realçar, sem ampliar demaseado o desenho, o respectivo campo de deslocamentos.

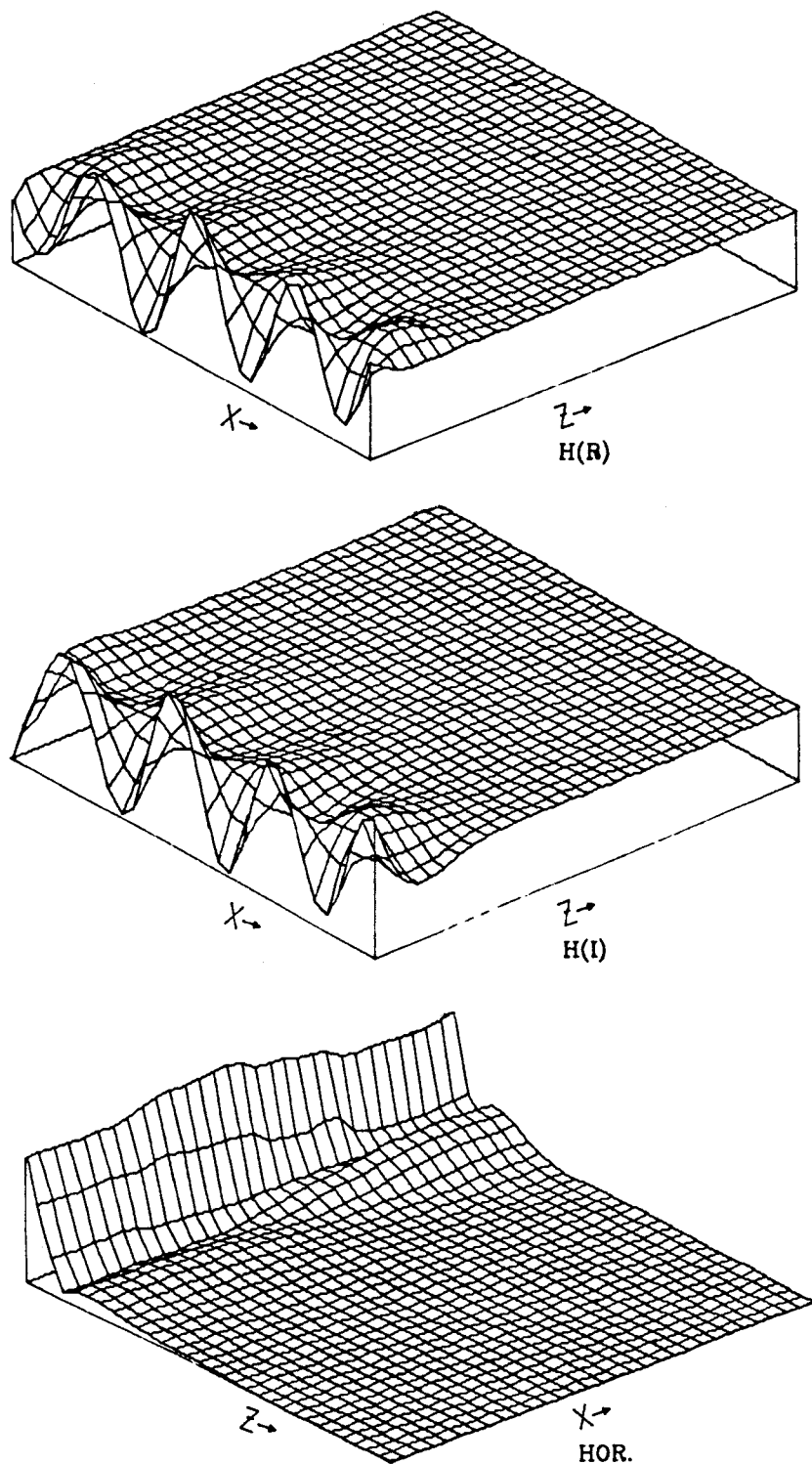


Fig.7.2- Campo de deslocamentos horizontal na zona não homogénea para um período de 12s: $H(R)$, parte real, $H(I)$, parte imaginária, HOR , módulo.

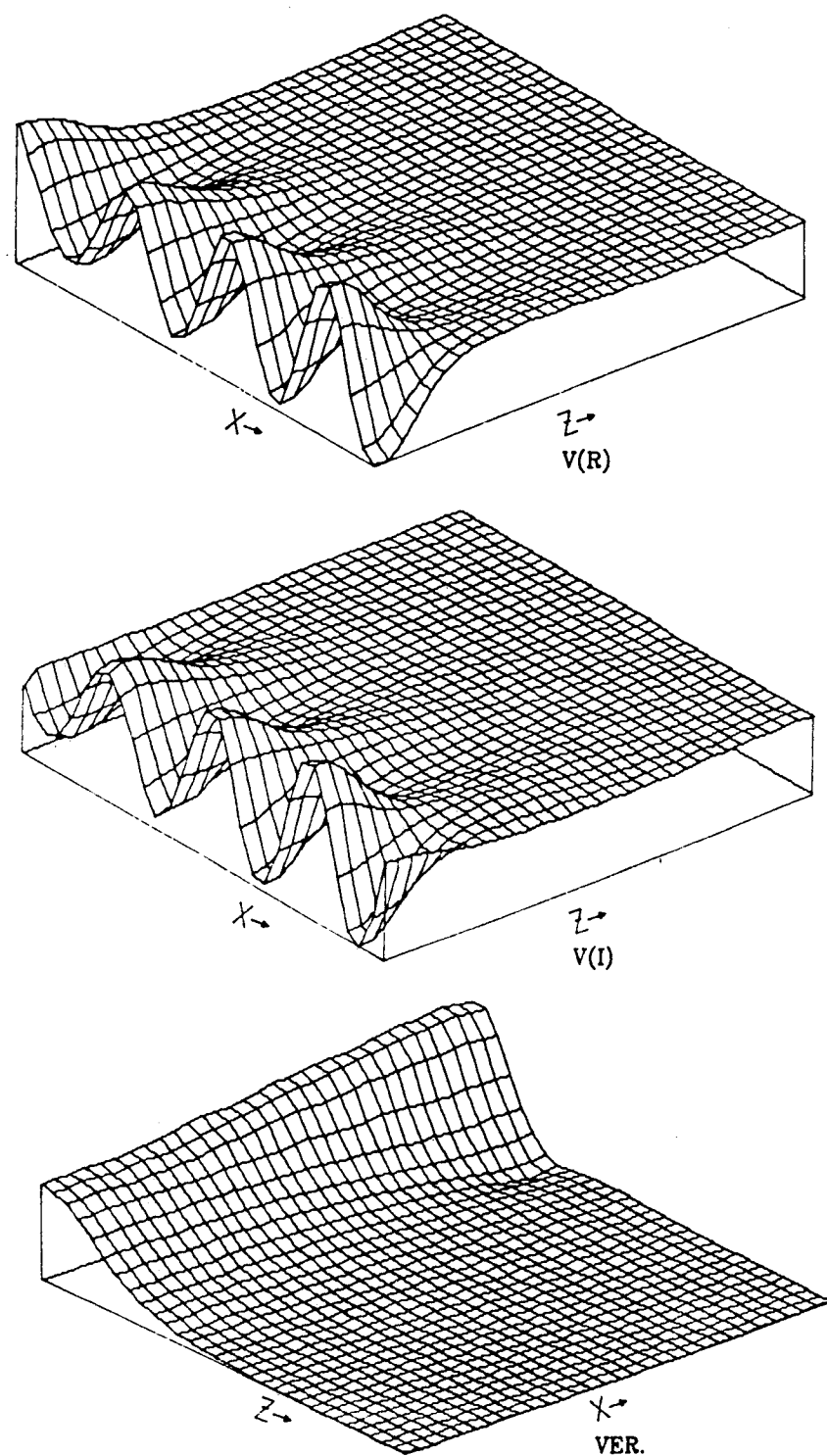


Fig. 7.3 - Campo de deslocamentos vertical na zona não homogênea para um período de 12s: $V(R)$, parte real, $V(I)$, parte Imaginária, VER , módulo.

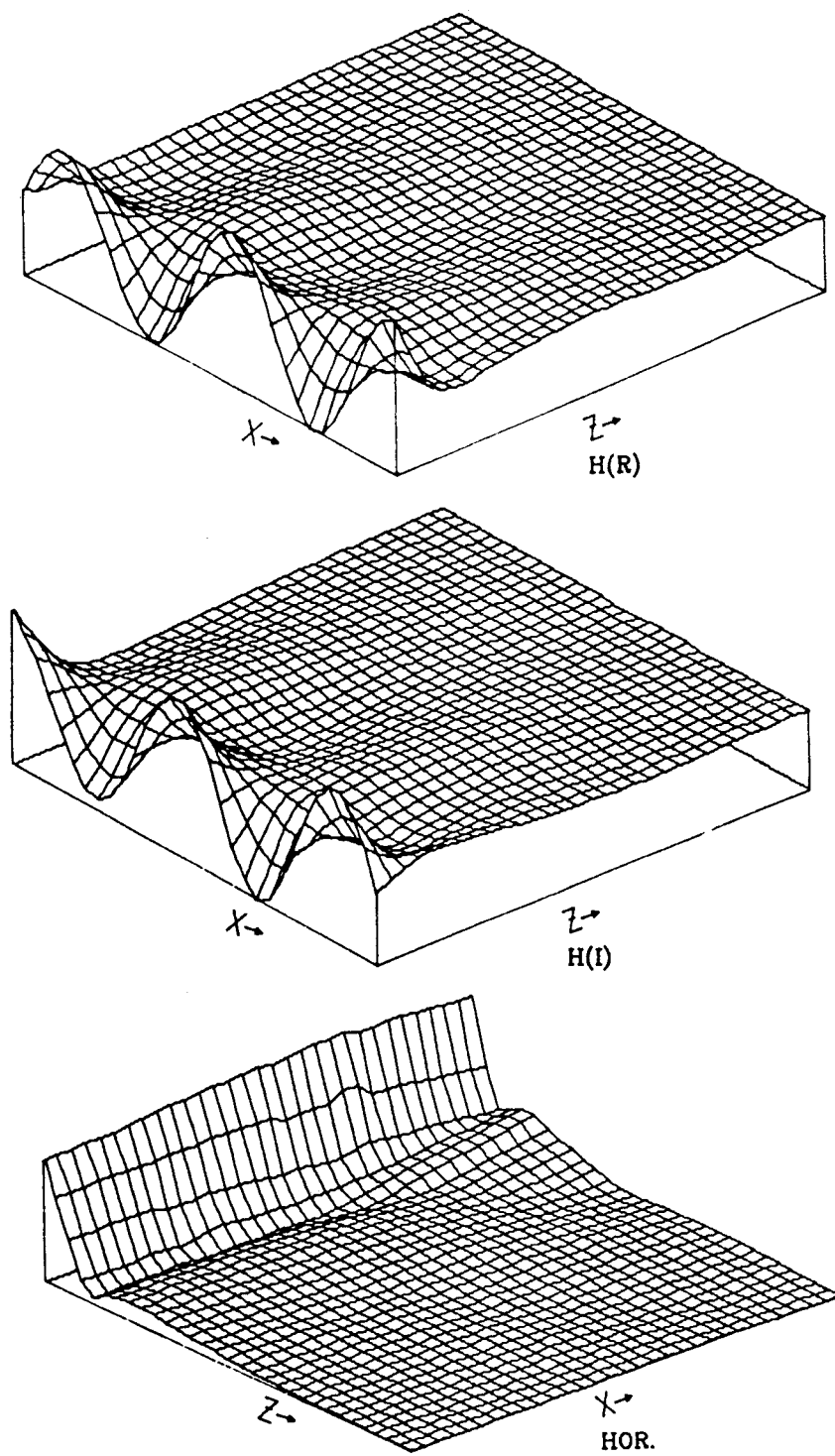


Fig. 7.4- Campo de deslocamentos horizontal na zona não homogênea para um período de 18s: $H(R)$, parte real, $H(I)$, parte imaginária, $HOR.$, módulo.

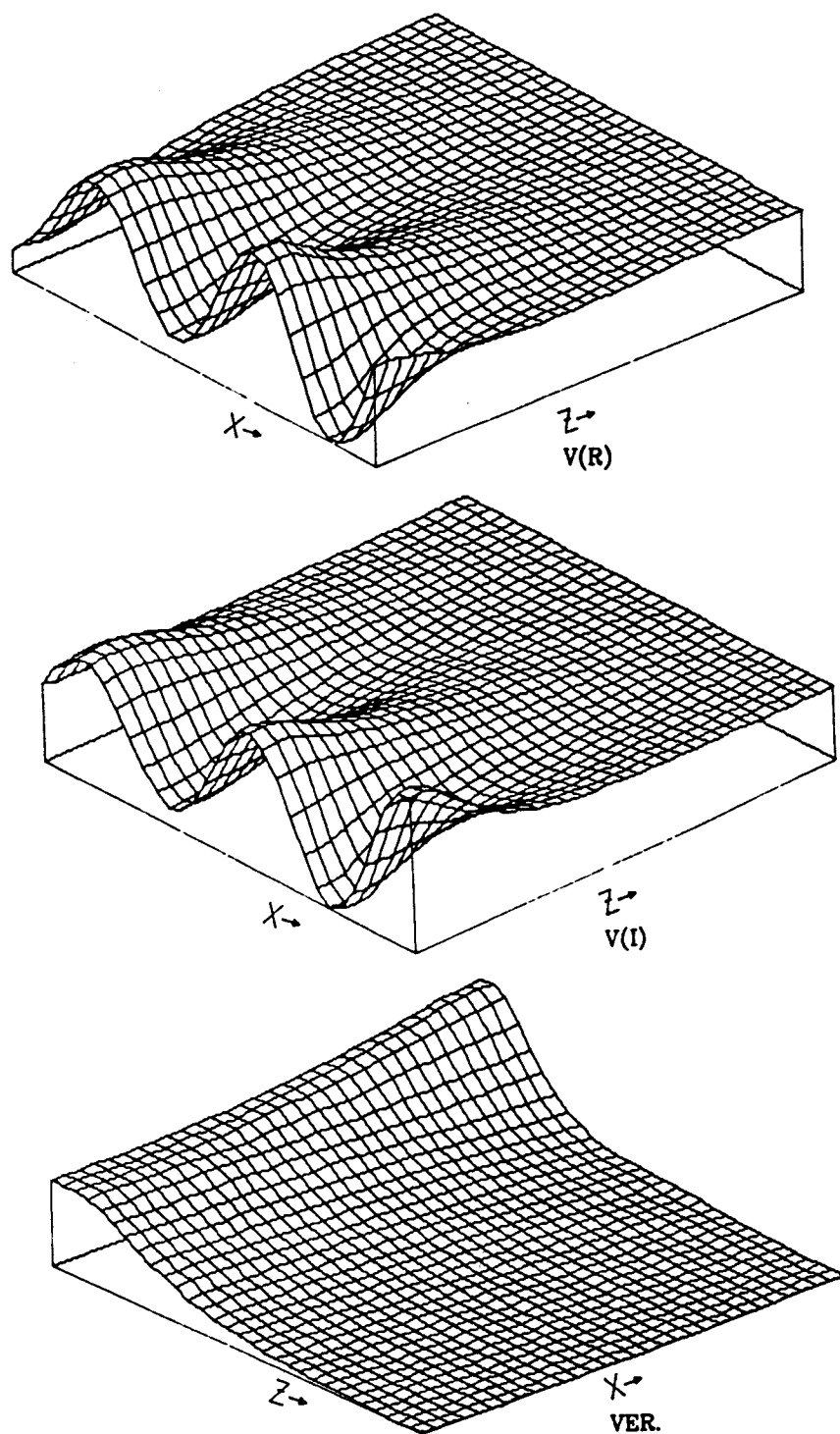


Fig.7.5- Campo de deslocamentos vertical na zona não homogênea para um período de 18s: $V(R)$, parte real, $V(I)$, parte imaginária, VER , módulo.

Pelo que acabámos de mostrar concluímos que à medida que aumenta o período da excitação proveniente do oceano, também aumenta a profundidade atingida, na zona não homogénea, pela onda induzida. As representações utilizadas mostram também que há uma variação do período de propagação da onda na zona não homogénea com o período da excitação imposta: quanto maior for o período da excitação, maior será o período de propagação, mantendo-se este aproximadamente igual para o deslocamento horizontal e deslocamento vertical.

7.2.2. Deslocamento superficial

Um dos pontos de particular interesse no estudo do campo dos deslocamentos é o dos deslocamentos superficiais ao longo de toda a zona de transição, visto que é uma das grandezas passíveis de ser comparadas com resultados de observação *in situ*. É o que aconteceria com a utilização de uma rede de sismómetros no fundo do mar que permitiria, utilizando os dados colhidos, estabelecer comparações com os resultados de um modelo concebido com base no método dos elementos finitos.

Nas figs.7.6, 7.7 e 7.8 estão representados, para o Modelo A e para todos os períodos estudados, os módulos dos deslocamentos horizontais, verticais e a sua razão, respectivamente. Da análise destas representações podemos tirar várias conclusões.

O módulo do deslocamento horizontal à superfície no intervalo entre 1.5s e 12 s decresce entre a região oceânica e a região continental, começando a aumentar para períodos superiores a 12 s. Há uma amplificação da amplitude do deslocamento horizontal no sentido oceano-contidente para períodos superiores a 12 s.

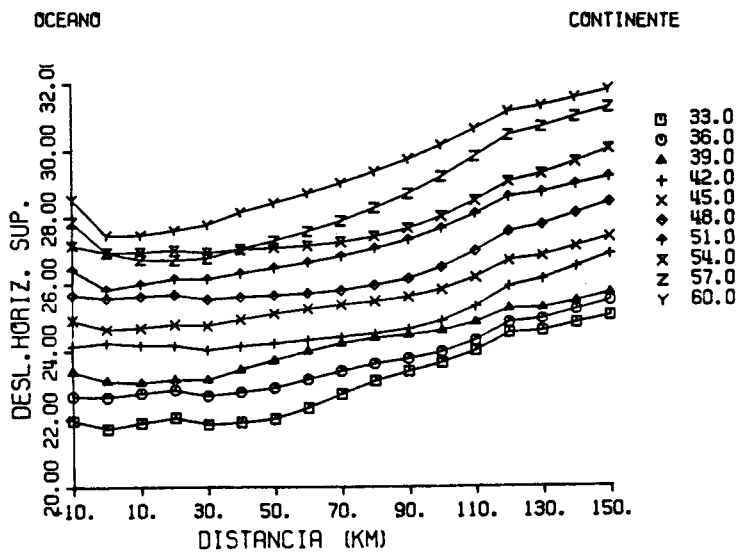
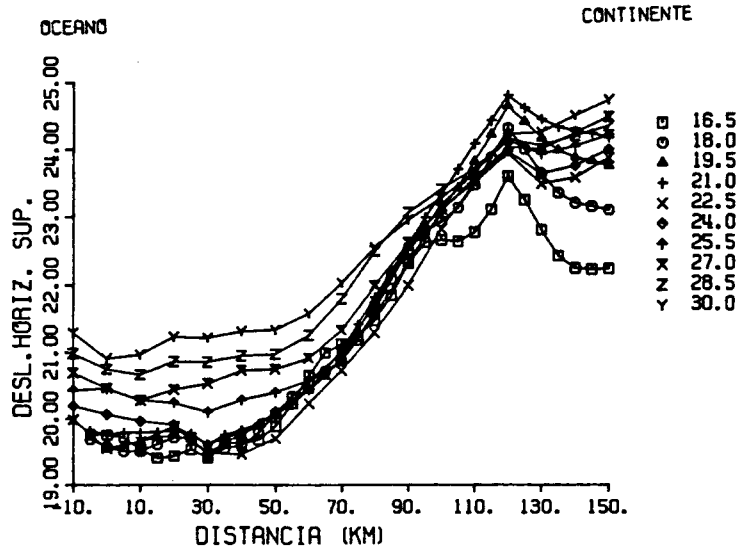
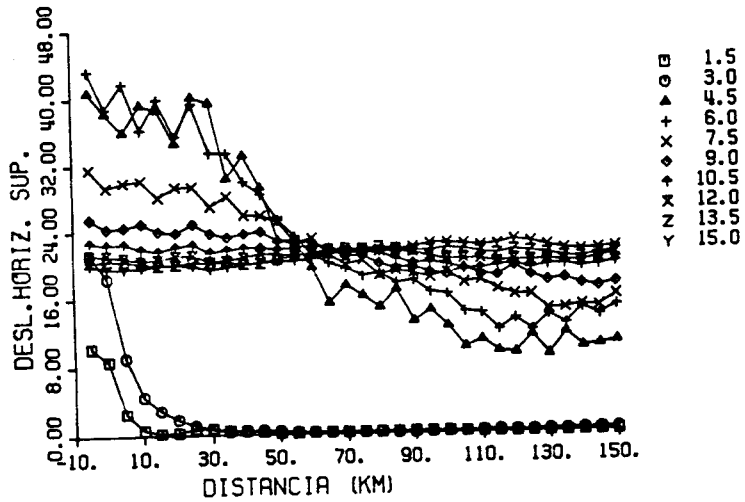


Fig.7.6- Modelo A: módulo do deslocamento horizontal para todos os períodos

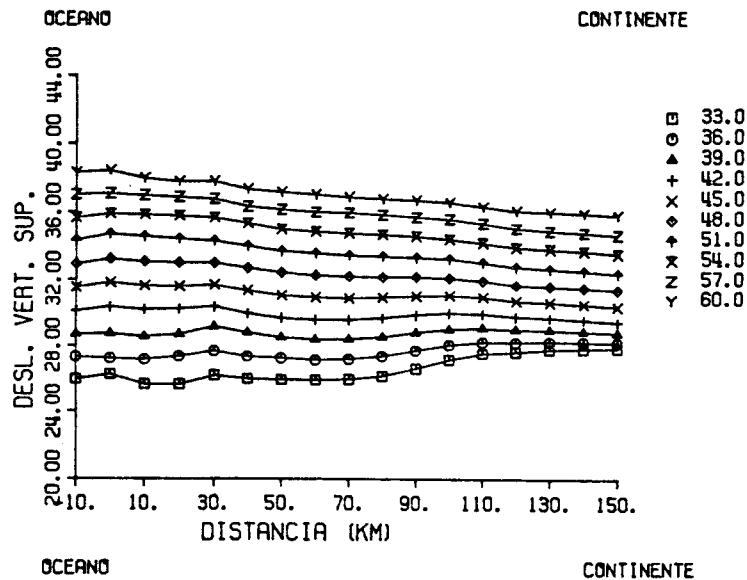
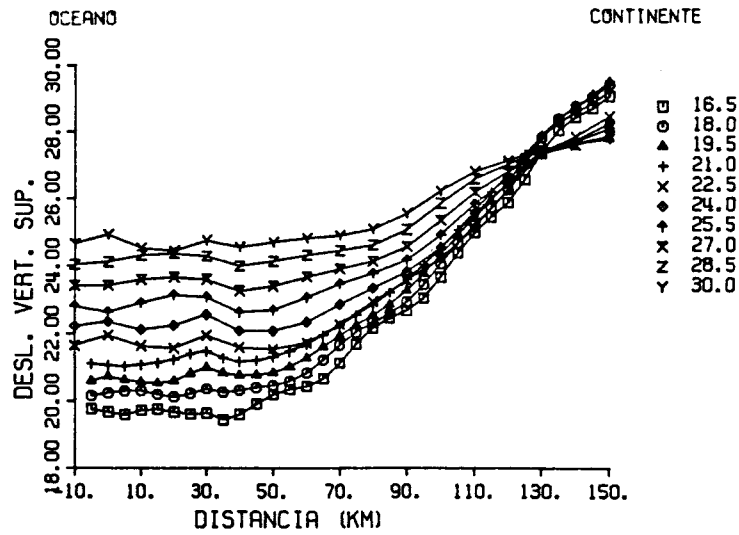
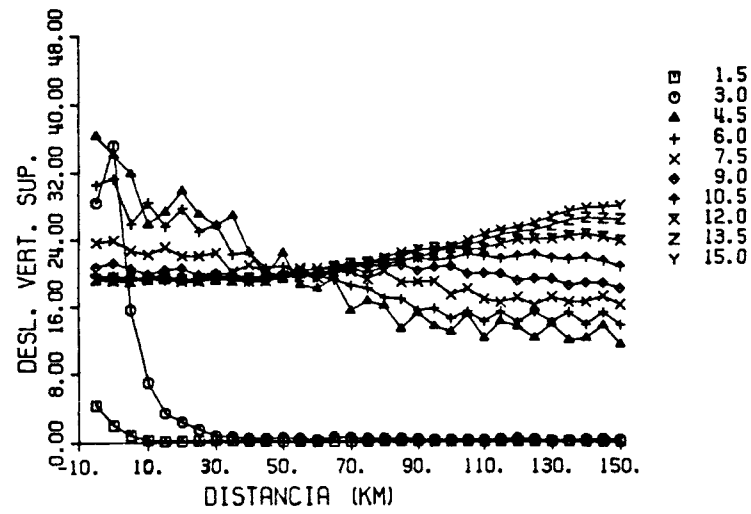


Fig. 7.7- Modelo A: módulo do deslocamento vertical para todos os períodos

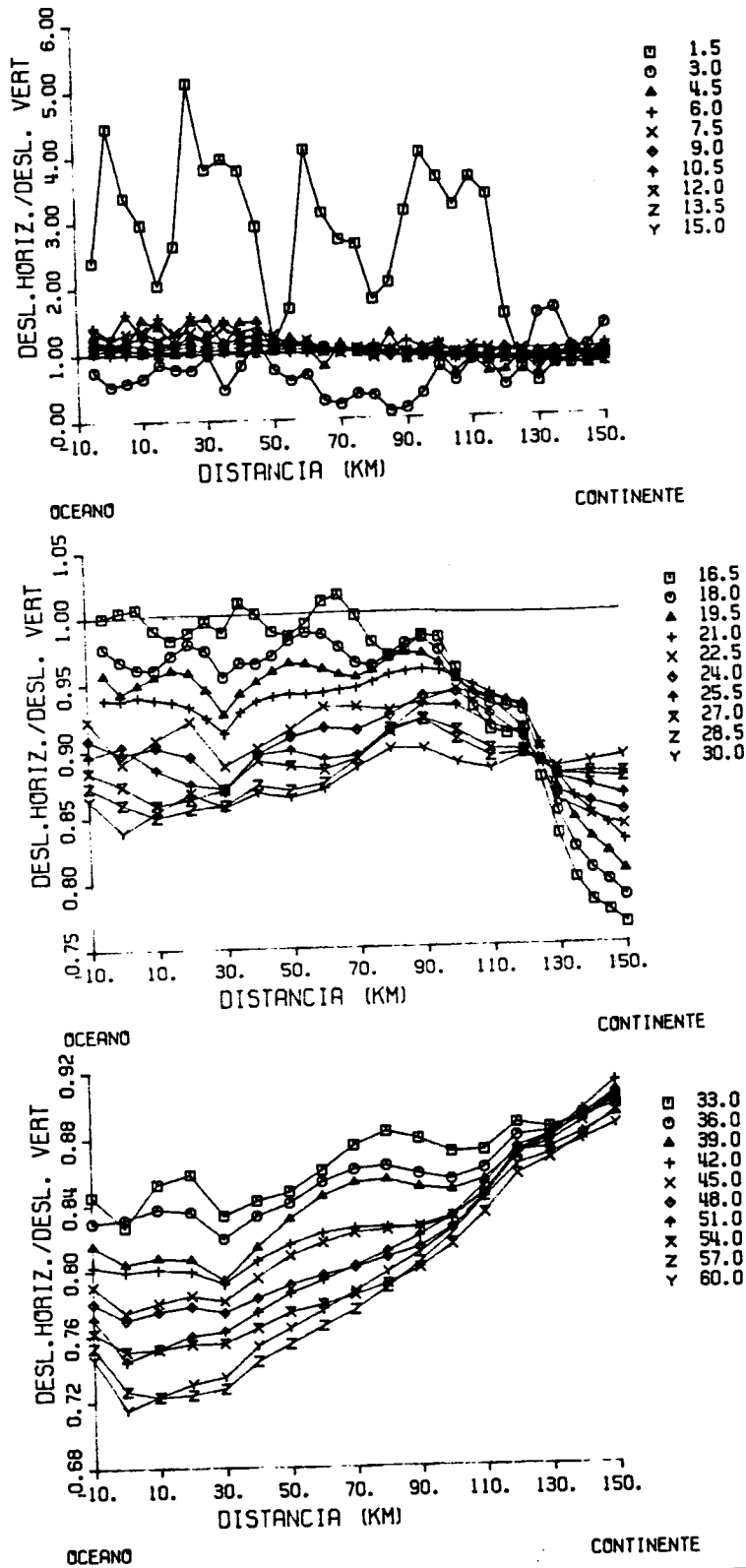


Fig.7.8- Modelo A: razão entre o módulo do deslocamento horizontal e o módulo do deslocamento vertical para todos os períodos.

Para o módulo do deslocamento vertical há também um decrescimento no mesmo intervalo, 1.5s a 12 s, invertendo-se a situação nos períodos entre 13.5s e 39 s. Enquanto que para os períodos seguintes, superiores a 39 s, a amplitude do deslocamento superficial volta a diminuir, embora menos acentuadamente, no sentido oceano-continente.

O comportamento da razão entre os módulos do deslocamento superficial horizontal e vertical evidenciado na fig.7.8, leva-nos a concluir que para períodos superiores a 16.5s o módulo do deslocamento horizontal é sempre inferior ao seu homónimo vertical na zona de transição.

7.2.3 Velocidade de fase na margem continental

Consideramos que a fase do modo fundamental de Rayleigh incidente na zona de transição e proveniente do Oceano é nula. E φ é a fase do modo fundamental de Rayleigh ao ser transmitido para a zona continental. Assim, para um determinado período T e no instante $t=0$ o modo fundamental ao ser transmitido para a zona continental terá uma diferença de fase φ em relação à onda incidente que corresponde ao comprimento de onda λ

$$\lambda = \frac{\text{DIST}}{(2k\pi + \varphi) \times (2\pi)^{-1}}$$

em que DIST corresponde à distância percorrida na horizontal, isto é, o comprimento da margem continental. Conhecidos T e λ podemos extrair de imediato o valor da velocidade de fase.

Há que sublinhar que este cálculo da velocidade de fase ao longo desta zona não é totalmente correcto. O modo fundamental propaga-se ao longo da margem continental de tal maneira que altera continuamente a sua trajectória e a sua velocidade. Assim os valores obtidos dever-se-iam comparar com os resultados da Teoria dos Raios, Badal e Seron (1987),

$$L/c = \int_L c^{-1}(s) ds$$

onde L representa a trajectória ao longo de um meio lateralmente heterogéneo.

Dos valores do QUADRO 7.2 representados graficamente na fig.7.9 podemos concluir que para os três modelos a velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh é ligeiramente superior à velocidade de fase média para o mesmo período, sobretudo a partir dos 9.0s.

No Modelo A esta aproximação entre a velocidade de fase e o valor da velocidade média possui uma variação relativa máxima de 4.7% para o período de 9 s, decrescendo, na generalidade, à medida que o período aumenta: 0.3% para 60 s. No Modelo B a mesma aproximação possui uma variação relativa máxima de 4.8% também para o período de 9 s, decrescendo esta variação à medida que o período aumenta: 0.2% para 60 s. Idêntico comportamento verifica-se no Modelo C, a mesma aproximação possui um máximo de 4.6% também para o período de 9 s, decrescendo, na generalidade, à medida que o período aumenta: 0.4% para 60 s.

Há uma forte semelhança entre os valores das velocidades de fase de propagação do modo fundamental de Rayleigh na zona não homogénea para os três modelos, o que mostra que a velocidade de fase não é afectada pelas diferentes características geométricas dos modelos em causa. Por outro lado concluímos que a velocidade de fase média é uma boa aproximação para o cálculo daquela grandeza.

QUADRO 7.2

PER (s)	V.F.O km/s	V.F.C km/s	V.F.M km/s	Velocidade de Fase zona irregular (km/s)					
				A	VR	B	VR	C	VR
1.5	1.413	2.079	1.746	1.730	.009	1.735	.007	1.740	.004
3.0	1.579	2.734	2.157	2.160	.001	2.153	.002	2.142	.007
4.5	2.199	2.930	2.565	2.534	.012	2.623	.023	2.567	.001
6.0	2.961	2.994	2.977	3.031	.018	2.857	.040	2.998	.007
7.5	3.379	3.036	3.207	3.183	.008	3.063	.045	3.456	.078
9.0	3.546	3.077	3.312	3.474	.049	3.472	.048	3.464	.046
10.5	3.629	3.122	3.375	3.497	.036	3.488	.034	3.476	.030
12.0	3.675	3.174	3.425	3.528	.030	3.514	.026	3.499	.022
13.5	3.704	3.233	3.469	3.561	.027	3.544	.022	3.527	.017
15.0	3.723	3.300	3.511	3.601	.025	3.585	.021	3.570	.017
16.5	3.736	3.370	3.553	3.639	.024	3.624	.020	3.613	.017
18.0	3.745	3.441	3.593	3.671	.022	3.655	.017	3.644	.014
19.5	3.751	3.509	3.630	3.701	.019	3.687	.016	3.680	.014
21.0	3.756	3.572	3.664	3.729	.018	3.718	.015	3.716	.014
22.5	3.760	3.626	3.693	3.783	.025	3.747	.015	3.750	.016
24.0	3.763	3.671	3.717	3.843	.034	3.760	.011	3.764	.013
25.5	3.766	3.708	3.737	3.846	.029	3.771	.009	3.776	.010
27.0	3.768	3.738	3.753	3.850	.026	3.789	.009	3.798	.012
28.5	3.771	3.762	3.766	3.849	.022	3.799	.009	3.811	.012
30.0	3.774	3.780	3.777	3.854	.020	3.805	.007	3.819	.011
33.0	3.780	3.807	3.794	3.856	.017	3.811	.005	3.826	.009
36.0	3.788	3.824	3.806	3.856	.013	3.817	.003	3.831	.007
39.0	3.797	3.835	3.816	3.858	.011	3.826	.003	3.843	.007
42.0	3.808	3.843	3.825	3.861	.009	3.839	.004	3.862	.010
45.0	3.820	3.849	3.835	3.863	.007	3.844	.002	3.867	.008
48.0	3.835	3.855	3.845	3.865	.005	3.847	.000	3.868	.006
51.0	3.852	3.861	3.856	3.872	.004	3.859	.001	3.883	.007
54.0	3.870	3.867	3.869	3.878	.002	3.871	.001	3.895	.007
57.0	3.888	3.874	3.881	3.892	.003	3.879	.001	3.903	.006
60.0	3.909	3.882	3.895	3.908	.003	3.887	.002	3.909	.004

Legenda:

- V.F.O.- Velocidade de Fase na Zona Oceânica
V.F.C.- Velocidade de Fase na Zona Continental
V.F.M.- Velocidade de Fase média entre as duas zonas
VR - Variação relativa entre a velocidade de fase da
zona não homogênea e V.F.M.
A,B,C - modelos de zona de transição

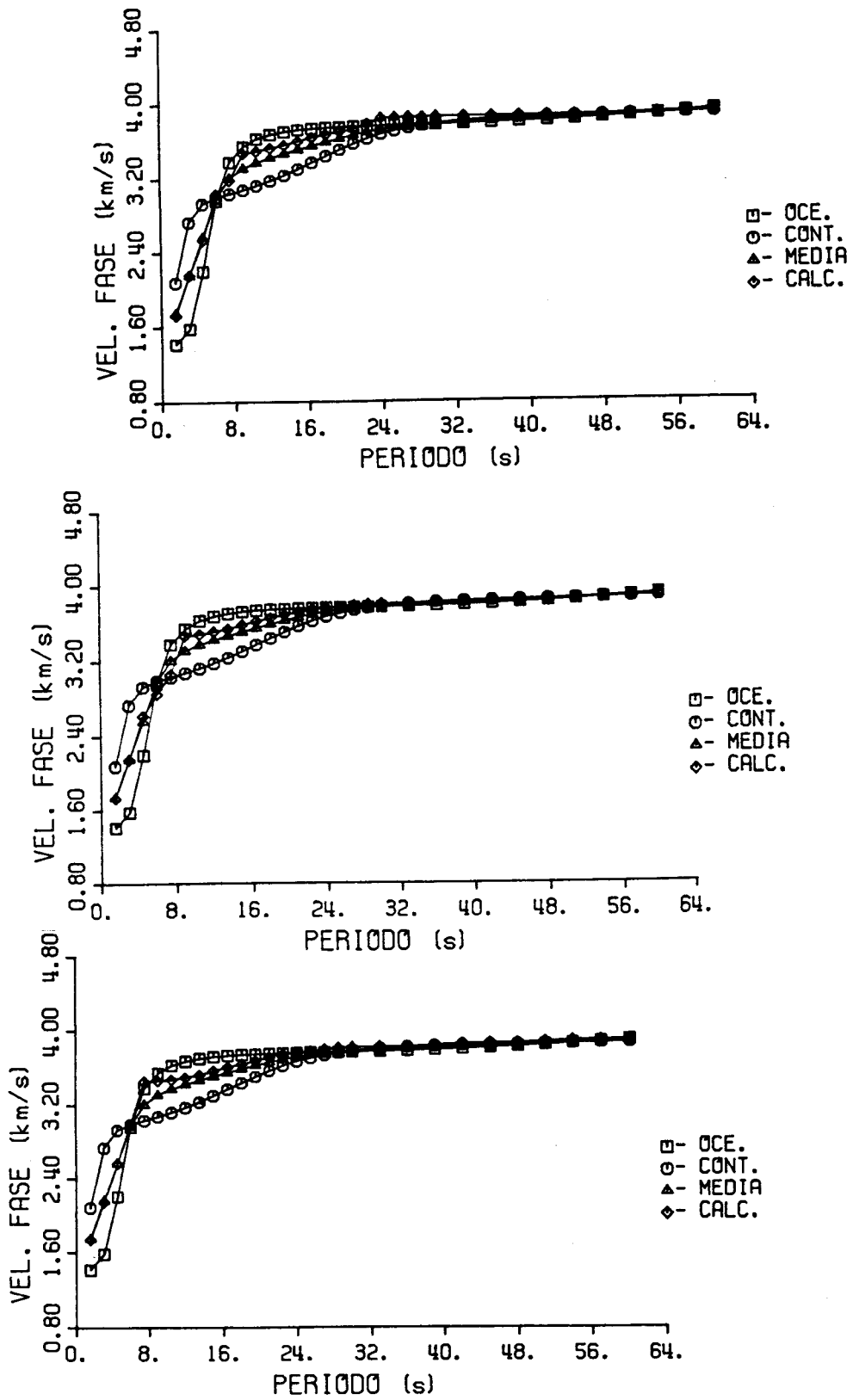


Fig.7.9- Curvas de dispersão do modo fund. de Rayleigh (Modelos A,B,C).

As conclusões encontradas em Badal e Seron (1987), para as ondas de Love e para modelos da margem continental muito semelhantes aos nossos, estão em acordo com o que concluímos para a propagação de ondas de Rayleigh.

7.2.4. Factores de transmissão e reflexão

De acordo com Drake (1972a,b) definimos factor de reflexão como sendo a razão obtida entre os deslocamento superficial vertical reflectido e o deslocamento vertical superficial incidente, enquanto que o factor de transmissão é a razão entre o deslocamento superficial vertical transmitido e o deslocamento vertical superficial incidente. Estas duas grandezas revestem-se de grande importância sobretudo para a avaliação da adequação deste modelo com os dados observados, o que faremos no Cap.8.

No QUADRO 7.3 apresentamos os resultados obtidos para estes dois factores e para os três modelos considerados. Utilizamos uma representação gráfica conjunta nas figs.7.10 e 7.11.

Em relação ao factor de transmissão e para qualquer dos modelos utilizados concluímos:

- a) este factor é, a partir dos primeiros valores, uma função crescente com o período, atingindo, para períodos iguais ou superiores a 10.5s, valores maiores que a unidade;
- b) atingindo o seu valor máximo (1.4,1.5) para, aproximadamente, 18 s e começando a decrescer;
- c) para a partir dos 42 s os seus valores passarem a ser inferiores à unidade;
- d) no limite este factor tenderá para 0.90.

QUADRO 7.3

PER.	FACTORES					
	TRANSM.			REFL.		
	MODELOS			MODELOS		
	A	B	C	A	B	C
1.5	.009	.013	.007	.789	.792	.770
3.0	.008	.005	.010	.728	.730	.735
4.5	.313	.319	.249	.062	.195	.167
6.0	.451	.443	.451	.050	.084	.075
7.5	.686	.688	.712	.035	.057	.053
9.0	.874	.931	.918	.032	.039	.091
10.5	1.060	1.115	1.058	.012	.009	.084
12.0	1.241	1.240	1.174	.011	.011	.103
13.5	1.374	1.323	1.256	.007	.026	.103
15.0	1.447	1.373	1.300	.010	.024	.088
16.5	1.472	1.396	1.328	.006	.021	.080
18.0	1.460	1.404	1.361	.005	.010	.085
19.5	1.432	1.391	1.344	.007	.009	.073
21.0	1.384	1.358	1.326	.005	.008	.066
22.5	1.315	1.322	1.292	.015	.005	.064
24.0	1.272	1.291	1.273	.010	.009	.057
25.5	1.233	1.257	1.248	.008	.015	.052
27.0	1.192	1.217	1.209	.001	.015	.046
28.5	1.159	1.187	1.185	.004	.015	.049
30.0	1.126	1.151	1.152	.014	.013	.040
33.0	1.072	1.104	1.108	.016	.014	.029
36.0	1.032	1.063	1.072	.008	.011	.022
39.0	1.003	1.031	1.039	.006	.015	.020
42.0	.978	1.002	1.010	.008	.023	.020
45.0	.963	.985	.993	.013	.021	.019
48.0	.953	.974	.982	.013	.015	.017
51.0	.944	.963	.969	.014	.016	.020
54.0	.940	.954	.961	.010	.018	.020
57.0	.936	.951	.956	.010	.015	.021
60.0	.936	.946	.951	.016	.009	.019

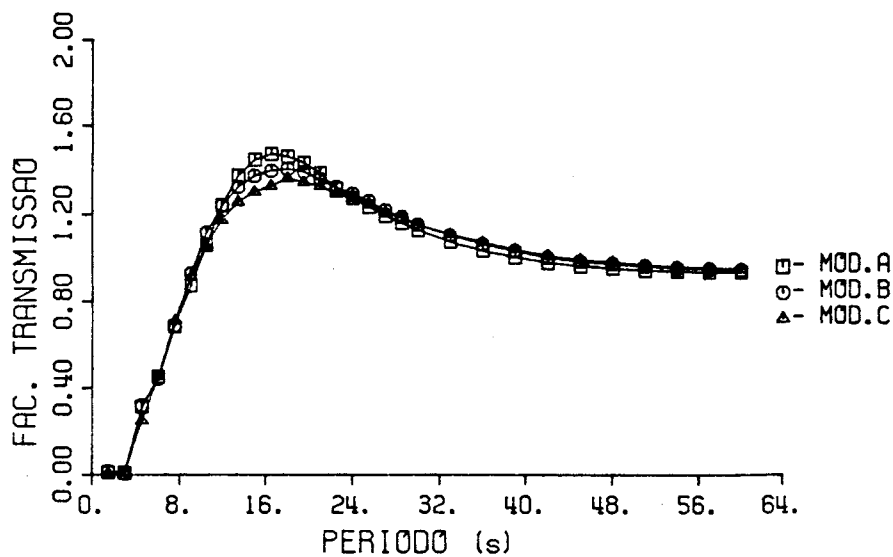


Fig.-7.10 Representação do factor de transmissão para os modelos A,B e C

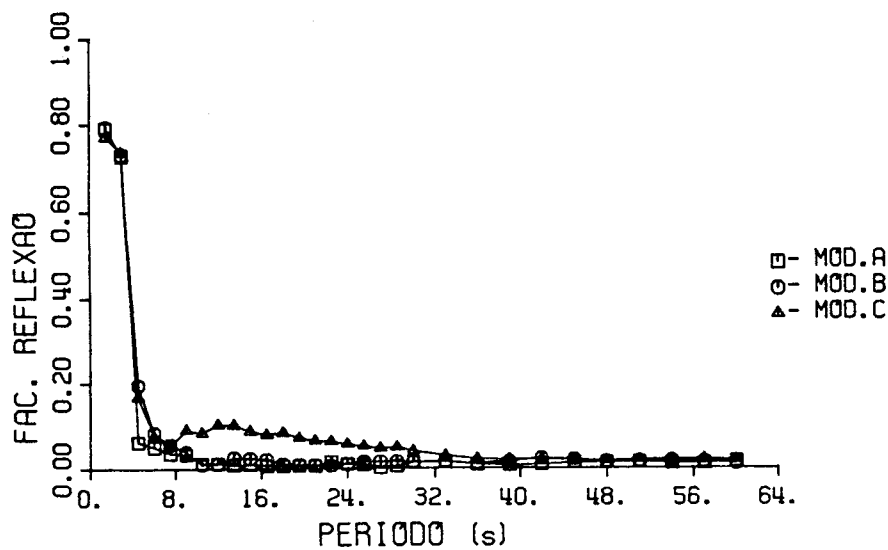


Fig.-7.11 Representação do factor de reflexão para os modelos A,B e C

Uma conclusão importante é o facto do factor de

transmissão variar com o período. É uma prática corrente nos estudos sismográficos sobre a atenuação do modo fundamental oceânico de Rayleigh, supor-se que os coeficientes de transmissão são iguais para todos os períodos, o que não é correcto. Como se viu os valores são bem distintos para períodos diferentes.

Os nossos resultados estão no essencial em acordo com os apresentados por McGarr (1969), embora este autor se tenha limitado ao estudo no intervalo de períodos entre 14 e 25s. No trabalho que acabámos de referir, para a margem ocidental da costa americana adjacente à Califórnia, e para alguns modelos ensaiados, o factor de transmissão encontrado atingiu, no intervalo considerado, valores muito perto de 2.

Em Badal e Seron (1987), as conclusões tiradas para a propagação de ondas de Love coincidem com os nossos resultados para as ondas de Rayleigh, embora existam duas diferenças a apontar: para grandes períodos, nas ondas de Love, o factor de transmissão tende para 1; o valor máximo deste factor para as ondas de Love é superior (cerca de 1.7) ao valor por nós encontrado para as ondas de Rayleigh.

Quanto ao factor de reflexão, ele varia complementarmente com o factor de transmissão, havendo, no entanto a destacar:

a) os seus valores decrescerem com o período, excepto no MODELO C onde possui um máximo relativo no intervalo 12.0s a 13.5s;

b) atinge os seus valores máximos (absolutos) na região dos curtos períodos, decrescendo abruptamente de tal forma que para 6.0s já possui valores inferiores a 0.1.

Não há diferenças significativas nos resultados obtidos para estas grandezas entre os três modelos considerados. Contudo, podemos concluir que o declive mais acentuado da margem continental (MODELO C) implicará maiores valores do factor de reflexão, menores do factor de transmissão, o que é

notório no intervalo de 8 s a 24 s.

7.2.5. Repartição de energia

Os QUADROS 7.4, 7.5 e 7.6 mostram os valores da distribuição de energia das ondas de Rayleigh, reflectidas e transmitidas, que se propagam através do Oceano perpendicularmente incidentes à zona de transição, para os MODELOS A, B e C, respectivamente. Os cálculos foram desenvolvidos com as expressões (6.1.27) e (6.1.18) para os modos reais e o seu resultado exprime-se na forma de percentagem.

Pelos valores totais provamos a conservação da energia, o que era de esperar pois os modelos propostos foram considerados perfeitamente elásticos não existindo qualquer termo de dissipação de energia na equação de movimento. As pequenas discrepâncias que se notam nos valores numéricos correspondem, por um lado, às truncaturas numéricas utilizadas no transporte de resultados e, por outro, ao desprezarmos os valores dos modos superiores ao 3^o modo superior.

QUADRO 7.4

PER.	ENERGIA (MODELO A)					
	REF.	TRANSMITIDA				
	TOTAL	TOTAL	FUND. MODO	1º MODO	2º MODO	3º MODO
1.5	.99138	.00862	.00001	.00005	.00000	.00000
3.0	.94551	.05448	.00098	.02329	.00081	.00162
4.5	.03874	.96125	.93915	.00898	.00000	.00001
6.0	.01263	.98736	.96862	.00500	.00000	.00001
7.5	.00392	.99607	.95780	.02005	.00104	.00071
9.0	.00221	.99778	.95731	.00021	.02288	.00742
10.5	.00067	.99933	.95410	.00100	.02427	.01359
12.0	.00016	.99983	.94147	.00302	.03029	.01569
13.5	.00030	.99970	.93057	.00614	.03303	.01399
15.0	.00026	.99973	.92523	.00976	.03252	.01171
16.5	.00015	.99985	.92780	.01242	.02695	.00950
18.0	.00010	.99989	.94093	.01241	.01727	.00628
19.5	.00013	.99986	.95419	.01088	.01021	.00393
21.0	.00011	.99988	.96773	.00824	.00552	.00235
22.5	.00032	.99967	.97035	.00933	.00486	.00231
24.0	.00029	.99971	.98141	.00568	.00257	.00145
25.5	.00067	.99932	.98878	.00295	.00123	.00082
27.0	.00022	.99977	.99368	.00145	.00058	.00045
28.5	.00066	.99934	.99528	.00064	.00024	.00021
30.0	.00050	.99950	.99626	.00055	.00019	.00018
33.0	.00032	.99968	.99556	.00071	.00025	.00028
36.0	.00034	.99966	.99415	.00093	.00036	.00042
39.0	.00059	.99941	.99233	.00102	.00042	.00053
42.0	.00076	.99923	.99143	.00096	.00043	.00057
45.0	.00011	.99886	.99106	.00085	.00041	.00059
48.0	.00083	.99917	.99142	.00069	.00037	.00054
51.0	.00109	.99891	.99185	.00051	.00030	.00046
54.0	.00272	.99728	.99030	.00033	.00024	.00035
57.0	.00447	.99552	.98909	.00019	.00016	.00031
60.0	.00357	.99642	.99126	.00006	.00008	.00021

QUADRO 7.5

PER.	<u>ENERGIA (MODELO B)</u>					
	REF.	TRANSMITIDA				
	TOTAL	TOTAL	FUND. MODO	1º MODO	2º MODO	3º MODO
1.5	.98005	.01995	.00002	.00005	.00000	.00001
3.0	.94441	.05559	.00162	.02005	.00519	.00556
4.5	.07259	.92740	.89513	.00155	.00000	.00001
6.0	.01489	.98510	.92374	.04038	.00000	.00002
7.5	.00398	.99602	.89020	.06760	.00406	.00178
9.0	.00539	.99461	.86060	.00069	.06707	.02133
10.5	.00012	.99879	.85019	.00195	.05644	.03747
12.0	.00081	.99918	.84783	.00451	.05469	.03616
13.5	.00077	.99922	.85846	.00787	.05045	.02601
15.0	.00097	.99903	.87211	.01151	.04435	.01855
16.5	.00038	.99961	.89465	.01354	.03342	.01299
18.0	.00399	.99960	.92289	.01305	.02005	.00773
19.5	.00106	.99893	.94455	.01127	.01118	.00443
21.0	.00110	.99890	.96435	.00832	.05676	.00242
22.5	.00093	.99907	.97637	.00546	.00294	.00145
24.0	.00159	.99840	.98707	.00264	.00118	.00067
25.5	.00146	.99854	.99370	.00090	.00035	.00022
27.0	.00055	.99945	.99662	.00027	.00012	.00010
28.5	.00127	.99872	.99629	.00011	.00006	.00006
30.0	.00128	.99871	.99587	.00027	.00012	.00015
33.0	.00077	.99923	.99352	.00079	.00034	.00039
36.0	.00118	.99882	.99012	.00112	.00050	.00055
39.0	.00308	.99691	.98696	.00119	.00054	.00058
42.0	.00468	.99532	.98501	.00110	.00051	.00055
45.0	.00365	.99635	.98593	.00095	.00045	.00054
48.0	.00278	.99722	.98701	.00077	.00039	.00052
51.0	.00326	.99674	.98758	.00055	.00030	.00042
54.0	.00580	.99420	.98565	.00036	.00022	.00033
57.0	.00368	.99632	.98886	.00022	.00015	.00028
60.0	.01441	.98558	.97960	.00009	.00008	.00025

QUADRO 7.6

PER.	ENERGIA (MODELO C)					
	REF.	TRANSMITIDA				
	TOTAL	TOTAL	FUND. MODO	1º MODO	2º MODO	3º MODO
1.5	.99659	.00340	.00000	.00000	.00000	.00000
3.0	.94357	.05642	.00383	.01741	.00662	.00024
4.5	.15297	.84703	.63069	.02961	.00000	.00008
6.0	.02904	.97096	.71429	.12465	.00001	.00014
7.5	.03074	.96925	.71175	.13259	.00777	.00699
9.0	.02678	.97322	.73680	.00057	.09925	.04369
10.5	.02902	.97098	.74946	.00141	.07567	.06479
12.0	.04024	.95975	.76002	.00380	.07002	.05678
13.5	.02051	.97948	.79945	.00731	.06598	.04016
15.0	.02640	.97360	.81905	.01099	.05748	.02686
16.5	.01595	.98405	.85736	.01366	.04347	.01833
18.0	.00844	.99156	.89770	.01361	.02676	.01119
19.5	.00976	.99024	.92479	.01170	.01504	.00647
21.0	.00566	.99434	.95232	.00871	.00784	.00368
22.5	.00481	.99519	.96723	.00583	.00423	.00233
24.0	.00893	.99107	.97659	.00300	.00190	.00125
25.5	.00874	.99126	.98461	.00126	.00079	.00062
27.0	.00535	.99465	.99042	.00062	.00042	.00040
28.5	.00427	.99572	.99248	.00040	.00025	.00026
30.0	.00693	.99306	.98986	.00049	.00023	.00025
33.0	.00576	.99424	.98919	.00089	.00034	.00035
36.0	.00514	.99486	.98737	.00118	.00047	.00047
39.0	.00714	.99285	.98388	.00128	.00054	.00054
42.0	.01037	.98962	.97968	.00122	.00054	.00055
45.0	.00494	.99506	.98522	.00108	.00051	.00056
48.0	.00338	.99662	.98720	.00086	.00042	.00053
51.0	.00262	.99737	.98905	.00066	.00035	.00047
54.0	.00331	.99669	.98891	.00044	.00025	.00036
57.0	.00282	.99718	.99050	.00028	.00019	.00028
60.0	.00642	.99357	.98831	.00011	.00009	.00023

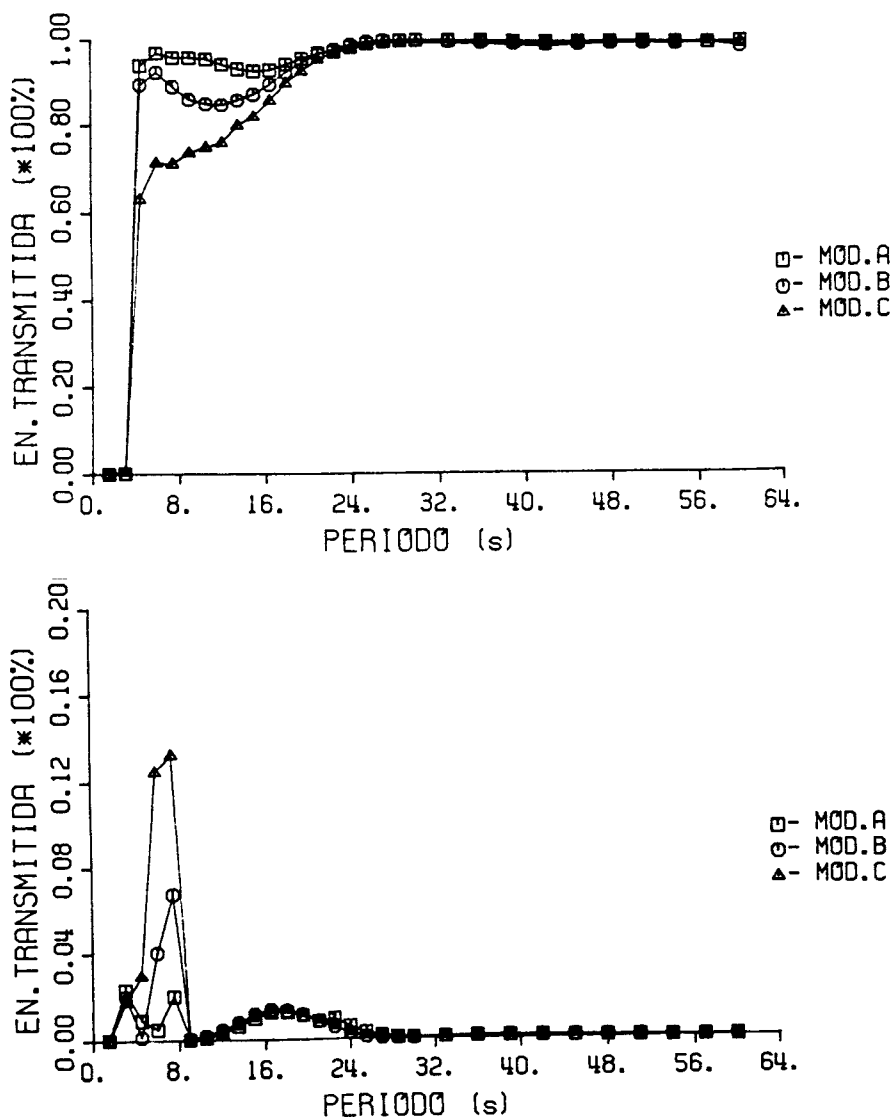


Fig.7.12 Energia transmitida (MODELOS A,B,C) para o modo fundamental e primeiro modo superior

Uma primeira observação a mencionar relaciona-se com o facto de que muito pouca energia é reflectida pela margem continental, para os três modelos, excepto para curtos períodos (1.5 e 3 s). Este efeito deve-se, talvez, à malha utilizada no estudo: uma malha mais apertada implicaria resultados mais correctos nesta gama de períodos

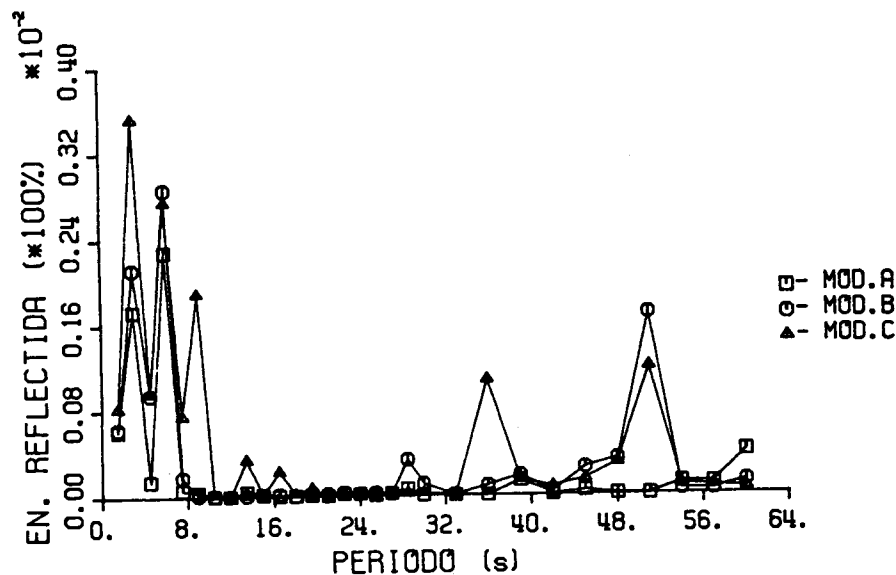
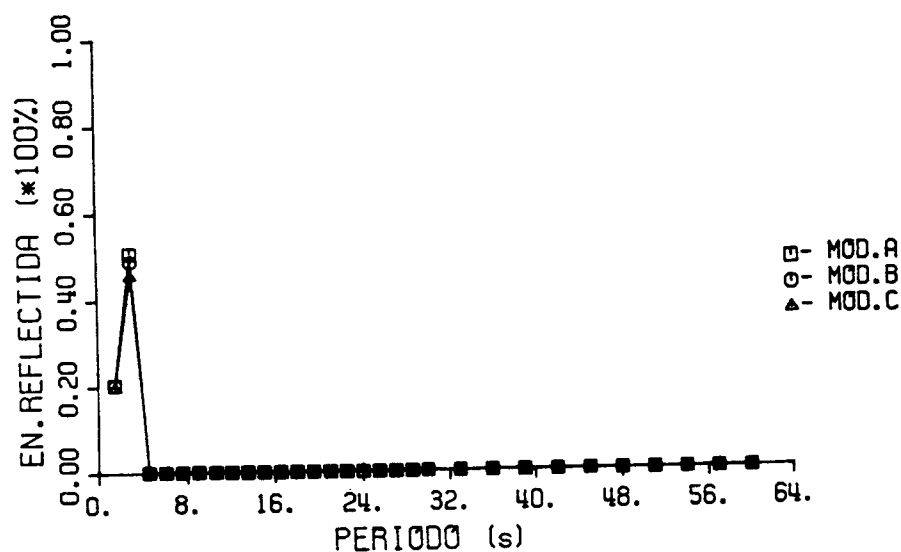


Fig.7.13 - Energia reflectida (MODELOS A,B,C) para o modo fundamental e primeiro modo superior .

A energia é praticamente toda transmitida: no MODELO A e B é transmitida 99% para períodos superiores a 7.5s ; o mesmo se passa, a partir dos 18 s, no MODELO C. Esta energia encontra-se concentrada no modo fundamental.

Verifica-se em determinados intervalos do período uma perda da percentagem da energia total transmitida pelo modo fundamental para os modos superiores (figs.7.12 e 7.13). No MODELO A, no intervalo entre 7.5s e 21 s, há inicialmente uma perda para o primeiro modo superior, passando logo depois para o segundo e terceiros modos. No MODELO B passa-se o mesmo no intervalo entre 7.5s e 24 s, havendo uma transferência para o segundo e terceiro modo superior entre os 10.5s e os 18 s. No MODELO C a energia transmitida pelo modo fundamental cresce com o período, possuindo no intervalo entre 6 s e 7.5s uma percentagem bastante elevada, comparado com os outros modelos, a ser transportada pelo primeiro modo superior. Ainda neste modelo no intervalo entre 9 s e 18 s há uma perda de energia transportada pelo primeiro modo em favor do segundo e terceiro.

Este efeito acabado de descrever poder ter consequências na determinação da velocidade de fase do modo fundamental no continente já que este pode sofrer uma relativa contaminação modal à custa dos modos superiores, sobretudo do primeiro e segundo. Interessa sublinhar o facto de que ao variar a geometria do modelo (diminuição da largura da margem e, consequentemente, aumento do seu declive) mantendo as mesmas características estruturais das zonas oceânicas e continentais, a perda de energia transmitida pelo modo fundamental, sua transferência para os modos superiores, aumenta ligeiramente, sendo mais saliente para o caso de declive mais acentuado.

Também no que diz respeito à partição de energia, os resultados por nós obtidos, sobre a percentagem de energia transmitida no percurso Oceano-Continente, podem considerar-se de acordo com os de McGarr (1969) onde se afirma "*a propagação é altamente eficiente para, períodos superiores a 10.5s*", isto é, a energia total é praticamente a energia transmitida.

7.2.6. Conclusões

À medida que aumenta o período do modo fundamental de Rayleigh da onda incidente proveniente do Oceano, maior é a profundidade alcançada. Para períodos superiores a 12 s há uma amplificação da amplitude do deslocamento horizontal no sentido oceano-continente. Para períodos superiores a 12 s o deslocamento vertical aumenta, invertendo-se a situação a partir dos 39 s, ou seja, a amplitude do deslocamento superficial volta a diminuir, embora menos acentuadamente, no sentido oceano-continente.

A velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh na margem continental é ligeiramente superior à velocidade de fase média para o mesmo período, a partir dos 9 s. A aproximação entre a velocidade de fase o valor da velocidade média possui uma variação relativa máxima de 4.7% para o período de 9 s, decrescendo esta variação à medida que o período aumenta: 0.3% para 60 s. A velocidade de fase média é uma boa aproximação para o cálculo da velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh na zona não homogénea.

O factor de transmissão varia com o período, atingindo o seu valor máximo (perto de 1.5) no intervalo compreendido entre 15 s e 21 s. Para o factor de reflexão podemos concluir que o declive mais acentuado da margem continental (MODELO C) implicará maiores valores deste factor, menores do factor de transmissão, o que é notório no intervalo de 8 s a 24 s.

A energia reflectida pela margem continental é praticamente inexistente, toda a energia é transmitida. Esta energia encontra-se concentrada no modo fundamental, contudo, em determinados intervalos do período há uma perda da percentagem da energia total transmitida pelo modo fundamental para os modos superiores. Surge uma relativa contaminação modal à custa dos modos superiores, podendo ter consequências na determinação da velocidade de fase do modo fundamental no

continente.

Não se verificam diferenças apreciáveis entre os três modelos utilizados, a geometria não será um factor importante a condicionar as características da propagação das ondas de Rayleigh através da margem continental, mas, serão os parâmetros físicos que descrevem o meio que influenciarão a propagação.

*

* *

7.3. Propagação segundo a direcção continente-oceano

7.3.1 Introdução

Em 7.2 demos os resultados, e tirámos as conclusões respectivas, para a resposta oferecida pela zona de transicção à propagação de ondas de Rayleigh quando a onda incidente monocromática se dirige do oceano para o continente. Seguidamente expomos os resultados obtidos na resposta da mesma zona quando a onda incidente se dirige do continente para o oceano, o sentido de propagação da onda é inverso. Os modelos utilizados para simular a margem continental são exactamente os os mesmos anteriormente utilizados.

Como nos debruçamos sobre os mesmos parâmetros físicos (deslocamentos, velocidade de fase, energia, factores de transmissão e reflexão) limitar-nos-emos a fornecer os resultados e a extrair as conclusões que estes nos impõem, abstermo-nos de quaisquer comparações com as conclusões do ponto anterior. Estas serão feitas em 7.4.

7.3.2. Deslocamento superficial

Nas figs.7.14, 7.15 e 7.16 estão representados, para o Modelo A e para todos os períodos estudados, os deslocamentos horizontais, verticais, em módulo, e a razão entre estes deslocamentos, respectivamente.

Uma primeira observação prende-se com o comportamento do módulo do deslocamento horizontal à superfície em função da distância no sentido continente-oceano: exceptuando os dois primeiros períodos (1.5 e 3 s) este deslocamento cresce para os valores do período de excitação até 10.5s; a partir dos 12 s inverte-se esta variação, sofrendo, contudo, pequenas oscilações.

Uma segunda observação diz respeito ao comportamento do módulo do deslocamento vertical à superfície em função da distância: exceptuando os dois primeiros períodos (1.5 e 3 s) este deslocamento cresce para os valores do período de excitação até 7.5s; no intervalo entre os 9 s e os 39 s inverte-se esta variação, passa a existir uma diminuição com a distância; para períodos superiores a 42 s assistimos de novo a um crescimento, embora relativamente pouco acentuado, do deslocamento vertical.

Uma terceira conclusão relaciona-se com o comportamento da razão entre os módulos do deslocamento superficial horizontal e vertical com a distância (fig.7.16): para períodos superiores a 22.5s o módulo do deslocamento horizontal é sempre inferior ao seu homónimo vertical na zona de transição; para períodos inferiores a 22.5s, e a partir de uma distância correspondente a, aproximadamente, metade da zona de transição, o módulo do deslocamento vertical é sempre superior ao seu homónimo horizontal .

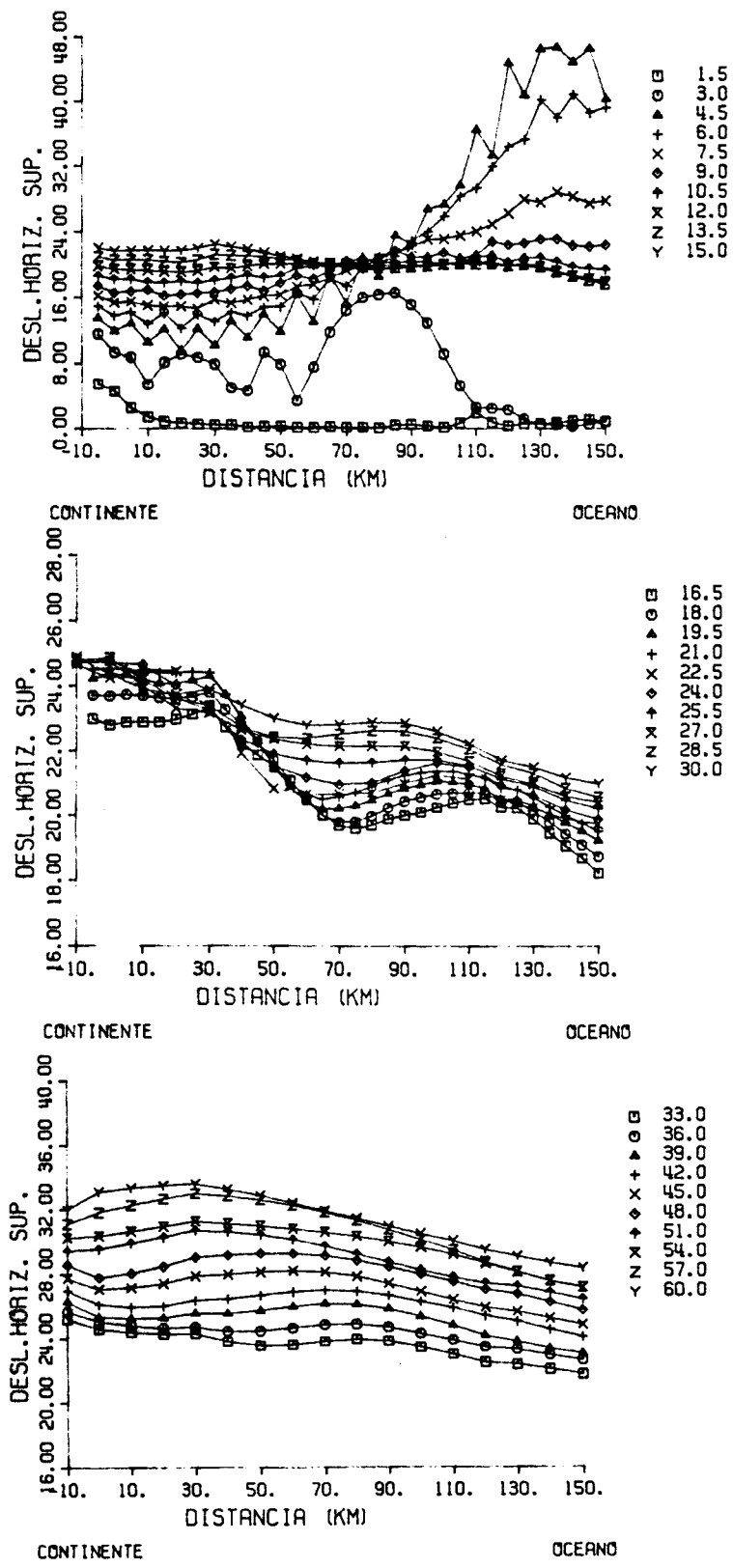


Fig.7.14- Modelo A: módulo do deslocamento horizontal para todos os períodos

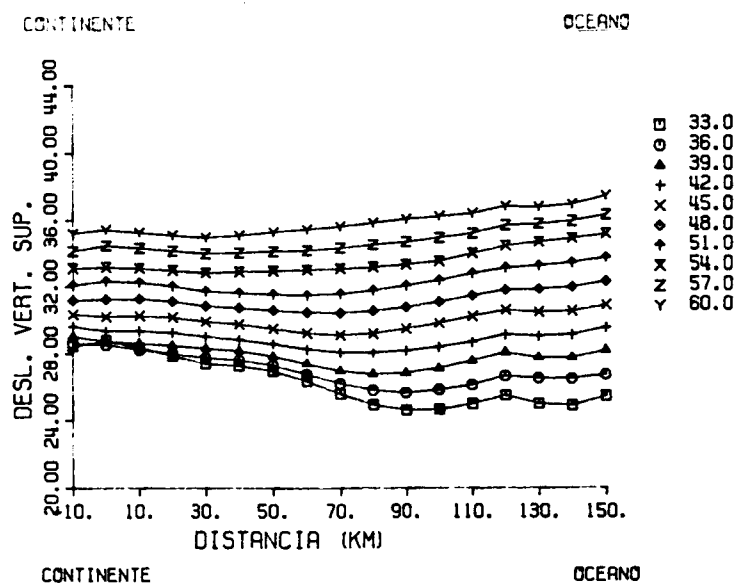
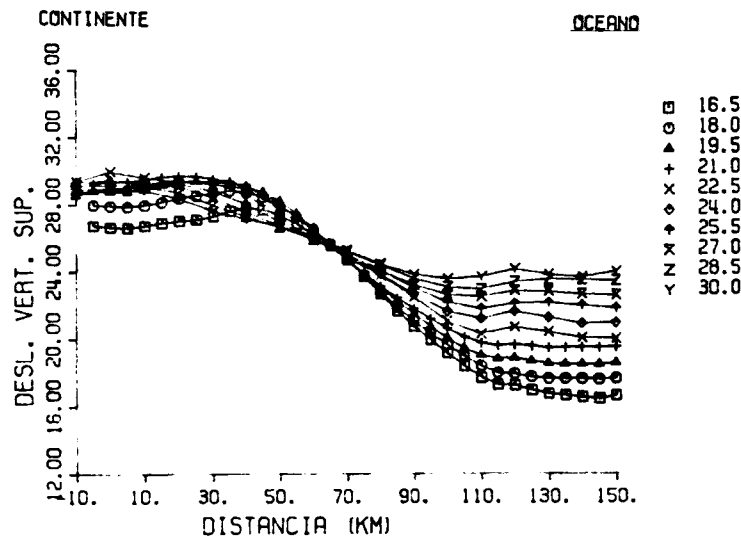
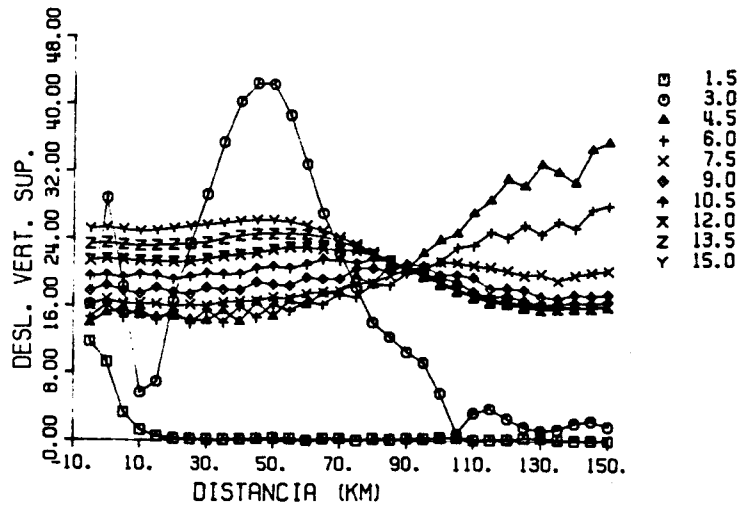


Fig.7.15 - Modelo A: módulo do deslocamento vertical para todos os períodos

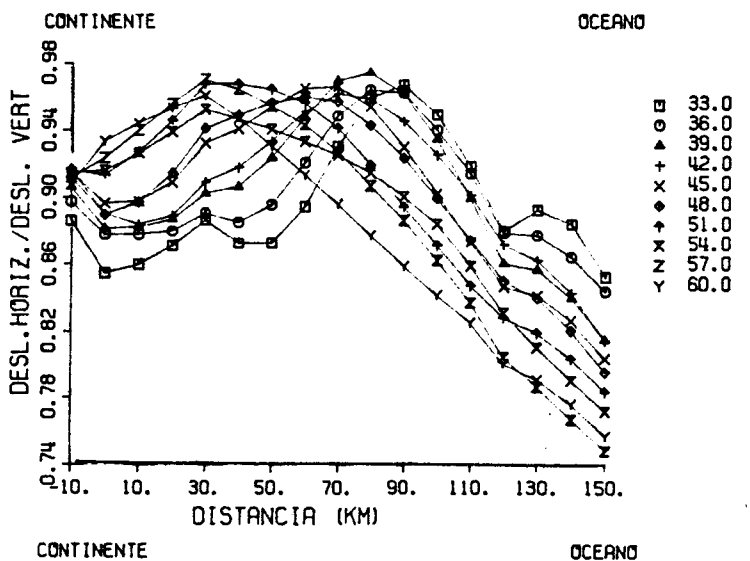
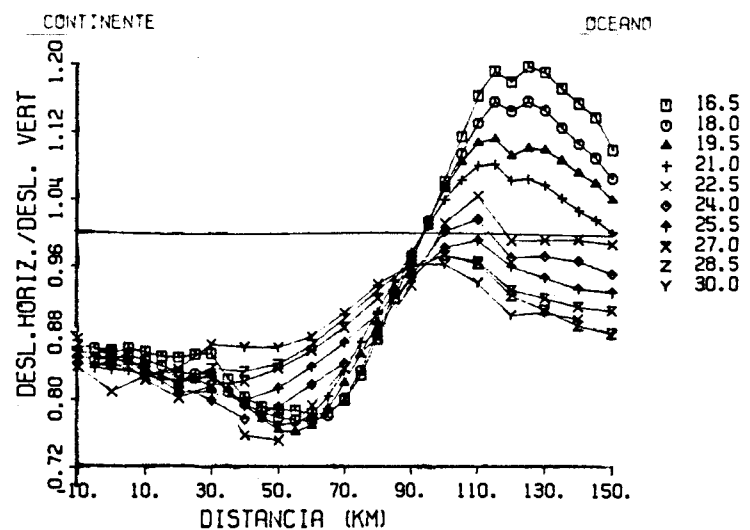
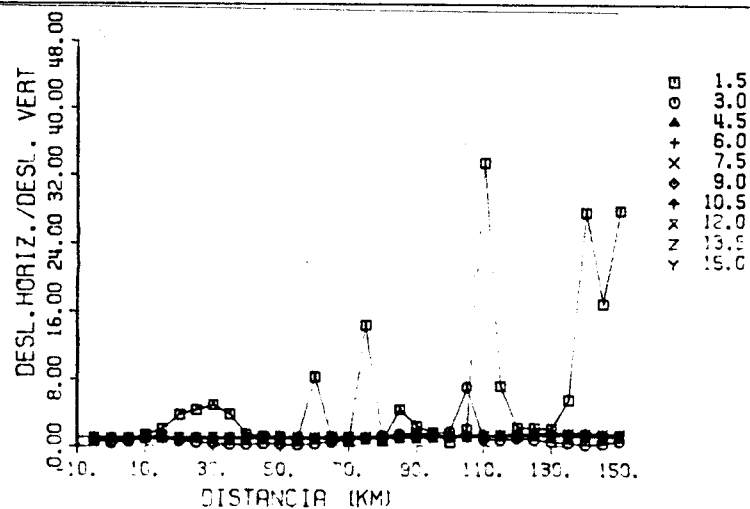


Fig.7.16- Modelo A: razão entre o módulo do deslocamento horizontal e o módulo do deslocamento vertical para todos os períodos.

7.3.3. Velocidade de fase na margem continental

No QUADRO 7.7 encontram-se os resultados da velocidade de fase na margem continental utilizando o método indicado em 7.2.3. Da sua leitura retiramos:

a) para os três modelos a velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh é ligeiramente superior à velocidade de fase média para o mesmo período, excepto para os três primeiros períodos considerados;

b) para os três modelos a aproximação entre a velocidade de fase o valor da velocidade média possui uma variação relativa máxima de 4.8% para o período de 9 s, decrescendo, na generalidade, à medida que o período aumenta: 0.2% para 60 s.

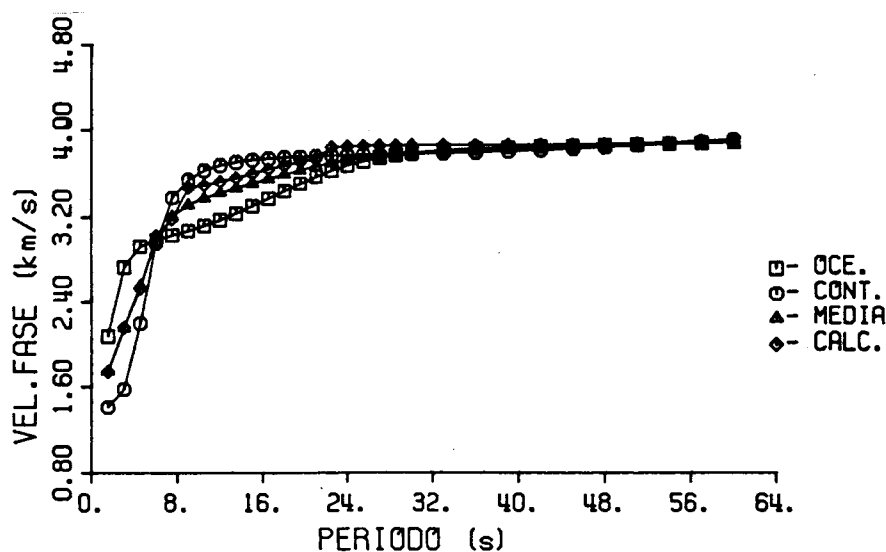


Fig.7.17- Curvas de dispersão dos modos fundamentais de Rayleigh para as diferentes zonas no Modelo A.

A boa concordância entre os valores das velocidades de fase de propagação do modo fundamental de Rayleigh, na zona de transição para os três modelos, e a velocidade de fase média continente-oceano levam-nos a concluir que esta é uma boa

aproximação para o cálculo daquela grandeza.

QUADRO 7.7

PER (s)	V.F.C km/s	V.F.O km/s	V.F.M km/s	Velocidade de Fase zona irregular (km/s)					
				A	VR	B	VR	C	VR
1.5	2.079	1.413	1.746	1.743	.002	1.754	.004	1.737	.005
3.0	2.734	1.579	2.157	2.160	.001	2.154	.001	2.142	.007
4.5	2.930	2.199	2.565	2.534	.012	2.623	.023	2.567	.001
6.0	2.994	2.961	2.977	3.031	.018	2.857	.040	2.998	.007
7.5	3.036	3.379	3.207	3.183	.008	3.063	.045	3.356	.044
9.0	3.077	3.546	3.312	3.474	.049	3.472	.048	3.464	.046
10.5	3.122	3.629	3.375	3.497	.036	3.488	.034	3.475	.030
12.0	3.174	3.675	3.425	3.528	.030	3.515	.026	3.501	.022
13.5	3.233	3.704	3.469	3.561	.027	3.544	.022	3.527	.017
15.0	3.300	3.723	3.511	3.601	.025	3.585	.021	3.570	.017
16.5	3.370	3.736	3.553	3.639	.024	3.624	.020	3.613	.017
18.0	3.441	3.745	3.593	3.671	.022	3.654	.017	3.644	.014
19.5	3.509	3.751	3.630	3.702	.020	3.689	.016	3.682	.014
21.0	3.572	3.756	3.664	3.729	.018	3.718	.015	3.716	.014
22.5	3.626	3.760	3.693	3.836	.039	3.747	.015	3.750	.016
24.0	3.671	3.763	3.717	3.843	.034	3.760	.011	3.763	.012
25.5	3.708	3.766	3.737	3.846	.029	3.771	.009	3.776	.010
27.0	3.738	3.768	3.753	3.850	.026	3.791	.010	3.800	.013
28.5	3.762	3.771	3.766	3.850	.022	3.799	.009	3.810	.012
30.0	3.780	3.774	3.777	3.854	.020	3.805	.007	3.819	.011
33.0	3.807	3.780	3.793	3.856	.016	3.811	.005	3.826	.009
36.0	3.824	3.788	3.806	3.856	.013	3.817	.003	3.831	.007
39.0	3.835	3.797	3.816	3.858	.011	3.828	.003	3.846	.008
42.0	3.843	3.808	3.825	3.861	.009	3.839	.003	3.862	.010
45.0	3.849	3.821	3.835	3.863	.007	3.844	.002	3.868	.009
48.0	3.855	3.835	3.845	3.865	.005	3.847	.001	3.868	.006
51.0	3.861	3.852	3.856	3.872	.004	3.859	.001	3.883	.007
54.0	3.867	3.870	3.868	3.879	.003	3.871	.001	3.894	.007
57.0	3.874	3.887	3.881	3.895	.004	3.880	.000	3.904	.006
60.0	3.882	3.908	3.895	3.908	.003	3.886	.002	3.908	.003

Legenda:

- V.F.O.- Velocidade de Fase na Zona Oceanica
- V.F.C.- Velocidade de Fase na Zona Continental
- V.F.M.- Velocidade de Fase média entre as duas zonas
- VR - Variação relativa entre a velocidade de fase da zona irregular e V.F.M.
- A,B,C - modelos de zona de transição

7.3.4. Factores de transmissão e reflexão

No QUADRO 7.8 estão os valores dos factores de transmissão e reflexão, tal como os definimos em 7.2.4. Da observação desta tabela chegamos às seguintes conclusões para o coeficiente de transmissão e para os três modelos tidos em conta:

a) o coeficiente de transmissão tem valores mínimos 1.5s, crescendo rapidamente e atingindo o máximo no período 4.5s;

b) começando a diminuir o seu valor e tomando um mínimo relativo para 16.5 s, crescendo novamente, mas de uma forma mais lenta, no restante intervalo de períodos, acabando por chegar ao valor, aproximado, de 1.06 para 60 s;

c) a partir dos 42 s o valor deste coeficiente é superior à unidade.

As figs.7.18 e 7.19 mostram em relação a qualquer dos factores estudados uma identidade de comportamento para qualquer dos modelos utilizados.

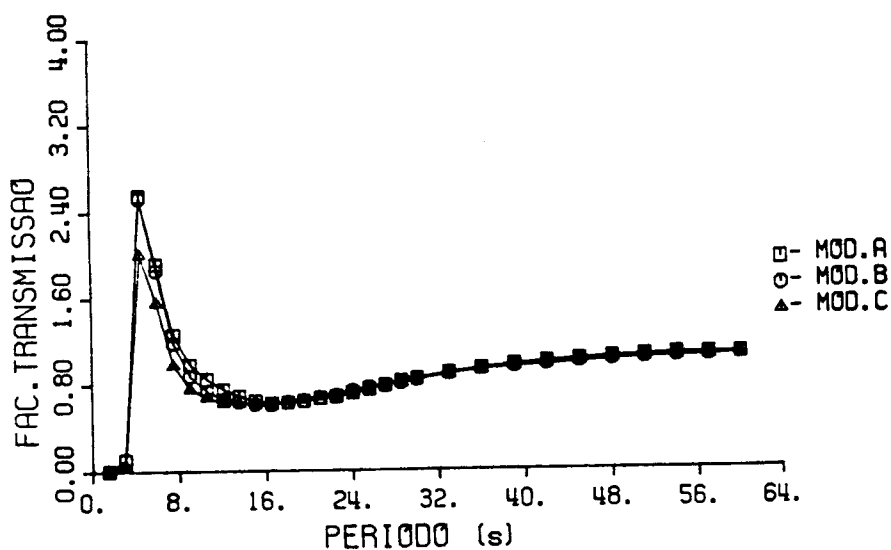


Fig.7.18- Representação do factor de transmissão para os modelos A,B e C

QUADRO 7.8

PER.	FACTORES					
	REF. MODELOS			TRANSM. MODELOS		
	A	B	C	A	B	C
1.5	.866	.848	.830	.002	.007	.003
3.0	.847	.354	.635	.103	.111	.483
4.5	.115	.101	.212	2.548	2.527	2.007
6.0	.110	.089	.074	1.918	1.859	1.559
7.5	.051	.066	.099	1.266	1.184	.978
9.0	.044	.082	.074	.984	.873	.757
10.5	.032	.024	.038	.846	.737	.682
12.0	.015	.005	.041	.749	.662	.624
13.5	.014	.024	.054	.690	.637	.620
15.0	.012	.026	.068	.642	.609	.614
16.5	.005	.017	.065	.621	.606	.619
18.0	.003	.017	.057	.629	.633	.639
19.5	.004	.019	.055	.642	.641	.651
21.0	.004	.022	.046	.666	.671	.682
22.5	.022	.025	.050	.680	.689	.699
24.0	.016	.015	.057	.714	.729	.732
25.5	.011	.009	.066	.748	.763	.761
27.0	.002	.012	.057	.781	.777	.782
28.5	.009	.012	.061	.817	.804	.800
30.0	.013	.006	.059	.839	.831	.829
33.0	.021	.006	.053	.894	.884	.878
36.0	.017	.005	.050	.934	.927	.919
39.0	.013	.008	.039	.971	.951	.941
42.0	.008	.009	.031	.997	.972	.961
45.0	.008	.006	.025	1.018	.994	.983
48.0	.011	.002	.022	1.036	1.014	1.006
51.0	.009	.002	.019	1.050	1.026	1.016
54.0	.005	.001	.017	1.062	1.036	1.028
57.0	.010	.007	.016	1.063	1.044	1.037
60.0	.007	.004	.016	1.063	1.058	1.050

Os resultados obtidos estão no essencial de acordo com os apresentados por McGarr(1969), embora este autor tenha encontrado o máximo do factor de transmissão para valores em torno dos 10 s e o mínimo relativo para valores do período entre os 16 s e os 18 s.

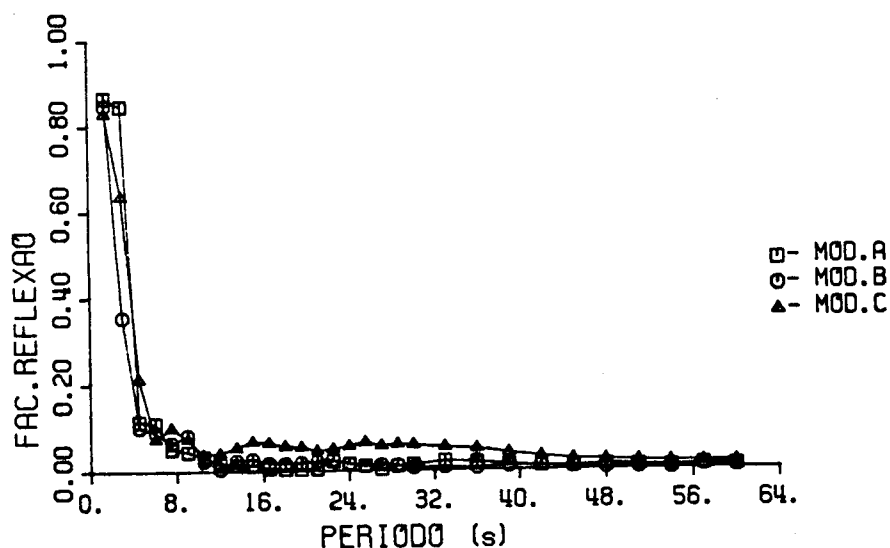


Fig. 7.19- Representação do factor de reflexão para os modelos A,B e C

7.3.5. Repartição de energia

Nos QUADROS 7.9, 7.10 e 7.11 estão colocados os valores calculados para a distribuição de energia das ondas de Rayleigh, reflectidas e transmitidas, que se propagam através do continente incidindo perpendicularmente à zona de transição, para os MODELOS A, B e C, respectivamente. Os resultados estão apresentados na forma de percentagem.

Pelos valores totais provamos a completa conservação da energia. A energia é praticamente toda transmitida: 99% a partir de 4.5s no MODELO A; 99% a partir de 6 s para B; 99% a partir de 21 s no MODELO C.

O modo fundamental é o principal responsável pelo transporte da energia transmitida. Contudo, em determinados intervalos da gama de períodos estudados verifica-se uma perda da percentagem da energia total transportada por este modo a favor dos modos superiores. Assim:

a) no MODELO A, no intervalo entre 4.5s e 27 s, há inicialmente uma perda para o segundo modo superior, passando, a partir dos 15 s para o primeiro modo;

b) no MODELO B o processo é idêntico; há, entre os 6 s e os 27 s, uma perda em que inicialmente, até 13.5s, saem favorecidos o segundo e terceiro modos superiores, enquanto que depois dos 15 s é o primeiro modo a beneficiar dessa transferência;

c) no MODELO C, entre 4.5s e 15 s, a energia transmitida pelo modo fundamental cresce com o período e a energia transportada pelo segundo modo é superior à do primeiro.

Também aqui podem surgir consequências na determinação da velocidade de fase do modo fundamental no oceano já que este sofre uma relativa contaminação modal à custa dos modos superiores, sobretudo do primeiro e segundo. Interessa sublinhar o facto de que ao variar a geometria do modelo (diminuição da largura da margem e, conseqüentemente, aumento do seu declive) mantendo as mesmas características estruturais das zonas oceânicas e continentais, a perda de energia transmitida pelo modo fundamental, sua transferência para os modos superiores, aumenta ligeiramente, sendo mais saliente para o caso de declive mais acentuado (MODELO C).

No que diz respeito há partição de energia no sentido continente-oceano, os resultados obtidos sobre a percentagem de energia transmitida podem considerar-se em completo desacordo com o trabalho de McGarr (1969). Este autor obtem valores inferiores da energia transmitida no intervalo compreendido entre os 11 s e os 32 s, estes valores atingem 75% para períodos entre os 13 s e os 16 s.

QUADRO 7.9

PER.	<u>ENERGIA (MODELO A)</u>					
	REF.	TRANSMITIDA				
	TOTAL	TOTAL	FUND. MODO	1º MODO	2º MODO	3º MODO
1.5	.99371	.00628	.00000	.00000	.00004	.00001
3.0	.92136	.07864	.00022	.00013	.03789	.00004
4.5	.00524	.99476	.97368	.00004	.00051	.00837
6.0	.00265	.99734	.97863	.00022	.00130	.00346
7.5	.00064	.99936	.96095	.00073	.00391	.00865
9.0	.00049	.99950	.95907	.00196	.00752	.01044
10.5	.00031	.99969	.95457	.00437	.01174	.00815
12.0	.00023	.99977	.94123	.00833	.01561	.00345
13.5	.00045	.99955	.93067	.01252	.01522	.00101
15.0	.00041	.99958	.92516	.01695	.01299	.00093
16.5	.00068	.99931	.92746	.01933	.00920	.00133
18.0	.00084	.99916	.94051	.01764	.00506	.00178
19.5	.00157	.99843	.95289	.01498	.00274	.00209
21.0	.00117	.99882	.96711	.01078	.00140	.00180
22.5	.00160	.99840	.96972	.01147	.00133	.00223
24.0	.00123	.99876	.98105	.00680	.00076	.00137
25.5	.00261	.99738	.98745	.00343	.00041	.00068
27.0	.00101	.99898	.99321	.00165	.00023	.00032
28.5	.00095	.99905	.99536	.00078	.00013	.00015
30.0	.00042	.99957	.99643	.00065	.00012	.00012
33.0	.00061	.99939	.99535	.00086	.00022	.00018
36.0	.00039	.99961	.99410	.00115	.00038	.00028
39.0	.00108	.99891	.99183	.00129	.00052	.00038
42.0	.00050	.99949	.99173	.00125	.00057	.00044
45.0	.00059	.99940	.99166	.00112	.00057	.00048
48.0	.00067	.99932	.99169	.00092	.00052	.00048
51.0	.00069	.99930	.99233	.00071	.00044	.00046
54.0	.00146	.99854	.99133	.00049	.00035	.00042
57.0	.00375	.99625	.98972	.00029	.00023	.00038
60.0	.00244	.99755	.99256	.00013	.00013	.00033

QUADR 7.10

PER.	ENERGIA (MODELO B)					
	REF.	TRANSMITIDA				
	TOTAL	TOTAL	FUND. MODO	1º MODO	2º MODO	3º MODO
1.5	.99014	.00985	.00000	.00000	.00006	.00002
3.0	.75772	.24228	.00092	.00026	.06830	.00004
4.5	.01146	.98854	.95064	.00001	.00022	.00472
6.0	.00757	.99242	.93178	.00005	.00049	.00292
7.5	.00350	.99649	.89295	.00055	.00326	.00987
9.0	.00569	.99431	.86360	.00200	.00834	.01533
10.5	.01923	.98077	.83951	.00462	.01397	.01325
12.0	.01426	.98573	.84018	.00864	.01897	.00522
13.5	.00902	.99098	.85564	.01281	.01862	.00139
15.0	.00711	.99289	.86995	.01701	.01532	.00116
16.5	.00476	.99524	.89291	.01948	.01032	.00155
18.0	.00729	.99270	.92065	.01829	.00549	.00197
19.5	.00739	.99261	.94045	.01559	.00296	.00228
21.0	.00423	.99576	.96360	.01106	.00148	.00190
22.5	.00353	.99646	.97612	.00700	.00082	.00139
24.0	.00261	.99739	.98734	.00327	.00035	.00063
25.5	.00656	.99343	.98931	.00107	.00011	.00018
27.0	.00111	.99889	.99629	.00038	.00006	.00009
28.5	.00091	.99909	.99699	.00017	.00003	.00005
30.0	.00024	.99975	.99694	.00037	.00008	.00010
33.0	.00031	.99969	.99397	.00103	.00029	.00027
36.0	.00038	.99961	.99090	.00150	.00055	.00044
39.0	.00093	.99906	.98935	.00161	.00069	.00054
42.0	.00139	.99860	.98827	.00150	.00073	.00059
45.0	.00221	.99778	.98737	.00133	.00071	.00063
48.0	.00238	.99761	.98753	.00107	.00063	.00063
51.0	.00251	.99749	.98839	.00081	.00053	.00056
54.0	.00347	.99652	.98798	.00055	.00041	.00048
57.0	.00589	.99411	.98670	.00034	.00029	.00042
60.0	.00590	.99410	.98813	.00018	.00018	.00038

QUADRO 7.11

PER.	ENERGIA (MODELO C)					
	REF.	TRANSMITIDA				
	TOTAL	TOTAL	FUND. MODO	1º MODO	2º MODO	3º MODO
1.5	.99759	.00240	.00000	.00000	.00000	.00000
3.0	.86229	.13771	.00093	.00041	.00796	.00000
4.5	.14426	.85574	.68108	.00008	.00133	.04895
6.0	.08161	.91839	.74572	.00014	.00109	.00275
7.5	.10670	.89330	.70983	.00062	.00275	.00906
9.0	.05230	.94769	.74725	.00167	.00785	.01760
10.5	.03953	.96046	.76583	.00387	.01467	.01426
12.0	.03583	.96417	.77486	.00723	.01941	.00600
13.5	.02605	.97394	.80900	.01146	.01821	.00142
15.0	.01949	.98051	.83127	.01566	.01585	.00124
16.5	.01468	.98532	.86204	.01812	.01105	.00171
18.0	.01516	.98484	.89807	.01726	.00592	.00217
19.5	.01286	.98714	.92322	.01485	.00336	.00267
21.0	.00666	.99333	.95263	.01088	.00177	.00237
22.5	.00537	.99463	.96761	.00698	.00102	.00185
24.0	.00400	.99600	.98219	.00341	.00049	.00098
25.5	.01413	.98586	.97964	.00125	.00021	.00040
27.0	.00352	.99647	.99218	.00063	.00014	.00025
28.5	.00377	.99623	.99315	.00043	.00010	.00014
30.0	.00276	.99724	.99379	.00064	.00014	.00017
33.0	.00366	.99633	.99093	.00122	.00033	.00028
36.0	.00269	.99730	.98936	.00165	.00057	.00044
39.0	.00339	.99660	.98742	.00177	.00074	.00056
42.0	.00348	.99652	.98637	.00171	.00082	.00064
45.0	.00341	.99658	.98667	.00150	.00080	.00068
48.0	.00311	.99689	.98755	.00120	.00070	.00064
51.0	.00276	.99723	.98894	.00093	.00059	.00058
54.0	.00353	.99647	.98873	.00064	.00045	.00050
57.0	.00525	.99475	.98815	.00042	.00033	.00048
60.0	.00554	.99446	.98924	.00020	.00019	.00037

7.3.6. Conclusões

Para o intervalo de períodos (exceptuando 1.5 e 3 s) inferiores a 10.5s há uma amplificação quer do deslocamento horizontal quer do deslocamento vertical. Para períodos superiores ao valor mencionado há uma diminuição de ambos os deslocamentos, embora o deslocamento vertical volte a aumentar, a partir dos 42 s.

A velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh na margem continental para os três modelos é ligeiramente superior à velocidade de fase média para o mesmo período, excepto para os três primeiros períodos considerados. A aproximação entre a velocidade de fase e o valor da velocidade média possui uma variação relativa máxima de 4.8% para o período de 9 s, decrescendo, na generalidade, à medida que o período aumenta: 0.2% para 60 s. A velocidade de fase média é uma boa aproximação para o cálculo da velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh na zona irregular.

O factor de transmissão varia com o período: tem valor mínimo para 1.5s, crescendo rapidamente e atingindo o máximo no período 4.5s; tem um mínimo relativo para 16.5 s, crescendo novamente, mas de uma forma mais lenta, no restante intervalo de períodos, acabando por chegar ao valor, aproximado, de 1.06 para 60.0s.

A energia reflectida pela margem continental é praticamente inexistente, a energia é toda transmitida. Esta energia encontra-se concentrada no modo fundamental, contudo, em determinados intervalos do período há uma perda da percentagem da energia total transmitida pelo modo fundamental para os modos superiores. Surge uma relativa contaminação modal à custa dos modos superiores, podendo ter consequências na determinação da velocidade de fase do modo fundamental no continente.

Não se verificam diferenças apreciáveis entre os três

modelos utilizados, a geometria não será um factor importante a condicionar as características da propagação das ondas de Rayleigh através da margem continental, no sentido continente-oceano.

*

* *

7.4. Conclusões sobre as duas direcções de propagação

Para finalizar este capítulo vamos de uma forma sucinta, basendo-nos nos resultados apresentados anteriormente comparar a resposta da estrutura de transição ao percurso das ondas de Rayleigh no sentido oceano-contidente, com o caminho inverso, contidente-oceano.

Sobre os resultados obtidos quanto á determinação da velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh e á partição de energia, podemos afirmar haver um comportamento bastante semelhante para a margem continental quando sujeita a uma excitação proveniente quer do oceano quer do continente:

a) a aproximação entre a velocidade de fase e o valor da velocidade média possui uma variação relativa máxima de 4.7% a 4.8% para o período de 9 s, decrescendo, na generalidade, á medida que o período aumenta (0.3% para 60 s); a velocidade de fase média pode considerar-se uma boa aproximação para o cálculo da velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh na zona de transição não homogénea;

b) energia reflectida pela margem continental, em ambos os sentidos, é praticamente inexistente, toda a energia é transmitida; esta energia encontra-se concentrada no modo fundamental, contudo, em determinados intervalos do período há

uma perda da percentagem da energia total transmitida pelo modo fundamental para os modos superiores; existe, portanto, uma relativa contaminação modal à custa dos modos superiores, podendo ter consequências na determinação da velocidade de fase do modo fundamental.

Em relação aos resultados sobre o deslocamento superficial e o factor de transmissão há uma diferença nítida de comportamento para a propagação das ondas de Rayleigh ao longo da margem continental quando provenientes do oceano ou do continente.

Em ambas as direcções verifica-se que o factor de transmissão varia com o período, no entanto, conforme o sentido de propagação da onda o comportamento desta grandeza é distinto (fig.7.20):

a) atinge o valor máximo (perto de 1.5) no intervalo compreendido entre 15 s e 21 s quando a onda percorre o caminho oceano-continente; para o caminho inverso, neste mesmo intervalo, existe um mínimo relativo (com valores inferiores à unidade);

b) para longos períodos, valores superiores a 42 s, este factor é inferior à unidade para o sentido oceano-continente, passando-se exactamente o contrário no sentido inverso.

Na variação do deslocamento superficial com a distância encontramos:

a) para períodos superiores a 12 s, no sentido oceano-continente, há uma amplificação da amplitude quer do deslocamento horizontal quer do deslocamento vertical; no sentido inverso, como será de esperar, para o mesmo intervalo deverá aparecer uma há uma redução de ambos os deslocamentos;

b) a partir dos 39 s, no sentido oceano-continente, a amplitude do deslocamento superficial vertical volta a diminuir de uma forma ligeira, enquanto que no sentido continente-oceano

o deslocamento vertical terá o comportamento inverso, isto é, aumenta a partir dos 42 s.

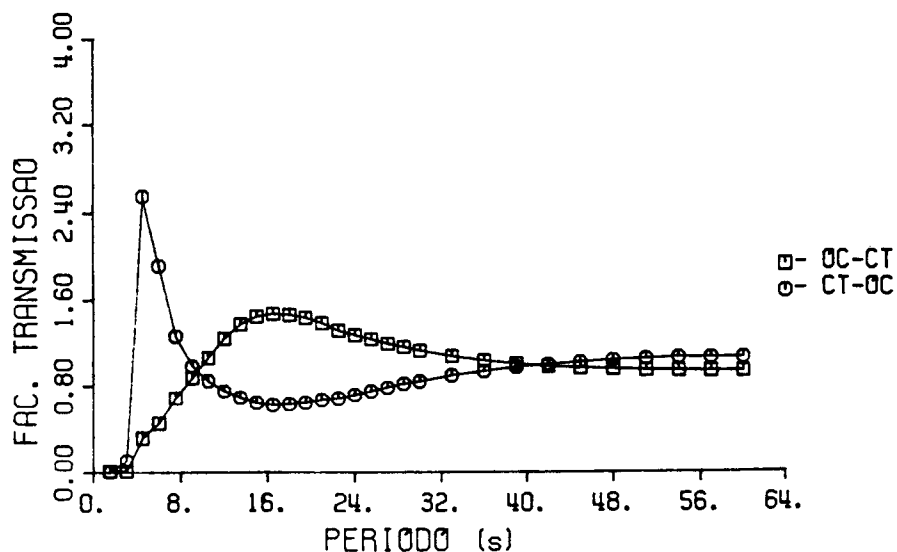


Fig. 7.20 - Factores de transmissão em função do período, MODELO A, para ambas as direcções de propagação

Importa também sublinhar que no estudo de qualquer dos sentidos não se verificam diferenças apreciáveis entre os três modelos utilizados, a geometria não será um factor importante a condicionar as características da propagação das ondas de Rayleigh através da margem continental, mas, antes, os parâmetros físicos que descrevem o meio. Há, contudo, que destacar a influência da geometria no MODELO C. Aqui o declive entre as duas zonas, continental e oceânica, é mais acentuado, e verificou-se existir, em ambos os sentidos, na banda dos baixos períodos maiores valores do factor de reflexão e da percentagem de energia reflectida em relação aos outros modelos. Assim, avançaremos com uma outra conclusão: a onda reflectida (ou transmitida) pela margem continental é afectada

pelo ângulo entre a direcção da onda incidente e a normal à superfície de separação dos diferentes estratos constituintes da zona de transição (esta dependência varia com o período), o que é manifesto quando este ângulo é muito pequeno (MODELO C).

8 - OBSERVAÇÕES DO PERCURSO ATLÂNTICO-PENÍNSULA IBÉRICA, AJUSTE DE UM MODELO

8.1. Observações Experimentais

Os dados experimentais utilizados para este estudo provêm dos registos de duas estações sismográficas pertencentes à WWSN, Porto e Ponta Delgada. A primeira está situada na zona continental e a segunda na zona oceânica.

Os registos de longo período correspondem a cinco sismos de epicentros no Atlântico Norte (QUADRO 8.1) cujas ondas se propagam no sentido oceano-continente. Estudámos unicamente a componente vertical dos registos pois, dentro do objectivo proposto, a informação neles contida era suficiente para extrair os resultados pretendidos.

A selecção dos eventos sísmicos obedeceu fundamentalmente ao critério de manter como direcção de propagação um percurso aproximadamente normal à margem continental. Por outro lado a escolha dos registos teve ainda que se sujeitar à sua qualidade gráfica devido à necessidade de digitalização manual, o que implicou que os registos de vários sismos não pudessem ser utilizados.

QUADRO 8.1

DATA	LAT	LONG	MG	PORTO		P.DELG.	
				DIST (km)	AZIM	DIST (km)	AZIM
16/11/65	31.0	41.5	6.0	3141.6	79.6	1632.5	67.4
21/07/69	35.2	35.9	4.9	2464.7	83.4	957.6	75.9
06/06/72	32.9	39.9	5.6	2907.5	81.8	1397.6	71.6
17/04/74	35.2	35.3	5.1	2414.8	82.8	906.5	74.7
22/04/79	32.9	39.7	5.7	2890.9	81.6	1380.6	71.2

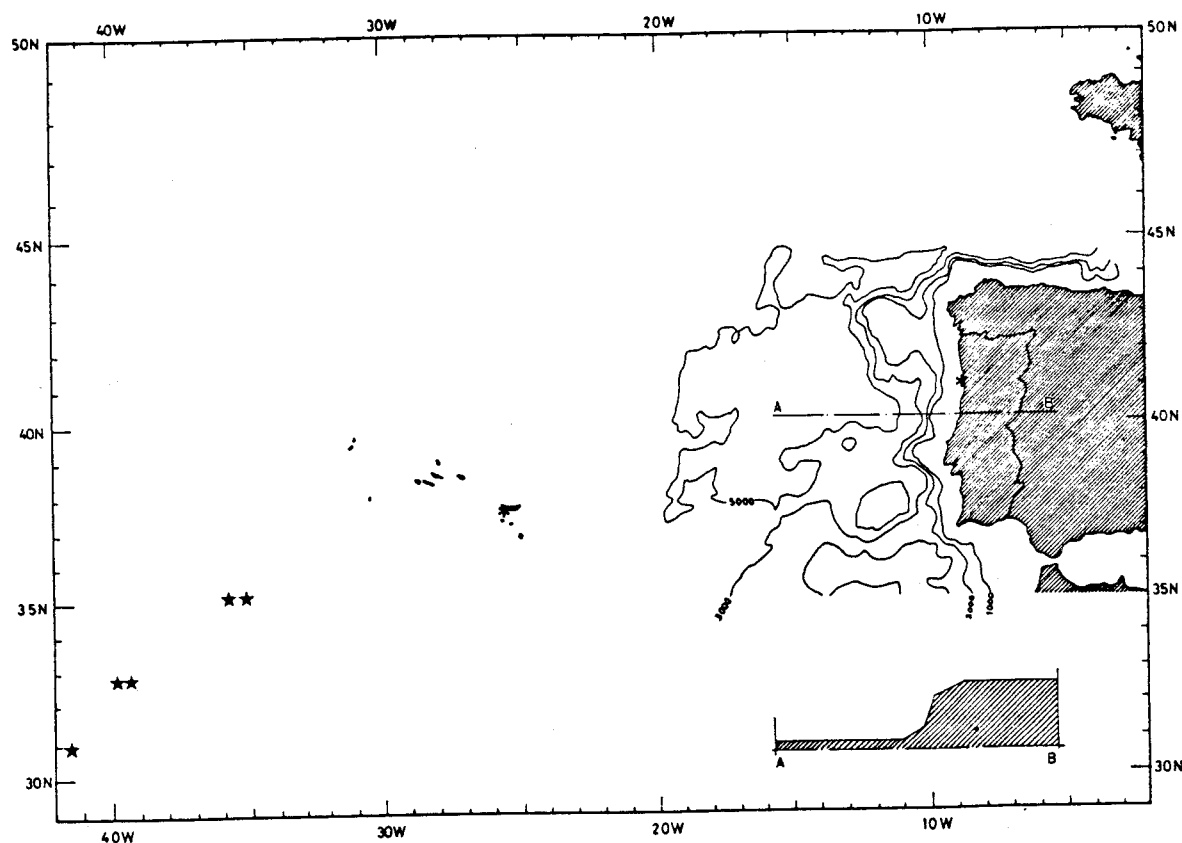


Fig. 8.1-Carta do Atlântico Norte onde estão representados (★) os epicentros e as estações usadas (*).

McGarr(1969) mostrou que as amplitudes das ondas de Ryleigh dependem bastante da trajectória entre o epicentro e a estação. Estes efeito tende a ser mais importante à medida que, primeiro, aumenta a distância ao epicentro, segundo, aumenta a complexidade da estrutura geológica ao longo do trajecto percorrido. O facto de os azimutes dos sismos escolhidos se encontrarem muito próximos e do seu percurso ser sensivelmenmto o mesmo, eliminará em parte esta causa de erro na comparação de dados experimentais entre diferentes estações.

*
* *

8.2. Resultados Obtidos

A comparação das amplitudes das ondas de Rayleigh para cada uma das zonas da margem continental foi feita após a determinação do espectro de amplitudes dos registos dos cinco sismos mencionados, obtidos em cada uma das estações. Os espectros de amplitudes foram calculados para os períodos indicados no QUADRO 5.6. A razão entre amplitudes sofreu uma correcção devido à dispersão geométrica no globo [Ben-Menahem e Singh (1981)], isto é foi multiplicada pelo factor

$$\sqrt{\frac{\sin\Delta_2}{\sin\Delta_1}}$$

em que Δ_2 e Δ_1 correspondem às distâncias epicentrais ao Porto e a Ponta Delgada, respectivamente. Assim para um determinado periodo, T_i , a razão entre as amplitudes A_2 e A_1 , do Porto e de Ponta Delgada, respectivamente, é

$$\left(\frac{A_2}{A_1} \sqrt{\frac{\sin\Delta_2}{\sin\Delta_1}} \right) T_1$$

Os resultados desta grandeza, razão entre a amplitude observada na estação da zona continental e a amplitude registada na estação oceânica, apresentam-se na forma gráfica, fig.8.3. É possível concluir sobre a existência de uma relativa dispersão de valores para todos os períodos o que não impede a observação de uma certa regularidade de comportamento. Este aspecto resulta das seguintes observações:

a) razões relativamente baixas, inferiores a 0.5, para os períodos iniciais (até cerca de 12.0s), crescendo subitamente e

b) atingindo valores superiores a 1 no intervalo entre os 18.0 e os 22.5s;

c) a partir dos 24.0 s verifica-se um decréscimo, acabando por dar-se uma relativa estabilização para os longos períodos; esta estabilização não se verificou em todos os sismos observados.

A nossa atenção deve-se focar nas alíneas a) e b), já que c) corresponde à gama de períodos em que a propagação das ondas de Rayleigh não é essencialmente crustal.

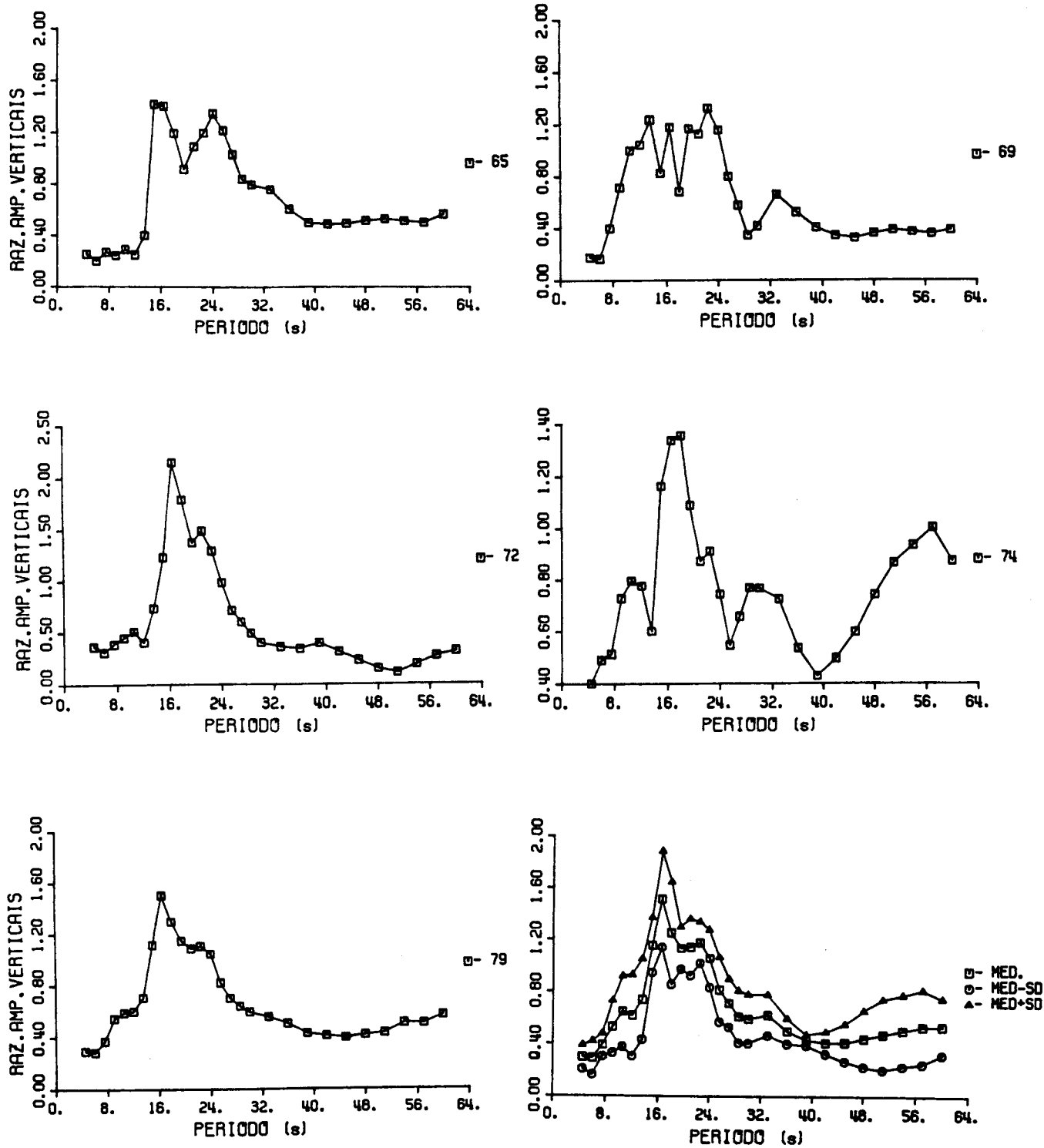


Fig. 8.3- Razão entre a amplitude registada no Porto e a registada em Ponta Delgada em função do período para os 5 eventos do QUADRO 8.1.

8.3. Interpretação dos resultados

Para a interpretação dos resultados anteriores admitiu-se a existência de estruturas bidimensionais, para a zona continental, oceânica e de transição, cujas propriedades físicas e geométricas seriam iguais às utilizadas no Cap. 7. O factor de transmissão é a grandeza teórica equivalente à razão entre amplitudes observadas da componente vertical do deslocamento, os seus valores para diferentes períodos, no percurso oceano-continente, foram expostos no QUADRO 7.3.

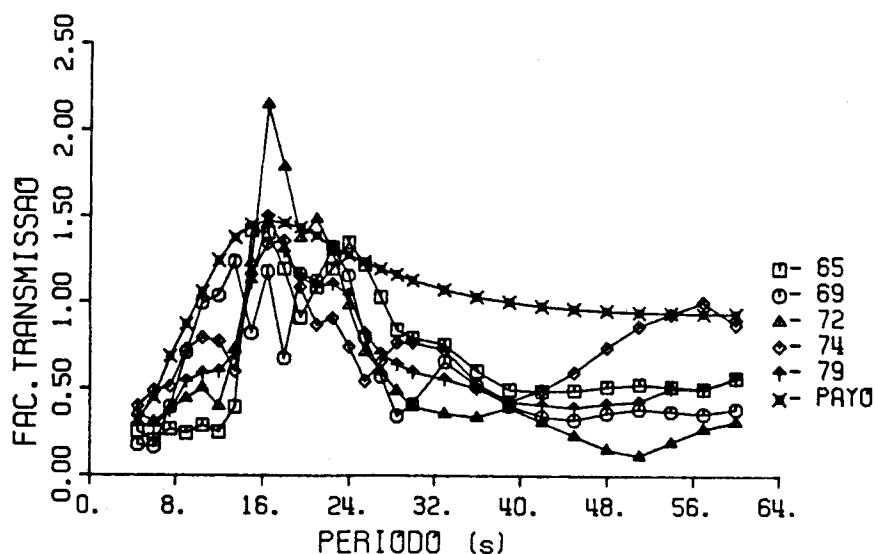


Fig.8.4- *Representação conjunta do factor de transmissão teórico e das razões entre amplitudes verticais para os cinco eventos estudados.*

Como pode apreciar-se, através da fig.8.4, existe uma forte discrepância entre os valores resultantes das observações experimentais e os valores teóricos calculados com base nos modelos mencionados.

Realizámos uma primeira tentativa de ajuste dos valores

teóricos com os valores experimentais fazendo variar alguns dos dados propostos nos modelos de Payo, continental e oceânico, descritos no Cap.5 (QUADRO 5.4 e 5.5). As características físicas e geométricas da zona de transição, ou margem continental, foram determinadas para cada caso tal como já o tínhamos feito no Cap.7: interpolação a passo constante dos valores das diferentes grandezas com base nos valores extremos de grandezas idênticas nas estruturas horizontalmente estratificadas.

Nos modelos referidos utilizámos como único parametro variável a espessura da camada de sedimentos oceânicos não consolidados e que passamos a designar por h. A variação de h assenta numa sugestão de Perez et al.(1978) para o modelo da crosta Atlântica a Oeste da Península Ibérica, onde a espessura desta primeira camada poderia variar entre 1 e 3 km.

QUADRO 8.1
Modelo Oceânico

espessura da camada (km)	velocidade das ondas P (km/s)	velocidade das ondas S (km/s)	densidade (g/cm ³)
3.0	1.52	0.00	1.03
h	2.10	1.50	1.93
5.0	6.40	3.70	2.90
30.0	7.70	4.25	3.30
100.0	7.30	4.10	3.40
...

Tomando h os valores 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0 km, obtemos para o factor de transmissão, no intervalo de períodos entre 4.5s e 60 s, uma representação que consta na fig.8.5.

À medida que a espessura h dos sedimentos não consolidados

aumenta verificamos:

a) uma correspondente diminuição do valor máximo do factor de transmissão, deslocando-se este pico no sentido crescente dos períodos (para $h=2\text{km}$ $T_{\text{max.}}=16.5$ s, para $h=4\text{km}$ $T_{\text{max.}}=21$ s);

b) um possível melhor ajuste da curva teórica aos valores experimentais no intervalo de períodos compreendido entre 4.5s e os 24 s.

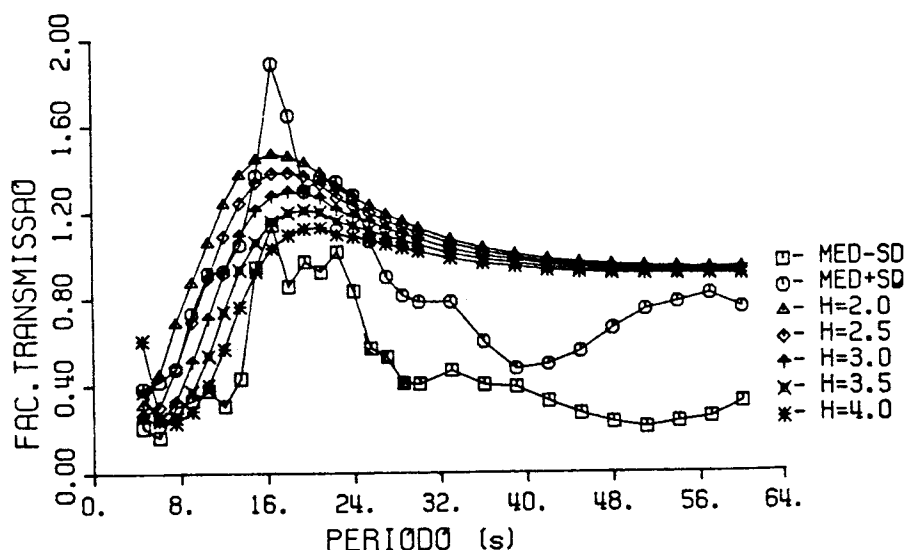


Fig.8.5 Factor de transmissão em função do período para os cinco modelos considerados e valores da dispersão dos resultados experimentais.

Para períodos superiores a 24 s a curva teórica afasta-se claramente dos valores experimentais. De qualquer modo nesta gama de períodos dá-se um decréscimo do factor de transmissão o que confirma a tendência evidenciada pelos valores experimentais. Finalmente poderíamos concluir que dos modelos teóricos considerados por Perez et al (1978), aquele que melhor

se ajustaria às observações experimentais deveria possuir uma espessura inicial dos sedimentos oceânicos variando entre os 3 km e 4 km, aproximadamente. Este valor é superior ao inicialmente proposto, e comumente aceite, por Perez et al (1978).

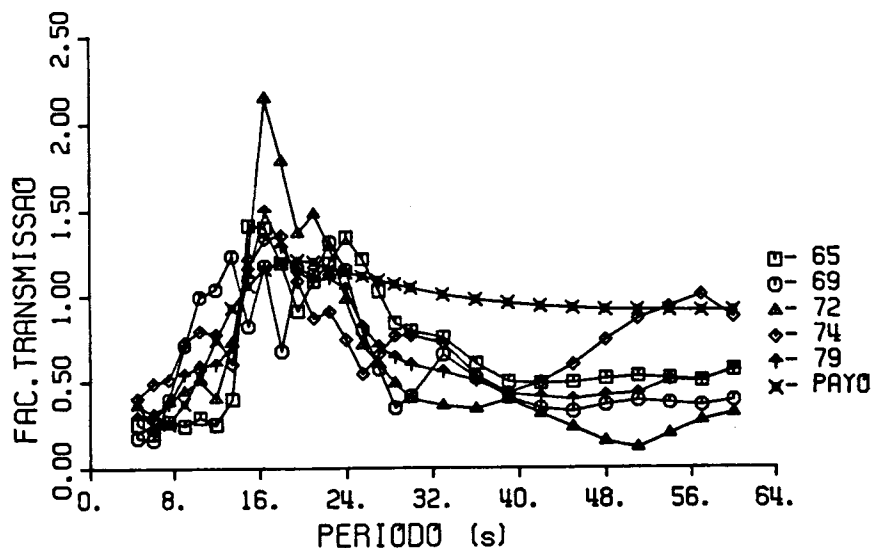


Fig.8.6 Factor de transmissão ($h=3.5$) e as razões entre amplitudes para os cinco sismos considerados, em função do período.

Procedemos a uma segunda tentativa de ajuste dos valores teóricos com os valores experimentais. De modo análogo ao anterior fizemos variar a espessura da camada sedimentar do modelo oceanico proposto por Perez e Payo(1978), mas tomámos como modelo da crosta continental o modelo proposto por Banda(1981), QUADRO 8.2.

QUADRO 8.2
Modelo Continental

espessura da camada (km)	velocidade das ondas P (km/s)	velocidade das ondas S (km/s)	densidade (g/cm ³)
2.0	3.40	2.50	2.28
5.0	6.05	3.48	2.77
4.0	5.60	3.18	2.85
12.0	6.40	3.58	2.95
7.0	6.80	3.90	2.95
20.0	7.60	4.50	3.20
30.0	7.60	4.50	3.35
...

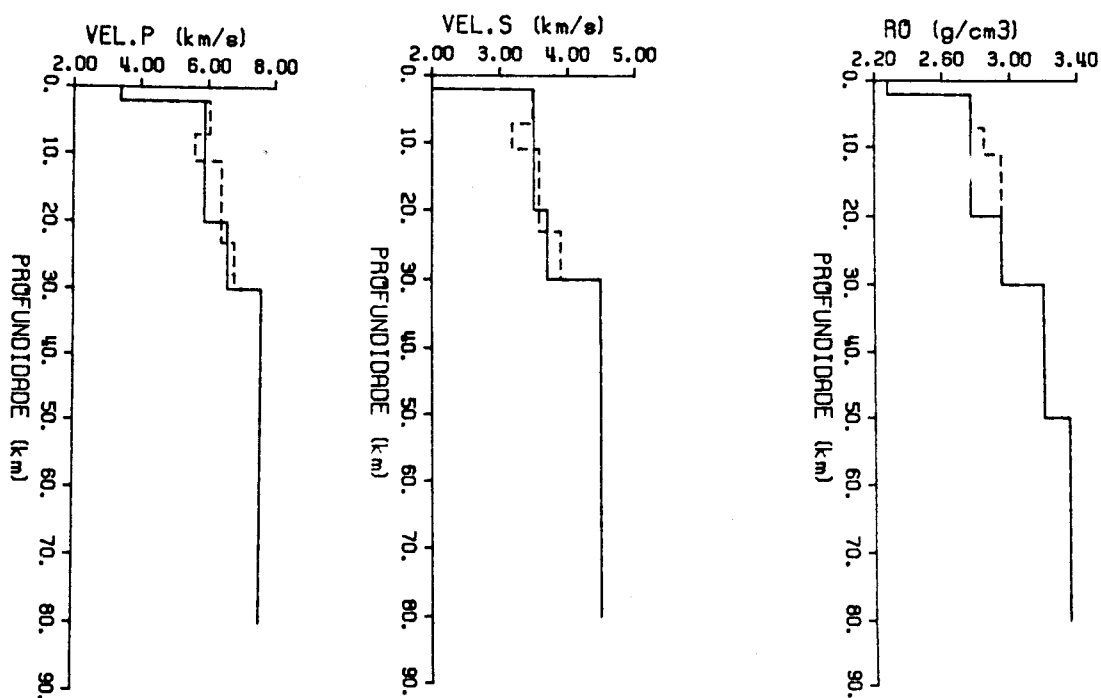


Fig.8.7 Representação gráfica dos modelos de crosta continental de Payo e de Banda (---).

Do modelo de Banda há a salientar algumas das suas características:

a) a espessura da crosta é de 30 km;

b) a existência de uma segunda camada cuja velocidade das ondas P é de 6.1 km/s, situando-se sobre um canal de baixa velocidade, onde esta grandeza possui para as ondas P o valor de 5.6 km/s, que se encontra entre os 7 e 11 km de profundidade;

c) sob este canal de baixa velocidade está uma camada cuja velocidade para as ondas P é de 6.4 km/s.

Neste modelo a velocidade média das ondas P na crosta é superior à admitida no modelo de Payo, admitindo-se ainda, no modelo de Banda, a existência de um canal de baixa velocidade a 7km de profundidade com 4km de espessura que Payo não considera.

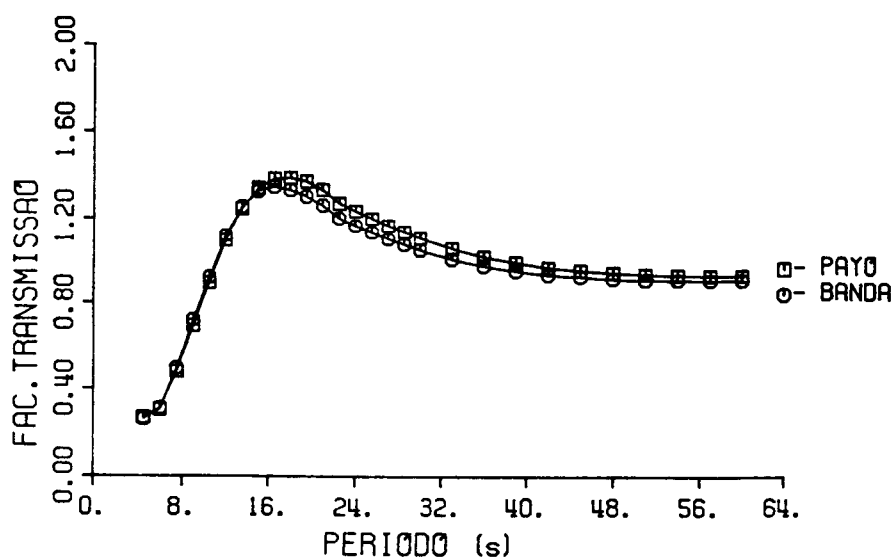


Fig. 8.8 *Factores de transmissão para os modelos de crosta continental de Payo e de Banda (h=2.5km).*

Uma comparação, no intervalo de períodos que temos vindo a considerar, do factor de transmissão, servindo-nos do modelo

de Banda para a crosta continental da Península Ibérica, com os resultados obtidos usando o modelo de Payo, para cada uma das espessuras da camada sedimentar oceânica, conduz-nos a:

a) uma diminuição do seu valor máximo, acompanhado de um deslocamento do período correspondente no sentido decrescente;

b) uma diminuição deste factor para todos os períodos superiores aquele em que ocorre o valor máximo.

A variação da espessura h dos sedimentos não consolidados da zona oceânica implica, quando o modelo continental é o de Banda, conclusões perfeitamente análogas às obtidas para o modelo de Payo.

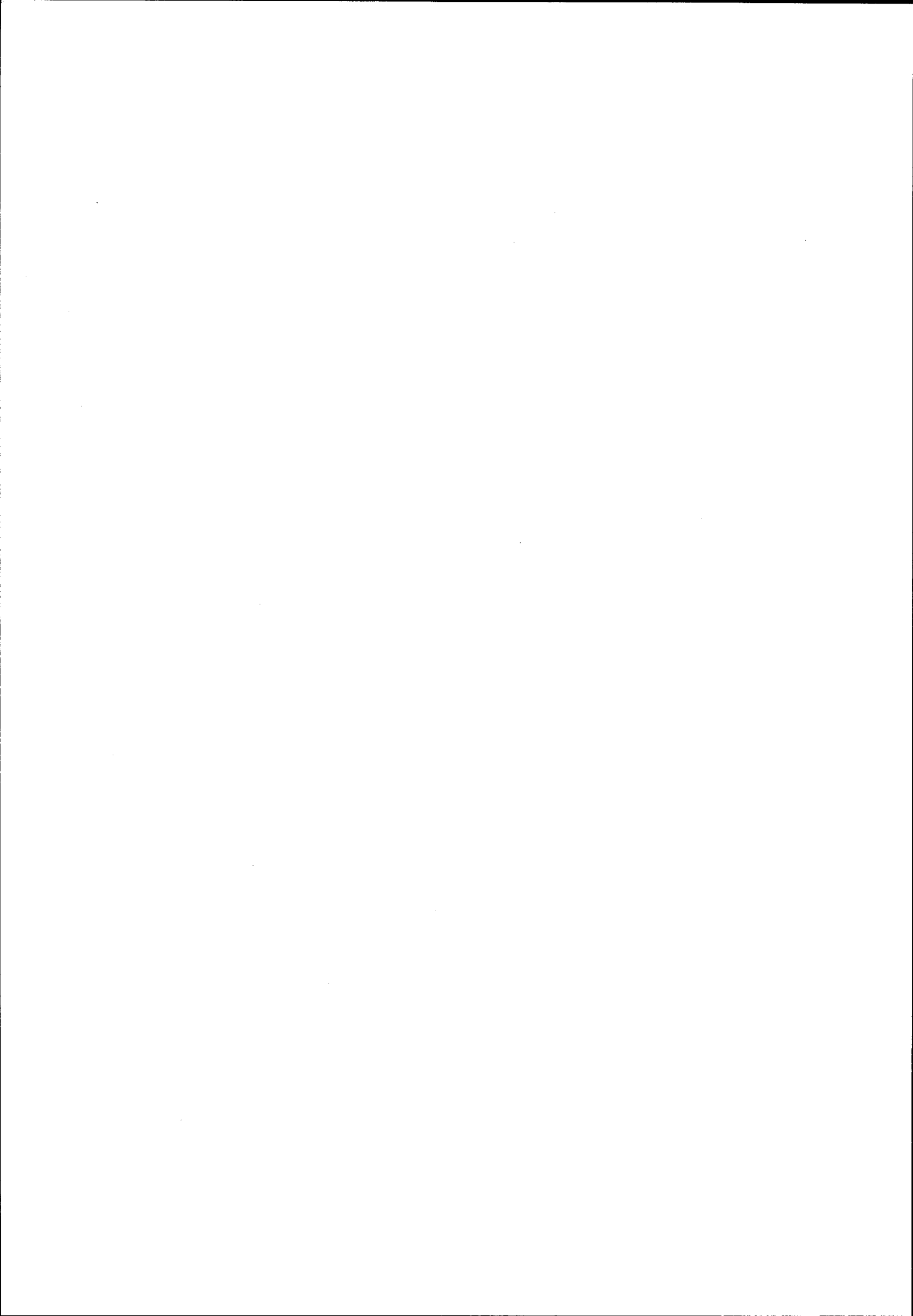
Também para períodos superiores a 24 s a curva teórica afasta-se claramente dos valores experimentais, verificando-se um decréscimo do factor de transmissão o que confirma a tendência evidenciada pelos valores experimentais. Esta diferença pode, contudo, ser explicada mediante a hipótese da existência de canais de baixa velocidade localizados em zonas mais profundas do manto superior. Estes aspectos não foram tidos em consideração nos modelos utilizados e poderiam explicar o aprisionamento da energia com a consequente propagação ao longo desses canais. Seria de esperar, portanto, que, na superfície da margem continental, surgisse uma amplitude do deslocamento bastante inferior à encontrada na zona oceânica, sobretudo tendo em conta a distância entre as duas estações. Uma outra hipótese explicativa desta diferença seria a existência de modos de fuga, Aki e Richards(1980), caracterizados pela propagação de energia segundo a direcção oposta à superfície. O modelo de Banda permite a obtenção de valores ligeiramente mais próximo dos valores experimentais do que o modelo de Payo, mas não contribui de uma forma significativa para explicar este desajuste verificado na banda dos largos períodos.

É lícito concluir que um modelo teórico misto, crosta

oceânica proposta por Perez et al.(1978) e crosta continental proposta por Banda et al.(1981), também se ajustará bem às observações experimentais, definindo como espessura inicial dos sedimentos oceânicos um valor entre os 3 e 4 km, aproximadamente.

*

* *



9 - CONCLUSÕES

1. Baseado nos trabalhos de Lysmer e Drake (1971) e (1972) desenvolvemos, aplicando o método dos elementos finitos, a teoria sobre a propagação de ondas de Rayleigh em meios estratificados horizontalmente. Concluimos que a solução da equação final de movimento é equivalente à solução de um problema quadrático aos valores próprios. Os valores próprios são as frequências angulares, o seu quadrado, ω^2 , e os vectores próprios $\{u\}$ representam as amplitudes do deslocamento ao longo dos diferentes estratos constituintes da estrutura em estudo. Se tivermos n estratos possuímos $2n$ valores próprios ω_s^2 , $s=1,2, \dots, 2n$, com os correspondentes vectores próprios $\{u_s\}$.

A resolução numérica deste problema, devido aos métodos empregues, obrigou ao aparecimento de erros. O cálculo destes provou a eficácia dos métodos escolhidos. Por outro lado, o facto da solução encontrada pelo método dos elementos finitos ser uma solução aproximada implicou um outro tipo de erros relacionados com as dimensões da malha usada. Demonstrámos que o comportamento deste tipo de erros ajusta-se ao teoricamente previsto.

2. A construção de um programa de cálculo automático permitiu-nos a obtenção de resultados numéricos sobre a propagação de ondas de Rayleigh em meios estratificados horizontalmente. À partida há que definir as características dos meios escolhidos que são horizontalmente estratificados. Com os modelos das estruturas Continental e Oceânica a Oeste da Península Ibérica propostos por Payo (1970) e Perez et al. (1978), determinámos diferentes grandezas: modos de vibração, deslocamentos superficiais, elipsidade, velocidade de fase e de grupo, propagação crustal e canalizada.

Especificadas as características dos dois modelos de base, oceânico e continental, procedemos ao estudo da propagação de ondas de Rayleigh no seu interior, utilizando o método dos elementos finitos. Em seguida interpretámos fisicamente a diferença entre um percurso oceânico e continental sugerida pelos resultados numéricos obtidos na determinação das diferentes grandezas.

A interpretação física destes resultados permitiu-nos concluir que as irregularidades estruturais entre os diferentes tipos de estrutura existem sobretudo na zona menos profunda, até aos 150 km. Esta característica manifesta-se nas diferenças de comportamento das curvas da velocidade de fase e de grupo no intervalo de períodos compreendido entre os 10 s e os 30 s. Nas grandezas calculadas à superfície, as diferenças entre a região oceânica e a continental são evidenciadas pelos valores da elipsidade e dos diferentes modos de propagação. A estrutura da Península Ibérica é do tipo continental com uma crosta de cerca de 30 km de espessura, possuindo um canal de baixa velocidade na litosfera a 80 km da superfície, cuja espessura é de, aproximadamente, 100 km. A região Atlântica a Oeste da Península possui uma estrutura oceânica típica com uma crosta de espessura igual a 5 km, tendo a 100 km de profundidade um canal de baixa velocidade cuja espessura é, aproximadamente, também de 100 km.

No sentido de corroborar, ou não, as conclusões retiradas pela aplicação do método dos elementos finitos às duas estruturas, aplicámos aos modelos destas duas regiões o método de Knopoff. Verificámos haver uma boa coincidência de valores de diversas grandezas (velocidades de fase e grupo, elipsidade) através dos dois métodos.

3. Até aqui considerámos meios físicos lateralmente homogêneos, as suas propriedades físicas só variam verticalmente. Em seguida desenvolvemos a equação de propagação das ondas de Rayleigh para o caso do meio, tomado bidimensionalmente, ser completamente não homogênea, isto é, os valores das suas propriedades dependem da posição. Perante uma excitação sísmica estudámos a resposta estacionário da zona não homogênea cuja expressão é traduzida por um sistema de equações lineares, complexas, a partir das quais podemos determinar as amplitudes dos deslocamentos dos nodos da zona não homogênea como resposta a qualquer onda incidente de frequência angular ω .

4. A modelização bidimensional da margem continental a Oeste da Península Ibérica assenta nos modelos das duas estruturas multiestratificadas, oceânica e continental, já conhecidas. As propriedades físicas da zona de transição definem-se a partir da interpolação linear entre os valores das propriedades homónimas dos estratos correspondentes, em ambas as regiões limítrofes de estratificação horizontal. Utilizámos três modelos de geometria diferente para esta região, estes distinguem-se unicamente entre si pela largura diferente da zona de transição: 90, 40 e 10 km.

Estes modelos estão sujeitos a oscilações numa das suas fronteiras laterais, estrutura oceânica ou estrutura continental, devido às tensões provocadas por uma onda de Rayleigh. Esta onda, incidindo segundo a normal à superfície de separação

dos dois meios, corresponde ao modo fundamental para um determinado período com amplitude igual à unidade e fase nula. Calculámos: (1) o deslocamento em todos os nodos da estrutura; (2) a curva de dispersão da velocidade de fase para o modo fundamental de Rayleigh ao propagar-se na margem continental; (3) a repartição de energia; (4) os factores de transmissão e reflexão. Concluimos para ambos as direcções de propagação, oceano-continente e continente-oceano:

— a velocidade de fase média pode considerar-se uma boa aproximação para o cálculo da velocidade de fase do modo fundamental de Rayleigh na margem continental;

— a energia reflectida pela margem continental é praticamente inexistente, toda a energia é transmitida; esta energia encontra-se concentrada no modo fundamental, contudo, em determinados intervalos do período, entre 6s e 27s, e há uma perda da percentagem da energia total transmitida pelo modo fundamental para os modos superiores; existe, portanto, uma relativa contaminação modal à custa dos modos superiores, podendo ter consequências na determinação da velocidade de fase do modo fundamental;

— o factor de transmissão varia com o período, no entanto, conforme o direcção de propagação da onda o comportamento desta grandeza é distinto: atinge o valor máximo (perto de 1.5) no intervalo compreendido entre 15 s e 21 s para a direcção oceano-continente, para o percurso inverso, neste mesmo intervalo, existe um mínimo relativo (valor inferior à unidade);

— em relação ao deslocamento superficial há também, como seria de esperar, uma diferença nítida de comportamento para a propagação das ondas de Rayleigh ao longo da margem continental quando provenientes do oceano ou do continente: para períodos superiores a 12 s, no sentido oceano-continente, há uma amplificação da amplitude quer do deslocamento horizontal quer

do deslocamento vertical; no sentido inverso, e para o mesmo intervalo, há, inversamente, uma diminuição de ambos os deslocamentos.

Importa também sublinhar que no estudo de qualquer dos sentidos não se verificaram diferenças apreciáveis entre os três modelos utilizados, a geometria não será um factor importante a condicionar as características da propagação das ondas de Rayleigh através da margem continental, mas, antes, os parâmetros físicos que descrevem o meio. Deve-se, contudo destacar que a onda reflectida (ou transmitida) pela margem continental é afectada pelo ângulo entre a direcção da onda incidente e a normal à superfície de separação dos diferentes estratos constituintes da zona de transição (esta dependência varia com o período), o que é manifesto quando este ângulo é muito pequeno (caso do MODELO C).

5. A comparação das amplitudes da componente vertical das ondas de Rayleigh para cada uma das zonas da margem continental foi feita, após a determinação do espectro de amplitudes dos registos de cinco eventos sísmicos obtidos nas estações sismográficas do Porto (continente) e Ponta Delgada (oceano).

Para a interpretação dos resultados anteriores utilizámos o factor de transmissão como a grandeza teórica equivalente à razão entre as amplitudes descritas.

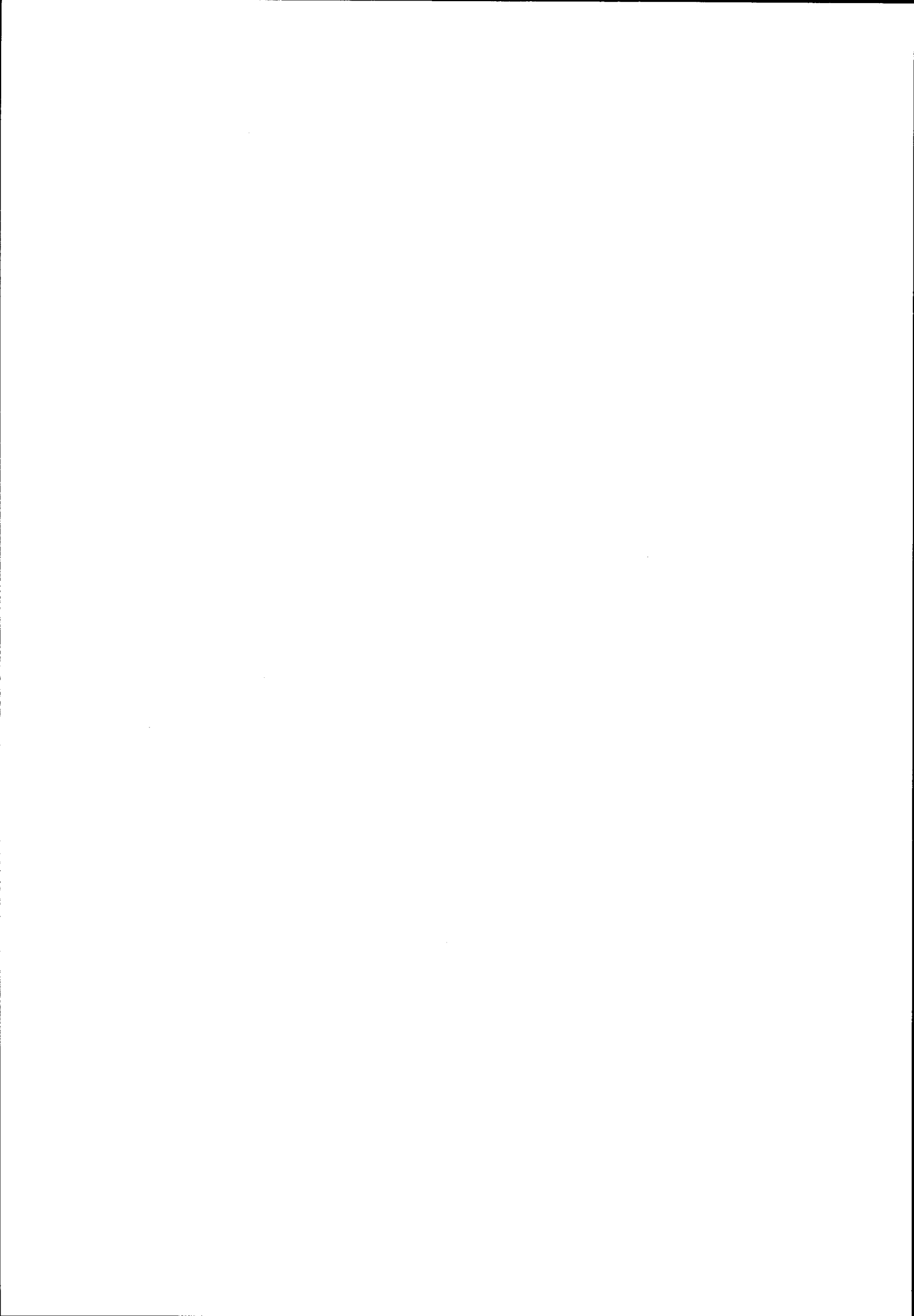
Realizámos uma tentativa de ajuste dos valores teóricos com os valores experimentais, fazendo variar alguns dos parâmetros dos modelos de Payo, continental e oceânico, descritos no Cap.5 (QUADRO 5.4 e 5.5). Concluimos que o modelo de margem continental que melhor se ajustaria às observações experimentais, no intervalo de períodos compreendido entre 4.5s e os 24 s, assentava nos modelos anteriormente definidos e possuindo na região oceânica uma espessura de sedimentos que variaria entre os 3.0 e 4.0 km, aproximadamente. Este valor é

superior ao inicialmente proposto, e comumente aceite, por Perez et al (1978). Para períodos superiores a 24.0s a curva teórica afasta-se claramente dos valores experimentais. De qualquer modo nesta gama de períodos dá-se um decréscimo do factor de transmissão o que confirma a tendência evidenciada pelos valores experimentais. Esta diferença pode, contudo, ser explicada mediante a hipótese da existência de canais de baixa velocidade localizados em zonas mais profundas do manto superior. Estes aspectos não foram tidos em consideração nos modelos utilizados e poderão explicar o aprisionamento da energia com a consequente propagação ao longo desses canais. Seria de esperar que, na superfície da margem continental, surgisse uma amplitude do deslocamento bastante inferior à encontrada na zona oceânica, sobretudo tendo em conta a distância entre as duas estações.

Procedemos a uma segunda tentativa de ajuste dos valores teóricos com os valores experimentais. Tomámos como modelo oceânico o proposto por Perez e Payo(1978), mas para modelo da crosta continental usámos o modelo proposto por Banda(1981), QUADRO 8.2. As conclusões são semelhantes às anteriores: há um bom ajuste às observações experimentais, no intervalo de períodos compreendido entre 4.5s e os 24 s, no caso da espessura inicial dos sedimentos oceânicos variar entre os 3.0 e 4.0 km, aproximadamente; também para períodos superiores a 24 s a curva teórica afasta-se claramente dos valores experimentais. Todavia, neste último intervalo, o modelo de Banda permite a obtenção de valores ligeiramente mais próximo dos valores experimentais do que o modelo continental de Payo, mas não contribui de uma forma significativa para explicar o desajuste verificado na banda dos longos períodos.

Apêndices

APÊNDICES



A1. Procedimento geral de cálculo para Propagação de ondas de Rayleigh num meio estratificado horizontalmente

A1.1. Descrição das principais unidades (rotinas)

O estudo numérico da propagação de ondas de Rayleigh numa estrutura estratificada horizontalmente foi feito com base num programa de cálculo automático em linguagem FORTRAN 77, desenvolvido por nós e denominado RAYLEI-REG. O seu processamento fez-se num μ VAX3100 existente na Universidade de Évora.

O referido programa permitiu organizar todo o cálculo exposto no Capítulo 3, recorrendo à utilização de subrotinas específicas. Assim:

a) subrotina **LER** - procede à leitura de um ficheiro onde estão todos os dados relativos à estrutura em estudo: número de camadas, número de estratos por camada, características físicas de cada camada ($h_j, \rho_j, \alpha_j, \beta_j$);

b) subrotina **ELFIN** - determinação das matrizes [A],[B],[C] e [M] necessárias para o estabelecimento da equação de movimento;

c) subrotinas **BALANC-ELMHES-ELTRAN-HQR2-BALBAK**, Smith et al (1976), calculam os valores e vectores próprios, k_i , e $\{u\}_i$, respectivamente;

d) subrotina **GRUPO** - cálculo da velocidade de grupo dos modos reais de propagação;

e) subrotina **ERROVP** - determina os erros na resolução do problema aos valores próprios;

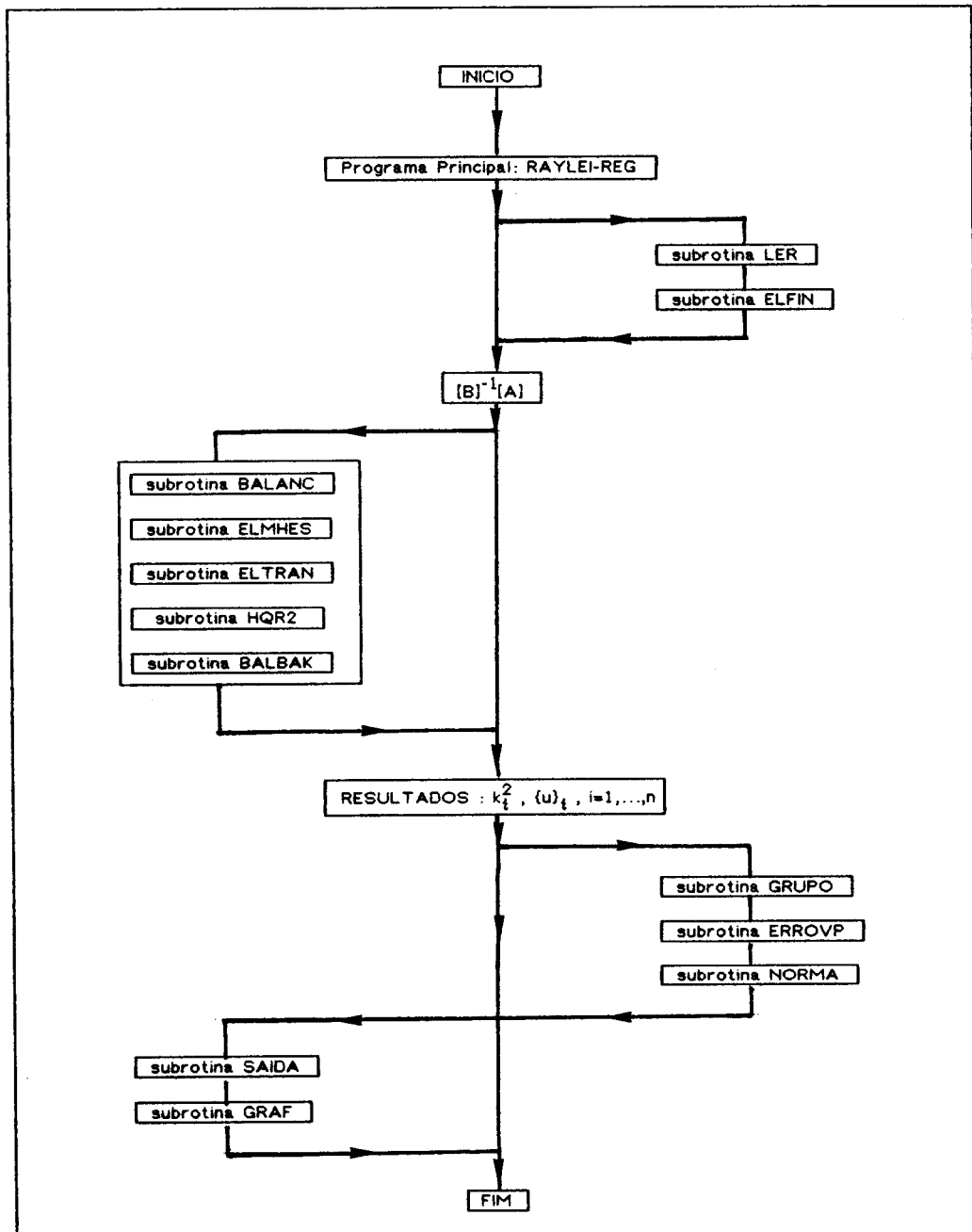
f) subrotina **ORTO** - normalização dos vectores próprios;

g) subrotina **SAIDA** - procede às saídas impressas, bem como à gravação de resultados que venham a ser necessários para cálculos ulteriores;

h) subrotina **GRAF** - procede à gravação de resultados passíveis de tratamento gráfico.

A1.2. Fluxograma de cálculo

FLUXOGRAMA I



A1.2. Rotinas em FORTRAN

```

C           'RAYLEI-REG'
C -----
C
C   PROPAGACAO DE ONDAS DE RAYLEIGH EM MEIOS ESTRATIFICADOS
C   METODO DOS ELEMENTOS FINITOS
C
C   FAZ OS CALCULOS PARA UMA ZONA REGULAR SO PARA PERIODO,
C   A FIM DE SEREM TRANSPORTADOS PARA A ZONA IRREGULAR
C   GRAVANDO MATRIZES [A] E [D] E VECTORES E VALORES PROPRIOS
C
C   SUBROTINAS : 'LER', 'ELFIN','AADD','XNVERT',
C               'BALANC', 'ELMHES', 'ELTRAN', 'HQR2', 'BALBAK'
C               'MATGR', 'ORTO', 'GRUPO'
C -----
C
C   DIMENSION AUX2(150,150)
C
C   COMMON/ONE/NEST(75),H(75),RO(75),ALFA(75),BETA(75),NCAM,HPROF
COMMON/TWO1/AA(150,150)
COMMON/TWO2/DD(150,150)
COMMON/THRE/AA1(75,2),BB1(75,2),CC1(75,2),AA2(75,2),CC2(75,2)
COMMON/FOUR/MASS1(75,2),MASS2(75,2),COTA(75)
COMMON/FIVE/VPR(150),VPI(150),HESR(150,150),HESI(150,150)
COMMON/FIVE1/HESRD(150,150),VPID(150),VPRD(150)
COMMON/SIX/YM(150),IVI(150)
COMMON/TEN/DD1(75,2),DD2(75,2)
C
C   DOUBLE PRECISION AUX0(150,150),HESRD,VPID,VPRD,YM
REAL MASS1,MASS2,VELFAS(150),VGRUPO(150),CONDA(150)
CHARACTER *12 LEITURA,IMPRIME,GRAVA
COMPLEX AUX1(150),Z,Z1,FACORT(150),ERRO(150)
C
C ENTRADA DE DADOS
C
C   WRITE(*,*) 'Ficheiro de LEITURA dos dados   >>>'
READ (*,1010) LEITURA
WRITE(*,*) 'Ficheiro de GRAVACA dos dados   >>>'
READ (*,1010) GRAVA
WRITE(*,*) 'PERIODO de oscilacao da onda ? >>>'
READ (*,*) T
WRITE(*,*) 'Qual a ESTRUTURA a utilizar /1/2/3/4/ ? >>>'
READ (*,*) KEST
C
C   PI=2.*ASIN(1.)
PI2=2.*PI
WRITE(*,2100) T,KEST
C
C   CALL LER(LEITURA,KEST,IZONA)
CALL ELFIN(GRAVA,T,PI,NEST,BETA1,BETA2)

```

```

C
  NM=NEST*2
  NM2=NM*2
  N=NM
C
  CALL AADD(NEST)
C
  DO 150 I=1,NM
  DO 150 J=1,NM
150 DD(I,J)=DD(I,J)/ESC
C
  CALL XNVERT(DD,NM,RDET)
C
  DO 240 I=1,NM
  DO 240 J=1,NM
  AUX0(I,J)=0.
  DO 240 K=1,NM
240 AUX0(I,J)=AUX0(I,J)+DD(I,K)*AA(K,J)
C
  CALL BALANC(NM,N,AUX0,IS1,IS2,YM)
  CALL ELMHES(NM,N,IS1,IS2,AUX0,IVI)
  CALL ELTRAN(NM,N,IS1,IS2,AUX0,IVI,HESRD)
  CALL HQR2(NM,N,IS1,IS2,AUX0,VPRD,VPID,HESRD,IERR)
  WRITE(*,2400)
  IF(IERR.EQ.0) GO TO 245
  WRITE(*,2340) IERR
  PAUSE 0
245 CALL BALBAK(NM,N,IS1,IS2,YM,N,HESRD)
C
  CALL AADD(NEST)
C
  I=1
257 IF(VPI(I).EQ.0.) GO TO 261
  I=I+1
  DO 260 J=1,NM
  HESI(J,I-1)=HESR(J,I)
  HESI(J,I)--HESR(J,I)
260 HESR(J,I)=HESR(J,I-1)
261 IF(I.EQ.NM) GO TO 265
  I=I+1
  GO TO 257
C
265 DO 270 I=1,NM
  VELFAS(I)=0.0
  VGRUPO(I)=0.0
270 CONDA(I)=0.0
C
  CALL MATGR(NM)
C
  IMP=0
  DO 600 IPJ=1,NM
C

```

```

Z1=CSQRT(CMPLX(VPR(IPJ),VPI(IPJ)))
VPR(IPJ)=REAL(Z1)
VPI(IPJ)=AIMAG(Z1)
IF(VPI(IPJ))287,281,285
281 CONDA(IPJ)=ABS(PI2/VPR(IPJ))
VELFAS(IPJ)=CONDA(IPJ)/T
C
CALL GRUPO(IPJ,VELFAS,NM,VGRUPO)
C
CALL ERROVP(IPJ,NM,ERRO)
IF(VPR(IPJ))287,287,285
C
285 VPI(IPJ)=-VPI(IPJ)
VPR(IPJ)=-VPR(IPJ)
287 DO 300 J=NEST+1,NM
Z1=CMPLX(HESR(J,IPJ),HESI(J,IPJ))/CMPLX(VPR(IPJ),VPI(IPJ))
HESR(J,IPJ)=REAL(Z1)
300 HESI(J,IPJ)=AIMAG(Z1)
C
CALL ORTO(IPJ,NM,FACORT)
C
DO 380 K=1,NM
Z1=CMPLX(HESR(K,IPJ),HESI(K,IPJ))/FACORT(IPJ)
HESR(K,IPJ)=REAL(Z1)
380 HESI(K,IPJ)=AIMAG(Z1)
DO 430 J=NEST+1,NM
Z1=CMPLX(HESR(J,IPJ),HESI(J,IPJ))/CMPLX(0.0,1.0)
HESR(J,IPJ)=REAL(Z1)
430 HESI(J,IPJ)=AIMAG(Z1)
C
IF(IMP.EQ.0) GO TO 593
IF(VELFAS(IPJ).EQ.0.) GO TO 593
URZ=VELFAS(IPJ)
SINAL=(URZ-BETA1)*(URZ-BETA2)
IF(SINAL.GT.0.) GO TO 593
IFUND=IPJ
IMP=0

593 WRITE(*,2120) IPJ,VPR(IPJ),VPI(IPJ)
WRITE(*,2130) VELFAS(IPJ),VGRUPO(IPJ)
WRITE(2,2170) IPJ,VPR(IPJ),VPI(IPJ)
WRITE(2,2170) IPJ,VELFAS(IPJ),VGRUPO(IPJ)
WRITE(2,2180)(COTA(J),HESR(J,IPJ),HESI(J,IPJ),
* HESR(J+NEST,IPJ),HESI(J+NEST,IPJ),J=1,NEST)
C
600 CONTINUE
C
WRITE(2,2170) IFUND,VELFAS(IFUND),VGRUPO(IFUND)
CLOSE (2)
C
1010 FORMAT(A12)
2100 FORMAT(/,6X,' PERIODO =',F8.5,6X,'ESTRUTURA =',I2)

```

```
2120 FORMAT(//,'(,I4,)',- VALOR PROPRIO - K2 - ',2E19.11)
2130 FORMAT(8X,'VEL.FASE :',E19.11,/,8X,'VEL.GRUPO:'E19.11,' KM/S')
2170 FORMAT(I4,2E16.5)
2180 FORMAT(F10.3,4X,4E16.8)
      END
```

```

C
C ..... L E R .....
C
C   SUBROUTINE LER(LEITURA,KEST,IZONA)
C
C   COMMON/ONE/NEST(75),H(75),RO(75),ALFA(75),BETA(75),NCAM,HPROF
C
C   DIMENSION NCAMDA(10)
C
C   CHARACTER*12 LEITURA
C
C   OPEN (UNIT=1,STATUS='OLD',FILE='LEITURA',FORM='FORMATTED')
C   READ(1,1005) INDICE
C   READ(1,1000) IZONA,MAR,(NCAMDA(K),K=1,4)
C   READ(1,1020) HPROF
C   NCAM=NCAMDA(KEST)
C   IF(MAR.EQ.0) GO TO 5
C   READ(1,1010) NESTM,HM,ROMAR,AMAR,BMAR
C   NCAM=NCAM-1
C   5 READ(1,1010) (NEST(I),H(I),RO(I),ALFA(I),BETA(I),I=1,NCAM)
C   CLOSE(1)
C
C   1000 FORMAT(3X,7I5)
C   1005 FORMAT(3X,I5)
C   1010 FORMAT(6X,I5,4F8.2)
C   1020 FORMAT(6X,F6.2)
C   RETURN
C   END

```

```

C
C..... E L F I N .....
C
C      SUBROUTINE ELFIN(GRAVA,T,PI,NESTT,BETA1,BETA2)
C
C      DIMENSION LAMB(75),MIU(75),AX(3,3),AZ(3,3),CX(3,3),CZ(3,3)
C      1          ,BXZ(3,3),DXZ(3,3),DZX(3,3),MASSAX(3,3),MASSAZ(3,3)
C
C      COMMON/ONE/NEST(75),H(75),RO(75),ALFA(75),BETA(75),NCAM,HPROF
C      COMMON/THRE/A1(75,2),B1(75,2),C1(75,2),A2(75,2),C2(75,2)
C      COMMON/TEN/D1(75,2),D2(75,2)
C      COMMON/FOUR/MASS1(75,2),MASS2(75,2),COTA(75)
C
C      REAL LAMB,MIU,MASSAX,MASSAZ,MASS1,MASS2
C      CHARACTER *12 GRAVA
C
C      N=0
C      DO 20 I=1,NCAM
20N=N+NEST(I)
C      NESTT=N
C      N=N+1
C      DO 30 J=1,NCAM
C      II=NCAM+1-J
C      DO 30 JJ=1,NEST(II)
C      N=N-1
C      H(N)=H(II)/NEST(II)
C      RO(N)=RO(II)
C      ALFA(N)=ALFA(II)
C      BETA(N)=BETA(II)
C      MIU(N)=RO(N)*BETA(N)**2
30LAMB(N)=RO(N)*ALFA(N)**2-2.*MIU(N)
C      BETA1=BETA(1)
C      BETA2=BETA(NESTT)
35NM=NESTT*2
C      NM2=NM*2
C      COTA(1)=HPROF
C      DO 50 I=2,NESTT
50COTA(I)=COTA(I-1)+H(I-1)
C
C      OMEGA=2.*PI/T
C
C      DO 60 I=1,75
C      DO 60 II=1,2
C      A1(I,II)=0.
C      B1(I,II)=0.
C      C1(I,II)=0.
C      D1(I,II)=0.
C      A2(I,II)=0.
C      C2(I,II)=0.
C      D2(I,II)=0.
C      MASS1(I,II)=0.
60MASS2(I,II)=0.

```

```

DO 90 I=1,NESTT
GG=LAMB(I)+2.*MIU(I)
RR1=H(I)*GG/6.
RR2=MIU(I)/H(I)
RR3=H(I)*MIU(I)/6.
RR4=GG/H(I)
AX(1,1)=2.*RR1
AX(1,2)=RR1
AX(2,1)=AX(1,2)
AX(2,2)=AX(1,1)
BXZ(1,1)=-((MIU(I)-LAMB(I))/2.)
BXZ(1,2)=-((MIU(I)+LAMB(I))/2.)
BXZ(2,1)=-BXZ(1,2)
BXZ(2,2)=-BXZ(1,1)
CX(1,1)=(RR2-OMEGA**2*(RO(I)*H(I)/3.))
CX(1,2)=(-RR2-OMEGA**2*(RO(I)*H(I)/6.))
CX(2,1)=CX(1,2)
CX(2,2)=CX(1,1)
MASSAX(1,1)=RO(I)*H(I)/3.
MASSAX(1,2)=RO(I)*H(I)/6.
MASSAX(2,1)=MASSAX(1,2)
MASSAX(2,2)=MASSAX(1,1)
DZX(1,1)=(MIU(I)/2.)
DZX(1,2)=-DZX(1,1)
DZX(2,1)=DZX(1,1)
DZX(2,2)=-DZX(1,1)
AZ(1,1)=2.*RR3
AZ(1,2)=RR3
AZ(2,2)=AZ(1,1)
AZ(2,1)=AZ(1,2)
CZ(1,1)=(RR4-OMEGA**2*(RO(I)*H(I)/3.))
CZ(1,2)=(-RR4-OMEGA**2*(RO(I)*H(I)/6.))
CZ(2,2)=CZ(1,1)
CZ(2,1)=CZ(1,2)
MASSAZ(1,1)=RO(I)*H(I)/3.
MASSAZ(1,2)=RO(I)*H(I)/6.
MASSAZ(2,2)=MASSAZ(1,1)
MASSAZ(2,1)=MASSAZ(1,2)
DXZ(1,1)=LAMB(I)/2.
DXZ(1,2)=-DXZ(1,1)
DXZ(2,1)=DXZ(1,1)
DXZ(2,2)=-DXZ(1,1)

```

C

```

I1=I+1
IL=0
DO 70 IJ=I,I1
IL=IL+1
A1(IJ,1)=A1(IJ,1)+AX(IL,IL)
B1(IJ,1)=B1(IJ,1)+BXZ(IL,IL)
C1(IJ,1)=C1(IJ,1)+CX(IL,IL)
MASS1(IJ,1)=MASS1(IJ,1)+MASSAX(IL,IL)
D1(IJ,1)=D1(IJ,1)+DXZ(IL,IL)

```



```

A2(IJ,1)-A2(IJ,1)+AZ(IL,IL)
C2(IJ,1)-C2(IJ,1)+CZ(IL,IL)
MASS2(IJ,1)-MASS2(IJ,1)+MASSAZ(IL,IL)
70D2(IJ,1)-D2(IJ,1)+DZX(IL,IL)
A1(I,2)-AX(1,2)
B1(I,2)-BXZ(1,2)
C1(I,2)-CX(1,2)
MASS1(I,2)-MASSAX(1,2)
D1(I,2)-DXZ(1,2)
A2(I,2)-AZ(1,2)
C2(I,2)-CZ(1,2)
MASS2(I,2)-MASSAZ(1,2)
D2(I,2)-DZX(1,2)

```

90CONTINUE

C

```

OPEN (UNIT=2,STATUS='NEW',FILE='GRAVA',FORM='FORMATTED')
WRITE(2,2130) BETA1,BETA2
105 WRITE(2,2140) IZONA,NESTT
WRITE(2,2150) T
DO 110 I=1,NESTT-1
WRITE(2,2170)(A1(I,J),A2(I,J),J=1,2)
110 WRITE(2,2170)(D1(I,J),D2(I,J),J=1,2)
WRITE(2,2170) A1(NESTT,1),A2(NESTT,1),D1(NESTT,1),D2(NESTT,1)
WRITE(2,2180) NM

```

C

```

2130 FORMAT(2F6.3)
2140 FORMAT(2I3)
2150 FORMAT(F8.3)
2170 FORMAT(4E20.11)
2180 FORMAT(I5)
999 RETURN
END

```

```

C
C ..... A A D D .....
C
C   SUBROUTINE AADD(NEST)
C
C   COMMON/TWO1/AA(150,150)
C   COMMON/TWO2/DD(150,150)
C   COMMON/THRE/AA1(75,2),BB1(75,2),CC1(75,2),AA2(75,2),CC2(75,2)
C
C   NM=NEST*2
C   DO 100 I=1,NM
C   DO 100 J=1,NM
C   AA(I,J)=0.
100 DD(I,J)=0.
C
C   DO 120 K=1,NEST
C   AA(K,K)--CC1(K,1)
C   DD(K,K)=AA1(K,1)
C   IF(K.EQ.NEST) GO TO 121
C   AA(K,K+1)--CC1(K,2)
C   DD(K,K+1)=AA1(K,2)
C   AA(K+1,K)=AA(K,K+1)
120 DD(K+1,K)=DD(K,K+1)
121 DO 130 K=NEST+1,NM
C   AA(K,K)--CC2(K-NEST,1)
C   DD(K,K)=AA2(K-NEST,1)
C   IF(K.EQ.NM) GO TO 131
C   AA(K,K+1)--CC2(K-NEST,2)
C   DD(K,K+1)=AA2(K-NEST,2)
C   AA(K+1,K)=AA(K,K+1)
130 DD(K+1,K)=DD(K,K+1)
131 DO 140 K=1,NEST
C   AA(K,K+NEST)--BB1(K,1)
C   DD(K+NEST,K)=BB1(K,1)
C   IF(K.EQ.NEST) GO TO 141
C   AA(K,K+NEST+1)--BB1(K,2)
C   DD(K+NEST+1,K)=BB1(K,2)
C   AA(K+1,K+NEST)=BB1(K,2)
140 DD(K+NEST,K+1)--BB1(K,2)
C
C   141 RETURN
C   END

```

```

C
C ..... X N V E R T .....
C
C   SUBROUTINE XNVERT(AA,N,DET)
C
C   DIMENSION AA(150,150),IR(150),IC(150)
C
C   DET=-1.
C   NI=0
C   DO 10 ID=1,N
C
C   PIV=AA(ID,ID)
C   IM=ID
C   JM=ID
C   DO 1 I=ID,N
C   DO 1 J=ID,N
C   IF(ABS(PIV).GE.ABS(AA(I,J))) GO TO 1
C   PIV=AA(I,J)
C   IM=I
C   JM=J
C   1 CONTINUE
C   IF(ABS(PIV).GE.0.0001) GO TO 2
C   WRITE(*,4000)
C 4000 FORMAT(' DETERMINANTE NULO')
C   DET=0.0
C   RETURN
C
C   2 IF(IM.EQ.ID) GO TO 4
C   DO 3 J=1,N
C   TEMP=AA(ID,J)
C   AA(ID,J)=AA(IM,J)
C 3 AA(IM,J)=TEMP
C   NI=NI+1
C 4 IR(ID)=IM
C   IF(JM.EQ.ID) GO TO 6
C   DO 5 I=1,N
C   TEMP=AA(I,ID)
C   AA(I,ID)=AA(I,JM)
C 5 AA(I,JM)=TEMP
C   NI=NI+1
C 6 IC(ID)=JM
C
C   DO 7 I=1,N
C   AP=AA(I,ID)/PIV
C   DO 7 J=1,N
C   IF(I.EQ.ID.OR.J.EQ.ID) GO TO 7
C   AA(I,J)=AA(I,J)-AP*AA(ID,J)
C   CONTINUE
C
C   DO 8 I=1,N
C   AA(I,ID)=AA(I,ID)/PIV
C
C

```

```

DO 9 J=1,N
9AA(ID,J)=AA(ID,J)/(-PIV)
C
DET=DET*PIV
10AA(ID,ID)=1.0/PIV
IF(NI-2*(NI/2).GT.0) DET=-DET
C
DO 12 L=1,N
K=N-L+1
IF(IR(K).EQ.K) GO TO 12
INT=IR(K)
DO 11 I=1,N
TEMP=AA(I,K)
AA(I,K)=AA(I,INT)
11AA(I,INT)=TEMP
12CONTINUE
C
DO 14 L=1,N
K=N-L+1
IF(IC(K).EQ.K) GO TO 14
INT=IC(K)
DO 13 J=1,N
TEMP=AA(K,J)
AA(K,J)=AA(INT,J)
13AA(INT,J)=TEMP
14CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C ..... ERROVP.....
C
C   SUBROUTINE ERROVP(IP,NM,ERRO)
C
C   COMMON/TWO1/AA(150,150)
C   COMMON/TWO2/DD(150,150)
C   COMMON/FIVE/VPR(150),VPI(150),HESR(150,150),HESI(150,150)
C
C   REAL VNULO(150),V1(150)
C   COMPLEX ERRO(150),Z,Z1,Z2
C
C   DO 10 L=1,NM
10VNULO(L)=0.0
C
C   Z=CMPLX(0.,0.)
C   DO 40 J=1,NM
C   DO 20 K=1,NM
20V1(K)=DD(J,K)
C   Z1=CMPLX(VPR(IP)**2,VPI(IP))*
C   *   DOT(V1,VNULO,HESR(1,IP),HESI(1,IP),NM)
C   DO 30 K=1,NM
30 V1(K)=AA(J,K)
C   Z2=DOT(V1,VNULO,HESR(1,IP),HESI(1,IP),NM)
40 Z=Z+(Z1-Z2)**2
C   ERRO(IP)=CSQRT(Z)
C   RETURN
C   END

```

```

C
C ..... ORTO .....
C
C   SUBROUTINE ORTO(IP,NM,FACORT)
C
C   COMMON/TWO1/AA(150,150)
C   COMMON/TWO2/DD(150,150)
C   COMMON/FIVE/VPR(150),VPI(150),HESR(150,150),HESI(150,150)
C
C   REAL VNULO(150),V1(150)
C   COMPLEX VX(150),FACORT(150),Z,Z1
C
C   NM2=NM/2
C   DO 30 J=1,NM2
C   VX(J)=CMPLX(0.,0.)
C   DO 30 K=1,NM2
30 VX(J)=VX(J)+CMPLX(DD(J,K),0.0)*CMPLX(HESR(K,IP),HESI(K,IP))
   *                               *CMPLX(VPR(IP),VPI(IP))
C   DO 40 J=NM2+1,NM
C   VX(J)=CMPLX(0.,0.)
C   DO 40 K=NM2+1,NM
40 VX(J)=VX(J)+CMPLX(DD(J,K),0.0)*CMPLX(HESR(K,IP),HESI(K,IP))
   *                               *CMPLX(VPR(IP),VPI(IP))
C
C   Z=CMPLX(0.,0.)
C   DO 50 K=1,NM
50 Z=Z+CMPLX(VPR(IP),VPI(IP))*CMPLX(HESR(K,IP),HESI(K,IP))*VX(K)
C
C   DO 60 J=1,NM2
C   VX(J)=CMPLX(0.,0.)
C   DO 60 K=1,NM2
60 VX(J)=VX(J)+CMPLX(AA(J,K),0.0)*CMPLX(HESR(K,IP),HESI(K,IP))
C   DO 70 J=NM2+1,NM
C   VX(J)=CMPLX(0.,0.)
C   DO 70 K=NM2+1,NM
70 VX(J)=VX(J)+CMPLX(AA(J,K),0.0)*CMPLX(HESR(K,IP),HESI(K,IP))
C
C   Z1=CMPLX(0.,0.)
C   DO 90 K=1,NM
90 Z1=Z1+CMPLX(HESR(K,IP),HESI(K,IP))*VX(K)
C   FACORT(IP)=CSQRT(Z+Z1)
C
C   RETURN
C   END

```

```

C
C ..... GRUPO .....
C
C   SUBROUTINE GRUPO(IP,VFASE,NM,VGRUPO)
C
C   COMMON/TWO2/DD(150,150)
C   COMMON/FIVE/VPR(150),VPI(150),HESR(150,150),HESI(150,150)
C   COMMON/SEVEN/AUX0(150,150)
C
C   REAL VNULO(150),V1(150),VFASE(150),VGRUPO(150)
C   COMPLEX AUX2(150),AUX1(150),Z,Z1,Z2
C
C   DO 10 I=1,NM
10 VNULO(I)=0.0
C
C   N2=NM/2
C
C   DO 30 J=1,N2
30 AUX2(J)=CMPLX(HESR(J,IP),HESI(J,IP))*CMPLX(VPR(IP),VPI(IP))
   DO 40 J=1+N2,NM
40 AUX2(J)=CMPLX(HESR(J,IP),HESI(J,IP))/CMPLX(VPR(IP),VPI(IP))
   DO 60 K=1,NM
   DO 50 L=1,NM
50 V1(L)=AUX0(K,L)
60 AUX1(K)=DOT(V1,VNULO,HESR(1,IP),HESI(1,IP),NM)
   Z=DOTCX(AUX2,AUX1,NM)
   DO 80 K=1,NM
   DO 70 L=1,NM
70 V1(L)=DD(K,L)
80 AUX1(K)=DOT(V1,VNULO,HESR(1,IP),HESI(1,IP),NM)
   Z1=DOTCX(AUX2,AUX1,NM)
   VG=REAL(Z1/Z)
   VGRUPO(IP)=VG/VFASE(IP)
C
C   RETURN
C   END

```

```

C
C ..... MATGR .....
C
C   SUBROUTINE MATGR(NM)
C
C   COMMON/FOUR/MASS1(75,2),MASS2(75,2),COTA(75)
C   COMMON/SEVEN/AUX0(150,150)
C
C   REAL MASS1,MASS2
C
C   N2=NM/2
C   DO 20 I=1,N2
C   AUX0(I,1)=MASS1(I,1)
C   AUX0(I+N2,1+N2)=MASS2(I,1)
C   IF(I.EQ.N2) GO TO 20
C   AUX0(I,I+1)=MASS1(I,2)
C   AUX0(I+1,I)=AUX0(I,I+1)
C   AUX0(I+N2,I+N2+1)=MASS2(I,2)
C   AUX0(I+N2+1,I+N2)=AUX0(I+N2,I+N2+1)
20 CONTINUE
C
C   RETURN
C   END

```



```

C
C.....
      COMPLEX FUNCTION DOT(A1,A2,B1,B2,N)
C
C ... VECTOR PRODUTO INTERNO
C
      DIMENSION A1(1),A2(1),B1(1),B2(1)
      DOT=CMPLX(0.0,0.0)
      DO 100 I=1,N
100 DOT=DOT+CMPLX(A1(I),A2(I))*CMPLX(B1(I),B2(I))
      RETURN
      END

C
C.....
      COMPLEX FUNCTION DOTCX(A,B,N)
C
C ... VECTOR PRODUTO INTERNO
C
      COMPLEX A(1),B(1)
      DOTCX=CMPLX(0.0,0.0)
      DO 100 I=1,N
100 DOTCX=DOTCX+A(I)*B(I)
      RETURN
      END

```

A2. Procedimento Geral de cálculo para a matriz rigidez e matriz de massa

A2.1 Integração numérica

As matrizes de massa e rigidez de qualquer elemento, utilizando a formulação isoparamétrica e cujas expressões são (6.1.2) e (6.1.1), respectivamente, podem genericamente escrever-se

$$[M]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \quad \text{e} \quad [K]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

As funções $f(\xi, \eta)$ e $g(\xi, \eta)$ são calculadas tendo conhecimento dos parâmetros físicos de cada elemento, em que está subdividido o meio, bem como das coordenadas globais dos seus nodos. A função $f(\xi, \eta)$ obtem-se através das expressões (2.4.18) e (2.4.20), $g(\xi, \eta)$ resulta da aplicação das expressões (2.4.18), (3.2.6) e (6.1.5).

Para proceder à integração numérica indicada nas expressões das duas matrizes empregámos o método de integração numérica de Gauss-Legendre. Segundo este método o integral é substituído por um somatório

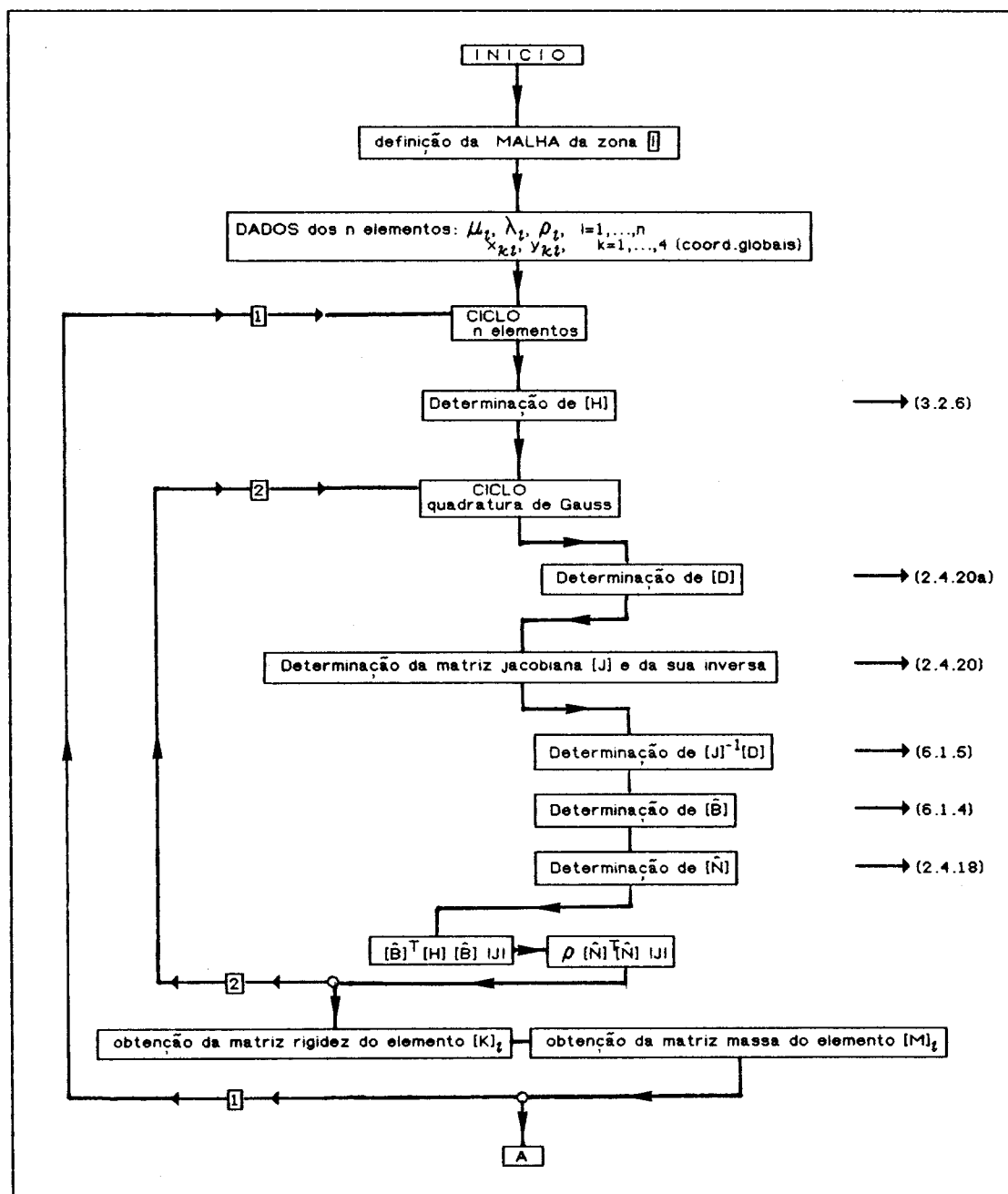
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_i \sigma_j f(\xi_i, \eta_j)$$

em que m é o número de pontos, segundo cada direcção, para os quais se calcula a função, os σ_i e σ_j representam os coeficientes de aproximação. Para elementos finitos isoparamétricos bidimensionais, Zienkiewicz (1972), $m=2$, os parâmetros de integração a usar nos cálculos são os seguintes:

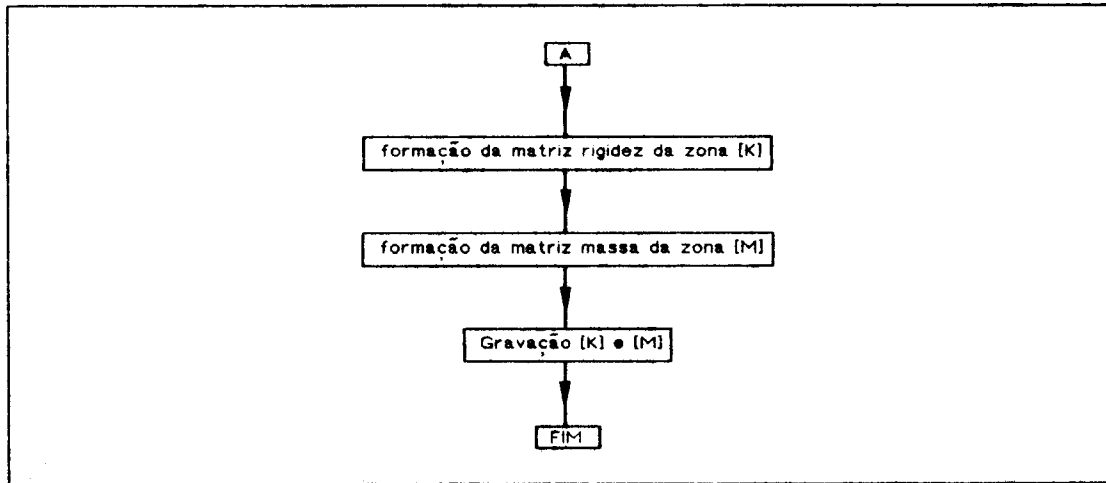
$$\xi_i = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{3}} & i=1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & i=2 \end{cases} \quad \eta_j = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{3}} & j=1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & j=2 \end{cases} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = +1.0$$

A2.2. Fluxograma da determinação da matriz rigidez e da matriz de massa

FLUXOGRAMA II



FLUXOGRAMA II (cont.)



A2.3. Rotinas em FORTRAN

```

C           'RAYMATIRR'
C -----
C
C CALCULO DA MATRIZ RIGIDEZ E DE MASSA PARA A PROPAGACAO DE ONDAS
C           DE RAYLEIGH NUM MEIO IRREGULAR
C           METODO DOS ELEMENTOS FINITOS
C
C SUBROTINAS : 'LER', 'MATMUL', 'GAUSSQ', 'REORD'
C
C UNIDADES
C           LEITURA (IBIRR.DAT) ... .. <1>
C           GRAVACAO (IRR.DAT) ... .. <2>
C -----
C
C DIMENSION HOOKE(10,10),D(10,10),POS(10,10),S(10,10),RIGEL(10,10),
2           MASSA(10,10),NODO(10),AUXMAT(10,10),JACOB(10,10),
3           JACINV(10,10),ZMAT(10,10),COEFG(10),CSI(10),NIU(10)
4           ,IND(4000),RIGIRR(600000)
C           5           ,MASIRR(500000),IMAT(800,16)
C
C REAL MASSA,JACOB,JACINV, MASIRR,NIU,LAMB,MIU
C INTEGER COLELM,COL
C
C ENTRADA DE DADOS
C
C WRITE(*,1000)
C WRITE(*,*)'Qual o valor do PERIODO ? >>>>'
C READ(*,*)T
C OPEN(UNIT=1,STATUS='OLD',FILE='IBIRR.DAT',FORM='FORMATTED')
C READ(1,1030) IZONA,NELCOL,NELLIN,COMP
C
C NELEM=NELCOL*NELLIN
C T=FLOAT(ITPO)/1000.
C PI=2.*ASIN(1)
C OMEGA2=(2.*PI/T)**2
C
C WRITE(*,2060) T
C WRITE(*,2080) NELCOL,NELLIN
C
C I1=0
C NEL2=2*(NELLIN)
C DO 20 I=1,NEL2+4
C I1=I1+I
20 IND(I)=I1
C DO 30 I=NEL2+5,2*(NELEM+NELLIN)
30 IND(I)=IND(I-1)+2*(NELLIN+2)
C NFIM=IND(2*(NELEM+NELLIN))

```

```

WRITE(*,2090) NELEM,NFIM
C
DO 500 IELEM=1,NELEM
C
DO 80 L=1,10
DO 80 LL=1,10
D(L,LL)=0.
S(L,LL)=0.
AUXMAT(L,LL)=0.
ZMAT(L,LL)=0.
HOOKE(L,LL)=0.
POS(L,LL)=0.
MASSA(L,LL)=0.
80 RIGEL(L,LL)=0.
C
CALL LER(IELEM,POS,RO,ALFA,BETA)
C
IRR=IELEM-IELEM/NELLIN*NELLIN
NODO(1)=2*IELEM-1
NODO(2)=NODO(1)+1
NODO(5)=2*(IELEM+NELLIN)-1
NODO(6)=NODO(5)+1
IF(IRR.EQ.0) GO TO 73
NPONTOS=8
NODO(3)=NODO(2)+1
NODO(4)=NODO(3)+1
NODO(7)=NODO(6)+1
NODO(8)=NODO(7)+1
GO TO 77
73 NPONTOS=4
NODO(3)=NODO(5)
NODO(4)=NODO(6)
C
77 MIU=RO*(BETA**2)
LAMB=RO*(ALFA**2)-2.*MIU
HOOKE(1,1)=LAMB+2.*MIU
HOOKE(2,2)=HOOKE(1,1)
HOOKE(3,3)=MIU
HOOKE(1,2)=LAMB
HOOKE(1,3)=0.
HOOKE(3,1)=HOOKE(1,3)
HOOKE(2,1)=HOOKE(1,2)
HOOKE(2,3)=0.
HOOKE(3,2)=0.
C
L=2
CALL GAUSSQ(L,LINT,NIU,CSI,COEFG)
C
DO 300 K=1,LINT
C
D(1,1)=-(-1.-NIU(K))/4.
D(1,2)= (1.-NIU(K))/4.

```

```

D(1,3)= (1.+NIU(K))/4.
D(1,4)=- (1.+NIU(K))/4.
D(2,1)=- (1.-CSI(K))/4.
D(2,2)=- (1.+CSI(K))/4.
D(2,3)= (1.+CSI(K))/4.
D(2,4)= (1.-CSI(K))/4.

```

C

```
CALL MATMUL(JACOB,D,POS,2,2,4)
```

C

```

DETJAC=JACOB(1,1)*JACOB(2,2)-JACOB(1,2)*JACOB(2,1)
JACINV(1,1)= JACOB(2,2)/DETJAC
JACINV(2,2)= JACOB(1,1)/DETJAC
JACINV(2,1)=-JACOB(2,1)/DETJAC
JACINV(1,2)=-JACOB(1,2)/DETJAC

```

C

```
CALL MATMUL(AUXMAT,JACINV,D,2,4,2)
```

C

```

S(1,1)=AUXMAT(1,1)
S(1,2)=0.
S(1,3)=AUXMAT(1,2)
S(1,4)=0.
S(1,5)=AUXMAT(1,3)
S(1,6)=0.
S(1,7)=AUXMAT(1,4)
S(1,8)=0.
S(2,1)=0.
S(2,2)=AUXMAT(2,1)
S(2,3)=0.
S(2,4)=AUXMAT(2,2)
S(2,5)=0.
S(2,6)=AUXMAT(2,3)
S(2,7)=0.
S(2,8)=AUXMAT(2,4)
S(3,1)=S(2,2)
S(3,2)=S(1,1)
S(3,3)=S(2,4)
S(3,4)=S(1,3)
S(3,5)=S(2,6)
S(3,6)=S(1,5)
S(3,7)=S(2,8)
S(3,8)=S(1,7)

```

C

```
CALL MATMUL(AUXMAT,HOOKE,S,3,8,3)
```

C

```

DO 130 I=1,3
DO 130 J=1,8

```

```
130 ZMAT(J,I)=S(I,J)
```

C

```
CALL MATMUL(S,ZMAT,AUXMAT,8,8,3)
```

C

```

DO 150 JL=1,8
DO 150 JK=1,8

```

```

150 RIGEL(JL,JK)=RIGEL(JL,JK)+COEFG(K)*S(JL,JK)*DETJAC
C
S(1,1)=4.*D(2,4)*D(1,2)
S(1,2)=0.
S(1,3)=4.*D(2,3)*D(1,2)
S(1,4)=0.
S(1,5)=4.*D(2,3)*D(1,3)
S(1,6)=0.
S(1,7)=4.*D(2,4)*D(1,3)
S(1,8)=0.
S(2,1)=0.
S(2,2)=S(1,1)
S(2,3)=0.
S(2,4)=S(1,3)
S(2,5)=0.
S(2,6)=S(1,5)
S(2,7)=0.
S(2,8)=S(1,7)
DO 160 JL=1,2
DO 160 JK=1,8
160 ZMAT(JK,JL)=S(JL,JK)
C
CALL MATMUL(AUXMAT,ZMAT,S,8,8,2)
C
DO 180 I=1,8
DO 180 J=1,8
180 MASSA(I,J)=MASSA(I,J)+COEFG(K)*AUXMAT(I,J)*RO*DETJAC
C
DO 190 I=1,8
DO 190 J=1,8
AUXMAT(I,J)=0.
ZMAT(I,J)=0.
190 S(I,J)=0.
C
300 CONTINUE
C
IF(NPONTO.EQ.4) GO TO 305
CALL REORD(RIGEL)
CALL REORD(MASSA)
C
305 DO 350 I=1,NPONTOS
IM=NODO(I)
DO 350 J=1,NPONTOS
IN=NODO(J)
KI=IND(IN)-(IN-IM)
RIGEL(I,J)=RIGEL(I,J)-OMEGA2*MASSA(I,J)
RIGIRR(KI)=RIGIRR(KI)+RIGEL(I,J)
350 CONTINUE
C
500 CONTINUE
C
OPEN(UNIT=2,STATUS='NEW',FILE='IRR.DAT',FORM='FORMATTED')

```



```
NREG=NFIM/6
NRESTO=NFIM-NREG*6
WRITE(2,2180) T
WRITE(2,2190) IZONA,NREG,NRESTO
WRITE(2,2180) COMP
WRITE(2,2190) NELLIN,NELCOL,NFIM
DO 630 I=1,NREG
INI=(I-1)*6+1
IFIM=INI+5
630 WRITE(2,2200)(RIGIRR(J),J=INI,IFIM)
IF(NRESTO.EQ.0) GO TO 655
NREG=NREG+1
INI=IFIM+1
IFIM=INI+NRESTO-1
WRITE(2,2200)(RIGIRR(J),J=INI,IFIM)
C
655 CLOSE(2)
C
1000 FORMAT(/,' INICIO DO CALCULO ZONA IRREGULAR :',/)
1030 FORMAT(3I3,F8.3)
2060 FORMAT(/,' PERIODO =',F8.5)
2080 FORMAT(5X,' N.ELEM/LINHA  -',I6,' N.ELEM/COLUNA  -',I6)
2090 FORMAT(5X,' N.ELEMENTOS  -',I6,' N.ELEM.VECTOR -',I6,/)
2180 FORMAT(F8.3)
2190 FORMAT(3I6)
2200 FORMAT(6E12.5)
END
```

```

C
C..... LER .....
C
C   SUBROUTINE LER(IEL,POS,RO,ALFA,BETA)
C
C   DIMENSION X(10),Y(10),POS(10,10)
C
C   READ(1,1050) (X(I),Y(I),I=1,4),RO,ALFA,BETA
C
C   MATRIZ POSICAO DOS NODOS   - [POS]
C
C   DO 10 L=1,4
C     POS(L,1)=X(L)
10  POS(L,2)=Y(L)
C
C 1050 FORMAT (1X,8F7.2,3F7.3)
C
C   RETURN
C   END

```

```
C
C..... MATMUL .....
C
C    MULTIPLICACAO DE MATRIZES: A(I1,I2)=B(I1,I3)*C(I3,I2)
C
C    SUBROUTINE MATMUL(A,B,C,I1,I2,I3)
C
C    DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10)
C
C    DO 10 I=1,I1
C    DO 10 J=1,I2
C    A(I,J)=0.0
C    DO 10 K=1,I3
10  A(I,J)=A(I,J)+B(I,K)*C(K,J)
C    RETURN
C    END
```

```

C
C ..... GAUSSQ .....
C
C   SUBROUTINE GAUSSQ(L,LINT,R,Z,W)
C
C   DIMENSION LR(9),LZ(9),LW(9),R(10),Z(10),W(10)
C
C   DATA LR/-1,1,1,-1,0,1,0,-1,0/,LZ/-1,-1,1,1,-1,0,1,0,0/
C   DATA LW/4*25,4*40,64/
C
C   LINT=L*L
C   GO TO (1,2,13) L
C
C   INTEGRACAO 1X1
C
C   1  R(1)=0.
C     Z(1)=0.
C     W(1)=4.
C     RETURN
C
C   INTEGRACAO 2X2
C
C   2  G=1./SQRT(3.)
C     DO 10 I=1,4
C       R(I)=G*LR(I)
C       Z(I)=G*LZ(I)
C   10  W(I)=1.
C     RETURN
C
C   INTEGRACAO 3X3
C
C   13 G=SQRT(.6)
C     H=1./81.
C     DO 20 I=1,9
C       R(I)=G*LR(I)
C       Z(I)=G*LZ(I)
C   20  W(I)=H*LW(I)
C     RETURN
C     END

```

```

C
C ..... REORD .....
C
C   SUBROUTINE REORD(A)
C
C   DIMENSION A(10,10),B(10,10)
C
C   LINHAS
C
C   DO 10 I=7,8
C   DO 10 J=1,8
C   B(I-6,J)=A(I,J)
C   A(I,J)=A(I-2,J)
C   A(I-2,J)=A(I-4,J)
10  A(I-4,J)=B(I-6,J)
C
C   COLUNAS
C
C   DO 20 I=7,8
C   DO 20 J=1,8
C   B(J,I-6)=A(J,I)
C   A(J,I)=A(J,I-2)
C   A(J,I-2)=A(J,I-4)
20  A(J,I-4)=B(J,I-6)
C
C   RETURN
C   END

```

A3. Procedimento Geral de cálculo para a Propagação de ondas de Rayleigh num meio estratificado horizontalmente

A3.1. Método Numérico para a resolução do sistema

O sistema (6.1.24) pode escrever-se simplifadamente

$$[S] \{u\} = \{r\}$$

onde $[S]$ é uma matriz quadrada, simétrica, de elementos complexos, $\{r\}$ o vector representando o termo independente cujos elementos também são complexos e $\{u\}$ o vector solução.

A matriz $[S]$ pode ser decomposta no produto de duas matrizes triangulares, $[S] = [P][Q]$, uma inferior e outra superior tal que

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ P_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ 0 & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix}$$

Esta triangulação da matriz $[S]$ vai permitir encontrar a solução do sistema através da resolução sucessiva de dois sistemas mais simples

$$[P]\{y\} = \{r\} \quad \text{e} \quad [Q]\{u\} = \{y\}$$

aplicando-se as seguintes fórmulas de recorrência

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1 \\ y_j &= r_j - \sum_{k=1}^{j-1} Q_{jk} y_k \quad (j=2,3,\dots,n) \\ u_n &= \frac{y_n}{P_{nn}} \\ u_j &= y_j - \sum_{k=j+1}^n P_{jk} u_k \quad (j=n-1, n-2, \dots, 1) \end{aligned}$$

Como o número de equações em jogo é da ordem dos milhares, ver QUADRO 7.3, o número de coeficientes da matriz do sistema (6.1.24) é bastante elevado. Todavia, como nesta matriz simétrica, o número de coeficientes nulos é elevado, recorreremos a um algoritmo que economise bastantes posições de memória do computador e, conseqüentemente, efectue os cálculos com maior velocidade. Procurámos um processo particular para o armazenamento da matriz [Zienkiewicz(1972)] o que nos permitiu uma grande economia da memória disponível (ver QUADRO 7.3).

O fundamento deste método assenta no facto de que [S] pode ser condensada num vector {v} onde não entram a maior parte dos seus elementos nulos, identificando-se a sua posição no quadro original através de um segundo vector {diag} que localiza os elementos da diagonal principal. É o que ilustramos com o seguinte exemplo:

$$[S] = \begin{array}{ccccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & & & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & & \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} & \\ \text{simétrica} & & & & S_{55} & S_{56} & S_{57} \\ & & & & & S_{66} & S_{67} \\ & & & & & & S_{77} \end{array}$$

os elementos não representados na matriz triangular superior correspondem a coeficientes nulos.

Assim a passagem de [S] → {v} será feita da forma:

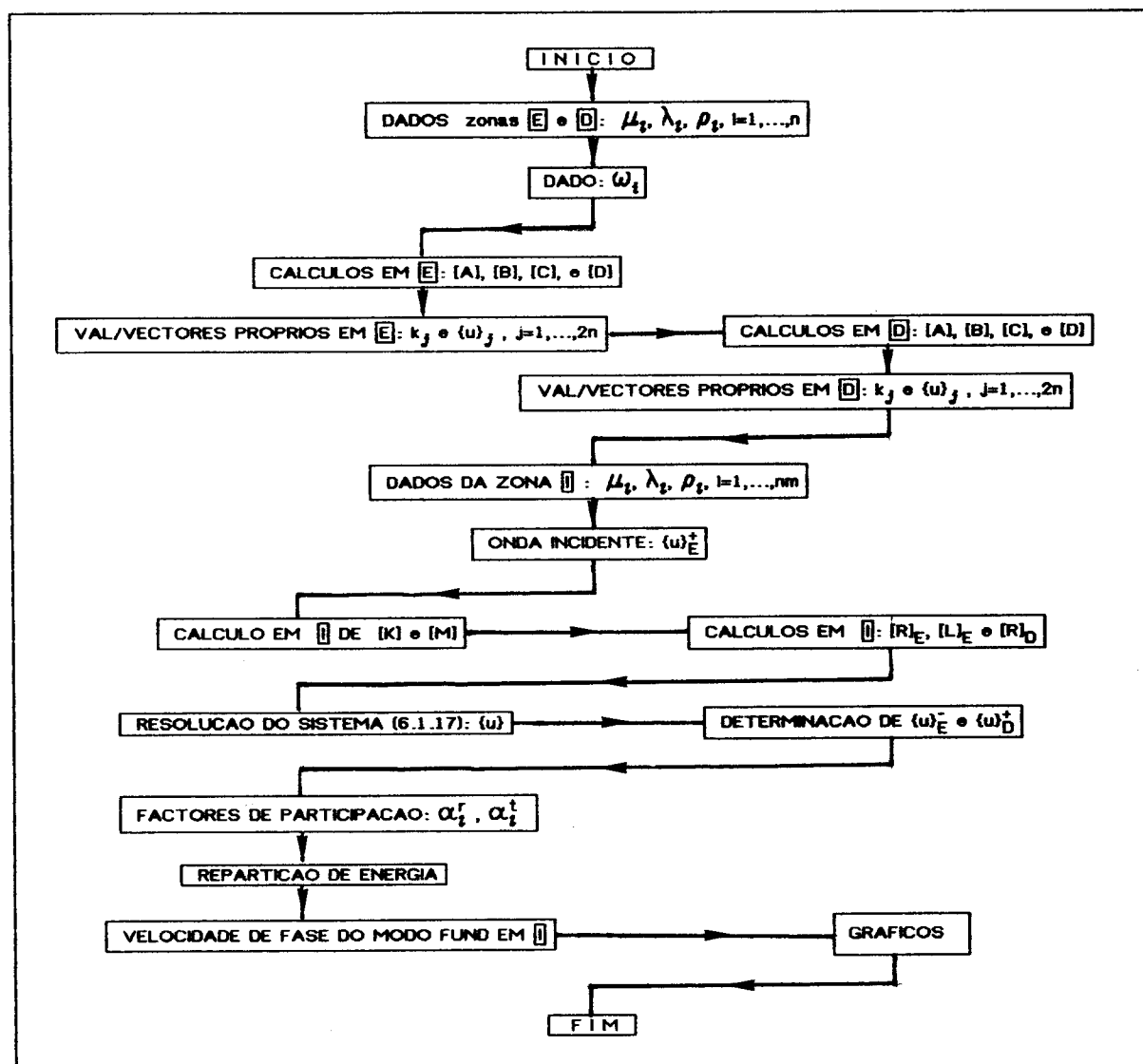
$$\begin{array}{cccccccc} \{v\} = \{ & S_{11}, S_{12}, & S_{22}, S_{13}, S_{23}, & S_{33}, S_{24}, S_{34}, & S_{44}, S_{35}, S_{45}, & S_{55}, S_{16}, S_{26}, 0, S_{46}, S_{56}, & S_{66}, S_{57}, S_{67}, & S_{77} \} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{(dia)} = \{ & 1, & 3, & 6, & 9, & 12, & 18, & 21 \} \end{array}$$

em que o vector $\{1,3,6,9,12,18,21\}$ identifica claramente a posição dos elementos da diagonal principal da matriz original no vector $\{v\}$.

A3.2. Fluxograma Geral para o cálculo automático

Tendo desenvolvido toda a teoria para a análise do comportamento de uma estrutura irregular no Capítulo 6, apresentamos agora a sucessão de passos correspondentes à sua aplicação ao cálculo automático.

FLUXOGRAMA III



A3.3. Rotinas em FORTRAN

```

C
C           'RAYLEI-IRREG'
C
C           PROPAGACAO DE ONDAS DE RAYLEIGH NUMA ESTRUTURA IRREGULAR
C           METODO DOS ELEMENTOS FINITOS
C
C           ZONA - REGULAR (ESQ. [1] , DIR. [2] ) , IRREGULAR [3]
C
C           SUBROTINAS : 'LEITM1', 'MPCPCPX', 'XINVCX', 'MPCMPX', 'MATSOM', 'VERIFI'
C           'LEITM2', 'TINDEP', 'FORMA', 'GRAVA', 'ACTCOL', 'VERSOL'
C
C           UNIDADES
C           LEITURA (IBOCE.DAT/IBCON.DAT) ... .. <1>
C           GRAVACAO(OCE.DAT/CON.DAT) ... .. <2>
C           IMPRESSAO ... .. <6>
C
C           REAL ENERGR(150),ENERGT(150),ER(150),ET(150)
C           COMPLEX R1(150,150),VALP1(150),VALP2(150),VINCD(150),
1           TIND(4000),ALFREF(150),ALFTRM(150),DREF(150),DTRM(150),
2           VECIN(150,150), RIGIRR, VEC,EMATD
C           LOGICAL AFAC,BACK
C           CHARACTER *12 LEITURA
C
C           COMMON/ONE/ AA1(150,150)
C           COMMON/TWO/ DD1(150,150)
C           COMMON/THREE/VEC(150,150)
C           COMMON/FOUR/RIGIRR(450000)
C           COMMON/FIVE/EMATD(150,150)
C           COMMON/SIX/IND(4000)
C
C           DATA DEL/0.01/
C           PI=2.*ASIN(1)
C
C           FESC=100.
C           OPEN(UNIT=6,STATUS='NEW',FILE='SAIFIM.DAT',FORM='FORMATTED')
C
C.....ZONA 1 .....
C
C           WRITE(*,1000)
C           READ (*,1030) LEITURA
C           CALL LEITM1(LEITURA,T,BETA1,BETA2,VALP1,NM,IFUND)
C
C           DO 10 I=1,NM
10          VINCD(I)=CMPLX(FESC,0.)*VEC(I,IFUND)
C           CONDA=2.*PI/REAL(VALP1(IFUND))
C           VFASE=CONDA/T
C           OMEGA=2.*PI/T
C
C           NM2=NM/2
C           WRITE(6,2100) T
C           WRITE(6,2120) IFUND,VFASE,CONDA,FESC

```

```

WRITE(6,2140) VINCD(1),VINCD(2)
C
CALL MPRCPX(R1,VALP1,NM,NM,NM)
CALL XINVCX(NM)
C
DO 30 I=1,NM
DO 30 J=1,NM
30 VECIN(I,J)=VEC(I,J)
C
CALL MPCMPX(R1,NM,NM,NM)
CALL MATSOM(NM)
C
C.....ZONA 3 .....
C
WRITE(*,1020)
READ (*,1030) LEITURA
CALL LEITM2(NLIN,NCOL,NFIM,COMP)
C
NNODOS=NLIN*(NCOL+1)
NEQUAC=2*NNODOS
WRITE(*,2200)NNODOS,NEQUAC
NLIN2=2*NLIN
C
CALL TINDEP(NLIN,NEQUAC,VINCD,TIND)
C
DO 60 I=1,NLIN2
DO 60 J=1,NLIN2
IJ=I+J
IJ2=IJ/2
IF(IJ.EQ.2*IJ2) GO TO 60
EMATD(I,J)=-EMATD(I,J)
60 CONTINUE
C
CALL FORMA(NLIN,NEQUAC)
C
C.....ZONA 2 .....
C
WRITE(*,1010)
READ (*,1030) LEITURA
CALL LEITM1(LEITURA,T,BETA1,BETA2,VALP2,NM,IFDD)
C
CALL MPRCPX(R1,VALP2,NM,NM,NM)
CALL XINVCX(NM)
CALL MPCMPX(R1,NM,NM,NM)
CALL MATSOM(NM)
C
CALL FORMB(NLIN,NEQUAC)
C
AFAC=.TRUE.
BACK=.TRUE.
C
WRITE(*,2020)
CALL ACTCOL(TIND,NEQUAC,AFAC,BACK)
C

```

```

DO 100 I=1,NLIN2
DREF(I)=TIND(I)-VINCD(I)
100 DTRM(I)=TIND(NLIN2*NCOL+I)
C
WRITE(6,2310) NLIN,NCOL,NNODOS,NEQUAC,COMP
WRITE(6,2330)(TIND((I-1)*NLIN2+1),TIND((I-1)*NLIN2+2),I-1,NCOL+1)
C
DO 120 I=1,NLIN2
ALFREF(I)=(0.,0.)
ALFTRM(I)=(0.,0.)
DO 120 J=1,NLIN2
ALFREF(I)=ALFREF(I)+VECIN(I,J)*DREF(J)
120 ALFTRM(I)=ALFTRM(I)+VEC(I,J)*DTRM(J)
C
NMODOS=5
ETOTAL=0.
DO 140 I=1,NLIN2
IF(AIMAG(VALP1(I)).NE.0.0) GO TO 140
VFASE=2.*PI/REAL(VALP1(I))/T
ENERGR(I)=(CABS(ALFREF(I)))**2*ABS(VFASE)/4.
ETOTAL=ETOTAL+ENERGR(I)
140 CONTINUE
ETOTAL1=ETOTAL
DO 160 I=1,NLIN2
IF(AIMAG(VALP2(I)).NE.0.0) GO TO 160
VFASE=2.*PI/REAL(VALP2(I))/T
ENERGT(I)=(CABS(ALFTRM(I)))**2*ABS(VFASE)/4.
ETOTAL=ETOTAL+ENERGT(I)
160 CONTINUE
ETOTAL2=(ETOTAL-ETOTAL1)/ETOTAL
ETOTAL1=ETOTAL1/ETOTAL
C
NZ=0
DO 180 I=1,NLIN2
XMOD=CABS(ALFREF(I))
XARG=AIMAG(ALFREF(I))/REAL(ALFREF(I))
XARG=ATAN(XARG)
IF(AIMAG(VALP1(I)).NE.0.0) GO TO 180
ENERGR(I)=ENERGR(I)/ETOTAL
VFASE=2.*PI/REAL(VALP1(I))/T
NZ=NZ+1
IF (NZ.EQ.1) THEN
VF1=VFASE
ENDIF
IF(NZ.GT.NMODOS) GO TO 183
WRITE(6,2410) I,ENERGR(I),VFASE,XMOD,XARG
GO TO 180
177 WRITE(6,2430) I,ALFREF(I),XMOD,XARG
180 CONTINUE
183 WRITE(6,2450) ETOTAL1
WRITE(*,2040)
NZ=0
DO 210 I=1,NLIN2
XMOD=CABS(ALFTRM(I))

```

```

XARG=AIMAG(ALFTRM(I))/REAL(ALFTRM(I))
XARG=ATAN(XARG)
IF(AIMAG(VALP2(I)).NE.0.0) GO TO 210
VFASE=2.*PI/REAL(VALP2(I))/T
ENERGT(I)=ENERGT(I)/ETOTAL
NZ=NZ+1
IF (NZ.EQ.1) THEN
  VF2=VFASE
  XARG1=XARG
ENDIF
IF(NZ.GT.NMODOS) GO TO 213
WRITE(6,2410) I,ENERGT(I),VFASE,XMOD,XARG
GO TO 210
207 WRITE(6,2430) I,ALFTRM(I),XMOD,XARG
210 CONTINUE
213 WRITE(6,2450) ETOTAL2
C
  V=0.
  VF1=ABS(VF1)
  VF2=ABS(VF2)
  VFM=(VF1+VF2)/2.
231 V=V+1.
  KV=INT(V)
  VELFAS2=2.*PI*COMP/(T*(XARG1+V*PI))
  DV=ABS(VFM-VELFAS2)
  IF(V.EQ.1.) GO TO 233
  IF(DV.GT.DVM) GO TO 235
233 DVM=DV
  VFIRR=VELFAS2
  KVM=KV
235 IF (KV.LT.150) GO TO 231
  WRITE(6,2410) KVM,VF1,VF2,VFM,VFIRR
C
237 FACREF=CABS(DREF(2))/CABS(VINCD(2))
  FACTRM=CABS(DTRM(2))/CABS(VINCD(2))
  WRITE(6,2470) FACTRM,FACREF
  WRITE(*,2490) FACTRM,FACREF
  CLOSE(6)
C
1000 FORMAT(//,' FICHEIRO DE LEITURA ZONA REGULAR ... 1')
1010 FORMAT(//,' FICHEIRO DE LEITURA ZONA REGULAR ... 2')
1020 FORMAT(//,' FICHEIRO DE LEITURA ZONA IRREGULAR ... 3')
1030 FORMAT(A12)
2020 FORMAT(/,' RESOLUCAO DO SISTEMA: [AJU-TIND',/)
2040 FORMAT(//,' TAXA DE ENERGIA DE DIF. MODOS(TRANSMITIDOS) ',/)
2100 FORMAT(F7.3)
2120 FORMAT(I5,7X,E12.5,7X,E12.5,F9.3)
2140 FORMAT(4E18.10)
2200 FORMAT( /,14X,'NUM.NODOS ',I4,5X,'NUM.EQUAC.',I5,/)
2310 FORMAT(I8,4X,I8,4X,I8,4X,I8,4X,F7.2)
2330 FORMAT(4E18.10)
2410 FORMAT(I4,1X,4E18.10)
2430 FORMAT(I4,1X,4E18.10)
2450 FORMAT(5X,E18.10)

```

```
2470 FORMAT(5X,2E18.10)
```

```
2490 FORMAT( /, ' FACTOR TRANSMISSAO :',E20.11,' FACTOR REFLEXAO :',  
* E20.11)
```

```
C
```

```
END
```

```

C
C
C          LEITM1
C
C          SUBROUTINE LEITM1(LEITURA,T,B1,B2,VALP,NM,IZONA,IFD)
C
C          COMPLEX VP,VALP(150)
C          CHARACTER *12 LEITURA
C
C          COMMON/ONE/A1(150,150)
C          COMMON/THREE/VP(150,150)
C          COMMON/TWO/D1(150,150)
C
C          A) LEITURA DAS MATRIZES [A1] E [D1]
C
C          WRITE(*,2000) LEITURA
1  OPEN(UNIT=2,STATUS='OLD',FILE=LEITURA,FORM='FORMATTED')
   READ(2,2130) B1,B2
   READ(2,2140) IZONA,NM2
   READ(2,2150) T
C
C          NM=NM2*2
C          WRITE(*,2080) IZONA,NM
C          WRITE(*,2020) T
C
C          DO 20 I=1,NM
C          DO 20 J=1,NM
C          A1(I,J)=0.
20  D1(I,J)=0.
C
C          DO 30 I=1,NM2-1
C          J=2*I-1
C          READ(2,2180) A1(J,J),A1(J+1,J+1),
*           A1(J,J+2),A1(J+1,J+3)
C          READ(2,2180) D1(J,J+1),D1(J+1,J),
*           D1(J,J+3),D1(J+1,J+2)
C          D1(J+3,J)=-D1(J+1,J+2)
30  D1(J+2,J+1)=-D1(J,J+3)
C          NM1=NM-1
C          READ(2,2180) A1(NM1,NM1),A1(NM,NM),D1(NM1,NM),D1(NM,NM1)
C
C          DO 40 I=1,NM-1
C          I1=I+1
C          DO 40 J=I1,NM
40  A1(J,I)=A1(I,J)
C
C          READ(2,2160) NM
C
C          NEST=NM/2
C          DO 50 I=1,NM
C          READ(2,2190) IO,VALP(I)
C          READ(2,2190) IO,VF,VG
C          DO 50 J=1,NM,2
C          READ(2,2175) A,VP(J,I),VP(J+1,I)
C          IF(CABS(VP(J,I)).GT.1.0E-5) GO TO 47

```

```

VP(J,I)=CMPLX(0.,0.)
47 IF(CABS(VP(J+1,I)).GT.1.0E-5) GO TO 50
   VP(J+1,I)=CMPLX(0.,0.)
50 CONTINUE
   READ(2,2190) IFD,VF,VG
   CLOSE(2)

```

C

```

2000 FORMAT(/, ' LEITURA ZONA REGULAR ..... ',A12)
2020 FORMAT('          PERIODO =',F8.5)
2080 FORMAT('          ZONA :,I3,' ..... NUM.VAR.:',I4)
2130 FORMAT(2F6.3)
2140 FORMAT(2I3)
2150 FORMAT(F8.3)
2160 FORMAT(I5)
2170 FORMAT(I3,4E16.5)
2175 FORMAT(F10.3,4X,4E16.8)
2180 FORMAT(4E20.11)
2190 FORMAT(I4,2E16.5)

```

C

```

600 RETURN
   END

```

```

C
C           'LEITM2'
C
C   SUBROUTINE LEITM2(NLIN,NCOL,NFIM,COMP,IZONA)
C
C   DIMENSION AL(10)
C
C   COMPLEX RIGIRR
COMMON/FOUR /RIGIRR(450000)
COMMON/SIX/IND(4000)
C
C   WRITE(*,2000) LEITURA
OPEN(UNIT=2,STATUS='OLD',FILE='IRR.DAT',FORM='FORMATTED')
READ(2,2150) T
READ(2,2140) IZONA,NREG,NRESTO
READ(2,2150) COMP
READ(2,2140) NLIN,NCOL,NFIM
WRITE (*,2080) NLIN,NCOL
WRITE (*,2020) T
DO 10 I=1,NREG
INI=(I-1)*6+1
IFIM=INI+5
READ(2,2200)(AL(IJ),IJ=1,6)
IJ=0
DO 10 II=INI,IFIM
IJ=IJ+1
10 RIGIRR(II)=CMPLX(AL(IJ),0.0)
IF(NRESTO.EQ.0) GO TO 35
INI=IFIM+1
IFIM=INI+NRESTO-1
READ(2,2200)(AL(IJ),IJ=1,NRESTO)
IJ=0
DO 20 II=INI,IFIM
IJ=IJ+1
20 RIGIRR(II)=CMPLX(AL(IJ),0.0)
C
C   35 I1=0
NEL2=2*NLIN
DO 40 I=1,NEL2+4
I1=I1+I
40 IND(I)=I1
DO 50 I=NEL2+5,2*(NLIN*NCOL+NLIN)
50 IND(I)=IND(I-1)+2*(NLIN+2)
CLOSE(2)
C
C   2000 FORMAT(/,' LEITURA ZONA IRREGULAR ..... ',A12)
2020 FORMAT(' PERIODO =',F8.5)
2080 FORMAT(' LINHAS:',I4,' ..... COLUNAS :,I4)
2140 FORMAT(3I6)
2150 FORMAT(F8.3)
2200 FORMAT(6E12.5)
RETURN
END

```



```
C
C
C           'MPCMPX'
C
C   SUBROUTINE MPCMPX(B,I1,I2,I3)
C
C   COMPLEX B(150,150),A,C
C   COMMON/THREE/C(150,150)
C   COMMON/FIVE/A(150,150)
C
C   DO 30 I=1,I1
C   DO 30 J=1,I2
C   A(I,J)=CMPLX(0.,0.)
C   DO 30 K=1,I3
30  A(I,J)=A(I,J)+B(I,K)*C(K,J)
C   RETURN
C   END
```

```
C
C
C           'MPCPX'
C
C   SUBROUTINE MPCPX(A,VP,I1,I2,I3)
C
C   COMPLEX A(150,150),C,VP(150)
C   COMMON/ONE/B(150,150)
C   COMMON/THREE/C(150,150)
C
C   DO 30 I=1,I1
C   DO 30 J=1,I2
C   A(I,J)=CMPLX(0.,0.)
C   DO 30 K=1,I3
30  A(I,J)=A(I,J)+CMPLX(0.0,B(I,K))*C(K,J)*VP(J)
C   RETURN
C   END
```

```
C
C
C           'MATSOM'
C
C   SUBROUTINE MATSOM(I1)
C
C   COMPLEX A
C   COMMON/TWO/C(150,150)
C   COMMON/FIVE/A(150,150)
C
C   DO 30 I=1,I1
C   DO 30 J=1,I1
30  A(I,J)=A(I,J)+CMPLX(C(I,J),0.0)
C   RETURN
C   END
```

```

C
C           'TINDEP'
C
C   SUBROUTINE TINDEP(NL,NQ,VD,TD)
C
C   COMPLEX AR,VD(150),TD(4000),Z
C   COMMON/FIVE/AR(150,150)
C
C   DO 10 I=1,NQ
10  TD(I)=CMPLX(0.,0.)
C
C   DO 20 I=1,2*NL
C   DO 20 J=1,2*NL
C   IND=I+J
C   IND2=IND/2
C   IF(IND.EQ.2*IND2) GO TO 18
C   Z=CMPLX(0.,0.)
C   GO TO 20
18  Z=CMPLX(2.,0.)*AR(I,J)
20  TD(I)=TD(I)+Z*VD(J)
C
C   RETURN
C   END

```

```

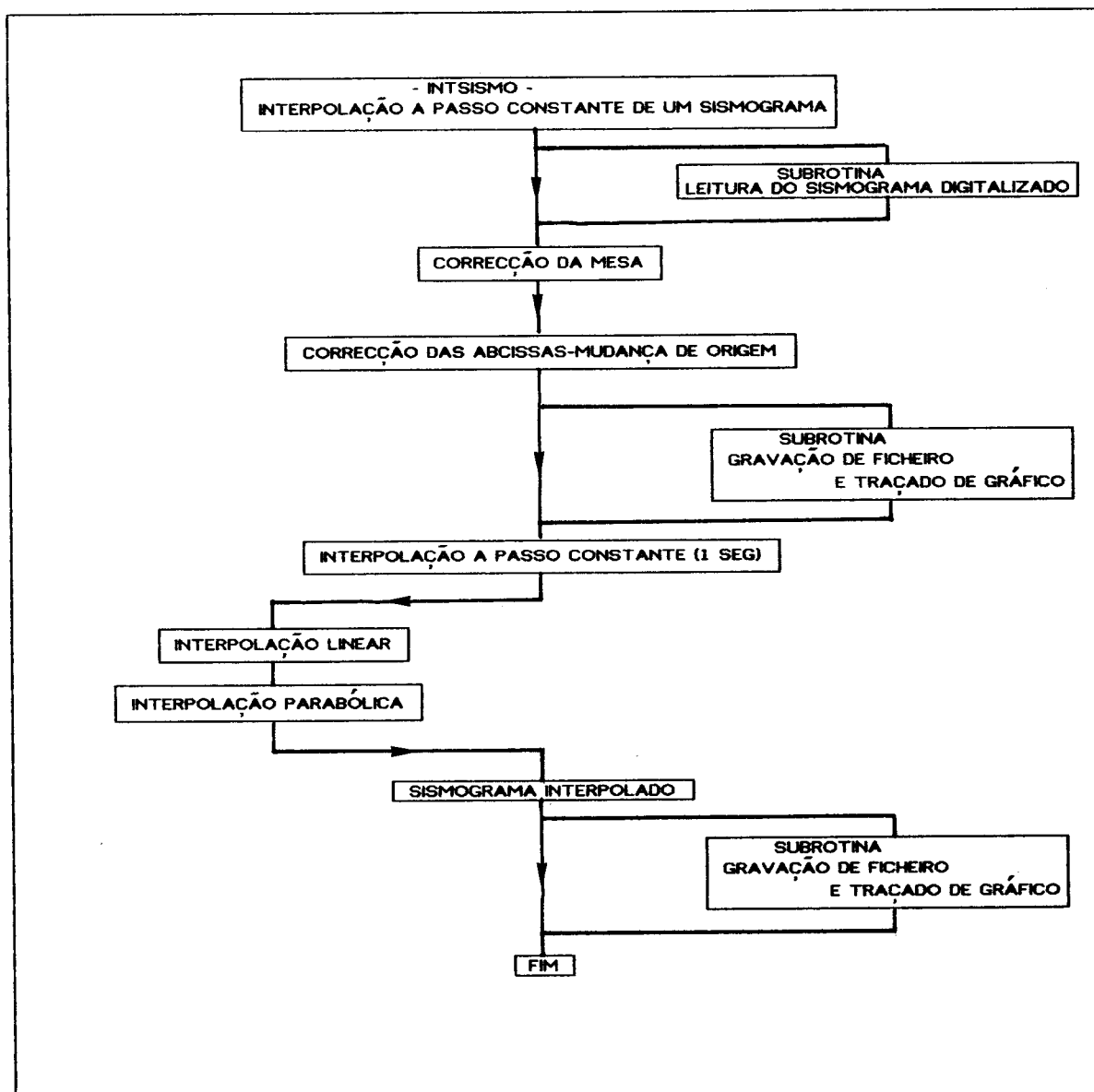
C
C           'FORMA'
C
C   SUBROUTINE FORMA(NL,NQ)
C
C   COMPLEX A,C
C   COMMON/FOUR/A(450000)
C   COMMON/FIVE/C(150,150)
C   COMMON/SIX/IND(4000)
C
C   .....FORMACAO DA MATRIZ
C   DO 50 I=1,2*NL
C   DO 50 J=1,2*NL
C   KI=IND(J)-(J-I)
50  A(KI)=A(KI)+C(I,J)
C   RETURN
C   END

```

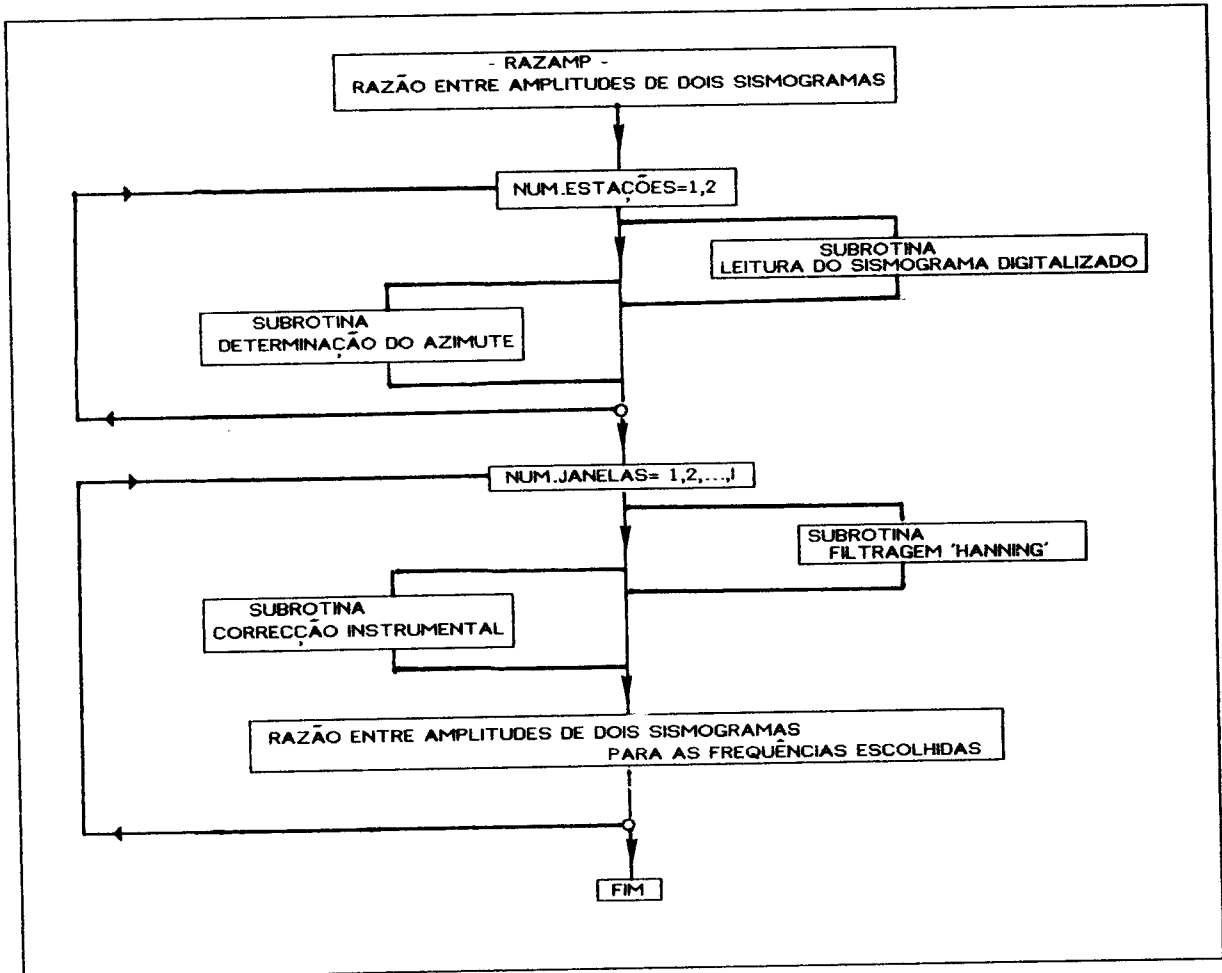
```
C
C           'FORMB'
C
C   SUBROUTINE FORMB(NL,NQ)
C
C   COMPLEX D,A
C   COMMON/FOUR/A(450000)
C   COMMON/FIVE/D(150,150)
C   COMMON/SIX/IND(4000)
C
C   .....FORMACAO DA MATRIZ
C   DO 50 I=1,2*NL
C   I1=NQ-2*NL+I
C   DO 50 J=1,2*NL
C   J1=NQ-2*NL+J
C   KI1=IND(J1)-(J1-I1)
50  A(KI1)=A(KI1)+D(I,J)
C   RETURN
C   END
```

- A4. Procedimento Geral de cálculo para o tratamento digital dos Sismogramas
- A4.1. Fluxogramas para o cálculo automático

FLUXOGRAMA IV



FLUXOGRAMA V



A4.2. Rotinas em FORTRAN

```

C
C           INTSISMO
C
C INTERPOLACAO A PASSO CONSTANTE (1 SEG.) DE UM SISMOGRAMA
C
C   DIMENSION XPONTO(8000),YPONTO(8000),IPONTO(10),JPONTO(10),
C   1YINTER(8000),AX(4),AY(4),P(4),Q(4),R(4),MLINHA(3,5)
C
C   INTEGER DATA,HORSIS,HIN,HORINI,ANO,DIA,HORA,PROF
C
C           LEITURA DO FICHEIRO
C
C   CALL LERDIG(XPONTO,YPONTO,XCORRF,XCORRI,YCORRF,YCORRI,
1   XTOPF,XTOPI,YTOPF,YTOPI, DATA,HORSIS,LAT,LONG,PROF)
C
C   RAI02=(XCORRF-XCORRI)**2+(YCORRF-YCORRI)**2
C   RAI0=SQRT (RAI02)
C   COTETA=(XCORRF-XCORRI)/RAI0
C   SNTETA=(YCORRF-YCORRI)/RAI0
C   PASSO=(XTOPF-XTOPI)*COTETA+(YTOPF-YTOPI)*SNTETA
C   PASSO=ABS (PASSO)
C   WRITE (0,1065) PASSO
C   DO 40 I=1,NPONTO
C   XPONTO(I)=XPONTO(I)*COTETA+YPONTO(I)*SNTETA
C   40 YPONTO(I)=-XPONTO(I)*SNTETA+YPONTO(I)*COTETA
C
C   101 IJ=1
C       J=1
C       DO 120 I=2,NPONTO
C       DELTA=XPONTO(I)-XPONTO(J)
C       IF(DELTA) 114,114,102
C   102 IF(IJ-1) 104,104,106
C   104 J=J+1
C       GO TO 120
C   106 DELTA=DELTA/FLOAT(IJ)
C       DELTA=ABS(DELTA)
C       IJ=IJ-1
C       DO 110 IK=1,IJ
C       JK=J+IK
C   110 XPONTO(JK)=XPONTO(JK-1)+DELTA
C       J=I
C       IJ=1
C       GO TO 120
C   114 IJ=IJ+1
C   120 CONTINUE
C
C   DELTAT=XPONTO(1)-XTOPF
C   DO 160 I=2,NPONTO
C   XPONTO(I)=XPONTO(I)-XPONTO(1)

```

```

160 YPONTO(I)=YPONTO(I)-YPONTO(1)
    XPONTO(1)=0.
    YPONTO(1)=0.
    DELTAT=DELTAT/PASSO
    MF=INT(DELTAT)
    ISEG=INT((DELTAT-MF)*60)
    MF=MF+MIN
    HORA=HORA+MF/60
    MF=MF-60*(MF/60)
    INIDIG=HORA*(10**4)+MF*(10**2)+ISEG
    ITT=-1
    WRITE (0,1190) ITT
    IF (ITT.EQ.1) GO TO 166

```

C

C FICHEIRO PARA TRACADO DE GRAFICO (ITT=-1)

C

```

    CALL FICHEX (ITT,DATA,HORSIS,LAT,LONG,PROF,INIDIG,YPONTO,XPONTO,
*NPONTO,PASSO)

```

C

```

166 PASSO=PASSO/60
    NPINT=INT((XPONTO(NPONTO)-XPONTO(1))/PASSO)+1
    WRITE(0,1120)
    WRITE(0,1130) PASSO
    WRITE(0,1140) NPINT
    KMAX=2
    YINTER(1)=YPONTO(1)
    XPS=XPONTO(1)
    DO 240 I=2,NPINT
    XPS=PASSO+XPS
    DO 180 K=KMAX,NPONTO
    IF (XPONTO(K)-XPS) 180,181,182
180 CONTINUE
181 YINTER(I)=YPONTO(K)
    KMAX=K
    GO TO 240
182 IF(K-2) 181,190,183
183 IF(K-NPONTO) 184,190,190
184 IF(YPONTO(K)-YPONTO(K-1)) 186,195,185
185 IF(YPONTO(K+1)-YPONTO(K)) 195,195,190
186 IF(YPONTO(K+1)-YPONTO(K)) 190,195,195

```

C

```

190 A=YPONTO(K)-YPONTO(K-1)
    B=XPONTO(K)-XPONTO(K-1)
    C=XPS-XPONTO(K-1)
    YINTER(I)=YPONTO(K-1)+A*C/B
    KMAX=K
    GO TO 240

```

C

```

195 A=XPS-XPONTO(K-2)
    B=XPONTO(K+1)-XPS
    IF(A-B) 196,197,197
196 IL=K-2

```

```

GO TO 198
197 IL=K-1
198 DO 210 J=1,3
    AX(J)=XPONTO(IL)
    AY(J)=YPONTO(IL)
210 IL=IL+1
    KMAX=K
    DO 220 JL=1,3
        P(JL)=1
        DO 220 J=1,3
            IF(J-JL) 213,220,213
213 Q(JL)=XPS-AX(J)
    R(JL)=AX(JL)-AX(J)
    RAS=R(JL)
    IF(ABS(RAS).LT.0.0001) GO TO 220
    Q(JL)=Q(JL)/R(JL)
    P(JL)=P(JL)*Q(JL)
    GO TO 220
215 WRITE (0,1160) IL,AX(JL)
220 CONTINUE
    YINTER(I)=0
    DO 230 J=1,3
        BY=P(J)*AY(J)
230 YINTER(I)=YINTER(I)+BY
240 CONTINUE
    WRITE (0,1170)

```

C

```

ITT=1
CALL FICHEX (ITT,DATA,HORSIS,LAT,LONG,PROF,INIDIG,YINTER,XPONTO,
*NPINT,PASSO)

```

C

```

1065 FORMAT(1H0,'      PASSO DO SISMOGRAMA  =',F11.1)
1120 FORMAT(1H0,'      INTERPOLACAO A PASSO CONSTANTE - ')
1130 FORMAT(1H0,40X,'..... PASSO (1 SEG) =',F10.0)
1140 FORMAT(1H0,40X,'NUM.PONTOS INTERPOLADOS =',I5)
1160 FORMAT(1H0,'.....',I5,F11.1)
1170 FORMAT(1H0,'      - FIM DA INTERPOLACAO A PASSO CONSTANTE - ')
1180 FORMAT(1H0,'.....  SISMOGRAMA INTERPOLADO A PASSO CONSTA
1NTE .....')
1185 FORMAT(1H0)
1190 FORMAT(1H0,' FICHEIRO GRAFICO <SIM,NAO>...<-1, > === ',I2)
1500 END

```



```
C      SUBROUTINE LERDIG(XPONTO,YPONTO,
C
C      DIMENSION XPONTO(8000),YPONTO(8000),IPONTO(10),JPONTO(10),
C
C      INTEGER DATA,HORSIS,HIN,HORINI,ANO,DIA,HORA,PROF
C
      WRITE (0,1000)

      READ (6,1020) DATA,HORSIS, HORINI,LAT,LONG,PROF,NREG,KK,
1(IPONTO(K),JPONTO(K),K=1,4)
      DIA=DATA/10000
      MES=DATA/100-DIA*100
      ANO=DATA-100*(DATA/100)
      HIN=HORSIS/100000
      MIN1=(HORSIS-HIN*100000)/1000
      SEG=FLOAT(HORSIS-(HIN*100000+MIN1*1000))/10
      HORA=HORINI/100000
      MIN=(HORINI-HORA*100000)/1000
      PCLAT=LAT-10*(LAT/10)
      IF(PCLAT) 2,2,3
2 PCLAT=' S'
      GO TO 4
3 PCLAT=' N'
4 RLAT=LAT/100
      RLAT=RLAT/1000
      PCLONG=LONG-10*(LONG/10)
      IF(PCLONG) 6,6,7
6 PCLONG=' W'
      GO TO 8
7 PCLONG=' E'
8 RLONG=LONG/10
      RLONG=RLONG/1000
      WRITE (0,1002)
      WRITE (0,1010) DIA,MES,ANO,RLAT,PCLAT,RLONG,PCLONG,PROF
      WRITE(0,1015) HIN,MIN1,SEG
      XCORRI=IPONTO(1)
      YCORRI=JPONTO(1)
      XCORRF=IPONTO(2)
      YCORRF=JPONTO(2)
      XTOPI=IPONTO(3)
      YTOPI=JPONTO(3)
      XTOPF=IPONTO(4)
      YTOPF=JPONTO(4)
      WRITE (0,1040)
      WRITE (0,1030)XCORRI,YPONTO,XCORRF,YPONTO
      WRITE (0,1050)
      WRITE (0,1030)XTOPI,YTOPI,XTOPF,YTOPF
      J=0
      DO 20 L=1,NREG
      READ (6,1020) (IPONTO(K),JPONTO(K),K=1,8)
      DO 10 K=1,8
```

```
J=J+1
XPONTO(J)=IPONTO(K)
10 YPONTO(J)=JPONTO(K)
20 CONTINUE
NPONTO=J
WRITE (0,1060) NPONTO
```

C

```
1000 FORMAT (1H0,'... LEITURA DE FICHEIRO')
1010 FORMAT(1H0,5X,'DATA: ',I2,'/',I2,'/',I2,4X,'LAT: ',F6.3,A2,4X,
1      'LONG: ',F7.3,A2,5X,'PROF: ',I6,' M')
1015 FORMAT(1H0,5X,'HORA DO SISMO : ',I2,' H ',I2,' M ',F4.1,' S')
1020 FORMAT(2X,8(2I8))
1030 FORMAT(1H0,20X,4F10.0)
1040 FORMAT(1H0,'   CORRECCAO DA MESA (XI ,YI ,XF ,YF)  ')
1050 FORMAT(1H0,'   MARCAAO HORARIA (XI ,YI ,XF ,YF)  ')
1060 FORMAT(1H0,'   NUM.PONTOS SISMOGRAMA   =',I5)
```

C

```
RETURN
END
```



```

      RLATT=RLAT
      RLONGG=RLONG
      CALL EPICNT (RLATT,RLONGG,DISTKM,DANG1,AZIM1,SLTP,PSLTP,
*          SLGP,PSLGP)
C
      WRITE(2,2110)STATION,DATAP,LATP,LONGP,DISTKM,DANG1,AZIM1
C
C PONTA DELGADA
C
      STATION=' P.DELGADA'
      WRITE(*,2000) STATION
C
      CALL LEIT(LEITURA2,XESPEC2,NPINT2,RLAT,RLONG,LATA,LONGA,
*          DATAA,HORSISA)
C
C ... DETERMINACAO DO AZIMUTE
C
      RLATT=RLAT
      RLONGG=RLONG
      CALL EPICNT (RLATT,RLONGG,DISTKM,DANG2,AZIM2,SLTA,PSLTA,
*          SLGA,PSLGA)
C
      WRITE(2,2110)STATION,DATAA,LATA,LONGA,DISTKM,DANG2,AZIM2
C
      CALL CORREL(LAG,XESPEC1,XESPEC2,NPINT1,NPINT2,NP2,KMAX)
C
      PER(1)=3.
      DPER=1.5
      DO 190 I=2,29
      IF(PER(I-1).EQ.30.) DPER=3.
190 PER(I)=PER(I-1)+DPER
      F0=1./FLOAT(NJAN1(1))
      DISP=SQRT(SIN(PI*DANG1/180.)/SIN(PI*DANG2/180.))
C
      DO 500 LJAN=1,3
      NIT1=NJAN1(LJAN)
      NIT2=NJAN2(LJAN)
      WRITE(*,2030) NIT1
      WRITE(*,2050) NIT2
      NTM=(NIT1+NIT2)/2
      NTJ=(NIT2-NIT1)/2
      DO 230 I=1,NIT1-1
230 FJAN(I)=0.0
      DO 240 I=NIT1,NIT2
      ALFA=FLOAT(I-NTM)/FLOAT(NTJ)
240 FJAN(I)=(1.+COS(PI*ALFA))*0.5
C
      CALL CONVOL(XESPEC1,XFILH1,FJAN,NPINT1,NIT2)
      CALL CONVOL(XESPEC2,XFILH2,FJAN,NPINT1,NIT2)
C
      DO 270 K=NPINT1+NIT2,NP2
270 XFILH1(K)=0.

```

```

DO 280 K=NPINT1+NIT2,NP2
280 XFILH2(K)=0.
C
  STATION='AMPINTER.PTO'
  CALL FILTRO(STATION,NP2,XFILH1
*           ,DATAP,LATP,LONGP,DISTKM,DANG1,AZIM1)
C
  STATION='AMPINTER.PDA'
  CALL FILTRO(STATION,NP2,XFILH2
*           ,DATAA,LATA,LONGA,DISTKM,DANG2,AZIM2)
C
  TFINAL=FLOAT(NJAN2(LJAN))
  K=0
307 FI=F0*((2./BD(LJAN))**K)
  FF=F0*((2./BD(LJAN))**(K+1))
  KH2=INT(FLOAT(NP2)*FI+1.)
  KH1=INT(FLOAT(NP2)*FF+1.)
  SOM1=0.
  SOM2=0.
  DO 340 LK=KH1,KH2
  SOM1=SOM1+XFILH1(LK)
340 SOM2=SOM2+XFILH2(LK)
  DISP=SQRT(SIN(PI*DANG1/180.)/SIN(PI*DANG2/180.))
  AMPLIT1(K+1)=SOM1/FLOAT(KH2-KH1+1)*SQRT(SIN(PI*DANG1/180.))
  AMPLIT2(K+1)=SOM2/FLOAT(KH2-KH1+1)*SQRT(SIN(PI*DANG2/180.))
  RAZ(K+1)=SOM1/SOM2*DISP
  TI(K+1)=1./FI
  TF=1./FF
  IF(K.EQ.0) GO TO 353
C
  DO 350 JJ=2,29
  DELTA=(PER(JJ)-TI(K+1))*(PER(JJ)-TI(K))
  IF(DELTA) 349,350,350
349 ALL=(PER(JJ)-TI(K))/(TI(K+1)-TI(K))
  AMP01=(AMPLIT1(K+1)-AMPLIT1(K))*ALL+AMPLIT1(K)
  AMP02=(AMPLIT2(K+1)-AMPLIT2(K))*ALL+AMPLIT2(K)
  RAZ0=(RAZ(K+1)-RAZ(K))*ALL+RAZ(K)
  WRITE(2,1070) PER(JJ), RAZ0,AMP01,AMP02
350 CONTINUE
C
353 K=K+1
  IF(TF.LT.TFINAL)GO TO 307
  F0=FI
500 CONTINUE
C
  CLOSE(2)
C
C
1040 FORMAT(I6,F8.3,3E19.11)
1050 FORMAT(2I5,2F8.3,E18.10)
1060 FORMAT(I5,F8.3)
2000 FORMAT(1H0,10X,'LEITURA DO SISMOG.INTERPOLADO :',A12)

```

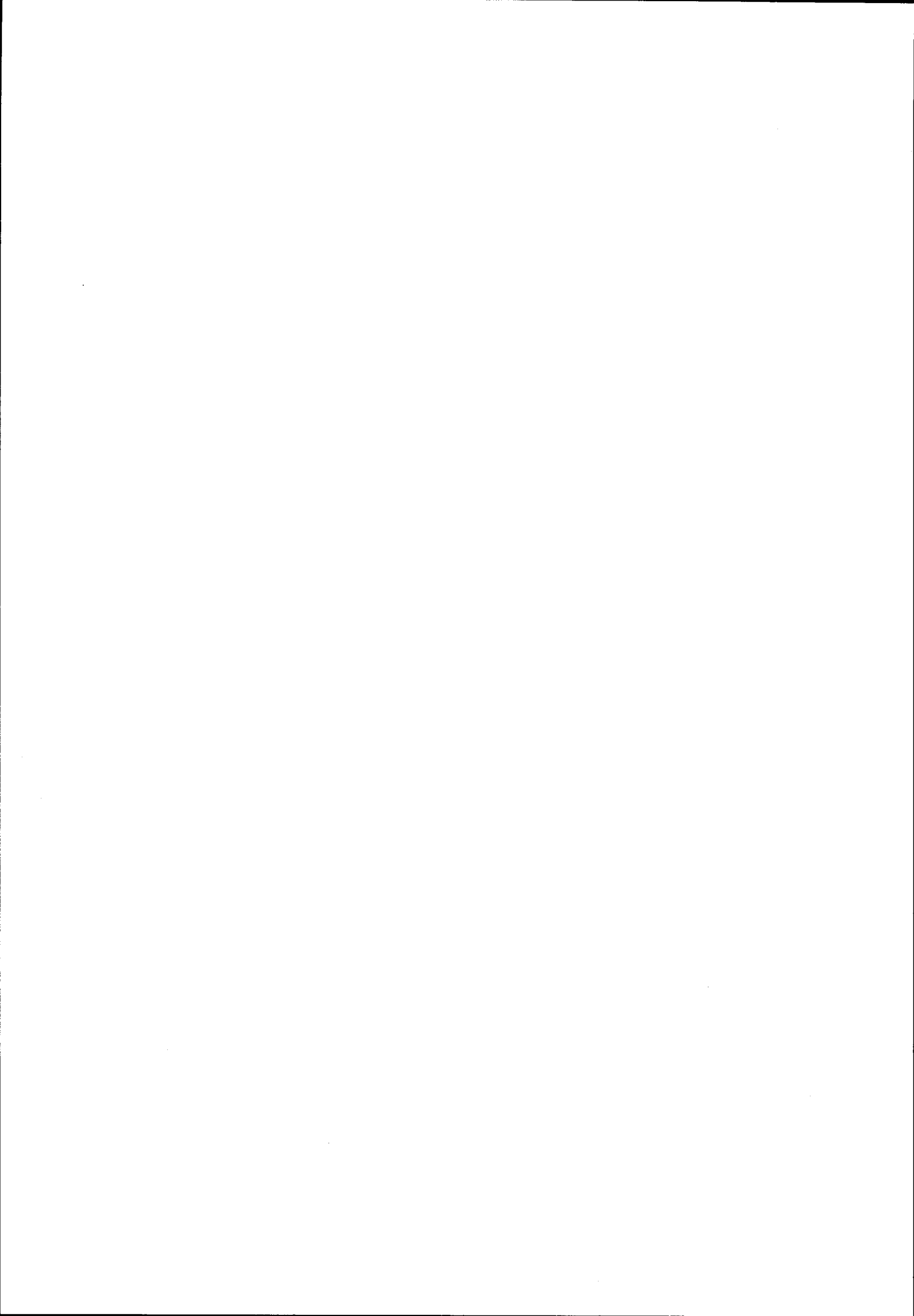
```
2005 FORMAT(1H0,10X,'GRAVACAO DO SISMOG.FILTRADOS :',A12)
2010 FORMAT(A20)
2020 FORMAT(1H0,10X,'COMPRIMENTO JANELA CORRELACAO (INTEIRO)...')
2030 FORMAT(1H0,10X,'FILTRO JANELA ... INICIO (INTEIRO)...',I4)
2040 FORMAT(1H0,10X,'FILTRO JANELA ... LARGURA (PAR).....')
2050 FORMAT(1H0,10X,'FILTRO JANELA ... FIM (INTEIRO) ...',I4)
2060 FORMAT(1H0,10X,'FRACCAO DA OITAVA ...')
2070 FORMAT(/,29X,'RAZAO ',7X,'<MEDIA DA RAZAO> ','<RAZAO DAS
    *MEDIAS>',/)
2100 FORMAT(1H0,10X,'FICHEIRO DE GRAVACAO AMPLITUDES :')
2110 FORMAT(A12,3I8,3F10.4)
2120 FORMAT(A12,5I8,F8.1)
2200 FORMAT('..... F I M .....')
2210 FORMAT('.... ERRO NA CORRELACAO ....')
    END
```

```
C
C           CONVOL
C
C   SUBROUTINE CONVOL(XESPEC1,XCONV,XESPEC2,NPINT,NIT2)
C
C   DIMENSION XESPEC1(4096),XESPEC2(4096),XCONV(4096)
C
C   DO 60 K=1,NPINT+NIT2-1
      NK=K
      SOM=0.
      IF(K.GT.NPINT)GO TO 45
      IF(K.GE.NIT2) NK=NIT2
      DO 40 J=1,NK
40    SOM=SOM+XESPEC1(K+1-J)*XESPEC2(J)
      GO TO 60
45    NK=K-NPINT+1
      DO 50 J=NK,NIT2
50    SOM=SOM+XESPEC1(K+1-J)*XESPEC2(J)
60    XCONV(K)=SOM
C
2040 FORMAT(1H0,1X,'INT.CORR. MAX. : ',I5,5X,'N.PONTOS INTERP.:',I4)
999 RETURN
      END
```

```

C
C           'FILTRO'
C
C   SUBROUTINE FILTRO(STATION, NP2, XESPEC
*           , DATA, LAT, LONG, DISTKM, DANG, AZIM)
C
C   DIMENSION IXL(200), XESPEC(4096), AMAGF(8192), XL(10)
C
C   COMPLEX CESPEC(4096)
C   INTEGER DATA, QUOC
C   CHARACTER *12 LEITURA, STATION
C
C   PI=3.14159265
C   NP22=NP2/2
C   DO 50 I=1, NP2
50  CESPEC(I)=CMPLX(XESPEC(I), 0.0)
C
C   SUBROUTINA 'FFT' (DIRECTA:+1) --  FREQ=(I-1)/NP2
C   (FAST FOURIER TRANSFORM)
C
C   CALL FFT1 (NP2, CESPEC, +1.)
C   RESOL=1./(NP2)
C
C           CORRECCAO INSTRUMENTAL (FICHEIRO 'AMPINTER')
C           AMAGF(K) <> T=8196/(4097-K)
C
C   LEITURA=STATION
C   OPEN(UNIT=1, STATUS='OLD', FILE=LEITURA, FORM='FORMATTED')
C   I=0
C   DO 200 IL=1, 410
C   READ (1, 1030) (IXL(K), K=1, 10)
C   DO 200 K=1, 10
C   I=I+1
200  AMAGF(I)=FLOAT(IXL(K))/1000.
C   CLOSE(1)
C   K2=8192/NP2
C   DO 220 I=2, NP22+1
C   K=4097-K2*(I-1)
220  CESPEC(I)=CESPEC(I)/AMAGF(K)
C
C   DO 280 I=2, NP22+1
C   H=REAL(CESPEC(I))
C   Q=AIMAG(CESPEC(I))
280  XESPEC(I)=SQRT(H**2+Q**2)
C
C   CALL FFT1 (NP2, CESPEC, -1.)
C
C   1030 FORMAT (10I7)
C   999 RETURN
C   END

```

BIBLIOGRAFIA

- Aki, K. e Richards, P. G., 1980, *Quantitative Seismology Theory and Methods*, San Francisco, W.H.Freeman and Company.
- Alsop, L.E., 1966, *Transmission and Reflection of Love Waves at a Vertical Discontinuity*, Journal of Geophysical Research, 71(16), 3969-3984.
- Alterman, Z. and Karal Jr., F. C., 1968, *Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods*, Bull. Seism. Soc. Am., 58(1), 367-398.
- Babuska, I. and Aziz, A. K., 1972, *Foundations of The Finite Element Method*, in A.K.Aziz (editor), *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, New York, Academic Press.
- Badal, J. and Seron, F.J., 1984, *Un análisis numérico sobre dispersion de ondas Love*, Rev. de Geofísica, 40, 181-190.
- Badal, J. and Seron, F.J., 1985, *Propagación de Modos de Love en Medios Homogeneos Lateralmente por Elementos Finitos*, Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 40, 37-49.
- Badal, J. and Seron, F.J., 1985, *Sobre el movimiento de estructuras terrestres complejas al paso de ondas Love*, Rev. de Geofísica, 41, 209-218.
- Banda, E., Suriñach, E., Aparicio, A., Sierra, J. and Ruiz

de la Parte, E., 1981, *Crust and upper mantle structure of the central Iberian Meseta (Spain)*, Geophys. J.R. astr. Soc., 67, 779-789.

Ben-Menahem, A. and Singh, S. J., 1981, *Seismic Waves and Sources*, New York, Springer-Verlag.

Berry, M.L. and Knopoff, L., 1967, *Structure of the upper mantle under the western Mediterranean basin*, Journal of Geophysical Research, 72, 3613-3632.

Blackman, R.B. and Tukey, J.W., 1959, *The Measurement of Power Spectra*, New York, Dover Publications.

Boore, D.M., 1970, *Love Waves in Nonuniform Wave Guides: Finite Difference Calculations*, Journal of Geophysical Research, 75(8), 1512-1527.

Boore, D.M., 1972, *Finite Difference Methods for Seismic Wave Propagation in Heterogeneous Materials*, in B.Bolt (editor), *Methods for Computational Physics (vol.11)*, New York, Academic Press.

Buland, R., 1988, *Variational Methods*, in D.Doornbos (editor), *Seismological Algorithms*, New York, Academic Press.

Buland, R. and Gilbert, F., 1984, *Computation of free oscillations of the Earth*, J. Comp. Phys., 54, 95-114.

Bravo, C. and Udias, A., 1974, *Rayleigh Wave Group Velocity Dispersion in North Atlantic Region*, Geophys. J.R. astr. Soc., 37, 297-304.

Canas, J.A., Miguel, F., Vidal, F. and Alguacil, G., 1988, *Anelastic Rayleigh wave attenuation in the Iberian Peninsula*, Geophysical Journal, 95, 391-396.

Carey, F. G. and Oden, J. T., 1983, *Finite Elements: A Second Course (vol.II)*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc.

Carey, F. G. and Oden, J. T., 1983, *Finite Elements: Computational Aspects (vol.III)*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc.

Ciarlet, P. G., 1978, *The finite element method for elliptic problems*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

Cooley, J.W. and Tukey, J.W., 1965, *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Math.Comput., 19, 297-301.

Drake, L. A., 1972a, *Love and Rayleigh Waves in Nonhorizontally Layered Media*, Bull. Seism. Soc. Am., 62(5), 1241-1258.

- Drake, L. A., 1972b, *Rayleigh Waves at a Continental Boundary by the Finite Element Method*, Bull. Seism. Soc. Am., 62(5), 1259-1268.
- Drake, L. A. and Bolt, B. A., 1980, *Love Waves Normally Incident at a Continental Boundary*, Bull. Seism. Soc. Am., 70(4), 1103-1123.
- Drake, L. A. and Mal K. A., 1972, *Love and Rayleigh Waves in the San Fernando Valley*, Bull. Seism. Soc. Am., 62(6), 1673-1690.
- Dziewonski, A.M., Anderson, D.L., 1981, *Preliminary Reference Earth Model, Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25, 297-356.
- Gilbert, F. and Backus, G.E., 1966, *Propagator matrices in elastic wave and vibration problems*, Geophysics, 31(2), 326-332.
- Haskell, N. A., 1953, *The dispersion of surface waves on multilayered media*, Bull. Seism. Soc. Am., 43(1), 17-34.
- Herrera, I., 1964, *A Perturbation Method for Elastic Wave Propagation (1)*, Journal of Geophysical Research, 69(18), 3845-3851.
- Herrera, I. and Mal, A. K., 1965, *A Perturbation Method for Elastic Wave Propagation (2)*, Journal of Geophysical Research, 70(4), 871-883.
- Hudson, J. A., 1980, *The excitation and propagation of elastic waves*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Hudson, J. A., and Knopoff, L., 1964, *Transmission and Reflection of Surface waves at a Corner*, 1 and 2, Journal of Geophysical Research, 69(2), 275-290.
- James, D. E. and Linde, T., 1971, *A source of major error in the digital analysis of World Wide Standard Station Seismographs*, Bull. Seism. Soc. Am., 61(3), 723-728.
- Johnson, C., 1987, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Kausel, E. and Roesset, J.M., 1981, *Stiffness Matrices for Layered Soils*, Bull. Seism. Soc. Am., 71(6), 1743-1761.
- Kennet, B. L. N., 1983, *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Kennett, B. L. N., 1974, *On Variational Principles and Matrix Methods in Elastodynamics*, Geophys. J.R. astr. Soc., 37, 391-405.
- Knopoff, L., 1964, *A matrix method for elastic wave problems*, Bull. Seism. Soc. Am., 54(1), 431-438.

Bibliografia

- Knopoff, L. and Hudson, J.A., 1964, *Transmission of Love Waves Past a Continental Margin*, Journal of Geophysical Research, 69(8), 1649-1653.
- Knopoff, L., Mueller, S., and Pilant, W.L., 1966, *Structure of the crust and upper mantle in the alps from the phase velocity of Rayleigh waves*, Bull. Seism. Soc. Am., 56, 1009-1037.
- Kovach, R. L., 1978, *Seismic Surface Waves and Crustal and Upper Mantle Structure*, Reviews of Geophysics and Space Physics, 16(1), 1-13.
- Kuhlemeyer, L. and Lysmer, J., 1973, *Finite Element Method Accuracy for Wave Propagation Problems*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, vol. 99, SM5.
- Love, A. E. H., 1944, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, New York, Dover Publications.
- Lysmer, J., 1970, *Lumped Mass Method for Rayleigh Waves*, Bull. Seism. Soc. Am., 60(1), 89-104.
- Lysmer, J. and Drake, L. A., 1971, *The Propagation Of Love Waves Across Nonhorizontally Layered Structures*, Bull. Seism. Soc. Am., 61(5), 1233-1251.
- Lysmer, J. and Drake, L. A., 1972, *A Finite Element Method for Seismology*, in B.Bolt (editor), *Methods for Computational Physics (vol.11)*, New York, Academic Press.
- Lysmer, J. and Kuhlemeyer, L., 1969, *Finite Dynamic Model for Infinite Media*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, vol. ,EM4.
- Lysmer, J. and Waas, G., 1972, *Shear Waves in Plane Infinite Structures*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, vol.98, EM1.
- Marillier, F., Mueller, St., 1982, *Structure of the upper mantle in the northeastern Atlantic close to the Azores-Gibraltar ridge from surface-wave and Body-wave observations*, Tectonophysics, 90, 195-213.
- McGarr, A., 1969, *Amplitude Variations of Rayleigh waves-propagation across a continental margin*, Bull. Seism. Soc. Am., 59(3), 1281-1305.
- McGarr, A. and Alsop, L.E., 1967, *Transmission and Reflection of Rayleigh Waves at Vertical Boundaries*, Journal of Geophysical Research, 72(8), 2169-2180.
- Melosh, H.J. and Raefsky, A., 1981, *A simple and Efficient Method*

Bibliografia

for Introducing Faults into Finite Element Method, Bull. Seism. Soc. Am., 71(5), 1391-1400.

Peters, G. and Wilkinson, J.H., 1970, $Ax=\lambda Bx$ and the Generalized Eigenproblem, SIAM J. Numer. Anal., 7(4), 479-492.

Pilant, W. L., 1979, *Elastic Waves in the Earth*, Amsterdam, Elsevier Scientific Publishing Company.

Oden, J. T. and Reddy, 1978, *An Introduction to the mathematical Theory of finite elements*, New York, John Wiley & Sons.

Oden, J. T. and Reddy, J. N., 1982, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, New York, Springer-Verlag.

Oliveira, E. A., 1971, *Theoretical foundations of the finite element method*, Lisboa, LNEC - Memória n.384.

Panza, G.F., Schwab, F.A and Knopoff, L., 1972 *Channel and Crustal Rayleigh Waves*, Geophys. J.R. astr. Soc., 30, 273-280.

Payo, G., 1970, *Structure of the Crust and Upper Mantle in the Iberian Shield by Means of a Long Period Triangular Array*, Geophys. J.R. astr. Soc., 20, 493-508.

Peters, G. and Wilkinson, J.H., 1970, $Ax=\lambda Bx$ and the Generalized Eigenproblem, SIAM J. Numer. Anal., 7(4), 479-492.

Perez, J.A., Payo, G. y Ruiz de la Parte, E., 1978, *Estructura de la corteza de la Península Ibérica y zonas adyacentes por medio de la dispersion de ondas superficiales producidas por terremotos próximos. Parte I: Trayectoria de San Vicente y Argella*, Rev. de Geofísica, 2, 132-144.

Pian, H. H. and Tong, I., 1969, *Basis of finite element methods for solid continua*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, 3-28.

Prenter, P. M., 1975, *Splines and variational Methods*, New York, John Wiley & Sons.

Schwab, F., 1970, *Surface-wave dispersion computations: Knopoff's method*, Bull. Seism. Soc. Am., 74(5), 1555-1578.

Schwab, F., 1984, *Surface-wave computations and the synthesis of theoretical seismograms at high frequencies*, Bull. Seism. Soc. Am., 74(5), 1555-1578.

Seron, F.J. and Badal, J., 1986, *A Weak Variational Formulation for the Propagation of Love Waves*, Int. J. Num. Meth. Eng., 23, 1601-1613.

Shipley, S.A., Leistner, H.G., Jones, R.E., 1977, *Elastic Wave propagation. A comparison between finite element prediction and exact solution*, Proc. Int. Symp. on Wave propagation and Dynamic properties of the Earth, 509-519, Albuquerque, University of New Mexico Press.

Smith, et al., 1976, *Matrix Eigensystems Routines -- EISPACK Guide*, New York, Springer-Verlag.

Smith, W.D., 1975, *The Application of Finite Element Analysis to Body Wave Propagation Problems*, Geophys.J.R. astr.Soc., 42, 747-768.

Smith, W.D. and Bolt, B.A., 1976, *Rayleigh's Principle in Finite Element Calculations of Seismic Wave Response*, Geophys.J.R. astr.Soc., 45, 647-655.

Strang, G. and Fix, G.J., 1973, *An analysis of the finite element method*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc..

Thomson, W. T., 1950, *Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium*, Jour. Appl. Phys., 21,89.

Tolstoy, I., 1973, *Wave Propagation*, New York, McGraw-Hill Book Company.

Tolstoy, I. and Usdin, E., 1953, *Dispersive Properties of Stratified Elastic and Liquid Media: A Ray Theory*, Geophysics, 18, 844-870.

Vlaar, N.J. and Nolet, G., 1978, *Seismic Surface Waves*, in J. Miklowitz and J.D. Achenbach (editores), *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*, New York, John Wiley & Sons.

Wiggins, R. A., 1976, *A fast, new computational algorithm for free oscillations and surface waves*, Geophys.J.R. astr.Soc., 47, 135-150.

Wilkinson, J.H., 1965, *The algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford, Clarendon Press.

Zienkiewicz, O. C., 1972, *The Finite Element Method*, London, McGraw-Hill Book Company.